МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
«ФІЗИКА»

ЧАСТИНА 1

для студентів денної форми навчання
напрямів 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика», 6.040303 «Системний аналіз», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія», 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050201 «Системна інженерія», 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 «Електронні пристрої та системи», 6.050803 «Акустотехніка», 6.050901 «Радіотехніка», 6.050902 «Радіоелектронні апарати», 6.050903 «Телекомунікації», 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», 6.051002 «Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.051004 «Оптотехніка», 6.051402 «Біомедична інженерія», 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», 6.170102 «Системи технічного захисту інформації», 6.170103 «Управління інформаційною безпекою»

Електронне видання

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою фізики.
Протокол № 6 від 30.12.2013 р.

ХАРКІВ 2014

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Фізика» (Частина 1) для студентів денної форми навчання напрямів 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика», 6.040303 «Системний аналіз», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія», 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050201 «Системна інженерія», 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 «Електронні пристрої та системи», 6.050803 «Акустотехніка», 6.050901 «Радіотехніка», 6.050902 «Радіоелектронні апарати», 6.050903 «Телекомунікації», 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», 6.051002 «Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.051004 «Оптотехніка», 6.051402 «Біомедична інженерія», 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», 6.170102 «Системи технічного захисту інформації», 6.170103 «Управління інформаційною безпекою» [Електронне видання] / Упоряд.: Стороженко В. О., Орел В. П., Коваленко О. М., Малик С. Б. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 148 с.

Упорядники: В. О. Стороженко,
Р. П. Орел,
О. М. Коваленко,
С. Б. Малик.

Рецензент: С. М. Мешков, канд. техн. наук, доц. каф. фізики.

ВСТУП

Під час вивчення дисципліни фізики вміння розв’язувати задачі – один з основних критеріїв оцінки глибини вивчення та засвоєння матеріалу, що свідчить про здатність студента аналізувати фізичні процеси і явища, вміти знаходити зв'язок між цими явищами, розуміти межі застосовності фізичних законів.

Дані методичні вказівки містять типові задачі з механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електростатики й електродинаміки.

До кожного заняття дані вказівки до організації самостійної роботи студентів, наведені стислі теоретичні відомості з розглянутої теми у вигляді основних законів і формул.

Відповідно до мети заняття запропонований набір теоретичних питань загального характеру. Їхня адаптація до конкретного напрямку бакалаврата наведена у відповідному пакеті контрольних завдань. Дані питання можуть бути використані для поточної перевірки знань лекційного матеріалу з теми у вигляді експрес-контрольних.

Пропонований у кожній темі набір задач містить у собі п'ять-шість задач, до яких додані пояснення у вигляді стислого аналізу та розв’язування, а також тридцять задач для самостійного розв’язання.

1 КІНЕМАТИКА

1.1 Мета заняття

Засвоїти основні методи розв'язування прямої та оберненої задач кінематики, використовуючи закони кінематики поступального та обертального руху.

1.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Перш ніж розв'язувати задачі з кінематики, потрібно засвоїти основні поняття та означення фізичних величин, які використовуються в цьому розділі. Зверніть особливу увагу на векторні та псевдовекторні величини (швидкість, прискорення, кутова швидкість, кутове прискорення), а також на формули зв'язку між векторними величинами [1, розд. 1; 2, розд. 1; 5, §1]. Повторіть означення вектора, модуля вектора, проекції вектора на вісь та дії над векторами.

Задачі кінематики поділяють на прямі та зворотні. У першому випадку знаходять швидкість, прискорення тіл та інші величини за відомими кінематичними рівняннями руху. Розв'язуючи зворотну задачу за відомими залежностями від часу швидкості чи прискорення та початковими умовами, знаходять кінематичні рівняння руху.

1.3 Основні закони та формули

1. Кінематичне рівняння руху матеріальної точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки.

2. Середня й миттєва швидкості матеріальної точки:

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення точки за проміжок часу Δt.

3. Модуль миттєвої швидкості:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad \upsilon = \frac{ds}{dt}, \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2},$$

де Δs – шлях, що пройшла точка за проміжок часу Δt.

4. Середня шляхова швидкість:

$$<\upsilon> = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

5. Середнє і миттєве прискорення матеріальної точки:

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

6. Модуль вектора миттєвого прискорення:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$$

7. Тангенціальна і нормальна складові прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \; a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

8. Повне прискорення при криволінійному русі:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

9. Шлях і швидкість для рівноприскореного/рівноуповільненого руху:

$$\Delta s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \; \upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

де υ_0 – початкова швидкість.

10. Довжина шляху, що пройшла матеріальна точка за проміжок часу від t_1 до t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,dt.$$

11. Кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

де $d\vec{\varphi}$ – елементарний кут повороту.

12. Кутова швидкість рівномірного обертального руху

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

де $\Delta\varphi$– кут повороту довільного радіуса від початкового положення; Δt – проміжок часу, за який відбувся даний поворот; T – період обертання; n – частота обертання.

13. Кутове прискорення:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

14. Кут повороту і кутова швидкість для рівноприскореного / рівноуповільненого обертального руху:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \; \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

15. Зв'язок між лінійними (довжина шляху ds, що пройшла точка по дузі окружності радіусом R, лінійна швидкість υ, тангенціальна складова прискорення a_τ, нормальна складова прискорення a_n) і кутовими ($d\varphi$ – кут повороту, ω – кутова швидкість, ε – кутове прискорення) величинами:

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$, $ds = |d\vec{r}| = R \cdot d\varphi$,

$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, $\upsilon = R\omega$,

$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]$, $a_\tau = \varepsilon R$,

$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]$, $a_n = \omega^2 R$.

1.4 Контрольні запитання

1. Що таке система відліку?
2. Що таке траєкторія, переміщення, довжина шляху?
3. Який вигляд має кінематичний закон руху для координатного способу визначення руху матеріальної точки?
4. Який вигляд має кінематичний закон руху для векторного способу визначення руху матеріальної точки?
5. Який вигляд має кінематичний закон руху для природного способу визначення руху матеріальної точки?
6. Який рух називається поступальним і обертальним?
7. Яку формулу можна використовувати для знаходження шляху, що пройшла точка при нерівномірному русі?
8. Що таке середня швидкість, миттєва швидкість?
9. Як знайти вектор швидкості для різних способів визначення руху?
10. Що таке середнє прискорення, миттєве прискорення?
11. Як знайти вектор прискорення для різних способів визначення руху?
12. Що характеризують тангенціальна і нормальна складові прискорення?
13. Що таке кутове переміщення, кутова швидкість і кутове прискорення?
14. Як пов’язані лінійна та кутова швидкості?
15. Як пов’язана нормальна складова лінійного прискорення з кутовими параметрами?
16. Як пов’язана тангенціальна складова лінійного прискорення з кутовими параметрами?

1.5 Приклади розв’язування задач

Задача 1. Рівняння руху точки по прямій має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3.

Знайти положення точки в моменти часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с; середню швидкість за час, що минув між цими моментами; миттєві швидкості у вказані моменти часу, середнє прискорення за вказаний проміжок часу, миттєві прискорення в ці моменти часу.

Дані: $x = A + Bt + Ct^3$, $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3, $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с.

Знайти: x_1, x_2, $<\upsilon>$, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, $<a>$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Аналіз і розв’язання

Запропонована задача є прикладом прямої задачі кінематики. Кінематичне рівняння руху подано в координатному вигляді $x = A + Bt + Ct^3$. Якщо ми маємо це рівняння, то можемо знайти різні фізичні величини, які характеризують рух матеріальної точки.

Положення точки, що рухається прямолінійно, у деякий момент часу визначається відстанню x точки від початку відліку. Щоб знайти цю відстань, необхідно у рівняння руху підставити замість часу t задане значення часу

$$x_1 = \left(4 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^3\right) \text{м} = 9{,}6 \text{ м};$$

$$x_2 = \left(4 + 2 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 5^3\right) \text{м} = 39 \text{ м}.$$

Середня шляхова швидкість за означенням дорівнює $< \upsilon > = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, де Δx – зміна відстані x за проміжок часу Δt.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \left(39 - 9{,}6\right) м = 29{,}4 \text{ м};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left(5 - 2\right) \text{с} = 3 \text{ с};$$

$$< \upsilon > = \frac{29{,}4}{3} \text{ м/с} = 9{,}8 \text{ м/с}.$$

Загальний вираз вектора миттєвої швидкості знайдемо, коли продиференціюємо за часом рівняння руху

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \left(B + 3Ct^2\right)\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення сталих *B* та *C*, а також значення часу, матимемо:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 2^2\right) \text{м/с} = 4{,}4\vec{i} \text{ м/с};$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2\right) \text{м/с} = 17\vec{i} \text{ м/с}.$$

Модуль середнього прискорення за означенням дорівнює

$$< a > = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t},$$

де $\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ – зміна швидкості υ за час Δt.

$$\Delta \upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \left|17 - 4{,}4\right| \text{м/с} = 12{,}6 \text{ м/с},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left|5 - 2\right| \text{с} = 3 \text{ с},$$

$$< a > = \frac{12{,}6}{3} \text{ м/с}^2 = 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Загальний вираз для вектора миттєвого прискорення матимемо, якщо продиференціюємо за часом вираз швидкості.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 6Ct\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення C та задані значення часу, матимемо

$\vec{a}_1 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 2\vec{i}$ м/с$^2 = 2{,}4\vec{i}$ м/с^2;

$\vec{a}_2 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 5\vec{i}$ м/с$^2 = 6\vec{i}$ м/с^2.

Відповідь: $x_1 = 9{,}6$ м, $x_2 = 39$ м, $<\upsilon> = 9{,}8$ м/с, $\vec{\upsilon}_1 = 4{,}4\vec{i}$ м/с, $\vec{\upsilon}_2 = 17\vec{i}$ м/с, $<a> = 4{,}2$ м/с^2, $\vec{a}_1 = 2{,}4\vec{i}$ м/с^2, $\vec{a}_2 = 6\vec{i}$ м/с^2.

Задача 2. Автомобіль рухається по заокругленню шосе, що має радіус кривини $R = 50$ м. Рівняння руху автомобіля – $S = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Знайти швидкість автомобіля, його тангенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Дані: $S(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2, $R = 50$ м, $t = 5$ с.

Знайти: $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$.

Аналіз і розв’язання

В даній задачі відома залежність шляху s від часу, тобто відомо кінематичне рівняння руху $s(t)$. Використовується природний спосіб визначення руху.

Насамперед знаходимо загальний вираз для швидкості автомобіля. Відомо, що

$$\vec{\upsilon} = \vec{\tau}\upsilon = \vec{\tau}\frac{ds}{dt},$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, спрямований по дотичній до траєкторії руху.

Взявши похідну за часом від заданого рівняння шляху s, матимемо

$$\upsilon = B + 2Ct.$$

Підставивши сюди значення сталих *B* і *C*, а також задане значення часу, знайдемо модуль швидкості

$$\upsilon = |10 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 5| \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

Вектор швидкості, спрямований по дотичній до траєкторії, в даний момент часу

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = 5\vec{\tau} \text{ м/с}.$$

Тепер знаходимо загальний вираз для тангенціального прискорення. З теорії відомо, що

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}.$$

Взявши похідну за часом від загального виразу швидкості і підставивши значення сталої C та часу, матимемо:

$$\vec{a}_\tau = 2C\vec{\tau} = -\vec{\tau} \text{ м/с}^2.$$

Отриманий вираз для тангенціального прискорення не містить часу, це означає, що тангенціальне прискорення стале за величиною; вектор $\vec{a}_\tau$ – протилежний напрямку вектора швидкості, модуль цього вектора дорівнює $a_\tau = 1$ м/с^2.

Модуль нормального прискорення знайдемо, підставивши в загальне рівняння його відомі значення швидкості та радіуси кривини траєкторії

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{5^2}{50}\ \text{м/с}^2 = 0{,}5\ \text{м/с}^2. \quad u^2 = 2gh$$

Повне прискорення буде геометричною сумою взаємно перпендикулярних тангенціального і нормального прискорень

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0{,}25}\ \text{м/с}^2 = 1{,}12\ \text{м/с}^2.$$

Напрямок вектора повного прискорення можна визначити, якщо знайти кут, утворений повним прискоренням з напрямком радіуса або з напрямком нормального прискорення

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{a}_n}) = \frac{a_n}{a} = \frac{0{,}5}{1{,}12} = 0{,}446,$$

$$(\widehat{\vec{a},\vec{a}_n}) = 63^o30'.$$

Відповідь: $\vec{\upsilon} = 5\vec{\tau}$ м/с, $\vec{a}_\tau = -\vec{\tau}$ м/с^2, $a_n = 0{,}5$ м/с^2,

$a = 1{,}12$ м/с^2, $(\widehat{\vec{a},\vec{a}_n}) = 63^o30'$.

Задача 3. Матеріальна частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ м/с^2. Визначити модуль швидкості частинки та її координати в момент часу $t = 2$ с, якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ її швидкість була $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с, а початкові координати точки дорівнювали $x_0 = 1$ м; $y_0 = 0$; $z_0 = 2$ м.

Дані: $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ м/с^2, $t = 2$ с, $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с,

$x_0 = 1$ м, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ м.

Знайти: $\upsilon,\ x,\ y,\ z$.

Аналіз і розв'язання

Запропонована задача – приклад оберненої задачі кінематики. З означення вектора прискорення $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ знаходимо $d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt$.

Інтегруючи цей вираз, одержимо

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)dt = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t\vec{k}.$$

Враховуючи початкові умови $\vec{\upsilon}_0 = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, знайдемо

$$\vec{\upsilon} = \left(3 + t^2\right)\vec{i} + \left(2t^2 + 1\right)\vec{j} + \left(3t - 1\right)\vec{k}.$$

Модуль вектора $\vec{\upsilon}$ дорівнює

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(3+t^2\right)^2 + \left(2t^2+1\right)^2 + \left(3t^2-1\right)^2} = 12{,}5 \text{ м/с}.$$

З означення проекцій вектора $\vec{\upsilon}$ на осі координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

знаходимо

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_x dt;$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \upsilon_y dt;$$

$$\int_{z_0}^{z} dz = \int_0^t \upsilon_z dt,$$

$$x - x_0 = \int_0^t \left(3+t^2\right) dt = 3t + \frac{t^3}{3};$$

$$y - y_0 = \int_0^t \left(2t^2+1\right) dt = \frac{2}{3}t^3 + t;$$

$$z - z_0 = \int_0^t \left(3t-1\right) dt = \frac{3}{2}t^2 - t.$$

Підставивши числові дані, одержимо $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Відповідь: $\upsilon = 12{,}5$ м/с, $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Задача 4. Маховик, що обертається з постійною частотою $n_0 = 10\,\text{с}^{-1}$, при гальмуванні почав обертатися рівносповільнено. Коли гальмування припинилося, обертання маховика знову стало рівномірним, але вже з частотою $n = 6\ \text{с}^{-1}$. Визначити кутове прискорення ε маховика і тривалість Δt гальмування, якщо за час рівно сповільненого руху маховик зробив $N = 50$ обертів.

Дані: $n_0 = 10\ \text{с}^{-1}$, $n = 6\ \text{с}^{-1}$, $N = 50$.

Знайти: ε, Δt.

Аналіз і розв'язання

Якщо обертання відбувається із сталим кутовим прискоренням, то кутове прискорення ε маховика пов'язане з початковою ω_0 та кінцевою ω кутовими швидкостями співвідношенням

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \cdot \Delta\varphi;$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi};$$

але тоді

$\Delta\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi n$;

то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi} = \frac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2 .$$

Від′ємне кутове прискорення одержали тому, що маховик обертався сповільнено.

Для визначення тривалості гальмування скористаємося формулою, яка зв’язує кут повороту φ з середньою кутовою швидкістю $<\omega>$ обертання і часом t :

$$\Delta\varphi = <\omega> \cdot \Delta t , \; \Delta\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot \Delta t = \pi\left(n_0 + n\right) \cdot \Delta t ,$$

звідки

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\pi\left(n_0 + n\right)} = \frac{2N}{n_0 + n} = 6{,}25 \text{ с} .$$

Відповідь: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2, $\Delta t = 6{,}25$ с.

1.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 80$ км/год, а другу – зі швидкістю $\upsilon_2 = 40$ км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

Відповідь: $<\upsilon> = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 53{,}3$ км/год.

Задача 2. Залежність шляху, який пройшло тіло, від часу визначається рівнянням $S = at^4 - bt^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла. Побудувати графік залежності швидкості від часу за перші п’ять секунд руху, якщо $a = 0{,}25$ м/с^4, $b = 9$ м/с^2.

Відповідь: $\upsilon_{min} = -29{,}3$ м/с.

Задача 3. Пароплав іде по річці від пункту A до пункту B зі швидкістю υ_1=10 км/год, а назад – зі швидкістю $\upsilon_2 = 16$ км/год. Знайти середню швидкість пароплава υ і швидкість течії ріки υ_p.

Відповідь: $\upsilon = 12{,}3$ км/год, $\upsilon_p = 3$ км/год.

Задача 4. Підкинутий вертикально вгору камінь перебував на одній і тій самій висоті в моменти часу t_1=2,1 с і t_2=3,7 с. Нехтуючи опором повітря, визначити швидкість υ_0, з якою був підкинутий камінь.

Відповідь: $\upsilon_0 = g\dfrac{t_1 - t_2}{2} = 28{,}4$ м/с.

Задача 5. Камінь, що підкинули з поверхні землі вертикально вгору, упав на землю через 3 с. Яка була початкова швидкість каменя? На яку висоту піднявся камінь? Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $\upsilon_0 = 14{,}7$ м/с, $h = 11$ м.

Задача 6. Тіло кинуте з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 28$ м/с під кутом $\alpha = 42°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначити для моменту часу $t = 1{,}2$ с після початку руху тангенціальну a_τ і нормальну a_n складові прискорення.

Відповідь: $a_\tau = g\sin\beta = 3{,}12$ м/с^2, $a_n = g\cos\beta = 9{,}30$ м/с^2,

де $\beta = arctg\dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}$.

Задача 7. Рух матеріальної точки задано рівнянням: $x = At + Bt^2$, де $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Визначити момент часу, в який швидкість точки $\upsilon = 0$. Знайти координату та прискорення в цей момент. Побудувати графіки залежностей координати, шляху, швидкості та прискорення від часу для цього руху.

Відповідь: $t = 40$ с, $x = 80$ м, $a = -0{,}1$ м/с^2.

Задача 8. Залежність шляху *s*, який пройшло тіло, від часу *t* визначається рівнянням $S = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3. Знайти: 1) залежність швидкості υ і прискорення a від часу t; 2) відстань, пройдену тілом, швидкість і прискорення через 2 с після початку руху. Побудувати графіки залежностей шляху, швидкості і прискорення від часу для $0 \le t \le 3$ с через 0,5 с.

Відповідь: 1) $\upsilon = \left(2 - 6t + 12t^2\right)$ м/с, $a = \left(-6 + 24t\right)$ м/с^2;

2) $s = 24$ м, $\upsilon = 38$ м/с, $a = 42$ м/с^2.

Задача 9. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t визначається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2$, де $A = 6$ м, $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2. Знайти середню швидкість і середнє прискорення тіла в проміжку часу від 1 с до 4 с. Побудувати графіки залежностей шляху, швидкості та прискорення від часу для $0 \le t \le 5$ с через 1 с.

Відповідь: $<\upsilon>= 7$ м/с, $<a>= 4$ м/с^2.

Задача 10. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t подано рівнянням $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0{,}14$ м/с^2, $D = 0{,}01$ м/с^3. Через який час від початку руху прискорення тіла дорівнюватиме 1 м/с^2? Чому дорівнює середнє прискорення тіла за цей проміжок часу?

Відповідь: $t = 12$ с, $<a>= 0{,}64$ м/с^2.

Задача 11. Швидкість каменя, що підкинули вертикально угору, через проміжок часу $t = 12$ с зменшилася в $n = 3{,}5$ рази. Визначити початкову швидкість υ_0 каменя і висоту *h* його підйому.

Відповідь: $\upsilon_0 = \dfrac{n}{n-1} gt = 30{,}2$ м/с, $h = \dfrac{n^2}{(n-1)^2} \dfrac{gt^2}{2} = 46{,}5$ м.

Задача 12. Радіус-вектор частинки визначається виразом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$. Обчислити: шлях s, який пройшла частинка за перші 10 с руху, модуль переміщення $|\Delta\vec{r}|$ за той самий час. Пояснити одержані результати.

Відповідь: $s = 500$ м, $|\Delta\vec{r}| = 500$ м.

Задача 13. Залежність радіус-вектора частинки від часу описується законом $\vec{r} = (3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k})$ м. Знайти: швидкість $\vec{\upsilon}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки, модуль швидкості υ в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $\vec{\upsilon} = (6t\vec{i} + 2\vec{j})$ м/с, $\vec{a} = 6\vec{i}$ м/с^2, $\upsilon = 6{,}3$ м/с.

Задача 14. Частинка рухається із швидкістю $\vec{\upsilon} = (1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k})$ м/с. Знайти: переміщення $\Delta\vec{r}$ частинки за перші 2 с її руху; модуль швидкості υ у момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k})$ м, $\upsilon = 13$ м/с.

Задача 15. Камінь кинутий у горизонтальному напрямку. Через 0,5 с після початку руху значення швидкості каменя стало в 1,5 рази більше його початкової швидкості. Нехтуючи опором повітря, знайти початкову швидкість каменя.
Відповідь: $\upsilon_0 = 4{,}4$ м/с.

Задача 16. Диск радіусом $R = 0{,}6$ м обертається навколо нерухомої осі так, що залежність його кутового прискорення від часу задається рівнянням $\varepsilon = At$, де A = 3 рад/с^3. Визначити кут $\Delta\varphi$ повороту диска за час $t = 2{,}2$ с після початку руху, лінійну швидкість точки υ на ободі диска та її нормальне прискорення a_n для цього самого моменту часу.

Відповідь: $\Delta\varphi = \dfrac{At^2}{6} = 5{,}32$ рад,

$\upsilon = \dfrac{At^2}{2} R = 4{,}36$ м/с, $a_n = \dfrac{A^2t^4}{4} R = 31{,}6$ м/с^2.

Задача 17. Диск радіусом $R = 0{,}6$ м, обертаючись рівноприскорено, за час $t = 2\,c$ набув кутової швидкості $\omega = 3{,}3$ рад/с. Визначити для цього моменту часу тангенціальну a_τ і нормальну a_n складові прискорення.

Відповідь: $a_\tau = \dfrac{\omega R}{t} = 0{,}99$ м/с^2, $a_n = \omega^2 R = 6{,}53$ м/с^2.

Задача 18. Три літака виконують розворот, рухаючись на відстані 60 м один від одного. Середній літак летить із швидкістю 360 км/год, рухаючись по дузі кола радіусом 600 м. Визначити прискорення кожного літака.

Відповідь: $a_1 = 18{,}3$м/с^2, $a_2 = 16{,}7$м/с^2, $a_3 = 15{,}0$ м/с^2.

Задача 19. Тіло проходить однакові ділянки шляху з постійними у межах ділянки швидкостями $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$. Визначити середню швидкість тіла на всьому шляху.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\upsilon_i}}$.

Задача 20. Точка рухається по колу радіусом $R = 2$ см. Залежність шляху від часу задано рівнянням $x = Ct^3$, де $C = 0{,}1$ см/с^2. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення в момент, коли лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 0{,}3$ м/с.

Відповідь: $a_n = 4{,}5$ м/с^2, $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2.

Задача 21. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Через $t = 0{,}5$ с від початку руху повне прискорення колеса дорівнює $a = 13{,}6$ м/с^2. Знайти радіус колеса.

Відповідь: $R = 6{,}1$ м.

Задача 22. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3. Знайти радіус колеса, якщо відомо, що на кінець другої секунди руху нормальне прискорення точок, які лежать на ободі колеса, дорівнювало $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

Відповідь: $R = 1{,}2$ м.

Задача 23. Знайти, у скільки разів тангенціальне прискорення точки, що лежить на ободі колеса, яке обертається, більше її нормального прискорення для того моменту, коли вектор повного прискорення цієї точки утворює кут $30°$ з вектором її лінійної швидкості.

Відповідь: $1{,}7$.

Задача 24. Вентилятор обертається з частотою 90 обертів за хвилину. Після вимкнення вентилятор, обертаючись рівносповільнено, зробив до зупинки 75 обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимкнення вентилятора до його повної зупинки?

Відповідь: $t = 10$ с.

Задача 25. Колесо, обертаючись рівносповільнено, під час гальмування за одну хвилину зменшило свою швидкість з 300 об/хв до 180 об/хв. Знайти кутове прискорення колеса і кількість обертів, зроблених ним за цей час.

Відповідь: $\varepsilon = -0{,}21$ рад/с^2, $N = 240$ об.

Задача 26. Спостерігач, який стоїть на платформі, побачив, що перший вагон електропоїзда, який наближається до станції, пройшов повз нього за 4 с, а другий – за 5 с. Після цього передній край поїзда зупинився на відстані 75 м від спостерігача. Вважати рух поїзда рівносповільненим, визначити його прискорення.

Відповідь: $a = -0,25 \text{м/с}^2$.

Задача 27. Два тіла кинуті вертикально вгору з однієї й тієї самої точки з однаковою початковою швидкістю υ_0 з інтервалом часу $\Delta t = 1,8$ с. Нехтуючи опором повітря, визначити початкову швидкість, якщо обидва тіла через проміжок часу $t = 5,5$ с після кидка першого тіла виявилися на одній висоті *h*. Визначити також цю висоту.

Відповідь: $\upsilon_0 = \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) g = 45,1$ м/с, $h = \frac{gt\left(t - \Delta t\right)}{2} = 99,8$ м.

Задача 28. Тіло кинуто з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 15$ м/с під кутом $\alpha = 45°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначити відстань *l* від місця кидка до точки, у якій тіло виявиться через першу половину часу свого руху.

Відповідь: $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin\alpha}{2g}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = 20,2$ м.

Задача 29. Диск обертається навколо нерухомої осі так, що залежність лінійної швидкості точок, що лежать на ободі колеса, від часу задається рівнянням $\upsilon = A + Bt$, де $A = 0,6$ м/с; $B = 0,9$ м/с^2. Визначити радіус *R* колеса, якщо кут α між векторами повного прискорення й лінійної швидкості через проміжок часу $t = 3$ с від початку руху дорівнює 80°.

Відповідь: $R = \frac{\left(A + Bt\right)^2}{Btg\alpha} = 2,13$ м.

Задача 30. Колесо радіусом $R = 42$ см обертається так, що залежність кута повороту колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $B = -1,6$ рад/с; $C = 0,8$ рад/с^2. Визначити: момент часу t_1, коли повне прискорення $\vec{a}$ буде спрямовано під кутом $\alpha = 75°$ до швидкості $\vec{\upsilon}$; момент часу t_2, при якому нормальна складова $\vec{a}_n$ прискорення точки на ободі збігається за величиною з тангенціальною складовою $\vec{a}_\tau$.

Відповідь: $t_1 = \frac{\sqrt{2Ctg\alpha} - B}{2C} = 2,52$ с, $t_2 = \frac{\sqrt{2C} - B}{2C} = 1,79$ с.

2 ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

2.1 Мета заняття

Засвоїти методи класичної механіки і навчитися розв’язувати задачі динаміки матеріальної точки, динаміки поступального руху.

2.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для досягнення мети заняття необхідно вивчити теорію даного розділу механіки, викладену в підручниках [1, розд. 2; 2, розд. 2; 5, §2] та у конспекті.

Основу динаміки матеріальної точки складають три закони Ньютона, які справедливі тільки під час виконання таких умов: рух тіла розглядається відносно інерціальної системи відліку, тіло має бути матеріальною точкою сталої маси, швидкість тіла має бути значно меншою за швидкість світла в вакуумі.

Під час розв’язання задач за темою використовується другий закон Ньютона, який має вигляд:

$\vec{F} = m\vec{a}$, де $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ – рівнодійна усіх сил, прикладених до даного тіла.

В неінерціальній системі відліку, яка рухається поступально з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно інерціальної системи, другий закон Ньютона має вигляд

$$\vec{F} + \vec{F}_{ін} = m\vec{a},$$

де $\vec{F}_{ін} = m\vec{a}_0$ – сила інерції, $\vec{a}_0$ – прискорення тіла в неінерціальній системі відліку.

Для розв’язання задач з використанням другого закону Ньютона запропоновано метод, який включає послідовність дій:

1. Знайти, чи використовується цей закон у даній задачі, і накреслити рисунок-схему взаємодіючих тіл.

2. Знайти і позначити на схемі всі сили, що діють на тіла системи. Для кожного тіла:

– записати головне рівняння динаміки у векторній формі;

– вибрати відповідну інерціальну систему відліку;

– спроектувати сили на осі координат і записати другий закон Ньютона у вигляді системи скалярних рівнянь: $\sum F_x = ma_x$; $\sum F_y = ma_y$; $\sum F_z = ma_z$, де a_x, a_y, a_z – проекції вектора прискорення на відповідні осі.

3. Розв’язати систему одержаних рівнянь відносно невідомих величин.

Визначення прискорення тіл у задачах даного типу називають головною задачею динаміки поступального руху.

2.3 Основні закони та формули

1. Імпульс матеріальної точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

де m – маса матеріальної точки; $\vec{\upsilon}$ – її швидкість.

2. Другий закон Ньютона (основний закон динаміки матеріальної точки):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

3. Це саме рівняння в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії точки:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}, \; F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

4. Прискорення, що здобувається матеріальною точкою під дією сил,

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m},$$

де m – маса матеріальної точки; $\vec{F}_i$ – сила, що діє на тіло (точку) з боку i-го тіла.

5. Третій закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, що діє на першу матеріальну точку з боку другої; $\vec{F}_{21}$ – сила, що діє на другу матеріальну точку з боку першої.

6. Сила тертя ковзання

$$F_{тер} = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила нормальної реакції опори.

7. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const,$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i-ої матеріальної точки (тіла); $\vec{\upsilon}_i$ – швидкість i-ої точки (тіла).

8. Радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m},$$

де m_i і $\vec{r}_i$ – відповідно маса й радіус-вектор i-ої матеріальної точки; n – число матеріальних точок у системі; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – маса системи.

9. Координати центра мас системи матеріальних точок:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \; y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \; z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

де m_i – маса i-ої матеріальної точки; x_i, y_i, z_i – координати i-ої точки.

10. Закон руху центра мас

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i,$$

де $\vec{\upsilon}_C$ – швидкість руху центра мас.

2.4 Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть поняття інертності.
2. Дайте визначення маси.
3. Дайте визначення сили.
4. Що таке інерціальна система відліку?
5. Запишіть перший закон Ньютона.
6. Запишіть другий закон Ньютона.
7. Запишіть третій закон Ньютона.
8. Що таке механічний імпульс тіла?
9. Запишіть закон збереження імпульсу.
10. Що таке центр мас механічної системи?
11. Що таке гравітаційна сила та сила тяжіння?
12. Дайте визначення ваги тіла.
13. Дайте визначення сили тертя.
14. Запишіть закон Гука.

2.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. На похилій площині розташований вантаж масою $m_1 = 1$ кг, зв'язаний ниткою, перекинутою через блок, з іншим вантажем масою $m_2 = 3$ кг (рис. 2.1). Коефіцієнт тертя між першим вантажем та площиною $\mu = 0{,}2$, кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30^\circ$. Знайти прискорення вантажів і силу натягу нитки. Тертям у блоці знехтувати.

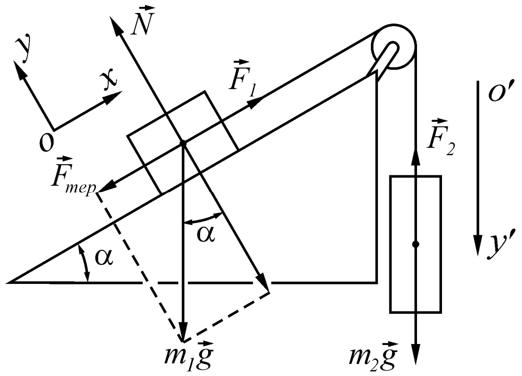


Рисунок 2.1

Дані: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 3$ кг, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0{,}1$.

Знайти: a, F.

Аналіз і розв'язання

У задачі розглядаються два тіла, зв'язані ниткою, які рухаються поступально та рівноприскорено. Таким чином, необхідно розв'язати головну задачу динаміки; для цього використовується другий закон Ньютона. Зважаючи на те, що нитка нерозтяжна (невагома і блок невагомий), прискорення цих тіл та сили натягу ниток рівні за модулем:

$$\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \left|\overrightarrow{a_2}\right| = a, \ \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = F .$$

На вантаж маси m_1 діє сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила нормальної реакції опори $\vec{N}$, сила натягу нитки $\vec{F}$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$. Уявимо собі, що вантаж m_1 рухається вверх по похилій площині. Якщо це припущення невірне, тоді прискорення матиме від'ємне значення, тобто рух вантажів відбувається у зворотному напрямку.

Для першого тіла другий закон Ньютона у векторній формі має вигляд:

$$m_1\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m_1\vec{a} .$$

На вантаж m_2 діє тільки сила тяжіння $m_2\vec{g}$ та сила натягу нитки:

$$m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a} .$$

Для кожного тіла виберемо свою інерціальну систему відліку. Для першого вантажу пов'яжемо її з похилою площиною, коли вісь *Ox* спрямована вверх по схилу, а вісь *Oy* перпендикулярно *Ox* вверх. Тоді другий закон Ньютона для першого тіла у проекціях на осі *Ox* та *Oy* відповідно має вигляд:

$$-m_1 g \sin\alpha - F_{тер} + F = m_1 a , \tag{2.1}$$

$$-m_1 g \cos\alpha + N = 0 . \tag{2.2}$$

Для другого тіла інерціальну систему відліку пов'язуємо з рухом цього тіла вниз, тобто вісь $O'y'$ спрямована вниз.

Тоді з рівняння (2.2) одержимо проекцію на вісь $O'y'$:

$$-F + m_2 g = m_2 a . \tag{2.3}$$

Сила тертя дорівнює

$$F_{тер} = \mu N . \tag{2.4}$$

Якщо враховувати рівняння (2.2) та (2.4), то рівняння (2.1) та (2.3) перетворяться на систему:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + F = m_1 a \\ F - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо прискорення та силу натягу нитки

$$a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}60 \text{ м/с}^2 ,$$

$$F = \frac{m_1 m_2 g(1 + sin\alpha + \mu cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 12{,}3 \text{ Н}.$$

Відповідь: $a = 7{,}60$ м/с^2, $F = 12{,}3$ Н.

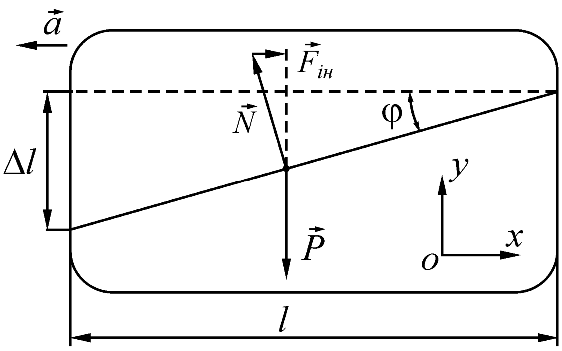


Рисунок 2.2

Задача 2. Бак в тендері паровоза має довжину $l = 4$ м (рис. 2.2). Яка різниця Δl рівнів води біля переднього і заднього кінців бака при русі поїзда з прискоренням $a = 0{,}5$ м/с^2.

Дані: $l = 4$ м, $a = 0{,}5$ м/с^2.
Знайти: Δl.

Аналіз і розв'язання

У даному випадку зручно вибрати неінерціальну систему відліку (НСВ), яка рухається рівноприскорено разом з паровозом. У відповідності з принципом Даламбера для виконання законів Ньютона в НСВ до води слід додатково прикласти силу інерції $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}$. В даному випадку на воду діяла з боку бака сила реакції $\vec{N}$, перпендикулярна поверхні води. Оскільки в НСВ вода і бак нерухомі, то в ній стан води може бути описаний законами статики: рівнодійна всіх сил дорівнює нулю

$$\vec{P} + \vec{F}_{ін} + \vec{N} = 0.$$

Вибираємо осі: Ox – горизонтальну і Oy – вертикальну. Записуємо рівняння в проекціях на вісь Ox:

$$ma - N sin\varphi = 0,$$

на вісь Oy:

$$N cos\varphi - mg = 0.$$

З отриманих рівнянь маємо:

$$tg\varphi = \frac{a}{g} = \frac{\Delta l}{l};\ \Delta l = l\frac{a}{g};\ \Delta l = 0{,}204 \text{ м}.$$

Відповідь: $\Delta l = 0{,}204$ м.

Задача 3. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху S від часу t задається рівнянням $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C = 5$ м/с^2 і $D = 1$ м/с^3. Знайти силу, діючу в кінці першої секунди руху.

Дані: $m = 0{,}5$ кг, $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, $C = 5$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3.
Знайти: F.

Аналіз і розв’язання

Згідно з другим законом Ньютона,

$$F = ma.$$

Відомо, що

$$a = d\upsilon / dt.$$

У нашому випадку

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2.$$

Таким чином,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 3C - 6Dt.$$

Тоді

$$F = ma = m(2C - 6Dt) = 2\ \text{Н}.$$

Відповідь: $F = 2$ Н.

Задача 4. Парашутист масою $m = 100$ кг виконує затяжний стрибок з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 0$ (рис. 2.3). Знайти закон зміни його швидкості від часу до розкриття парашута та закон руху парашутиста. Взяти до уваги, що сила опору повітря пропорційна швидкості руху парашутиста: $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$, де $k = 20$ кг/с.

Дані: $m = 100$ кг, $\upsilon_0 = 0$, $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$, $k = 20$ кг/с.

Знайти: $\upsilon(t)$, $y(t)$.

Аналіз та розв’язання

У даній задачі слід знайти один з кінематичних параметрів руху тіла – його швидкість як функцію часу. Це основна задача динаміки, яка означає, що можна застосувати другий закон Ньютона. Початок координат інерціальної системи відліку розташовано у точці O (рис. 2.3), з якої починається рух парашутиста. Вісь Oy спрямовано вертикально вниз.

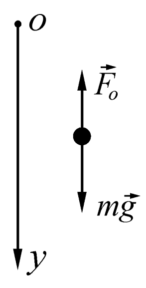


Рисунок 2.3

На парашутиста діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$. Тоді другий закон у цьому випадку має вигляд

$$m\vec{g} + \vec{F}_0 = m\vec{a}.$$

Його можливо подати у вигляді диференціального рівняння для невідомої функції $\upsilon(t)$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon.$$

Розділивши змінні, знайдемо:

$$-\frac{d\upsilon}{\frac{mg}{k}-\upsilon}=-\frac{k}{m}dt\,,$$

$$\frac{d\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)}{\frac{mg}{k}-\upsilon}=-\frac{k}{m}dt\,.$$

Після інтегрування одержуємо:

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+C\,. \qquad (2.5)$$

Довільну сталу C визначаємо з початкових умов ($\upsilon=\upsilon_0=0$ при $t=0$):

$$C=\ln\frac{mg}{k}\,.$$

Підставляючи значення сталої C в рівняння (2.5), знаходимо закон зміни швидкості парашутиста

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+\ln\frac{mg}{k}\,,$$

$$\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

З цього рівняння виходить, що при $t\to\infty$ швидкість прагне до свого максимального значення $\upsilon=\frac{mg}{k}$, яке дорівнює 50 м/с.

Якщо закон зміни швидкості відомий, то розв'язуючи зворотну задачу кінематики, можна знайти закон руху парашутиста:

$$dy=\upsilon(t)\,dt\,;$$

$$y(t)=\int_0^t\upsilon(t)dt\,;$$

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Відповідь: $\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$,

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

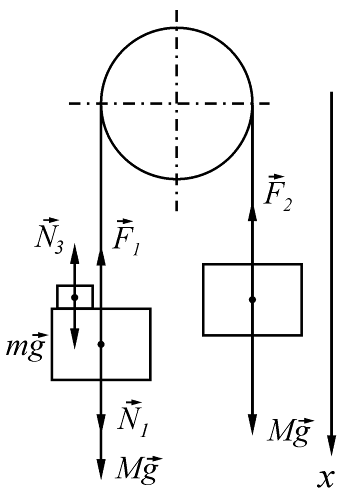


Рисунок 2.4

Задача 5. Через невагомий блок перекинута невагома нерозтяжна нитка з вантажами однакової маси $M=1{,}4$ кг (рис. 2.4). На один з вантажів покладений додатковий тягарець масою $m = 0{,}2$ кг. Вважаючи, що вантажі спочатку перебували на одному рівні та нехтуючи тертям, визначити різницю висот Δh, на яких перебуватимуть вантажі через проміжок часу $t = 1$ с.

Дані: $M = 1{,}4$ кг, $m = 0{,}2$ кг, $t = 1$ с.

Знайти: Δh.

Аналіз і розв'язання

На кожен з вантажів діють: сила тяжіння $M\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}$ (внаслідок невагомості нитки сили натягу однакові), на другий вантаж діє також сила тиску з боку перевантаження $\vec{N}_1$. На додатковий тягарець діє сила тяжіння mg і сила тиску $\vec{N}_3$ з боку вантажу ($\left|\vec{N}_3\right| = \left|\vec{N}_1\right|$ згідно з третім законом Ньютона). Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення обох тіл (і додаткового тягарця) однакові.

Другий закон Ньютона для кожного з тіл у векторній формі:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1;$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_2;$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_3.$$

Ці рівняння в проекції на обрану вісь (рис. 2.4) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - F \\ -Ma = Mg - F \\ ma = mg - N \end{cases},$$

(урахували, що $F_1 = F_2 = F$ та $N_1 = N_3 = N$), звідки знайдемо прискорення

$$a = \frac{m}{2M + m} g. \qquad (2.6)$$

За час t кожний з вантажів пройде відстань $h = \frac{at^2}{2}$, тому, з огляду на вираз (2.6), шукана різниця висот

$$\Delta h = 2h = \frac{m}{2M + m} gt^2 = 65{,}4 \text{ см}.$$

Відповідь: $\Delta h = 65{,}4$ см.

2.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Під дією сталої сили $F = 5$ Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t описується рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$. Визначити масу m тіла, якщо $C = 2$ м/с^2.

Відповідь: $m = 2{,}5$ кг.

Задача 2. По опуклому мосту радіусом $R = 72$ м рухається автомобіль. Визначте швидкість υ автомобіля, якщо у верхній точці траєкторії сила його тиску на міст у $n = 1{,}6$ разу менше, ніж під час руху по горизонтальній ділянці шляху.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{gR(n-1)} = 20{,}6$ м/с.

Задача 3. Через блок, укріплений на вершині двох похилих площин, що становлять із обрієм кути $\alpha = 28°$ та $\beta = 40°$, перекинута нитка, до якої прикріплені вантажі з однаковими масами (рис. 2.5). Вважаючи нитку і блок невагомими та нехтуючи тертям, визначте прискорення a вантажів.

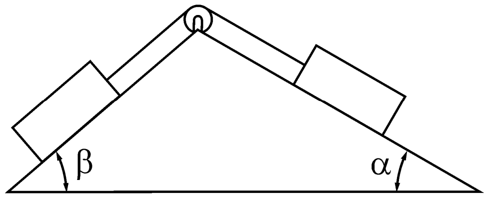


Рисунок 2.5

Відповідь: $a = g\left(\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{2}\right) = 0{,}849$ м/с^2.

Задача 4. Якої маси баласт необхідно скинути з аеростата, який рівномірно спускається, щоб він почав рівномірно підійматися з тією самою швидкістю? Маса аеростата з баластом 1600 кг, підйомна сила аеростата $F = 12000$ Н. Вважати силу опору повітря однією і тією самою при підйому і спуску.

Відповідь: $m = 800$ кг.

Задача 5. На гладкому столі лежить брусок масою $m = 4$ кг. До бруска прив’язані два шнури, прикріплені до протилежних країв стола. До кінців шнурів підвішені гирі, маси яких $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення a, з яким рухається брусок, і силу натягу T кожного з шнурів. Масою блоків і тертям знехтувати.

Відповідь: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m} = 1{,}40$ м/с^2, $T_1 = m_1(g + a) = 11{,}2$ Н,
$T_2 = m_2(g - a) = 16{,}8$ Н.

Задача 6. Похила площа, яка утворює кут $\alpha = 25°$ з площиною горизонту, має довжину $l = 2$ *м*. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зслизнуло з цієї площини за час $t = 2$ *с*. Визначити коефіцієнт тертя μ тіла з площиною.

Відповідь: $\mu = tg\alpha - \dfrac{2l}{gt^2\cos\alpha} = 0{,}35$.

Задача 7. Матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухається під дією деякої сили F згідно з рівнянням $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Знайти значення цієї сили в момент часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с. В який момент часу сила дорівнює нулю?

Відповідь: $F_1 = -0{,}8$ Н, $F_2 = -8$ Н, $F = 0$ при $t = 1{,}67$ с.

Задача 8. Поїзд маси $m = 500$ т після припинення тяги паровоза зупиняється під дією сили тертя $F_{тер} = 0{,}1$ МН через час $t = 1$ хв. З якою швидкістю υ їхав поїзд до моменту припинення тяги паровоза?

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{t \cdot F_{тер}}{m} \approx 43$ км/год.

Задача 9. Сталевий дріт витримує силу натягу 4400 Н. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж масою 400 кг, підвішений на цьому дроті, щоб він при цьому не розірвався? Масою дроту знехтувати.

Відповідь: $a = 1{,}2$ м/с^2.

Задача 10. Маса ліфта з пасажирами дорівнює 800 кг. Знайти, з яким прискоренням і в якому напрямі рухається ліфт, якщо відомо, що натяг тросу, який підтримує ліфт, дорівнює: 1) 12 кН; 2) 6 кН.

Відповідь: 1) $a_1 = 5{,}2$ м/с^2, догори; 2) $a_2 = 2{,}3$ м/с^2, донизу.

Задача 11. Під дією постійної сили $F = 10$ Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу дається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$. Знайти масу тіла, якщо стала $C = 1$ м/с^2.

Відповідь: $m = 5$ кг.

Задача 12. Тіло масою m рівноприскорено піднімають на тросі вгору протягом $t = 3$ с на висоту $h = 10$ м. Визначте коефіцієнт пружності k троса, якщо його подовження $\Delta x = 0{,}3$ м.

Відповідь $k = \dfrac{m}{\Delta x}\left(g + \dfrac{2h}{t^2}\right) = 4$ кН/м.

Задача 13. Кулька масою m = 250 г, що летить зі швидкістю $\upsilon = 3{,}4$ м/с під кутом $\alpha = 25°$ до обрію, пружно вдаряється об гладку стіну. Визначте імпульс p, отриманий стіною внаслідок удару.

Відповідь: $p = 1{,}54$ Н$\cdot$с.

Задача 14. Тіло масою $m = 1{,}2$ кг кинуто з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 12$ м/с під кутом $\alpha = 36°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначте зміну імпульсу Δp тіла за час його руху.

Відповідь: $\Delta p = -16{,}9$ Н$\cdot$с.

Задача 15. Тіло перебуває в рівновазі на похилій площині довжиною $l = 16$ м з кутом $\alpha = 28°$ до обрію. Визначте час, за який тіло зісковзне із площини, якщо кут нахилу збільшити до $\beta = 40°$.

Відповідь: $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g(\sin\beta - \cos\beta\, tg\alpha)}} = 3{,}26$ с.

Задача 16. Тіло масою $m = 5$ кг кинуто під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с^2. Нехтуючи опором повітря, знайти імпульс сили $\vec{F}$, діючої на тіло за час його польоту; зміну Δp імпульсу за час польоту.

Відповідь: $F\Delta t = 100$ Н$\cdot$с; $\Delta p = 100$ Н$\cdot$с.

Задача 17. З якою силою F потрібно діяти на тіло маси $m = 5$ кг, щоб воно падало вертикально внизу із прискоренням $a = 15$ м/с^2?

Відповідь: $F = m(a - g) \approx 26$ Н.

Задача 18. Брусок масою $m_2 = 5$ кг може вільно ковзати по горизонтальній поверхні без тертя. На ньому знаходиться другий брусок масою $m_1 = 1$ кг. Коефіцієнт тертя зітнутих поверхонь брусків $\mu = 0{,}3$. Визначити мінімальне значення сили $F_{\min}$, прикладеної до нижнього бруска, при якій почнеться зсовування верхнього бруска.

Відповідь: $F_{\min} = \mu(m_1 + m_2)g = 17{,}7$ Н.

Задача 19. Паровоз на горизонтальній ділянці шляху, що має довжину $s = 600$ м, розвиває силу тяги $F = 147$ кН. Швидкість поїзда маси $m = 1000$ т зростає при цьому від $\upsilon_0 = 36$ км/год до $\upsilon = 54$ км/год. Знайти силу опору F_{on} руху поїзда, вважаючи її постійною.

Відповідь: $F_{on} = F - ma = F - m(\upsilon^2 - \upsilon_0^2)/2s \approx 4{,}3$ кН.

Задача 20. Дріт витримує вантаж маси $m_{\max} = 450$ кг. З яким максимальним прискоренням можна піднімати вантаж маси $m = 400$ кг, підвішений на цьому дроті, щоб він не обірвався?

Відповідь: $a \le g\left(\dfrac{m_{\max}}{m} - 1\right) \approx 1{,}2$ м/с^2.

Задача 21. Дві гирі масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою і перекинуті через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі та натяг нитки. Тертям у блоці знехтувати.

Відповідь: $a = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 3{,}27$ м/с^2; $T_1 = T_2 = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 13{,}0$ Н.

Задача 22. Літак летить у горизонтальному напрямі з прискоренням $a = 20$ м/с^2. Яке перевантаження пасажира літака (перевантаженням називається відношення сили F, діючої на пасажира, до сили тяжіння P)?

Відповідь: $F / P = 2{,}27$.

Задача 23. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Яке прискорення a в горизонтальному напрямку слід надати дошці, щоб вантаж зісковзнув з неї? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою $\mu = 0{,}2$.

Відповідь: $a > \mu g = 1{,}96$ м/с^2.

Задача 24. Початкова швидкість υ_0 кулі дорівнює 800 м/с. Під час руху в повітрі за час $t = 0{,}8$ с її швидкість зменшилася до $\upsilon = 200$ м/с. Маса кулі дорівнює 10 г. Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості, визначити коефіцієнт опору k. Дією сили тяжіння знехтувати.

Відповідь: $k = \dfrac{m}{t} \cdot \dfrac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0 \upsilon} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ кг/м.

Задача 25. Знайти прискорення a тіла, що зісковзує з похилої площини, що утворює із обрієм кут $\alpha = 30°$. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0{,}3$.

Відповідь: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 2{,}45$ м/с^2.

Задача 26. На тіло маси m, яке лежало на гладенькій горизонтальній площині, в момент $t = 0$ почала діяти сила, яка залежить від часу $F = kt$, де k – стала. Напрямок цієї сили весь час складає кут α з горизонтом. Знайти швидкість тіла в момент відриву від площини; шлях, пройдений тілом до цього моменту.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $S = \dfrac{m^2g^3\,cos\,\alpha}{6k^2\,sin^3\,\alpha}$.

Задача 27. Куля, пробивши дошку довжиною h, змінила свою швидкість від υ_0 до υ. Знайти час руху кулі у дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості.

Відповідь: $t = \dfrac{h(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon_0\upsilon\ln(\upsilon_0 / \upsilon)}$.

Задача 28. Куля на нитці підвішена до стелі вагона. Вагон гальмується, і його швидкість за час $t = 3$ с рівномірно зменшується від $\upsilon_1 = 18$ км/год до $\upsilon_2 = 6$ км/год. На який кут α відхилиться при цьому нитка з кулею?

Відповідь: $\alpha = 6°30'$.

Задача 29. На горизонтальній поверхні знаходиться брусок масою $m_1 = 2$ кг. Коефіцієнт тертя μ_1 бруска з поверхнею дорівнює $0{,}2$. На бруску знаходиться другий брусок масою $m_2 = 8$ кг. Коефіцієнт тертя μ_2 верхнього бруска з нижнім дорівнює $0{,}3$. До верхнього бруска прикладена сила F. Визначити значення сили F_1, при якому почнеться спільне ковзання брусків по поверхні; значення сили F_2, при якому верхній брусок почне ковзати відносно нижнього.

Відповідь: $F_1 = \mu_1(m_1 + m_2)g = 19{,}6$ Н; $F_2 = (\mu_2 - \mu_1)\dfrac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)g = 39{,}2$ Н.

Задача 30. Тіло сповзає спочатку з похилої площини, яка складає кут $\alpha = 8°$ з горизонтом, а потім по горизонтальній поверхні. Знайти, чому дорівнює коефіцієнт тертя, якщо тіло проходить по горизонталі таку саму відстань, як і по похилій площині.

Відповідь: $\mu = 0{,}07$.

3 РОБОТА, ЕНЕРГІЯ, ПОТУЖНІСТЬ.
ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

3.1 Мета заняття

Визначення енергетичних характеристик: роботи консервативних і неконсервативних сил, механічної енергії, потужності. Ознайомитись з законами збереження імпульсу та енергії, навчитись застосовувати ці закони до розв’язування задач.

3.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Користуючись конспектом лекцій та підручником [1, розд. 3; 2, розд. 3; 5, §2, 3], вивчити закони збереження. Проаналізувавши розв’язання завдань, наведених як приклади, перейти до самостійної роботи над рекомендованими завданнями.

3.3 Основні закони та формули

1. Елементарна робота сталої сили $\vec{F}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha dS = F_s dS,$$

де $d\vec{r}$ – вектор елементарного переміщення; α – кут між векторами $\vec{F}$ та $d\vec{r}$; $dS = |d\vec{r}|$ – елементарний шлях; F_s – проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

2. Робота змінної сили на шляху *S*:

$$A = \int_s \vec{F}d\vec{r} = \int_s F_s dS = \int_s F\cos\alpha dS.$$

3. Робота змінної сили на шляху від точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}.$$

4. Середня потужність за проміжок часу Δt:

$$< N > = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

5. Потужність (миттєва потужність):

$$N = \frac{dA}{dt}; \; N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha,$$

де $\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості, з якою рухається точка прикладення сили $\vec{F}$; α – кут між векторами $\vec{F}$ та $\vec{\upsilon}$.

6. Кінетична енергія тіла, що рухається:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

де m – маса тіла; υ – його швидкість.

7. Зв'язок між силою, що діє на тіло в даній точці поля, і потенційною енергією частинки:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U \text{, або } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей.

8. Потенційна енергія тіла, піднятого над поверхнею Землі на висоту h**,**

$$U = mgh,$$

де g – прискорення вільного падіння.

9. Сила пружності:

$$F = -kx,$$

де x – абсолютна деформація; k – коефіцієнт жорсткості.

10. Потенційна енергія пружнодеформованого тіла:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

де k – коефіцієнт пружності (у випадку пружини – коефіцієнт жорсткості).

11. Закон збереження механічної енергії (для консервативної системи):

$$T + U = E = const,$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgh = const \\ \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = const \end{cases}$$

де T і U – відповідно кінетична та потенційна енергії тіла.

12. Швидкість двох тіл масами m_1 та m_2 після прямого абсолютно пружного центрального удару:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \qquad \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Передбачається, що при прямому центральному ударі вектори швидкостей куль до $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2)$ й після $(\vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_2')$ удару лежать на прямій, що з'єднує їхні центри. Проекції векторів швидкості на цю пряму дорівнюють модулям швидкостей.

13. Швидкість руху тіл після абсолютно непружного центрального удару:

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

14. Зміна кінетичної енергії тіл при абсолютно непружному центральному ударі (різниця кінетичної енергії тіл до та після удару):

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_1\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

15. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = const,$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i-ої матеріальної точки (тіла); υ_i – швидкість i-ої точки (тіла).

3.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке робота сили?
2. Що таке кінетична енергія? Наведіть приклади.
3. Що таке потенційна енергія? Наведіть приклади.
4. Як пов'язана робота сили тяжіння з потенційною енергією?
5. Як потенційна енергія пов'язана з силою?
6. Доведіть, що робота рівнодійної сил, прикладених до тіла, дорівнює приросту кінетичної енергії.
7. Чому дорівнює середня потужність, миттєва потужність?
8. Як миттєва потужність пов'язана із силою та швидкістю руху?
9. Запишіть закон збереження імпульсу.
10. Запишіть закон збереження механічної енергії.
11. Запишіть закон збереження моменту імпульсу.
12. Як пов’язана робота із зміною кінетичної енергії матеріальної точки?
13. Як пов’язана робота із зміною потенціальної енергії матеріальної точки?
14. Яка взаємодія тіл називається абсолютно пружним ударом?
15. Яка взаємодія тіл називається непружним ударом?
16. Які закони збереження виконуються та не виконуються при абсолютно пружному та абсолютно непружному ударах?
17. Які закони збереження виконуються та не виконуються при частково пружному ударі?

3.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Матеріальна точка масою $m = 0{,}1$ кг рухається рівномірно і прямолінійно з швидкістю $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с. У момент часу $t_0 = 0$ на неї почала діяти сила $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н. Ця сила діяла протягом $t_1 = 2$ с. Визначити роботу сили $\vec{F}$ та зміну кінетичної енергії за 2 с.

Дані: $m = 0{,}1$ кг, $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с, $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н, $t_0 = 0$; $t_1 = 2$ с.

Знайти: A, ΔT.

Аналіз і розв’язання

Відомо, що робота сили $\vec{F}$ дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = \Delta T = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Швидкість тіла $\vec{\upsilon}_1$ у момент часу t_1 можна знайти із основного рівняння динаміки

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt};$$

$$d\vec{\upsilon} = \frac{1}{m}\vec{F}dt;$$

$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0 = \frac{1}{m}\int_0^{t_1}\vec{F}dt;$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{F}t_1}{m} + \vec{\upsilon}_0.$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j}}{0{,}1} + 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = 65\vec{i} + 44\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Тоді робота сили $\vec{F}$ і зміна кінетичної енергії дорівнюють

$$A = \Delta T = \frac{m}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2) = \frac{0{,}1}{2}(65^2 + 44^2 + 3^2 - 5^2 - 4^2 - 3^2) = 306\ \text{Дж}.$$

Відповідь: $A = \Delta T = 306$ Дж.

Задача 2. Куля, рухаючись із швидкістю $\upsilon_0 = 900$ м/с, пробиває стінку товщиною 50 см і вилітає з неї зі швидкістю $\upsilon = 350$ м/с. Знайти час руху кулі у стінці, вважаючи опір стінки пропорційним кубу швидкості руху кулі.

Дані: $\upsilon_0 = 900$ м/с, $\upsilon = 350$ м/с, $d = 0{,}5$ м, $F = -k\upsilon^3$.

Знайти: t.

Аналіз і розв’язання

Під час руху кулі у стінці на неї діє тільки сила опору. Використовуючи основний закон динаміки поступального руху, можемо записати рівняння

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^3.$$

Розділивши змінні у цьому диференціальному рівнянні, одержуємо

$$\frac{md\upsilon}{\upsilon^3} = -kdt.$$

Інтегруючи одержане рівняння, знаходимо

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^3}=-k\int_0^t dt\,;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\upsilon_0^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\right)=-kt\,;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\upsilon_0^2-\upsilon^2}{\upsilon_0^2\upsilon^2}\right)=kt\,. \qquad (3.1)$$

Робота сили опору при переміщенні кулі на $d\vec{r}$ дорівнює

$$dA=\vec{F}d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt=m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}\,.$$

Враховуючи напрямок векторів, одержуємо рівняння

$$-k\upsilon^3 dr=m\upsilon d\upsilon\,. \qquad (3.2)$$

Розділивши змінні у рівнянні (3.2) та інтегруючи, знайдемо

$$-k\int_0^d dr=m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}\,;\ -kd=m\left(-\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon_0}\right)\,; \qquad (3.3)$$

$$m\frac{\upsilon_0-\upsilon}{\upsilon_0\upsilon}=kd\,.$$

Якщо розділити рівняння (3.1) на рівняння (3.3), знайдемо

$$t=\frac{(\upsilon_0+\upsilon)d}{2\upsilon_0\cdot\upsilon}=1{,}0\cdot10^{-3}\text{ с}.$$

Відповідь: $t=10^{-3}$ с.

Задача 3. Тіло масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти середню потужність, яку розвиває сила тяжіння за весь час руху тіла; миттєву потужність цієї сили як функцію часу; потужність у верхній точці траєкторії; роботу сили тяжіння за t секунд руху. Опором повітря знехтувати.

Дані: α, υ_0, m.

Знайти: $<N>$, $N(t)$, N_b, $A(t)$.

Аналіз і розв'язання

Знайдемо миттєве значення потужності сили тяжіння, використовуючи формулу

$$N(t)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}\,.$$

Рух тіла – рівноприскорений, тому $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{g}t$. Враховуючи напрям векторів (рис. 3.1), знайдемо

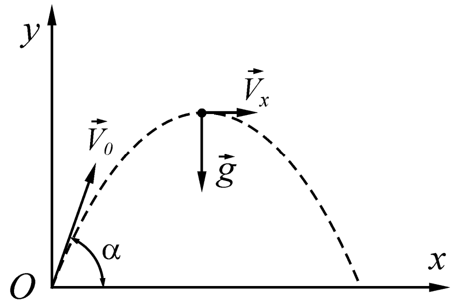


Рисунок 3.1

$$N(t) = m\vec{g} \cdot \vec{\upsilon} = m\vec{g}(\vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t) =$$
$$= mg\upsilon_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + mg^2 t = .$$
$$= mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$$

У вершині траєкторії кут між векторами $\vec{g}$ та $\vec{\upsilon}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$, тому

$$N_b = m\vec{g} \cdot \vec{\upsilon} = 0.$$

Середня потужність сили тяжіння за весь час руху дорівнює

$$< N >= \frac{A}{t},$$

де A – робота сили тяжіння; t – час руху.

Початкова та кінцева точки траєкторії знаходяться на однаковій висоті, тому $A = 0$, $< N >= 0$.

Із формули $P = \dfrac{dA}{dt}$ знаходимо силу тяжіння за час t:

$$A(t) = \int_0^t Pdt = \int_0^t mg(gt - \upsilon_0 \sin\ \alpha)dt = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin\ \alpha\right).$$

Відповідь: $< N >= 0$, $N_b = 0$, $N(t) = mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$,

$$A(t) = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin\ \alpha\right).$$

Задача 4. Куля масою m_1, яка рухалась горизонтально з швидкістю υ_1, зіткнулась з нерухомою кулею масою m_2. Кулі абсолютно пружні, зіткнення пряме. Яку долю w своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дані: m_1, υ_1, m_2, $\upsilon_2 = 0$.

Знайти: w.

Аналіз і розв'язання

Доля енергії, переданої першою кулею другій:

$$w = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2},$$

де T_1 – кінетична енергія першої кулі до удару; T_2' – кінетична енергія другої кулі після удару; υ_1 – швидкість першої кулі до удару; u_2 – швидкість другої кулі після удару.

Для визначення w слід знайти u_2. Скористаємось тим, що при абсолютно пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії. Враховуючи, що друга куля до зіткнення була нерухомою, запишемо ці закони:

$$m_1\upsilon_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

де u_1 – швидкість першої кулі після удару.

Розв'язавши рівняння, одержимо

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.4)$$

Підставивши значення u_2 у рівняння (3.4), одержимо

$$w = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{2m_1\upsilon_1}{\upsilon_1(m_1 + m_2)}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Відповідь: $w = \dfrac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

Задача 5. Ящик масою $m_1 = 20$ кг зісковзує по ідеально гладкому лотку довжиною $l = 2$ м у нерухомий візок з піском і застряє в ньому. Візок з піском масою $m_2 = 20$ кг може вільно (без тертя) переміщатися по рейках у горизонтальному напрямку. Визначити швидкість u візка з ящиком, якщо лоток нахилений під кутом $\alpha = 30°$ до рейок.

Дані: $m_1 = 20$ кг, $l = 2$ м, $m_2 = 20$ кг, $\alpha = 30°$.

Знайти: u.

Аналіз і розв'язання

Візок і ящик можна розглядати як систему двох взаємодіючих тіл. Але ця система незамкнена, тому що на неї діють зовнішні сили: тяжіння m_1g і m_2g та реакції опори N_2 (рис. 3.2). Тому застосувати закон збереження імпульсу до системи "ящик-візок" не можна. Оскільки проекції зазначених сил на напрямок осі x, що збігається з напрямком рейок, дорівнюють нулю, то проекцію імпульсу системи на цей напрямок можна вважати сталою, тобто

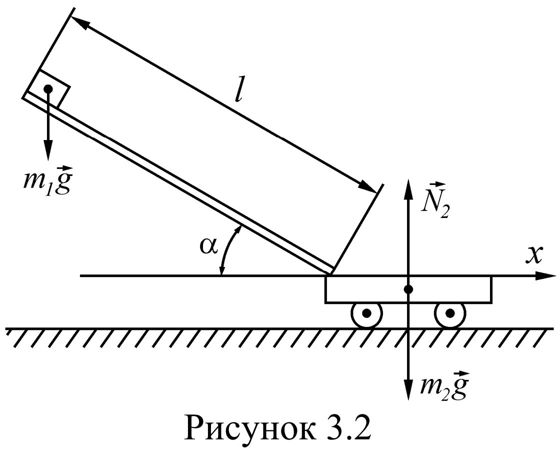


Рисунок 3.2

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \qquad (3.5)$$

де p_{1x} і p_{2x} – проекції імпульсу ящика та візка з піском у момент падіння ящика на візок; p'_{1x} і p'_{2x} – ті самі величини після падіння ящика.

Розглядаючи тіла системи як матеріальні точки, виразимо в рівнянні (3.5) імпульси тіл через їхні маси і швидкості, з огляду на те, що $p_{2x} = 0$ (візок до взаємодії з ящиком не рухався), а також що після взаємодії обидва тіла системи рухаються з однією й тією самою швидкістю u**:**

$$m_1\upsilon_{1x} = (m_1 + m_2)u,$$

або

$$m_1\upsilon_1\cos\alpha = (m_1 + m_2)u,$$

де υ_1 – модуль швидкості ящика перед падінням на візок; $\upsilon_{1x} = \upsilon_1\cos\alpha$ – проекція цієї швидкості на вісь x .

Звідси

$$u = \frac{m_1\upsilon_1\cos\alpha}{m_1 + m_2}. \tag{3.6}$$

Модуль швидкості υ_1 визначимо із закону збереження енергії:

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2,$$

де $h = l\sin\alpha$, звідки $\upsilon_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}$.

Підставивши вираз у формулу (3.6), одержимо:

$$u = \frac{m_1\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Після обчислення знайдемо:

$$u = \frac{20\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot\sin 30}}{20 + 80}\cos 30°\ м/с = 0{,}767\ м/с.$$

Відповідь: $u = 0{,}767\ м/с$.

Задача 6. Куля, що летить горизонтально, потрапляє в тіло, що висить на легкому твердому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше маси тіла. Відстань від точки підвісу стрижня до центра 1 *м* . Знайти швидкість кулі, якщо відомо, що стрижень із тілом відхилився від удару кулі на кут $10°$.

Дані: $m_2 = 1000m_1$, $l = 1$ м; $\alpha = 10° \approx 0{,}17$ рад.

Знайти: υ.

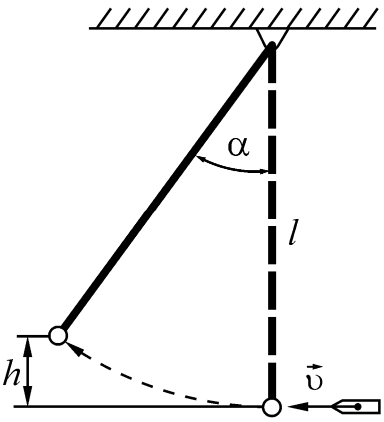


Рисунок 3.3

Аналіз і розв'язання

Запишемо закон збереження імпульсу для непружного удару в проекції на вісь X (рис. 3.3):

$$m_2\upsilon = (m_1 + m_2)u,$$

звідки

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1}u. \tag{3.7}$$

Тут υ – швидкість кулі до зіткнення; u – швидкість кулі і тіла після їхнього зіткнення. У виразі (3.7) крім υ невідома ще швидкість u, яку можна знайти за законом збереження енергії.

Нехай внаслідок зіткнення з тілом центр маси тіла піднявся на висоту h, тоді, за законом збереження енергії,

$$\left(m_1+m_2\right)u^2/2=\left(m_1+m_2\right)gh,$$

звідки

$$u^2=2gh. \tag{3.8}$$

З рис. 3.3 маємо $h=l-l\cos\alpha=l\left(1-\cos\alpha\right)$. Підставимо вираз для h у рівняння (3.8):

$$u^2=2gl\left(1-\cos\alpha\right),$$

звідки

$$u=\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)}.$$

Тоді рівняння (3.7) можна привести до виду

$$\upsilon=\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)}. \tag{3.9}$$

Використовуючи тригонометричне рівняння $\sin\left(\alpha/2\right)=\sqrt{\left(1-\cos\alpha\right)/2}$, перетворимо вираз (3.9):

$$\upsilon=2\frac{m_1+m_2}{m_1}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}\approx 570\text{ м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon\approx 570$ м/с.

3.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Куля масою $m_1=6$ кг налетіла на іншу кулю $m_2=4$ кг, яка перебувала у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив 5 кг·м/с. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну імпульсу першої кулі.

Відповідь: $\Delta p=2$ кг·м/с.

Задача 2. У човні масою $m_1=240$ кг стоїть людина масою $m_2=60$ кг. Човен пливе зі швидкістю $\upsilon_1=2$ м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі з швидкістю $\upsilon=4$ м/с (відносно човна). Знайти швидкість u човна після стрибка людини, розглянувши два випадки: людина стрибає вперед за рухом човна; в напрямі, протилежному напряму руху човна.

Відповідь: $u_1=1$ м/с, $u_2=3$ м/с.

Задача 3. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M=15$ т. Гармата стріляє вгору під кутом $\varphi=60°$ до горизонту в напрямку руху. З якою швидкістю υ_1 рухатиметься платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m=20$ кг і він вилетів зі швидкістю $\upsilon_2=600$ м/с.

Відповідь: $\upsilon_1 = 0,4$ м/с.

Задача 4. Куля масою $m = 10$ г, яка летіла зі швидкістю $\upsilon = 600$ м/с, влучила в балістичний маятник масою $M = 5$ кг і застряла в ньому. На яку висоту h після удару піднявся маятник?

Відповідь: $h = 7,34$ см.

Задача 5. Куля масою $m_1 = 6$ кг налетіла на другу кулю $m_2 = 4$ кг, яка знаходилась у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив 5 кг$\cdot$м/с. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну ΔU внутрішньої енергії куль.

Відповідь: $\Delta U = 0,83$ Дж.

Задача 6. Ковзаняр, розігнавшись до швидкості $\upsilon = 21$ км/год, в'їжджає на гірку з ухилом $\alpha = 20°$ на висоту $h = 1,6$ м. Визначте коефіцієнт тертя μ ковзанів об лід.

Відповідь: $\mu = 0,03$.

Задача 7. Санчата, що рухаються по льоду зі швидкості $\upsilon = 11$ км/год, в'їжджають на гірку з ухилом $\alpha = 10°$ на висоту $h = 2,5$ м. Визначте коефіцієнт тертя μ санчат об лід.

Відповідь: $\mu = 0,02$.

Задача 8. Потужність N двигунів літака при відриві від Землі дорівнює 820 кВт. Маса літака – $m = 5,2$ т. Розганяючись рівноприскорено, літак досягає швидкості $\upsilon = 32$ м/с. Вважаючи, що коефіцієнт опору $\mu = 0,04$ не залежить від швидкості, визначте довжину пробігу S літака перед зльотом.

Відповідь: $S = 113$ м.

Задача 9. Тіло масою $0,5\,кг$ ковзає з гірки, довжина якої дорівнює $l = 2\,м$, а висота $h = 1\,м$. Після того, як тіло з'їхало до підніжжя гірки, з'ясувалося, що воно виконало роботу $A = 4,4\,Дж$. Визначити коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею гірки.

Відповідь: $\mu = 0,05$.

Задача 10. Кулька масою $m_1 = 16$ г, що рухається горизонтально, зіштовхнулася з кулею масою $m_2 = 0,8$ кг, що висить на прямому невагомому стрижні довжиною $l = 1,7$ м. Вважаючи удар пружним, визначте швидкість кульки υ_1, якщо кут відхилення стрижня після удару $\alpha = 20°$.

Відповідь: $\upsilon_1 = 36,2$ м/с.

Задача 11. Куля, що рухається зі швидкістю υ_1, налітає на нерухому кулю, маса якого в $n = 1,5$ рази більше першої. Визначте відношення швидкості υ_1' першої кулі й швидкості υ_2' другої кулі після удару. Удар вважати пружним, центральним і прямим.

Відповідь: $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'}=\frac{n-1}{2}=0,25$.

Задача 12. Падаючи вертикально, кулька маси $m=200$ г вдарилася об підлогу зі швидкістю $\upsilon=5$ м/с і підстрибнула на висоту $h=46$ см. Знайти зміну Δp імпульсу кульки під час удару.

Відповідь: $\Delta p=m\left(\upsilon+\sqrt{2gh}\right)=1,6$ кг $\cdot$ м/с.

Задача 13. Гармата, що стоїть на гладкій горизонтальній площадці, стріляє під кутом $\alpha=30°$ до обрію. Маса снаряда $m=20$ кг, його початкова швидкість $\upsilon=200$ м/с. Яку швидкість u здобуває гармата при пострілі, якщо її маса $M=500$ кг?

Відповідь: $u=-\left(m\upsilon\cos\alpha\right)/M=-7$ м/с.

Задача 14. Снаряд масою $m=20$ кг, що летить зі швидкістю $\upsilon=800$ м/с під кутом $\alpha=30°$ до вертикалі, потрапляє у платформу з піском і застряє в ній. Знайти швидкість платформи u після влучення снаряда, якщо її маса $M=16$ т.

Відповідь: $u=m\upsilon\cos\alpha/\left(m+M\right)\approx1,25$ м/с.

Задача 15. Матеріальна точка масою $m=1$ кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі *x*, відповідно до рівняння $x=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де $B=2$ м/с, $C=1$ м/с^2, $D=-0,2$ м/с^3. Визначте потужність N, що затрачується на рух точки, за час $t=2$ с.

Відповідь: $N=0,16$ Вт.

Задача 16. Сила $F=0,5$ Н діє на тіло маси $m=10$ кг протягом часу $t=2$ с. Знайти кінцеву кінетичну енергію тіла T, якщо початкова кінетична енергія дорівнює нулю.

Відповідь: $T=\left(Ft\right)^2/m=0,05$ Дж.

Задача 17. З вежі висотою $h=62$ м горизонтально зі швидкістю $\upsilon_0=12$ м/с кинули камінь масою $m=120$ г. Нехтуючи опором повітря, визначте кінетичну T та потенціальну U енергії каменя через час $t=3\,c$ після кидка.

Відповідь: $T=\frac{m}{2}\left(\upsilon_0{}^2+g^2t^2\right)=60,6$ Дж; $U=mg\left(h+\frac{gt^2}{2}\right)=21$ Дж.

Задача 18. Визначити роботу, що виконується на шляху $s=12$ м силою, яка рівномірно зростає від $F_1=10$ Н до $F_2=26$ Н.

Відповідь: $A=216$ Дж.

Задача 19. Куля масою $m=10$ г летить зі швидкістю $\upsilon=800$ м/с, обертаючись навколо горизонтальної осі з частотою $n=3000$ с$^{-1}$. Прийнявши кулю за циліндрик діаметром $d=8$ мм, визначити повну кінетичну енергію T кулі.

Відповідь: $T=3,21$ кДж.

Задача 20. Визначити лінійну швидкість υ центра кулі, яка скотилась без просковзування з похилої площини висотою $h = 1$ м.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = 3{,}74$ м/с.

Задача 21. Скільки часу t спускатиметься без просковзування обруч з похилої площини довжиною $l = 2$ м і висотою $h = 10$ см?

Відповідь: $t = 4{,}04$ с.

Задача 22. Тонкий стрижень довжиною $l = 1$ м прикріплений до горизонтальної осі, яка проходить через його кінець. Стрижень відхилили на кут $\varphi = 60°$ від положення рівноваги і відпустили. Визначити лінійну швидкість υ нижнього кінця стрижня в момент проходження положення рівноваги.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{3gl(1 - \cos\varphi)} = 3{,}84$ м / с.

Задача 23. Яку роботу виконав хлопчик, що стоїть на гладкому льоді, надавши санчатам швидкість $\upsilon = 4$ м/с відносно льоду, якщо маса санчат $m = 4$ кг, а маса хлопчика $M = 20$ кг?

Відповідь: $A = (m + M)m\upsilon^2 / 2M = 38{,}4$ Дж.

Задача 24. Важку кульку, що підвішена на нерозтяжній і невагомій нитці довжиною l, відхиляють від вертикалі на кут α і потім відпускають. Якої максимальної швидкості υ набуде кулька?

Відповідь: $\upsilon = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha / 2)$.

Задача 25. Камінь маси $m = 5$ кг впав з деякої висоти. Знайти кінетичну енергію T каменя в середній точці його шляху, якщо він падав протягом часу $t = 2$ с.

Відповідь: $T = mg^2t^2 / 4 = 480$ Дж.

Задача 26. Визначте роботу A, яку слід виконати, щоб стиснути пружину на $x = 15$ см, якщо відомо, що сила пропорційна деформації та під дією сили $F = 50$ Н пружина стискується на $x_0 = 2{,}25$ см.

Відповідь: $A = \frac{Fx^2}{2x_0} = 25$ Дж.

Задача 27. З якою швидкістю υ вилітає із пружинного пістолета кулька масою $m = 10$ г, якщо пружину було стиснуто на $x = 5$ см? Жорсткість пружини дорівнює $k = 200$ Н/м.

Відповідь: $\upsilon = 7{,}07$ м/с.

Задача 28. Сталева кулька масою $m = 50$ кг падає з висоти $h = 1{,}0$ м на горизонтальну поверхню масивної плити. Знайти сумарний імпульс, який вона передає плиті внаслідок багатократних відштовхувань, якщо при кожному ударі швидкість кульки змінюється у $\eta = 0{,}8$ разів.

Відповідь: $p = \dfrac{m\sqrt{2gh}(1+\eta)}{1-\eta} = 2\,\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 29. Дві однакові платформи рухаються одна за одною по інерції (без тертя) з однаковою швидкістю υ_0. На задній платформі знаходиться людина масою m. У якийсь момент людина стрибнула на передню платформу зі швидкістю u відносно своєї платформи. Маса кожної платформи M. Знайти швидкості, з якими рухатимуться обидві платформи після цього.

Відповідь: $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \dfrac{mM}{(m+M)^2}u$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 - \dfrac{m}{m+M}u$.

Задача 30. Яку кінетичну енергію T набуває тіло масою $m = 1\,\text{кг}$ під час падіння без початкової швидкості через проміжок часу $\Delta t = 5\,\text{с}$ після початку падіння?

Відповідь: $T = mg^2(\Delta t)^2 / 2 = 1{,}2\,\text{кДж}$.

4 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

4.1 Мета заняття

Засвоїти методику розв'язання задач динаміки твердого тіла: обертання навколо нерухомої осі й складного плоского руху.

4.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Повторіть означення основних фізичних величин, які характеризують рух твердого тіла: моменту сили, моменту імпульсу, моменту інерції [1, розд. 4; 2, розд. 4; 5, §3]. Зверніть увагу на те, що плоский рух твердого тіла описують векторні рівняння: рівняння руху центра мас та основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

4.3 Основні закони та формули

1. Момент інерції матеріальної точки:

$$J = mr^2,$$

де m – маса точки; r – її відстань до осі обертання.

2. Момент інерції системи точок, тіла:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \quad J = \int r^2 dm,$$

де r_i – відстань i-ї матеріальної точки масою m_i до осі обертання.

3. Моменти інерції тіл правильної геометричної форми (тіла вважаються однорідними; m – маса тіла)

Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
Порожній тонкостінний циліндр радіусом R	Вісь симетрії	$J = mR^2$
Суцільний циліндр або диск радіусом R	Вісь симетрії	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Прямий тонкий стрижень довжиною l	Вісь перпендикулярна стрижню та проходить через його середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
	Вісь перпендикулярна стрижню та проходить через його кінець	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Куля радіусом R	Вісь проходить через центр кулі	$J = \frac{2}{5}ml^2$

4. Теорема Штейнера:

$$J = J_C + ma^2,$$

де J_C – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас; J – момент інерції відносно паралельної осі, що відстоїть від першої на відстані a; m – маса тіла.

5. Кінетична енергія обертання тіла:

$$T_{об} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – його кутова швидкість.

6. Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

де m – маса тіла; υ_C – швидкість центра мас тіла; J_C – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас; ω – кутова швидкість тіла.

7. Момент сили відносно нерухомої точки:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із цієї точки в точку додатка сили $\vec{F}$.

8. Модуль вектора моменту сили:

$$M = Fl,$$

де l – плече сили.

9. Момент сили відносно нерухомої осі:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z.$$

10. Робота при обертанні тіла:

$$dA = M_z d\varphi,$$

де $d\varphi$ – кут повороту тіла; M_z – момент сили відносно нерухомої осі z.

11. Момент імпульсу матеріальної точки A відносно нерухомої точки O:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right],$$

де $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – імпульс матеріальної точки.

12. Модуль вектора моменту імпульсу

$$L = pr\sin\alpha = m\upsilon \sin\alpha = pl,$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$; l – плече вектора $\vec{p}$ відносно точки O.

13. Момент імпульсу твердого тіла відносно осі обертання

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z \omega,$$

де r_i – відстань від осі z до окремої частинки тіла; $m_i\upsilon_i$ – імпульс цієї частинки; J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – кутова швидкість тіла.

14. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухливої осі (рівняння моментів):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення; J_z – момент інерції тіла відносно осі z.

15. Закон збереження моменту імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{L} = const, \quad J_z\omega = const,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – кутова швидкість тіла.

4.4. Контрольні запитання та завдання

1. Чому дорівнює момент інерції матеріальної точки, системи матеріальних точок?
2. Чому дорівнює момент інерції твердого тіла?
3. Чому дорівнює момент сили відносно нерухомої точки та осі?
4. Чому дорівнює момент імпульсу частинки відносно нерухомої точки та осі?
5. Чому дорівнює момент імпульсу твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі?
6. Запишіть і проаналізуйте рівняння моментів.
7. Сформулюйте та доведіть теорему Штейнера.
8. Запишіть вираз для кінетичної енергії обертального руху твердого тіла.
9. Запишіть вираз для кінетичної енергії твердого тіла у випадку плоского руху.
10. Чому дорівнює робота зовнішніх сил під час обертання твердого тіла відносно нерухомої осі?

4.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Два тягарці масами $m_1 = 2$ кг та $m_2 = 1$ кг з'єднані невагомою та нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок масою $m = 1$ кг. Знайти прискорення, з яким рухаються тягарці; сили натягу F_1 та F_2 ниток, до яких прикріплено тягарці. Блок вважати однорідним диском, тертям знехтувати.

Дані: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m = 1$ кг.

Знайти: a, F_1, F_2.

Аналіз і розв'язання

Тягарці рухаються поступально, блок обертається, запишемо основне рівняння динаміки поступального руху тягарців та обертального руху блока:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F}_1 = m_1\vec{a} \\ m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a} \\ \vec{M}_1' + \vec{M}_2' = J\vec{\varepsilon} \end{cases} \qquad (4.1)$$

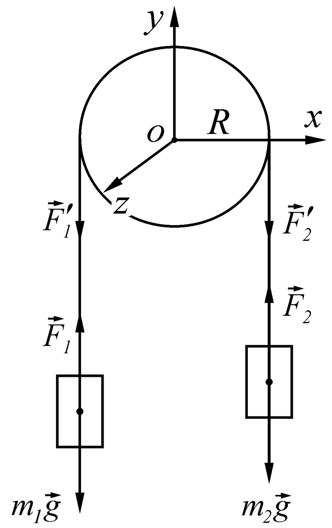


Рисунок 4.1

де $J = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент інерції блока, $\vec{M}_1' = \left[\vec{r}, \vec{F}_1'\right]$; $\vec{M}_2' = \left[\vec{r}, \vec{F}_2'\right]$ – моменти сил натягу, які діють на блок. Сили, що діють на тягарці та блок, позначено на рис. 4.1.

Спроектувавши вектори рівнянь (4.1) на координатні осі Oz та Oy, запишемо ($F_1' = F_1;\ F_2' = F_2$):

$$\begin{cases} F_1 - m_1 g = -m_1 a \\ F_2 - m_2 g = m_2 a \\ (F_1 - F_2)R = J\varepsilon \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь, враховуємо, що кутове прискорення блока ε в залежності від прискорення тягарців (у даному випадку тангенціального прискорення) описується формулою $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, знаходимо шукані параметри:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} = 2{,}8\ \text{м/с}^2,$$

$$F_1 = \frac{m_1(2m_2 + \dfrac{m}{2})}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g = 14\ \text{Н}.$$

$$F_2 = \frac{m_2(2m_1 + \dfrac{m}{2})}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g = 12{,}6\ \text{Н}.$$

Відповідь: $a = 2{,}8\ \text{м/с}^2$, $F_1 = 14\ \text{Н}$, $F_2 = 12{,}6\ \text{Н}$.

Задача 2. З похилої площини, що становить кут $\alpha = 37°$ з обрієм, скачується без ковзання суцільний диск. Нехтуючи тертям, визначте швидкість υ диска через $t = 4$ с після початку руху.

Дані: $\alpha = 37°$, $t = 4\ \text{с}$.

Знайти: υ.

Аналіз і розв'язання

Відповідно до закону збереження механічної енергії, при скочуванні диска його потенційна енергія переходить у кінетичну енергію поступального та обертального руху

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \tag{4.2}$$

де m – маса диска; J – момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр мас; υ – швидкість центра мас диска; ω – кутова швидкість відносно осі, що проходить через центр мас.

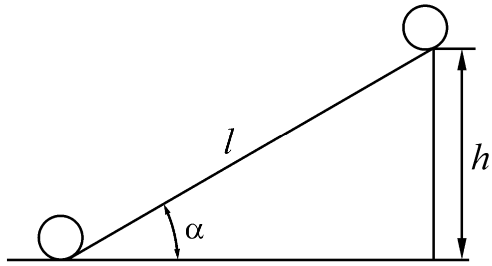


Рисунок 4.2

З огляду на то, що $h = l\sin\alpha$ (рис. 4.2), $\upsilon = \omega R$, а момент інерції суцільного диска $J = \frac{mR^2}{2}$ (R – радіус диска), вираз (4.2) запишеться у вигляді

$$mgl\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{4} = \frac{3}{2}m\upsilon^2. \tag{4.3}$$

Оскільки $l = \frac{at^2}{2}$ та $a = \frac{\upsilon}{t}$ ($\upsilon_0 = 0$), з виразу (4.3) знайдемо шукану швидкість

$$\upsilon = \frac{2}{3}gt\sin\alpha = 15,7 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon = 15,7$ м/с.

Задача 3. Маховик у вигляді однорідного суцільного диска радіусом $R = 35$ см і масою $m = 2,1$ кг обертається із частотою $n = 360$ хв$^{-1}$. Після прикладення до диска постійної дотичної сили гальмування він зупиняється за час $t = 2$ хв. Визначте роботу сили гальмування; силу гальмування F.

Дані: $R = 0,35$ м, $m = 2,1$ кг, $n = 6$ с$^{-1}$, $t = 120$ с.

Знайти: A, F.

Аналіз і розв'язання

Внаслідок гальмування диск зупиняється, тому робота сили гальмування

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{4.4}$$

де $J = \frac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска відносно осі обертання; $\omega = 2\pi n$ – кутова швидкість. Підставивши ці вирази у формулу (4.4), знайдемо роботу сили гальмування

$$A = \pi^2 n^2 m r^2 = 91,3 \text{ Дж}.$$

Момент сили гальмування

$$M = FR, \tag{4.5}$$

де R – радіус диска (у нашім випадку плече сили). З іншого боку, відповідно до основного закону динаміки обертового руху,

$$M = J\varepsilon, \tag{4.6}$$

де кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}.$$

Прирівнявши вирази (4.5) і (4.6), знайдемо шукану силу

$$F = \frac{\pi m n R}{t} = 0{,}115 \text{ Н}.$$

Відповідь: $A = 91{,}3$ Дж ; $F = 0{,}115$ Н .

Задача 4. Людина сидить у центрі лави Жуковського, що обертається по інерції навколо нерухомої вертикальної осі із частотою $n_1 = 30 \text{ хв}^{-1}$. У витягнутих у сторони руках вона тримає по гантелі масою $m = 5$ кг кожна. Відстань від кожної гантелі до осі обертання $l_1 = 60$ см. Сумарний момент інерції людини та лави відносно осі обертання $J_0 = 2 \text{ кг·м}^2$. Визначте: 1) частоту n_2 обертання лави з людиною; 2) яку роботу A виконає людина, коли вона притисне гантелі до себе так, що відстань від кожної гантелі до осі дорівнюватиме $l_2 = 20$ см?

Дані: $n_1 = 0{,}5 \text{ с}^{-1}$, $m = 5$ кг , $l_1 = 0{,}6$м , $J_0 = 2 \text{ кг·м}^2$, $l_2 = 0{,}2$ м .

Знайти: n_2 , A.

Аналіз і розв'язання

За умовою завдання момент зовнішніх сил відносно вертикальної осі дорівнює нулю, тому момент імпульсу цієї системи зберігається, тобто

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \tag{4.7}$$

де $J_1 = J_0 + 2ml_1^2$ та $J_2 = J_0 + 2ml_2^2$ – відповідно момент інерції всієї системи до та після зближення; m – маса кожної гирі. Кутова швидкість $\omega = 2\pi n$. Підставляючи ці вирази у рівняння (4.7), одержимо шукану частоту обертання:

$$n_2 = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2} n_1 = 1{,}17 \text{с}^{-1}.$$

Робота, виконана людиною, дорівнює зміні кінетичної енергії системи:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Виразивши з рівняння (4.7) $\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_1}{J_2}$, одержимо:

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}\left(J_1 - J_2\right) = \frac{2J_1\pi^2 n_1^2}{J_2}\left(J_1 - J_2\right) = 36{,}8 \text{ Дж}.$$

Відповідь: 1) $n_2 == 1{,}17 \text{с}^{-1}$, 2) $A = 36{,}8$ Дж .

Задача 5. Камінь масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти залежність від часу моменту сили $\vec{M}(t)$, що діє на тіло, моменту імпульсу $\vec{L}(t)$. Опором повітря знехтувати. Обидва моменти знайти відносно точки кидання.

Дані: $\vec{\upsilon}_0$, α.

Знайти: $\vec{M}(t)$, $\vec{L}(t)$.

Аналіз і розв'язання

На камінь діє сила тяжіння. Момент цієї сили за означенням дорівнює $\vec{M} = \left[\vec{r}, m\vec{g}\right]$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор сили тяжіння. Початок системи координат поєднаємо з точкою кидання, напрям координатних осей вказано на рис. 4.3. Траєкторія руху каменя лежить у площині xOy, радіус-вектор його змінюється за законом $\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2}$.

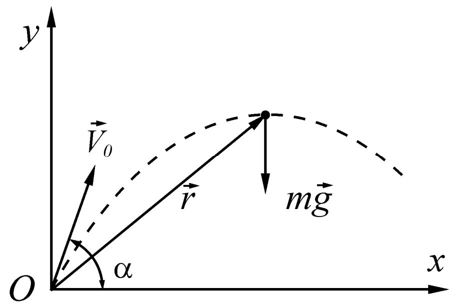


Рисунок 4.3

Тоді відносно точки O момент сили тяжіння дорівнює

$$\vec{M}(t) = \left[\left(\vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right), m\vec{g}\right] = \left[\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}\right] + \left[\frac{\vec{g}t^2}{2}, m\vec{g}\right] = \left[\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}\right].$$

Вектор $\vec{M}(t)$ спрямований перпендикулярно площині xOy, проекція цього вектора на вісь z дорівнює

$$M_z(t) = \upsilon_0 t \cdot mg \cdot \sin(90^0 + \alpha) = -\upsilon_0 t \cdot mg \cdot \cos(\alpha).$$

Використовуючи рівняння моментів $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, знайдемо

$$d\vec{L} = \vec{M}dt; \; \int_0^L d\vec{L} = \int_0^t \vec{M}dt,$$

$$\vec{L}(t) = \int_0^t [\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}]dt = [\vec{\upsilon}_0, m\vec{g}]\int_0^t tdt = [\vec{\upsilon}_0, m\vec{g}]\frac{t^2}{2}.$$

Вектор $\vec{L}$ напрямлений протилежно осі z, проекція його на цю вісь:

$$L_Z(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2 \cos\alpha.$$

Залежність $\vec{M}(t)$ та $\vec{L}(t)$ можна записати у вигляді

$$\vec{M}(t) = -\upsilon_0 \cdot mg \cdot t\cos\alpha \cdot \vec{k},$$

$$\vec{L}(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2\cos\alpha \cdot \vec{k},$$

де $\vec{k}$ – одиничний вектор вздовж осі z.

Відповідь: $\vec{M}(t) = -\upsilon_0 \cdot mg \cdot t\cos\alpha \cdot \vec{k}$, $\vec{L}(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2\cos\alpha \cdot \vec{k}$.

Задача 6. Стрижень довжиною $l = 1{,}5$ м і масою $M = 10$ кг може обертатися навколо нерухомої осі, яка проходить через його верхній кінець. У середину стрижня потрапляє куля масою $m = 10$ г, яка летить в горизонтальному напрямі зі швидкістю $\upsilon_0 = 500$ м/с і застряє у ньому. На який кут φ відхилиться стрижень після удару?

Дані: $l = 1{,}5$ м, $M = 10$ кг, $m = 10$ г, $\upsilon_0 = 500$ м/с.

Знайти: φ.

Аналіз і розв'язання

Куля, співударяючись зі стрижнем, за дуже малий проміжок часу приводить його у рух із кутовою швидкістю ω і надає йому кінетичну енергію $T = J\omega^2 / 2$, де J – момент інерції стрижня відносно осі обертання. Потім стрижень повертається на кут φ, при цьому його центр мас піднімається на висоту $h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$ (рис. 4.4). В цьому положенні стрижень має потенціальну енергію

$$U = Mg\frac{l}{2}(1 - cos\,\varphi).$$

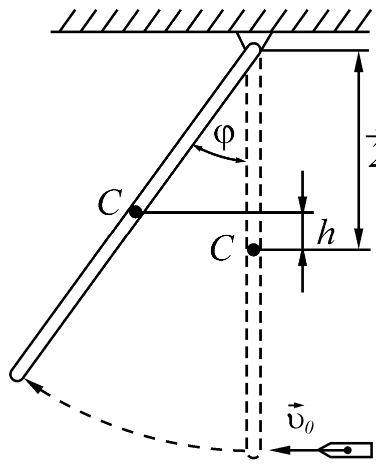


Рисунок 4.4

За законом збереження енергії

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

маємо

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}\ . \tag{4.8}$$

Щоб знайти кут φ, слід у це рівняння підставити значення J та ω. Момент інерції стрижня J відносно осі обертання, що проходить через його кінець, дорівнює $J = Ml^2 / 3$. Кутову швидкість ω знайдемо за законом збереження моменту імпульсу

$$m\upsilon_0\tau = J\omega + mr^2\omega.$$

Враховуючи, що $\upsilon_0 = \omega r$, а $\tau = \frac{l}{2}$, одержимо

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 l}{2\frac{ml^2}{3} + \frac{ml^2}{2}}.$$

Підставляючи в рівняння (4.8) значення J, знайдемо $\cos\varphi = 0,987$, $\varphi = 9°20'$.

Відповідь: $\varphi = 9°20'$.

4.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти момент інерції та момент імпульсу земної кулі відносно осі обертання.

Відповідь: $J = 10^{38}$ кг $\cdot$ м^2, $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг $\cdot$ м^2/с.

Задача 2. Знайти момент інерції тонкої плаской пластини із сторонами $a = 10$ см та $b = 20$ см відносно осі, що проходить через центр мас пластини паралельно бічній. Маса пластини рівномірно розподілена по її площі з поверхневою густиною $\sigma = 1,2$ кг/м^2.

Відповідь: $J = 2 \cdot 10^{-5}$ кг $\cdot$ м^2.

Задача 3. Маховик, що має момент інерції $J = 63,6$ кг $\cdot$ м^2, обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 3,14$ рад/с. Знайти гальмівний момент, дія якого призводить до зупинки маховика через 20 с.

Відповідь: $M = 10$ Н $\cdot$ м

Задача 4. Маховик, що має радіус $R = 0,2$ м і масу $m = 10$ кг, з'єднано з мотором за допомогою пасу. Сила натягу пасу є сталою і дорівнює $F = 14,7$ Н. Яку кількість обертів за секунду робитиме маховик через $t = 10$ с після початку руху? Маховик вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.

Відповідь: $n = 23,4$ с$^{-1}$.

Задача 5. Махове колесо, що має момент інерції 245 кг $\cdot$ м^2, обертається з частотою $n_1 = 20$ с$^{-1}$. Через хвилину після того, як на колесо припинено дію обертального моменту, воно зупинилося. Знайти момент сил тертя.

Відповідь: $M_{тер} = 513$ Н $\cdot$ м.

Задача 6. На барабан масою $m_1 = 6$ кг намотано шнур, до кінця якого прикріплено вантаж масою $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним циліндром. Тертям знехтувати.

Відповідь: $a = 3,9$ м/с^2.

Задача 7. На барабан радіусом $R = 0,5$ м намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж $m = 10$ кг. Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що вантаж опускається з прискоренням $a = 2,04$ м/с^2.

Відповідь: $J = 9,5$ кг $\cdot$ м^2.

Задача 8. Визначте момент інерції J кулі масою $m = 400$ г і радіусом $R = 7$ см відносно осі, що є дотичною до її поверхні.

Відповідь: $J = \frac{7}{5}mR^2 = 2{,}74 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 9. Диск масою 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю 4 м/с. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $T = 24$ Дж.

Задача 10. Обруч і диск мають однакові маси та котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю υ. Кінетична енергія обруча дорівнює $T_1 = 40$ Дж. Знайти кінетичну енергію T_2 диска.

Відповідь: $T_2 = 30$ Дж.

Задача 11. Обруч масою $m = 2$ кг котиться без ковзання по горизонтальній поверхні з лінійною швидкістю $\upsilon = 5$ м/с. Знайти його кінетичну енергію.

Відповідь: $T = 50$ Дж.

Задача 12. Велосипедист, маса якого разом з велосипедом є $m_1 = 80$ кг, їде рівномірно по дорозі зі швидкістю 18 км/год. Маса кожного колеса велосипеда $m_2 = m_3 = 5$ кг. Колеса обертаються з кутовою частотою $\omega = 1{,}6$ с$^{-1}$. Визначити кінетичну енергію системи. Колеса вважати тонкими кільцями з радіусом $R = 0{,}5$ м.

Відповідь: $T = 10^3$ Дж.

Задача 13. Кінетична енергія обертального руху $T_{об}$ кулі, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 20 Дж. Визначте кінетичну енергію $T_п$ поступального руху кулі та її повну кінетичну енергію T.

Відповідь: $T_п = 2{,}5T_{об} = 50$ Дж, $T = 3{,}5T_{об} = 70$ Дж.

Задача 14. На похилій площині з кутом нахилу до горизонту α стоїть циліндр радіусом R. Якою може бути найвища висота циліндра, при якій він не перекинеться, якщо циліндр виготовлений з однорідної речовини?

Відповідь: $h = 2Rctg\,\alpha$.

Задача 15. Біліардна куля масою $m = 250$ г, що котиться без ковзання, вдаряється о борт і відскакує від нього. Швидкість кулі до удару $\upsilon = 0{,}8$ м/с, після удару $\upsilon' = 0{,}3$ м/с. Визначити кількість теплоти Q, що виділилась під час удару.

Відповідь: $Q = \frac{7}{10}m\left(\upsilon^2 - \left(\upsilon'\right)^2\right) = 96{,}3$ мДж.

Задача 16. Вентилятор, момент інерції J якого дорівнює 8 кг·м^2, обертається з частотою $n = 300$ мин$^{-1}$. Після вимкнення він почав обертатися рівносповільнено та, зробивши $N = 30$ обертів, зупинився. Визначте час t, за який вентилятор зупинився та момент M сил гальмування.

Відповідь: $t = \dfrac{2N}{n} = 12$ с, $M = \dfrac{J\pi n^2}{N} = 20{,}9$ Н·м.

Задача 17. Кінетична енергія маховика, який обертається навколо горизонтальної осі, дорівнює $1\,\text{кДж}$. Під дією постійного гальмуючого моменту маховик почав обертатись рівносповільнено і, зробивши 80 обертів, зупинився. Визначити момент M сили тертя.

Відповідь: $M = 1{,}99$ Н · м.

Задача 18. Людина стоїть в центрі лави Жуковського та тримає в руках стрижень масою $m = 9$ кг за середину в горизонтальному положенні. Після повороту стрижня у вертикальне положення лава змінює частоту обертання з $n_1 = 40\ \text{хв}^{-1}$ до $n_2 = 50\ \text{хв}^{-1}$. Визначте довжину l стрижня, якщо сумарний момент інерції людину та лави $J = 10\ \text{кг·м}^2$.

Відповідь: $l = 2\sqrt{\dfrac{3(n_2 - n_1)J}{m}} = 1{,}49$ м.

Задача 19. Однорідний диск радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω та обережно поклали на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск обертатиметься на поверхні, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ?

Відповідь: $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$.

Задача 20. Кругла платформа у вигляді однорідного суцільного диска, у центрі якої стоїть людина масою $m_1 = 72$ кг, обертається по інерції із частотою $n_1 = 25\ \text{хв}^{-1}$. При переході людини на край платформи частота її обертання стала рівною $n_2 = 10\ \text{хв}^{-1}$. Визначте масу m_2 платформи.

Відповідь: $m_2 = 2m_1 \dfrac{n_2}{n_1 - n_2} = 96$ кг.

Задача 21. На платформі, що обертається горизонтально, на відстані $R = 50$ см від осі обертання лежить вантаж. При якій частоті n обертання платформи вантаж почне зісковзувати? Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою $\mu = 0{,}05$.

Відповідь: $n > \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}} \approx 0{,}16$ об/с.

Задача 22. Тіло маси $m = 200$ г рівномірно обертається в горизонтальній площині по колу радіуса $R = 0{,}5$ м з частотою $n_1 = 3$ об/с. Яку роботу A потрібно виконати, щоб збільшити частоту обертання до $n_2 = 5$ об/с?

Відповідь: $A = 2\pi^2 R^2 m(n_2{}^2 - n_1{}^2) = 15{,}8$ Дж.

Задача 23. Кульку масою m, що підвішена на нитці, відхиляють від положення рівноваги на кут $\alpha = 90°$ і відпускають. Яка максимальна сила натягу F нитки?

Відповідь: $F = 3mg$.

Задача 24. Якір двигуна обертається з частотою $n = 1500\,\text{хв}^{-1}$. Знайти обертальний момент, якщо двигун розвиває потужність $N = 500\,\text{Вт}$.

Відповідь: $M = 3{,}18\ \text{Н}\cdot\text{м}$.

Задача 25. Барабан сушильної машини, що має діаметр $D = 1{,}96\ \text{м}$, обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20\ \text{рад/с}$. У скільки разів сила F, що притискає тканину до стінки, більше сили тяжіння mg, що діє на тканину?

Відповідь: $F / mg = \omega^2 D / 2g = 40$.

Задача 26. Два тягарця різної маси з'єднані ниткою, перекинутою через блок, момент інерції якого $J = 50\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$, а радіус – $R = 20\ \text{см}$. Блок обертається з тертям, і момент сил тертя дорівнює $M_{тер} = 98{,}1\ \text{Н}\cdot\text{м}$. Знайти різницю сил натягу ниток $(F_1 - F_2)$ з обох боків блока, якщо відомо, що блок обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2{,}36\ \text{рад/с}^2$.

Відповідь: $F_1 - F_2 = 1{,}08\cdot 10^3\ \text{Н}$.

Задача 27. З похилої площини скочується без ковзання однорідний диск. Лінійне прискорення центра мас диска $\alpha = 3{,}9\ \text{м/с}^2$. Сила тертя дорівнює $F = 1\ \text{Н}$. Знайти кут нахилу похилої площини до горизонту та масу диска.

Відповідь: $\alpha = 36°$, $m = 0{,}5\ \text{кг}$.

Задача 28. Маховик, момент інерції J якого дорівнює $40\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$, почав обертатись рівноприскорено із стану спокою під дією моменту сили $M = 20\ \text{Н}\cdot\text{м}$. Обертання продовжувалось $t = 10\ c$. Визначити кінетичну енергію T маховика.

Відповідь: $T = 500\ \text{Дж}$.

Задача 29. Однорідна куля радіусом r починає скочуватись без просковзування з вершини сфери радіусом R. Знайти кутову швидкість кулі ω після відриву від поверхні сфери.

Відповідь: $\omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}$.

Задача 30. На гладенькій горизонтальній поверхні лежить однорідний диск радіусом r_0. На нього обережно опустили інший такий самий диск, що обертається із кутовою швидкістю ω_0. Через який час обидва диски обертатимуться з однаковою кутовою швидкістю, якщо коефіцієнт тертя між дисками дорівнює μ?

Відповідь: $t = \dfrac{3r_0\omega_0}{8\mu g}$.

5 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

5.1 Мета заняття

Опанувати методами розв’язання рівнянь, що описують коливання. Засвоїти фізичний зміст величин, які характеризують механічні коливання.

5.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Вивчаючи теоретичний матеріал [1, розд. 7; 2, розд. 6; 5, §6], зверніть увагу на фізичний зміст таких понять, як період коливань, фаза, добротність, час релаксації, логарифмічний декремент затухання.

5.3 Основні закони та формули

1. Рівняння гармонічних коливань:

$$x = A\cos(\omega_0 + \varphi),$$

де x – відхилення системи, яка здійснює коливання, від стану рівноваги; A – амплітуда коливань; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – кругова (циклічна) частота; $\nu = \frac{1}{T}$ – частота; T – період коливань; φ – початкова фаза.

2. Швидкість і прискорення точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_{0t} + \varphi + \pi),$$

де A – амплітуда коливань; ω_0 – кругова частота; φ – початкова фаза.

3. Сила, що діє на матеріальну точку масою m,

$$F = -m\omega_0^2 x,$$

де ω_0 – кругова частота; x – відхилення точки від стану рівноваги.

4. Кінетична енергія точки, що здійснює прямолінійні гармонічні коливання:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega_0 + \varphi)\right],$$

де m – маса матеріальної точки; υ – її швидкість; A – амплітуда коливань; ω_0 – кругова частота; φ – початкова фаза.

5. Потенційна енергія точки, що здійснює гармонічні коливання під дією сили пружності F:

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right],$$

де m – маса матеріальної точки; ω_0 – кругова частота; x – відхилення точки від стану рівноваги; A – амплітуда коливань; φ – початкова фаза.

6. Механічна енергія коливань:

$$E = E_n + E_\kappa = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

7. Диференціальне рівняння гармонійних коливань пружинного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

де m – маса тіла; x – відхилення від стану рівноваги; k – жорсткість пружини; ω_0 – циклічна частота.

8. Розв’язок цього рівняння:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

де A – амплітуда коливань; φ – початкова фаза.

9. Період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де m – маса пружинного маятника; k – жорсткість пружини.

10. Період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l – довжина маятника; g – прискорення вільного падіння.

11. Період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

де J – момент інерції маятника відносно осі коливань; l – відстань між точкою підвісу і центром мас маятника; $L = \dfrac{J}{ml}$ – приведена довжина фізичного маятника; g – прискорення вільного падіння.

12. Амплітуда A результуючого коливання, що виходить під час складання двох гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$$

13. Початкова фаза результуючого коливання:

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

де A_1 і A_2 – амплітуди двох складених коливань; φ_1 і φ_2 – початкові фази коливань.

14. Період биття:

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

де $\Delta\omega$ – різниця частот складених коливань, $\Delta\omega << \omega$.

15. Розв'язання траєкторії руху точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти (рівняння еліпса):

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi,$$

де A і B – амплітуди коливань, що складаються; φ – різниця між фазами коливань.

16. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де x – відхилення тіла, що здійснює коливання, від стану рівноваги; $\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання; $\omega_0 = \frac{k}{m}$ – власна частота тієї самої коливальної системи.

17. Розв'язок цього рівняння

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

де $A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота згасаючих коливань.

18. Декремент згасання:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що відповідають моментам часу, які відрізняються на період.

19. Логарифмічний декремент згасання:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що відповідають моментам часу, які відрізняються на період; β – коефіцієнт згасання; T – період згасаючих коливань; τ – час релаксації; N_e – кількість коливань, що здійснюються за час релаксації.

20. Добротність коливальної системи:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta},$$

де λ – логарифмічний декремент згасання; ω_0 – циклічна частота вільних незатухаючих коливань тієї самої коливальної системи; β – коефіцієнт згасання.

21. Диференціальне рівняння вимушених механічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

де x – відхилення тіла, що коливається від стану рівноваги; F_0 – амплітуда змушуючої сили; m – маса тіла.

22. Розв'язок цього рівняння для коливань, що встановилися:

$$x = A\cos\left(\omega t - \varphi\right),$$

де $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ – амплітуда; $\varphi = arctg\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ – початкова фаза; ω_0 – власна частота тієї самої коливальної системи; ω – частота зовнішніх коливань змушуючої сили; β – коефіцієнт згасання.

23. Резонансна частота і резонансна амплітуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},\ A_{рез} = \frac{F_0 / m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

де ω_0 – власна частота коливальної системи; β – коефіцієнт згасання; F_0 – амплітуда зовнішньої змушуючої сили; m – маса тіла.

5.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке гармонічні коливання?
2. Запишіть основні характеристики коливань математичного та фізичного маятників.
3. Запишіть диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань і його розв'язок.
4. Чому дорівнює механічна енергія коливального руху для власних коливань?
5. Що таке биття?
6. Що таке фігури Лисажу?
7. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язок.
8. Чому дорівнює частота, як змінюється енергія й амплітуда залежно від опору середовища?
9. Що таке логарифмічний декремент згасання, добротність?
10. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язок.
11. Від чого і як залежить амплітуда та фаза вимушених коливань?
12. Дайте визначення явищу механічного резонансу.
13. Чому дорівнює резонансна частота та резонансна амплітуда?

5.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Енергія одновимірного гармонічного осцилятора дорівнює $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, де m – маса, k – коефіцієнт пропорційності між силою та зміщенням. Визначити рівняння, яке визначає залежність руху від часу. Встановити, який рух здійснює осцилятор. Знайти амплітуду коливань x_m та амплітуду швидкості $\dot{x}_m$.

Дані: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$;

Знайти: $x(t)$, x_m , $\dot{x}_m$.

Аналіз і розв'язання

Оскільки повна енергія осцилятора не залежить від часу, перша похідна від повної енергії за часом дорівнює нулю

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x}}{2} + 2k\frac{x\dot{x}}{2} = 0.$$

Тоді одержуємо

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Отримане рівняння – це рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5.1}$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота коливань.

Розв'язком рівняння (5.1) буде

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{5.2}$$

де x_m – амплітуда коливань; φ – початкова фаза коливань.

Знайдемо швидкість осцилятора, тобто першу похідну від (5.2)

$$\dot{x} = x_m\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{5.3}$$

Тоді повну енергію можна записати

$$E = \frac{m x_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} + \frac{k x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2};$$

$$2E = kx_m^2; \quad x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}; \quad \dot{x}_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Звідси одержимо амплітуду коливань

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Амплітуду швидкості одержимо з рівняння (5.3)

$$\dot{x}_m = x_m \omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Відповідь: $x(t) = x_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$, $x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, $\dot{x}_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

Задача 2. Знайти рівняння руху тіла, яке бере участь водночас у двох однаково напрямлених коливальних рухах з однаковими частотами $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ і $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, тут φ_1 та φ_2 – початкові фази коливань, A_1, A_2 – амплітуди коливань. Проаналізувати випадки, якщо зсув фаз між коливаннями дорівнює: а) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$; б) $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi, (n = 0,1,2...)$.

Дані: $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$,

а) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, $(n = 0,1,2...)$;

б) $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi, (n = 0,1,2...)$.

Знайти: $x(t)$.

Аналіз і розв'язання

Якщо тіло бере участь у двох коливальних рухах, що відбувається вздовж однієї і тієї самої прямої, його результуючий рух відбуватиметься також вздовж тієї самої прямої. При цьому користуватимемося методом векторних діаграм. Результуюче зміщення у будь-який момент часу дорівнює сумі незалежних зміщень, тобто $x = x_1 + x_2$ (рис. 5.1).

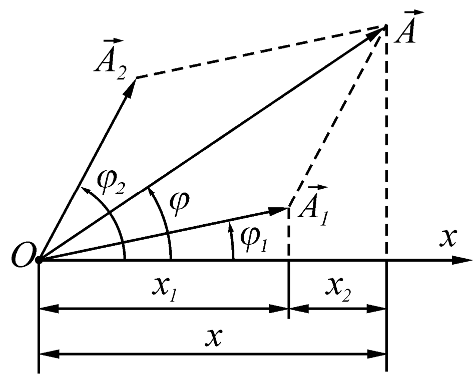


Рисунок 5.1

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ здійснюють обертання з однаковими кутовими швидкостями ω, зсув фаз між ними $(\varphi_1 - \varphi_2)$ з часом не змінюється і вектор $\vec{A}$ також обертатиметься з кутовою швидкістю ω. Тоді результуюче коливання також буде гармонічним і рівняння матиме вигляд:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

де A – амплітуда результуючого коливання, φ – початкова фаза.

Користуючись рис. 5.1, одержуємо:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (5.4)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

З рівняння (5.4) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ $(n = 0,1,2...)$, то

$A = A_1 + A_2$. Коли $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, тобто складові коливання відбуваються у протилежних фазах, то амплітуда результуючого коливання $A = |A_2 - A_1|$, отже за означенням амплітуда – величина додатна.

Відповідь: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, де $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$; а) $A = A_1 + A_2$; б) $A = |A_2 - A_1|$.

Задача 3. Знайти траєкторію результуючого руху, якщо тіло водночас бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливальних рухах, частоти яких однакові.

Дані: $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Знайти: $y(x)$.

Аналіз і розв'язання

Відносно координатних осей Ox і Oy, які розташовані у напрямках коливальних рухів, рівняння коливань матиме вигляд

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Перепишемо рівняння так:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_1 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_1;$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_2 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_2.$$

Помножимо перше рівняння на $\cos\varphi_2$, а друге – на $\cos\varphi_1$ і знайдемо їх різницю; потім помножимо перше рівняння на $\sin\varphi_2$, а друге – на $\sin\varphi_1$ і також знайдемо різницю. Одержимо:

$$\frac{x}{A_1}\cdot\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega\ \ t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{5.5}$$

$$\frac{x}{A_1}\cdot\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega\ \ t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{5.6}$$

Рівняння (5.5) та (5.6) піднесемо у квадрат і почленно додамо їх. Внаслідок цього матимемо:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{5.7}$$

Співвідношення (5.7) є рівнянням траєкторії результуючого руху тіла, що водночас бере участь у двох коливаннях, напрями яких взаємно перпендикулярні. У загальному випадку це рівняння є рівнянням еліпса. Орієнтація еліпса відносно осей координат і його форма визначаються значенням амплітуд A_1 і A_2 та величиною різниці фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складових коливань. Розглянемо окремі випадки.

1) Різниця фаз дорівнює нулю, тобто $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$.

У цьому разі рівняння (5.7) набуває вигляду

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0.$$

Звідси маємо

$$y = \frac{A_2}{A_1}x.$$

Траєкторією результуючого руху є пряма лінія, що проходить через початок координат і нахилена до осі Ox під кутом $\mathrm{arctg}\frac{A_2}{A_1}$. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$. Траєкторією руху тіла також буде пряма лінія, рівняння якої $y = -\frac{A_2}{A_1}x$. Вона утворює з віссю Ox кут $\mathrm{arctg}(-\frac{A_2}{A_1})$.

2) Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Тоді рівняння (5.7) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Отже, траєкторія результуючого руху має вигляд еліпса, півосі якого A_1 і A_2 орієнтовані вздовж координатних осей Ox і Oy.

Відповідь: $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Задача 4. Встановити закон втрати енергії з часом для затухаючих механічних коливань частинки, якщо m – маса частинки, r – коефіцієнт опору.

Дані: m, r.

Знайти: $E(t)$.

Аналіз і розв'язання

Розсіювання енергії коливальною системою при затухаючих коливаннях характеризується дією сил опору або тертя. Для механічних коливань, коли швидкість коливального руху невелика, сила опору пропорційна величині швидкості і спрямована завжди проти руху, тобто

$$F_o = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt},$$

де r – коефіцієнт опору.

Рівняння динаміки має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}. \qquad (5.8)$$

Рівняння (5.8) називають диференціальним рівнянням згасаючих коливань. Розглядатимемо такі згасаючі коливання, коли періодичність руху зберігається. Рівняння руху тіла при цьому матиме вигляд:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi).$$

Встановимо характер зміни амплітуди згасаючих коливань з часом. Втрати енергії коливального руху тілом при згасаючих коливаннях визначається роботою сил опору. За час dt втрати енергії

$$dE = F_o dx = -r\upsilon\upsilon dt = -r\upsilon^2 dt.$$

Перепишемо цей вираз так:

$$\frac{dE}{dt} = -r\upsilon^2 = -\frac{2r}{m}\cdot\frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (5.9)$$

Вираз (5.9) можна використовувати для визначення середніх втрат енергії за час одного періоду. Середнє значення кінетичної енергії коливального руху дорівнює половині його повної енергії, тобто $E_k = \frac{1}{2}E$, тоді співвідношення (5.9) можна записати як

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{r}{m}E = -2\beta E, \qquad (5.10)$$

де $2\beta = \frac{r}{m}$, коефіцієнт β називають коефіцієнтом затухання. З (5.10) видно, що швидкість зменшення енергії при затухаючих коливаннях пропорційна самій енергії. Перепишемо вираз (5.10) у вигляді

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt.$$

Звідси одержимо закон втрат енергії з часом

$$E = E_0 e^{-2\beta t},$$

де E_0 – значення енергії у момент часу $t = 0$.

Відповідь: $E = E_0 e^{-2\beta t}$.

Задача 5. Порівняти значення амплітуди коливань при резонансі, здійснених тілом під дією сталої сили, величина якої дорівнює амплітудному значенню F_0, із амплітудою вимушених коливань під дією цієї самої сили. Прийняти, що $\beta << \omega_0$.

Дані: F_0, $\beta << \omega_0$.

Знайти: $\frac{A_{рез}}{A}$.

Аналіз і розв'язання

Частоту зміни змушуючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають резонансною частотою $\omega_{рез}$. Явище, при якому амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають явищем резонансу. Резонансне значення амплітуди

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \tag{5.11}$$

де β – коефіцієнт згасання; m – маса тіла.

Якщо $\beta << \omega_0$, то з (5.11) одержимо, що величина амплітуди коливань при резонансі

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}.$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{5.12}$$

де ω – частота вимушених коливань; F_0 – амплітуда змушуючої сили.

Коли на тіло діє стала сила F_0, то $\omega = 0$ і з (5.12) маємо, що

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0}.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{A_{рез}}{A} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Звідси видно, що відносне збільшення амплітуди коливань при резонансі визначається відношенням частоти власних коливань до коефіцієнта згасання. Для систем з малим затуханням амплітуда резонансних коливань може значно перевищувати величину зміщення при дії сталої сили.

Відповідь: $\frac{A_{рез}}{A} = \frac{\omega_0}{2\beta}$.

Задача 6. Тонкий обруч, що підвішений на вбитий у стіну цвях, здійснює гармонічні коливання з періодом $T = 1{,}56$ с у площині паралельній стіні. Визначити радіус обруча.

Дано: $T = 1{,}56$ с.

Знайти: R.

Аналіз і розв’язання

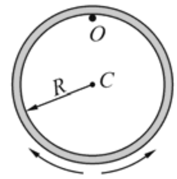


Рисунок 5.2

Тонкий обруч під дією сили тяжіння здійснює коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, що проходить через точку O, яка не співпадає з центром мас C обруча (рис. 5.2).

Це є приклад фізичного маятника. Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \tag{5.13}$$

де J – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O; l – відстань між точкою підвісу O і точкою мас C маятника; m – маса обруча; g – прискорення вільного падіння.

Згідно з теоремою Штейнера, момент інерції J диска відносно осі, яка не проходить через центр його мас,

$$J = J_0 + ma^2,$$

де J_0 – момент інерції обруча відносно осі, що проходить через центр мас обруча; a – відстань між осями. Враховуючи те, що $J_0 = mR^2$ (тонкостінний диск); $a = R$, остання формула запишеться у вигляді

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2. \tag{5.14}$$

Підставивши вираз (5.14) у формулу (5.13), враховуючи, що $l = R$, знайдемо радіус диска:

$$R = \frac{T^2 g}{8\pi^2} = 30{,}2\,\text{см}.$$

Відповідь: $R = 30{,}2\,\text{см}$.

Задача 7. Добротність Q коливальної системи дорівнює 314. Визначити, у скільки разів зміниться амплітуда коливань за час, протягом якого система здійснює $N = 110$ повних коливань.

Дано: $Q = 314$, $N = 110$.

Знайти: $\dfrac{A_0}{A_N}$.

Аналіз і розв’язання

Амплітуда згасаючих коливань зміниться з часом по закону

$$A_N = A_0 e^{-\beta t}, \tag{5.15}$$

де A_0 – початкова амплітуда (в момент інерції $t = 0$); β – коефіцієнт згасання; t – час, за який здійснюється N коливань.

Коефіцієнт згасання знайдемо з виразу логарифмічного декремента згасання: $\lambda = \beta T$, звідки

$$\beta = \frac{\lambda}{T}, \tag{5.16}$$

де T – умовний період згасання коливань. Час, за який здійснюється N коливань,

$$t = NT. \tag{5.17}$$

Враховуючи формули (5.16) і (5.17), вираз (5.15) запишеться у вигляді

$$A_N = A_0 e^{-\lambda N}. \tag{5.18}$$

Добротність коливальної системи

$$Q = \frac{\pi}{\lambda},$$

звідки логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \frac{\pi}{Q}.$$

Підставивши цей вираз у (5.18), отримуємо

$$A_N = A_0 e^{-\frac{\pi N}{Q}},$$

звідки

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{\frac{\pi N}{Q}} = 3.$$

Відповідь: $\frac{A_0}{A_N} = 3$ – амплітуда зменшиться у 3 рази.

5.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Амплітуда гармонічних коливань дорівнює 50 мм, період – 4 с, початкова фаза – $\frac{\pi}{4}$. Написати рівняння цього коливання. Знайти відхилення частинки від рівноваги при $t = 0$ і $t = 1{,}5$ с.

Відповідь: $x = 0{,}05\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$ м, $x_1 = 0{,}0352$ м, $x_2 = 0$.

Задача 2. Написати рівняння гармонічного коливального руху, якщо максимальне прискорення частинки дорівнює $49{,}3$ см/с^2. Період коливання 2 с, а відхилення частинки від рівноваги при $t = 0$ має значення 25 мм.

Відповідь: $x = 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(kt + \frac{\pi}{6}\right)$ м.

Задача 3. Чому дорівнює відношення кінетичної енергії частинки, яка виконує гармонічне коливання, до її потенціальної енергії, при $t_1 \frac{T}{12}$ с, $t_2 = \frac{T}{8}$ с, $t_3 = \frac{T}{6}$ с, де T – період коливань. Початкова фаза дорівнює нулю.

Відповідь: $\frac{E_к}{E_п} = 3$, $\frac{E_к}{E_п} = 1$, $\frac{E_к}{E_п} = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Частинка бере участь у двох коливаннях однакового періоду з однаковими початковими фазами. Амплітуди коливань $A_1 = 3$ см і $A_2 = 4$ см. Знайти амплітуду результуючого коливання, якщо коливання відбуваються в одному напрямі; коливання взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $A = 7$ см, $A = 5$ см.

Задача 5. Визначити потенціальну та кінетичну енергію математичного маятника в залежності від часу та кута відхилення від положення рівноваги для малих амплітуд коливань $(\varphi_m << 1)$. Маса маятника – m, довжина – l.

Відповідь: $E_к = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$, $E_п = \frac{mgl\varphi^2}{2}$, $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$.

Задача 6. Визначити потенціальну та кінетичну енергію фізичного маятника в залежності від часу t та кута відхилення φ від положення рівноваги для малих амплітуд коливань $(\varphi_m << 1)$. Маса маятника – m, момент інерції відносно осі обертання $-J_0$, відстань від осі обертання до центра ваги – L.

Відповідь: $E_к = \frac{J_0\dot{\varphi}^2}{2}$, $E_п = \frac{mgL\varphi^2}{2}$, $\ddot{\varphi} + \frac{mLg}{J_0}\varphi = 0$.

Задача 7. Рівняння затухаючих коливань має вигляд $x = 5e^{-0,25t} \sin\frac{\pi}{2}t$ м. Знайти швидкості точок, які виконують коливання в момент часу $t = 0$; T; $2T$; $3T$; $4T$.

Відповідь: $\upsilon_1 = 7,85$ м/с; $\upsilon_2 = 2,82$ м/с; $\upsilon_3 = 1,06$ м/с; $\upsilon_4 = 0,39$ м/с; $\upsilon_5 = 0,14$ м/с.

Задача 8. Амплітуда затухаючих коливань математичного маятника за 1 хв зменшилася вдвічі. У скільки разів вона зменшиться за 2 хв?

Відповідь: у 4 рази.

Задача 9. За час 100 с система встигає виконати 100 коливань. За цей час амплітуда зменшується у 2,718 рази. Визначити: коефіцієнт згасання коливань β; логарифмічний декремент згасання λ, добротність системи Q.

Відповідь: $\beta = 10^{-2}$ с$^{-1}$, $\lambda = 10^{-2}$, $Q = 314$.

Задача 10. Добротність коливальної системи $Q = 2$, частота вільних коливань $\omega = 100$ с$^{-1}$. Знайти власну частоту коливань системи ω_0.

Відповідь: $\omega_0 = 103$ с$^{-1}$.

Задача 11. Коливальна система виконує згасаючі коливання із частотою $\nu = 1000$ Гц. Знайти частоту власних коливань ν_0, якщо резонансна частота $\nu_{рез} = 998$ Гц.

Відповідь: $\nu_0 = 1002$ Гц.

Задача 12. Пружину із жорсткістю $k = 10$ Н/м навантажили тягарем масою m. Система знаходиться в рідині, коефіцієнт сили опору якої дорівнює $r = 0{,}1$ кг/с. Визначити частоту ν_0 власних коливань і резонансну частоту $\nu_{рез}$.

Відповідь: $\nu_0 = 5{,}03$ Гц, $\nu_{рез} = 4{,}91$ Гц.

Задача 13. Визначити фазу коливання матеріальної точки через 2 с після початку коливань, якщо точка здійснює коливання з періодом $T = 0{,}8$ с.

Відповідь: $\varphi = 5\pi$ рад.

Задача 14. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\cos\omega t$ та $y = -\cos 2\omega t$. Записати рівняння траєкторії руху точки.

Відповідь: $y = -0{,}5x^2 + 1$.

Задача 15. Чому дорівнює період коливань математичного маятника, підвішеного у вагоні, що рухається горизонтально з прискоренням a?

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

Задача 16. Однорідний диск радіусом R коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через одну з твірних бічної поверхні. Знайти період коливань.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$.

Задача 17. Період T_0 власних коливань пружинного маятника дорівнює $0{,}55$ с. У в'язкому середовищі період T цього самого маятника становить $0{,}56$ с. Визначити резонансну частоту коливань.

Відповідь: $\nu_{рез} = 1{,}75$ Гц.

Задача 18. Знайти число N повних коливань, коли енергія системи зменшилась у $n = 2$ рази. Логарифмічний декремент затухання $\lambda = 0{,}01$.

Відповідь: $N = 35$.

Задача 19. Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти $\nu_0 = 1$ кГц власних коливань системи з коефіцієнтом згасання $\beta = 400\ \text{с}^{-1}$.

Відповідь: $\Delta\nu = \dfrac{\beta^2}{4\pi^2\nu_0} = 4{,}05$ Гц.

Задача 20. На якій відстані x від центра слід підвісити тонкий стрижень заданої довжини l, щоб одержати фізичний маятник, що коливається з максимальною частотою. Чому дорівнює ця частота?

Відповідь: $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$; $\omega_{\max} = \sqrt{(g/l)\sqrt{3}}$.

Задача 21. Маса Місяця у 81 раз менше маси Землі, а радіус Землі у 3,7 рази більше радіуса Місяця. Як зміниться період коливань маятника при перенесенні його з Землі на Місяць?

Відповідь: збільшиться приблизно у 2,4 рази.

Задача 22. Годинник з секундним маятником, що має період коливань $T_0 = 1$с, на поверхні Землі іде точно. На скільки відставатиме цей годинник за добу, якщо його підняти на висоту $h = 200$м над поверхнею Землі?

Відповідь: $\Delta t = 2,7$с.

Задача 23. Знайти потенціальну енергію E_n математичного маятника масою $m = 200$г в положенні, що відповідає куту відхилення нитки від вертикалі $\alpha = 10^\circ$, якщо частота коливань $\nu = 0,5\,с^{-1}$. Вважати, що потенціальна енергія маятника в положенні рівноваги дорівнює нулю.

Відповідь: $E_n = \dfrac{mg^2(1-\cos\alpha)}{4\pi^2\nu^2} \approx 2,9\cdot 10^{-3}$Дж.

Задача 24. З яким прискоренням a і в якому напрямку має рухатися кабіна ліфта, щоб секундний маятник, що знаходиться в ній, за час $t = 2$хв 30с здійснив $n = 100$ коливань?

Відповідь: $a = g\left(1 - \dfrac{n^2 T_0^2}{t^2}\right) \approx 3,54$ м/с^2.

Задача 25. Тягарець масою $m = 250$г, підвішений до пружини, коливається по вертикалі з періодом $T = 1$с. Визначити жорсткість k пружини.

Відповідь: $k = 4,87$ Н/м.

Задача 26. До спіральної пружини підвісили тягарець, внаслідок чого пружина розтягнулася на $x = 9$см. Яким буде період T коливань тягарця, якщо його дещо відтягнути вниз, а потім відпустити?

Відповідь: $T = 0,6$с.

Задача 27. Гиря, підвішена до пружини, коливається по вертикалі з амплітудою $A = 4$см. Визначити повну енергію E коливань гирі, якщо жорсткість k пружини дорівнює 1кН/м.

Відповідь: $E = 0,8$Дж.

Задача 28. Тонкий обруч, підвішений на цвях, що вбитий горизонтально в стіну, коливається у площині, паралельній стіні. Радіус R обруча дорівнює $30\,\text{см}$. Обчислити період T коливань обруча.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 1{,}55\,\text{с}$.

Задача 29. Логарифмічний декремент згасання математичного маятника $\lambda = 0{,}15$. Визначте, у скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника.

Відповідь: $\dfrac{A_1}{A_2} = e^{\lambda} = 1{,}16$.

Задача 30. Амплітуда затухаючих коливань маятника за час $t_1 = 1\,\text{хв}$ зменшилась в $n_1 = 3$ рази. За який час t_2, рахуючи від початкового моменту, амплітуда цих коливань зменшиться в $n_2 = 81$ разів?

Відповідь: $t_2 = \dfrac{t_1 \ln n_2}{\ln n_1} = 4\,\text{хв}$.

6 ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

6.1 Мета заняття

Навчити користуватися законами спеціальної теорії відносності для кількісного визначення зміни довжини, часу, енергії, імпульсу тіл, що рухаються із швидкостями, близькими до швидкості світла.

6.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Вивчити теоретичний матеріал, використовуючи конспект лекцій та [1, розд. 5; 2, розд. 5; 5, §5]. Звернути увагу на те, що релятивістський закон складання швидкостей випливає з перетворень Лоренца, а також на те, що незбереження маси спокою не означає порушення закону збереження маси взагалі. У теорії відносності справедливий закон збереження релятивістської маси, він взаємопов'язаний з законом збереження енергії. Але з закону взаємозв'язку енергії та маси аж ніяк не випливає можливість перетворення маси на енергію і навпаки. Перетворення енергії системи з однієї форми на іншу супроводжується перетвореннями маси. Наприклад, у явищі народження і знищення пари електрон-позитрон маса не переходить в енергію. Маса спокою частинок (електрона і позитрона) перетворюється на масу фотонів, тобто на масу електромагнітного поля.

6.3 Основні закони та формули

1. Перетворення Лоренца при переході від системи K до системи K'

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \end{cases}$$

де система відліку K' рухається зі швидкістю υ в позитивному напрямку осі x системи відліку K, причому осі x' і x збігаються, а осі y' та y, z і z' паралельні; c – швидкість поширення світла у вакуумі.

2. Релятивістське вповільнення часу

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де τ – проміжок часу між двома подіями, що відбуваються в одній точці, відлічений годинниками, що рухаються разом з тілом; τ' – проміжок часу між тими самими подіями, відлічений нерухомими годинниками.

3. Релятивістське (лоренцево) скорочення довжини

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

де l_0 – довжина стрижня, виміряна в системі відліку, щодо якої стрижень не рухається (власна довжина); l – довжина стрижня, в системі відліку, щодо якої він рухається зі швидкостю υ.

4. Релятивістський закон додавання швидкостей при переході від системи K до системи K'

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x},$$

де система відліку K' рухається зі швидкістю υ в позитивному напрямку осі x системи відліку K, причому осі x' та x збігаються, а осі y' та y, z і z' паралельні.

5. Інтервал між подіями

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2},$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$ – проміжок часу між подіями 1 і 2; $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$ – відстань між точками тривимірного простору, у яких ці події відбулися.

6. Релятивістська маса частинки:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – швидкість частинки.

7. Релятивістський імпульс частинки

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – швидкість частинки.

8. Основний закон релятивістської динаміки

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

де $\vec{p}$ – релятивістський імпульс частинки.

9. Енергія спокою частинки

$$E_0 = m_0 c^2,$$

де m_0 – маса спокою частинки; c – швидкість поширення світла у вакуумі.

10. Повна енергія релятивістської частинки

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – її швидкість.

11. Кінетична енергія релятивістської частинки

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

12. Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad pc = \sqrt{T\left(T + 2m_0 c^2\right)},$$

де E – повна енергія; T – кінетична енергія; p – релятивістський імпульс.

6.4 Контрольні запитання та завдання

1. Чим відрізняється релятивістська частинка від класичної?
2. Запишіть формулу зв'язку координат і часу "нерухомої" та "рухомої" систем (перетворення Лоренца).
3. Запишіть формулу зв'язку проміжків часу, за які відбувається яка-небудь подія у "нерухомій" і "рухомій" системах.
4. Запишіть формулу релятивістського додавання швидкостей.
5. Запишіть формулу зв'язку довжини тіла в "нерухомій" і "рухомій" системах.
6. Запишіть формулу зв'язку релятивістської маси з масою спокою.
7. Запишіть релятивістську формулу кінетичної енергії тіла.
8. Який вигляд має зв'язок між масою та енергією?
9. Що таке енергія спокою тіла (частинки)?
10. Який вигляд має зв'язок між повною енергією тіла (частинки), енергією спокою та імпульсом?

6.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. На скільки відсотків зміниться повздовжній розмір протона і електрона після проходження ними різниці потенціалів $U = 10^6$ В?

Дані: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 10^6$ В.

Знайти: η_e, η_p .

Аналіз і розв’язання

В обох випадках кінетична енергія частинки дорівнює

$$T = A = eU = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ eВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ eВ}.$$

Оскільки

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = eU ,$$

де m_0 – маса спокою частинки (у даному випадку m_e і m_p), $\beta^2 = \upsilon^2 / c^2$, то

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2}. \tag{6.1}$$

Поздовжній розмір частинок

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2} .$$

Відносна зміна поздовжніх розмірів частинок з урахуванням (6.1)

$$\eta = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{eU}{eU + m_0 c^2} .$$

Оскільки для електрона $m_e c^2 \approx 0{,}512$ МеВ, а для протона $m_p c^2 = 939$ МеВ, то $\eta_e = 66{,}1\,\%$, $\eta_p = 0{,}1\,\%$.

Відповідь: $\eta_e = 66{,}1\,\%$, $\eta_p = 0{,}1\,\%$.

Задача 2. Протон і α-частинка проходять однакову прискорюючу різницю потенціалів U, після чого маса протона склала третину маси α-частинки. Визначити різницю потенціалів, а також швидкості протона і α-частинки.

Дані: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{27}$ кг, $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Знайти: $U,\ \upsilon_p,\ \upsilon_\alpha$.

Аналіз і розв’язання

Оскільки повна енергія частинки пропорційна її масі, то

$$E_p = \frac{1}{3} E_\alpha , \tag{6.2}$$

де E_p і E_α – повні енергії протона α-частинки.

Але

$$E_p = eU + m_p c^2, \tag{6.3}$$

$$E_\alpha = eU + m_\alpha c^2. \tag{6.4}$$

Підставивши (6.3) та (6.4) в (6.2), отримаємо

$$eU + m_p c^2 = \frac{1}{3}(eU + m_\alpha c^2).$$

Звідси

$$U = \frac{(m_\alpha - 3m_p)c^2}{2e}.$$

Зробивши обчислення за цією формулою, отримаємо $U = 461\,\text{МеВ}$. Швидкість протона знайдемо із співвідношення

$$eU = m_p c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_p c^2}{eU + m_p c^2} = 0,6709;$$

$$\beta = \frac{\upsilon_p}{c} = 0,7416;\ \upsilon_p = c\beta = 0,7416 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{м/с} = 2,22 \cdot 10^8\ \text{м/с};$$

$$\upsilon_p = c\beta = 0,7416 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{м/с} \approx 2,22 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Для α-частинки

$$eU = m_\alpha c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right);$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_\alpha c^2}{eU + m_\alpha c^2} = 0,8902;$$

$$1-\beta^2 = 0,7925;\ \beta = 0,4555;$$

$$\upsilon_\alpha = c\beta = 0,4555 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{м/с} \approx 1,37 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Відповідь: $U = 461\,\text{МеВ}$, $\upsilon_p \approx 2,22 \cdot 10^8$ м/с, $\upsilon_\alpha \approx 1,37 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 3. Визначте швидкість нестабільної частинки, якщо її час життя за годинниками спостерігача із Землі збільшився у $n = 1,8$ разів.

Дані: $n = \dfrac{\tau'}{\tau} = 1,8$.

Знайти: υ.

Аналіз і розв'язання

Систему відліку K зв'яжемо із часткою, тоді проміжок часу між виникненням і розпадом частинки в цій системі дорівнює її власному часу життя τ. Оскільки система K рухається разом із часткою, те ці події відбуваються в одній точці, що є необхідною умовою застосування формули, що описує релятивістське вповільнення ходу годин.

Для системи K', пов'язаної із Землею, час життя частинки – τ'. Тоді

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

звідки

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = n, \tag{6.5}$$

(урахували умову завдання). З виразу (6.5) шукана швидкість

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 0{,}831c.$$

Відповідь: $\upsilon = 0{,}831\,c$**.**

Задача 4. Чи долетить до поверхні Землі нестабільна частинка, що виникла на висоті $h = 4$ км, якщо вона володіє власним часом життя $\tau = 4{,}5$ мкс та летить зі швидкістю $\upsilon = 0{,}95\,c$ в напрямку до Землі?

Дані: $h = 4 \cdot 10^3$ м, $\upsilon = 0{,}95\,c$, $\tau = 4 \cdot 10^{-6}$ с.

Знайти: s.

Аналіз і розв'язання

Відстань, що пройде частинка в системі відліку, пов'язаній із Землею, визначається як

$$s = \upsilon\tau', \tag{6.6}$$

де τ' – час життя частинки, вимірюваний за годинниками на Землі.

Проміжок часу τ' пов'язаний із власним часом життя частинки τ співвідношенням

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.7}$$

Підставивши (6.7) до (6.6), одержуємо шукану відстань

$$s = \frac{\upsilon\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Обчислюючи, одержуємо: $s = 4{,}11 \cdot 10^3$ м $> h$, тобто частинка долетить до Землі.

Відповідь: $s > h$, частинка до Землі долетить.

Задача 5. З космічного корабля, що наближається до Землі зі швидкістю $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$, по ходу руху корабля стартувала ракета зі швидкістю $\upsilon_2 = 0{,}5\,c$. З якою швидкістю u ракета наближається до Землі?

Дані: $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$, $\upsilon_2 = 0{,}5\,c$.

Знайти: u.

Аналіз і розв'язання

Систему відліку K зв'яжемо із Землею, систему відліку K' – з космічним кораблем. Тоді швидкість ракети u в системі K *і* є шукана швидкість зближення. Відповідно до релятивістського закону додавання швидкостей,

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}, \tag{6.8}$$

де за умовою завдання швидкість руху космічного корабля відносно Землі $\upsilon = \upsilon_1$, швидкість ракети відносно космічного корабля $u' = \upsilon_2$.

Підставивши ці значення у формулу (6.8), знайдемо шукану швидкість:

$$u = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{1 + \frac{\upsilon_1\upsilon_2}{c^2}} = 0{,}846c.$$

Відповідь: $u = 0{,}846\,c$.

Задача 6. Визначте релятивістський імпульс частинки, якщо її повна енергія $E = 1{,}5$ ГеВ, а швидкість $\upsilon = 0{,}5\,c$.

Дані: $E = 1{,}5$ ГэВ $= 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\upsilon = 0{,}5\,c$.

Знайти: p.

Аналіз і розв'язання

Релятивістський імпульс частинки

$$p = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{6.9}$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – її швидкість.

Домножуючи чисельник та знаменник виразу (6.9) на c^2, одержимо шуканий імпульс:

$$p = \frac{m_0 \upsilon c^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{E\upsilon}{c^2} = 0,4 \cdot 10^{-18}\ \text{Н} \cdot \text{с},$$

(урахували, що повна енергія $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$).

Відповідь: $p = 0,4 \cdot 10^{-18}\ \text{Н} \cdot \text{с}$.

6.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Кінетична енергія частинки в $n = 2$ рази менше її енергії спокою. Визначте швидкість руху частинки.

Відповідь: $\upsilon = 0,745\, c$.

Задача 2. Метрова лінійка рухається повз спостерігача зі швидкістю, що складає $60\,\%$ швидкості світла. Якою видаватиметься спостерігачу її довжина?

Відповідь: $l = 80$ см.

Задача 3. Визначте кінетичну енергію протона, якщо його релятивістський імпульс $p = 2 \cdot 10^{-18}\ \text{Н} \cdot \text{с}$. Маса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Відповідь: $T = 4,82$ ГеВ.

Задача 4. Фотонна ракета рухається відносно Землі зі швидкістю $\upsilon = 0,6\, c$. У скільки разів сповільниться перебіг часу в ракеті з точки зору земного спостерігача?

Відповідь: $n = 1,25$.

Задача 5. У системі K' перебуває у спокої стрижень, власна довжина l_0 якого дорівнює 1 м. Стрижень розміщений під кутом $\varphi_0 = 45^0$ до осі x'. Визначити довжину l стрижня і кут у системі K, якщо швидкість υ_0 системи K' відносно K дорівнює $0,8\, c$.

Відповідь: $l = l_0\sqrt{1 - (\upsilon_0/\text{c}^2)\cos^2\varphi} = 0,825$ м; $\varphi = \text{arctg}\left(\dfrac{\text{tg}\varphi_0}{1 - \upsilon^2 / c^2}\right) = 59^0$.

Задача 6. З якою швидкістю рухався годинник у системі відліку *K*, якщо за $t = 15$ с (в цій системі) він відстав від годинника цієї системи на $\Delta t = 0,5$ с?

Відповідь: $\upsilon = 7,8 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 7. У лабораторній системі відліку (*K*-система) мезон з моменту народження до моменту розпаду пролетів відстань $l = 75$ м. Швидкість υ мезона дорівнює $0,995\, c$. Визначити власний час життя τ_0 мезона.

Відповідь: $\tau_0 = \frac{1}{\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 25$ нс.

Задача 8. Дві релятивістські частинки рухаються в лабораторній системі відліку із швидкостями $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$ і $\upsilon_2 = 0{,}9\,c$ вздовж однієї прямої. Визначити їх відносну швидкість u_{21}, якщо частинки рухаються у протилежних напрямках; в одному напрямку.

Відповідь: $u''_{21} = 0{,}195\,c$; $u'_{21} = 0{,}974\,c$.

Задача 9. Два надзвукових реактивних літаки йдуть на зустрічних курсах зі швидкостями 1500 і 3000 км/год відносно Землі. Якою буде швидкість першого літака, виміряна пасажиром другого літака?

Відповідь: $\upsilon = 4499{,}999999986$ км/год.

Задача 10. Для спостерігача, нерухомого відносно системи K, водночас у двох точках на відстані $l = 10^5$ км відбулися дві події. Визначте проміжок часу τ' між цими подіями в системі K', що рухається щодо системи K зі швидкістю $\upsilon = 0{,}65\,c$.

Відповідь: $\tau' = \dfrac{\upsilon l}{c^2\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = 0{,}258$ с.

Задача 11. Визначте швидкість, з якою тіло має віддалятися від спостерігача, щоб його лінійні розміри зменшилися на 5 %.

Відповідь: $\upsilon = 0{,}31c$.

Задача 12. Іон, що вилетів з прискорювача, випустив фотон у напрямку свого руху. Визначити швидкість фотона відносно прискорювача, якщо швидкість υ іона відносно прискорювача дорівнює $0{,}8\,c$.

Відповідь: $\upsilon = c$.

Задача 13. Прискорювач надав радіоактивному ядру швидкість $\upsilon_1 = 0{,}4$ с. У момент вильоту з прискорювача ядро викинуло в напрямку свого руху β-частинку із швидкістю $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$ відносно прискорювача. Знайти швидкість u_{21} частинки відносно ядра.

Відповідь: $u_{21} = 0{,}5\,c$.

Задача 14. Частинка рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}5\,c$. У скільки разів релятивістська маса частинки більше маси спокою?

Відповідь: $n = 1{,}15$.

Задача 15. З якою швидкістю υ рухається частинка, якщо її релятивістська маса утричі більше маси спокою?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}943\,c$.

Задача 16. На скільки відсотків релятивістська маса частинки більше маси спокою при швидкості $\upsilon = 30$ Мм/с?

Відповідь: $\Delta\varepsilon = 0{,}5\%$.

Задача 17. Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}8\,c$. Визначити релятивістський імпульс електрона.

Відповідь: $p = 3{,}64 \cdot 10^{-22}$ Н·с.

Задача 18. Визначте кінетичну енергію релятивістського протона, якщо його повна енергія в $n = 1{,}5$ рази більше за його енергію спокою.

Відповідь: $T = (n-1)mc^2 = 0{,}47$ ГеВ.

Задача 19. Повна енергія тіла зросла на $\Delta E = 1$ Дж. На скільки при цьому зміниться маса тіла?

Відповідь: $\Delta m = 1{,}11 \cdot 10^{-17}$ кг.

Задача 20. Визначити, на скільки має збільшитися повна енергія тіла, щоб його релятивістська маса зросла на $\Delta m = 1$ г?

Відповідь: ΔE=90 ТДж.

Задача 21. Кінетична енергія електрона і протона дорівнює 10 МеВ. У скільки разів їх релятивістські маси більше мас спокою?

Відповідь: $n_1 = 20{,}6$; $n_2 = 1{,}01$.

Задача 22. Кінетична енергія частинки виявилася рівною її енергії спокою. Яка швидкість частинки?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}866\,c$.

Задача 23. Визначте прискорювальну різницю потенціалів U, що надає електрону швидкість $\upsilon = 0{,}7\,c$.

Відповідь: $U = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) = 2{,}05 \cdot 10^5$ В.

Задача 24. Кінетична енергія частинки виявилася рівною її енергії спокою. У скільки разів зросте імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться у 4 рази?

Відповідь: $n = 2{,}82$.

Задача 25. Визначте релятивістський імпульс електрона, якщо його швидкість $\upsilon = 0{,}45\,c$, а кінетична енергія $T = 0{,}3$ МеВ.

Відповідь: $p = m\upsilon\left(1 + \dfrac{T}{mc^2}\right) = 1{,}95 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

Задача 26. На космічному кораблі-супутнику знаходиться годинник, що синхронізований до польоту з земним. Швидкість υ_0 супутника складає 7,9 км/с. На скільки відстане годинник на супутнику за вимірами земного спостерігача за час $\tau_0 = 0{,}5$ року?

Відповідь: $\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}\tau_0 = 0{,}57\,c$.

Задача 27. Імпульс p релятивістської частинки дорівнює m_0c. Під дією зовнішньої сили імпульс частинки збільшився вдвічі. У скільки разів зростуть при цьому кінетична і повна енергії частинки?

Відповідь: $n_1 = 2,98$; $n_2 = 1,58$.

Задача 28. Визначте збільшення релятивістського імпульсу частинки, якщо її швидкість $\upsilon = 0,75\,c$.

Відповідь: у 1,5 рази.

Задача 29. Визначте релятивістський імпульс p електрона, що рухається зі швидкістю $\upsilon = 0,97\,c$.

Відповідь: $p = 1,09 \cdot 10^{-21}$ Н · с.

Задача 30. Визначте релятивістський імпульс електрона, якщо його швидкість $\upsilon = 0,45\,c$, а кінетична енергія $T = 0,3$ МеВ.

Відповідь: $p = m\upsilon\left(1 + \frac{T}{mc^2}\right) = 1,95 \cdot 10^{-23}$ Н · с.

7 МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ. ТЕРМОДИНАМІКА

7.1 Мета заняття

Засвоїти основні закони молекулярно-кінетичної теорії газів, навчитися їх застосовувати під час розв’язання задач, оволодіти елементарним розрахунком термодинамічних процесів.

7.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Піж час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [1, розд. 8, 9, 10; 2, розд. 7, 8, 9; 5, глава 2]. Звернути увагу на основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів, функції розподілу, з’ясувати суть першого й другого законів термодинаміки. Після вивчення теорії відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв’язки задач, що наведені у прикладах.

7.3 Основні закони і формули

1. Кількість речовини

$$\nu = \frac{N}{N_A} \text{ або } \nu = \frac{m}{M},$$

де N – кількість атомів або молекул речовини; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; m – маса речовини; M – її молярна маса.

2. Концентрація молекул – кількість молекул в одиниці об’єму

$$n = \frac{N}{V}.$$

3. Молярна маса речовини – чисельно дорівнює масі 1 моля речовини кількості 1 моль

$$M = m_0 N_A,$$

де m_0 – маса одного атома (молекули).

4. Молярна маса суміші газів:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\nu_i},$$

де m_i – маса i-ої – компоненти суміші; $\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$ – кількість молів i-ої компоненти суміші.

5. Закон Авогадро: при однакових тиску і температурі в однакових об’ємах міститься одна й та сама кількість молекул довільних газів. Як наслідок: один моль будь-якого газу за нормальних умов займає об’єм V_0= 22,4 л/моль = $22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

6. Закон Дальтона: тиск невзаємодіючої суміші газів p дорівнює сумі парціальних тисків газів p_i

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i .$$

7. Рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \nu RT , \quad \text{або} \quad pV = \frac{m}{M} RT ,$$

де p , V , T – тиск, об’єм, температура ідеального газу; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

8. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle ,$$

де n – концентрація молекул; $\langle E \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

9. Середня кінетична енергія молекули

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

де $i = i_{пост} + i_{об} + 2i_{кол}$ – кількість ступенів свободи молекули ($i_{пост}$ – при поступальному русі, $i_{об}$ – при обертальному русі, $i_{кол}$ – при коливальному русі); $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – термодинамічна температура газу.

10. Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

$$p = nkT .$$

11. Швидкості молекул:

– середня квадратична (теплова) швидкість молекул

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} ;$$

– середня швидкість молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} ;$$

– найбільш імовірна швидкість молекул

$$\upsilon_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} .$$

12. Розподіл Максвелла за модулями швидкості

$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right),$$

13. Барометрична формула (розподіл тиску у полі сили тяжіння)

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} ,$$

де p_0 і p – тиск газу відповідно на нульовій висоті та на висоті h; m_0 – маса частинки; M – молярна маса; g – прискорення вільного падіння; R – універсальна газова стала; k – стала Больцмана.

14. Розподіл Больцмана для частинок в зовнішньому потенціальному полі

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}},$$

де n – концентрація частинок з потенціальною енергією E_n; n_0 – концентрація частинок у точках, де $E_n = 0$.

15. Ймовірність того, що фізична величина x, яка характеризує молекули газу, лежить в інтервалі значень від x до $x + dx$, дорівнює

$$dw(x) = f(x)dx,$$

де $f(x)$ – густина ймовірності, функція розподілу молекул за значеннями даної величини.

16. Середнє значення фізичної величини $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

17. Кількість молекул, для яких фізична величина x, що характеризує молекулу, має значення в інтервалі від x до $x + dx$

$$dN = Ndw(x) = Nf(x)dx.$$

18. Перший закон термодинаміки:

– у диференціальній формі

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

де δQ – кількість теплоти, яку одержала система; dU – зміна внутрішньої енергії системи; δA – робота, яку виконує система над зовнішніми тілами;

– в інтегральній формі

$$Q = \Delta U + A.$$

19. Теплоємність:

– теплоємність тіла

$$C = \frac{\delta Q}{dT};$$

– питома теплоємність тіла

$$c = \frac{\delta Q}{mdT};$$

– молярна теплоємність речовини

$$C_M = M \cdot c = \frac{M}{m}\frac{\delta Q}{dT},$$

де M – молярна маса речовини;

– молярна теплоємність ідеального газу при сталому об'ємі

$$C_V = Mc_V = \frac{M}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{M}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V,$$

$$C_V = \frac{i}{2}R,$$

де c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі; i – кількість ступенів свободи молекули; R – універсальна газова стала;

– молярна теплоємність ідеального газу при сталому тиску

$$C_p = Mc_p = \frac{M}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{M}{m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right];$$

$$C_p = \frac{i+2}{2}R;$$

– питомі теплоємності при сталому об'ємі c_V і сталому тиску c_p.

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

20. Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R.$$

21. Показник адіабати

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

22. Рівняння Пуассона – рівняння газового стану при адіабатичному процесі

$$pV^{\gamma} = const; \quad TV^{\gamma-1} = const; \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const.$$

23. Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = N\langle E\rangle = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_V T = \nu C_V T,$$

де N – кількість молекул газу; $\langle E\rangle$ – середня кінетична енергія молекули; ν – кількість речовини.

24. Робота газу при зміні об'єму газу від початкового об'єму V_1 до кінцевого V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

25. Робота газу

– при ізобаричному процесі ($p = const$)

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right);$$

– при ізотермічному процесі ($T = const$)

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2};$$

– при ізохоричному процесі ($V = const$)

$$A = 0;$$

– при адіабатичному процесі

$$A=\frac{m}{M}C_V\left(T_1-T_2\right)=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_1-T_2\right);$$

$$A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]=\frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

26. Перший закон термодинаміки

– при ізобаричному процесі

$$Q=\Delta U+A=\frac{m}{M}C_V\Delta T+\frac{m}{M}R\Delta T;$$

– при ізотермічному процесі ($\Delta U=0$)

$$Q=A=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1};$$

– при ізохоричному процесі ($A=0$)

$$Q=\Delta U=\frac{m}{M}C_V\Delta T;$$

– при адіабатичному процесі ($Q=0$)

$$A=-\Delta U=-\frac{m}{M}C_V\left(T_2-T_1\right).$$

27. Термічний коефіцієнт корисної дії (ККД) для колового процесу

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1},$$

де Q_1 – кількість теплоти, одержана газом (робочим тілом) від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, передана газом холодильнику.

28. Термічний коефіцієнт корисної дії (ККД) для циклу Карно

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1},$$

де T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура охолоджувача.

29. Зміна (приріст) ентропії внаслідок оборотного процесу

30.

$$dS=\frac{\delta Q}{T}=\frac{dU+pdV}{T};\quad \Delta S=S_2-S_1=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}.$$

30. Формула Больцмана

$$S=k\ln\Omega,$$

де k – стала Больцмана; Ω – термодинамічна ймовірність, тобто кількість мікроскопічних станів, якими може реалізуватися макроскопічний стан.

7.4 Контрольні запитання та завдання

1. Який газ називається ідеальним?
2. Запишіть та проаналізуйте основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів.
3. Чому дорівнює середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу?
4. Чому дорівнює середня кінетична енергія молекул ідеального газу? Як ця величина залежить від числа ступенів свободи?
5. Запишіть та проаналізуйте рівняння Менделєєва – Клапейрона
6. Сформулюйте закон рівнорозподілу енергії за ступенями свободи.
7. Сформулюйте закон Дальтона. Який тиск називається парціальним?
8. Сформулюйте закон Авогадро.
9. Яку величину називають молярною масою? Як розрахувати молярну масу суміші газів?
10. Запишіть функцію розподілу Максвелла молекул газу за модулями їх швидкостей. Який фізичний зміст функції розподілу? Запишіть умову нормування функції розподілу.
11. Як визначити середню, середньоквадратичну та найбільш імовірну швидкості молекул ідеального газу?
12. Як знайти середнє значення фізичної величини, якщо відома функція розподілу?
13. Запишіть барометричну формулу.
14. Запишіть функцію розподілу Больцмана для частинок у зовнішньому потенціальному полі.
15. Що таке теплоємність тіла? Молярна теплоємність? Питома теплоємність?
16. Яка величина називається внутрішньою енергією? Від яких величин залежить внутрішня енергія ідеального газу?
17. Як визначається робота при зміні об'єму тіла?
18. Сформулюйте перший закон термодинаміки.
19. Який процес називається адіабатичним? Запишіть рівняння адіабати.
20. Як визначається коефіцієнт корисної дії теплової машини?
21. Що таке цикл Карно? Від яких величин залежить ККД теплової машини, що здійснює цикл Карно?
22. Сформулюйте другий закон термодинаміки.
23. Наведіть формулу, за якою знаходять зміну ентропії в оборотних процесах.
24. Яка величина називається термодинамічною ймовірністю стану системи?
25. Запишіть формулу Больцмана.

7.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Газ складається з суміші трьох газів: $\nu_1 = 2$ моль азоту, $\nu_2 = 4$ моль кисню, $\nu_3 = 5$ моль водню. Визначити густину і молярну масу суміші при температурі $T = 320$ К і тиску $p = 1{,}7 \cdot 10^5$ Па.

Дані: $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 5$; $T = 320$ К, $p = 1{,}7 \cdot 10^5$ Па.

Знайти: ρ, M.

Аналіз і розв'язання

Згідно з законом Дальтона, тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші

$$p = p_1 + p_2 + p_3. \qquad (7.1)$$

Для кожної компоненти можна записати рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT; \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT; \quad p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT.$$

Додамо ці рівняння і одержимо

$$\left(p_1 + p_2 + p_3\right) V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3}\right) RT. \qquad (7.2)$$

Взявши до уваги (7.1) і те, що $\frac{m}{M} = \nu$ – кількість речовини, з (7.2) одержимо

$$pV = \left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) RT,$$

звідки

$$V = \left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) \frac{RT}{p}.$$

Тоді густина суміші дорівнює

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{\left(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3\right) p}{\left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) RT} = 1{,}13 \text{ кг/м}^3.$$

Молярна маса суміші дорівнює

$$M = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 17{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Відповідь: $\rho = 1{,}13$ кг/м^3, $M = 17{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 2. Температура окису азоту (NO) $T = 300$ К. Визначити частку молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від υ_1 = 820 м/с до υ_2 = 830 м/с. Газ перебуває під атмосферним тиском.

Дані: $T = 300$ К, υ_1 =820 м/с, υ_2 =830 м/с.

Знайти: $\Delta N / N$.

Аналіз і розв'язання

За нормальних умов (атмосферний тиск та кімнатна температура) окис азоту є ідеальним газом, молекули якого описуються законом розподілу Максвелла. Тоді число молекул, швидкості яких лежать в інтервалі швидкостей від υ до $\upsilon + d\upsilon$, дорівнює

$$dN = NF(\upsilon)d\upsilon, \qquad (7.3)$$

де $F(\upsilon) = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \upsilon^2 \exp(-m\upsilon^2 / 2kT)$ – функція розподілу Максвелла за модулем швидкості. Вираз (7.3) справедливий, якщо інтервал швидкостей такий малий, що функцію Максвелла в цьому інтервалі можна вважати сталою.

За умовою задачі, слід знайти частку молекул, швидкості яких змінюються від υ_1 до υ_2. Для цього необхідно інтегрувати вираз (7.3) у вказаному інтервалі швидкостей:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon. \qquad (7.4)$$

Але розрахунок за формулою (7.4) складний, тому що інтеграл у явному вигляді не можна знайти і потрібно використовувати методи числового інтегрування. Якщо ж інтервал зміни швидкості $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ малий, то функція розподілу Максвелла залишається майже сталою $F(\upsilon_1, T) \approx F(\upsilon_2, T)$. Тоді $\Delta N/N$ можна знайти за наближеною формулою

$$\frac{\Delta N}{N} = F(\upsilon_1, T)\Delta\upsilon. \qquad (7.5)$$

Визначимо похибку, якої ми припускаємося, замінивши точне співвідно-шення (7.4) наближеним (7.5). Знайдемо значення функції Максвелла на кінцях інтервалу:

$F(\upsilon_1, T)$= 4,03·10^{-4} с/м; $F(\upsilon_2, T)$= 3,75·10^{-4} с/м.

Тоді відносна похибка при заміні функції її значення на одному з кінців інтервалу дорівнює:

$$\varepsilon = [1 - F(\upsilon_2, T)/F(\upsilon_1, T)] \cdot 100\% \approx 7\%.$$

Таким чином, з похибкою ε=7% знаходимо із формули (7.5) частку молекул, швидкості яких лежать в інтервалі

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = 10 \text{ м/с},$$

$$\Delta N / N = 4{,}03 \cdot 10^{-4} \text{ с/м} \cdot 10 \text{ м/с} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Відповідь: $\Delta N / N = 4 \cdot 10^{-3}$.

Задача 3. У посудині об'ємом $V = 30$ л знаходиться кисень масою $m = 100$г під тиском $p = 3 \cdot 10^5$ Па. Знайти найбільш імовірне значення кінетичної енергії молекул кисню.

Дані: $V = 3 \cdot 10^{-2}$ м^3, $m = 0{,}1$ кг, $p = 3 \cdot 10^5$ Па, $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Знайти: $E_к^{ім}$.

Аналіз і розв'язання

Найбільш імовірне значення кінетичної енергії молекул відповідає максимуму функції розподілу молекул за кінетичними енергіями. Виходячи з функції розподілу Максвелла за модулями швидкості, одержимо функцію розподілу молекул за кінетичними енергіями:

$$E_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{2};\ \upsilon = \sqrt{2E_\kappa / m};$$

$$dN/N = F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}\upsilon^2 exp(-m\upsilon^2/2kT)d\upsilon;$$

$$dE_\kappa = m\upsilon d\upsilon;\ d\upsilon = dE_\kappa / \sqrt{2mE_k};$$

$$\frac{dN}{N} = F(E_\kappa)dE_\kappa = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{2E_\kappa}{m}\exp\left(-\frac{E_\kappa}{kT}\right)\frac{dE_\kappa}{\sqrt{2mE_\kappa}},$$

$$F(E_\kappa) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}E_\kappa^{1/2}\exp(-E_\kappa / kT). \qquad (7.6)$$

Найбільш імовірна кінетична енергія відповідає максимуму функції (7.6). Визначивши похідну функції, прирівняємо її до нуля:

$$F'(E_\kappa) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}[(-1/kT)E_\kappa^{1/2} + E_\kappa^{-1/2}/2]\exp(-E_\kappa / kT);$$

$$2\pi(\pi kT)^{-3/2}\exp(-E_\kappa / kT)\left[\frac{1}{2E_\kappa^{1/2}} - \frac{E_\kappa^{1/2}}{kT}\right] = 0.$$

Звідси знаходимо $E_\kappa^{ім} = kT/2$.

Температуру знаходимо із рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT; \quad T = \frac{pVM}{mR}.$$

Тоді найбільш імовірна кінетична енергія

$$E_\kappa^{ім} = \frac{pVMk}{2mR} = 2{,}4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Зазначимо, що найбільш імовірна кінетична енергія у п’ять разів менша від середньої кінетичної енергії поступального руху двоатомних молекул кисню $< E > = \frac{5}{2}kT$.

Відповідь: $E_\kappa^{ім} = 2{,}4 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Задача 4. Знайти середню потенціальну енергію молекул повітря в полі тяжіння Землі. На якій висоті від поверхні Землі потенціальна енергія молекули дорівнює їх середній потенціальній енергії? Температуру повітря вважати сталою і рівною 0 °С.

Дані: $T = 273$ К, $M = 29{\cdot}10^{-3}$ кг/моль, $k = 1{,}38{\cdot}10^{-23}$ Дж/К, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Знайти: h.

Аналіз і розв’язання

Повітря в полі тяжіння Землі (якщо повітря знаходиться при сталій температурі) можна описати розподілом Больцмана

$$f(E_n) = A\exp(-E_n/kT), \tag{7.7}$$

де $E_n = mgh$ – потенціальна енергія молекули; A – стала величина.

Якщо відома функція розподілу Больцмана (7.7), то можемо знайти середнє значення потенціальної енергії $< E_n >$:

$$< E_n > = \frac{\int_0^\infty f(E_n)E_n dE_n}{\int_0^\infty f(E_n)dE_n} = \frac{A\int_0^\infty E_n \exp(-E_n / kT)dE_n}{A\int_0^\infty \exp(-E_n / kT)dE_n}. \tag{7.8}$$

Зробимо заміну змінної при інтегруванні: $x = -E_n/kT$, тоді $dE_n = -kTdx$,

$$\int_0^\infty \exp(-E_n / kT)dE_n = -kT\int_0^\infty e^x dx = kT,$$

$$\int_0^\infty E_n \exp(-E_n / kT)dE_n = k^2T^2\int_0^\infty xe^x dx = k^2T^2.$$

Використовуючи (7.6), одержимо:

$$\langle E_n \rangle = kT = 1{,}38\cdot10^{-23}\cdot273 = 3{,}8\cdot10^{-21} \text{ Дж}.$$

Визначимо висоту, на якій середня потенціальна енергія дорівнює потенціальній енергії молекули

$$\langle E_n \rangle = kT,\ E_n = mgh;$$

$$kT = mgh;$$

$$h = \frac{kT}{mg} = \frac{RT}{Mg} = 8\cdot10^3 \text{ м}.$$

Відповідь: $h = 8\cdot10^3$ м.

Задача 5. Два грами азоту при температурі $T_1 = 280$ К ізобарно розширюються, при цьому його температура підвищується до $T_2 = 560$ К. Далі газ адіабатно розширюється до об'єму в n=5 разів більше, ніж початковий $V_3 = nV_1$. Розрахуйте кількість теплоти, одержану газом, роботу, яку він виконав, і зміну його внутрішньої енергії.

Дані: $T_1 = 280$ К, $T_2 = 560$ К, n=5.

Знайти: Q, A, ΔU.

Аналіз і розв'язання

Розглянутий процес зображений на рис. 7.1, де 2-1 – ізобара, а 2-3 – адіабата. Кількість теплоти Q, одержана газом, дорівнює кількості теплоти Q_{12}, одержаної газом в ізобарному процесі, адже при адіабатному процесі $Q_{23} = 0$.

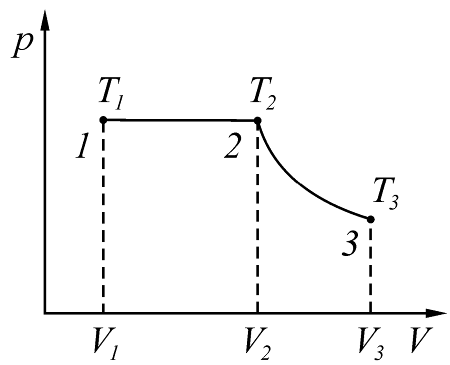


Рисунок 7.1

Зважаючи на те, що газ двохатомний, кількість ступенів свободи $i = 5$,

$$C_p = \frac{i+2}{2} R = \frac{7}{2} R,$$

маємо

$$Q = Q_{12} = \frac{m}{M} C_p \left(T_2 - T_1\right) = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right) = 580 \text{ Дж.}$$

Робота, яку виконав газ при розширенні

$$A = A_{12} + A_{23}.$$

Робота розширення газу при ізобарному процесі з урахуванням рівняння Менделєєва-Клапейрона дорівнює

$$A_{12} = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right).$$

При адіабатному процесі

$$A_{23} = \frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_3\right),$$

де $C_V = \dfrac{i}{2} R = \dfrac{5}{2} R$.

Температуру T_3 можна розрахувати з рівняння адіабатного процесу

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}, \; T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1},$$

де $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{i+2}{i} = \dfrac{7}{5}$, $V_3 = nV_1$.

Об'єм газу наприкінці ізобарного розширення V_2 знайдемо з рівняння ізобарного процесу

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Тоді

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_1}{V_3} \frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = T_2 \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1},$$

звідки

$$A_{23} = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T_2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Повна робота дорівнює

$$A = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right) + \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T_2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right] = 420 \text{ Дж.}$$

Зміну внутрішньої енергії знайдемо, враховуючи, що вона – функція стану і не залежить від термодинамічних процесів.

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \left(T_3 - T_1\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R \left[T_2 \left(\frac{T_2}{nT_1} \right)^{\gamma - 1} - T_1 \right] = 160 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $Q = 580$ Дж, A=420 Дж, ΔU=160 Дж.

Задача 6. Ідеальний двоатомний газ виконує цикл Карно, графік якого зображено на рис. 7.2. Об'єм газу в станах 2 і 3 відповідно $V_1 = 12$ л та $V_2 = 16$ л. Знайти термічний ККД циклу.

Дані: $V_1 = 12$ л, $V_2 = 16$ л.

Знайти: η.

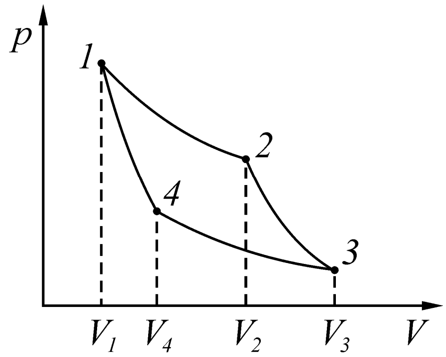


Рисунок 7.2

Аналіз і розв'язання

Цикл Карно складається з двох ізотерм: 1-2, 3-4 та двох адіабат 2-3, 4-1 (рис. 7.2). Термічний ККД будь-якого оборотного циклу визначається формулою:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (7.9)$$

де Q_1 – кількість теплоти, отриманої газом протягом циклу від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, що віддана газом протягом циклу холодильника.

Різниця Q_1–Q_2 дорівнює роботі, що виконана газом протягом циклу. Ця робота на діаграмі p, V дорівнює площі, що обмежена замкнутим циклом (рис. 7.2).

Газ одержує кількість теплоти Q_1 на ділянці 1-2 при ізотермічному розширенні та віддає кількість теплоти Q_2 на ділянці 3-4 при ізотермічному стискуванні. На ділянках циклу 2-3 та 4-1 обміну тепла з зовнішнім середовищем не відбувається.

При ізотермічному процесі внутрішня енергія залишається незмінною, $\Delta U = 0$, тому у відповідності з першим законом термодинаміки

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (7.10)$$

На ділянці 3-4 при ізотермічному стискуванні газ віддає кількість теплоти

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \qquad (7.11)$$

Використовуючи формули (7.9–7.11), для ККД одержимо:

$$\eta = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Співвідношення між параметрами стану в точках 1-4 діаграми циклу знайдемо, виходячи з рівнянь адіабати:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1};$$

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}.$$

Перемножуючи ці рівняння, одержимо

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1},$$

звідки

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}.$$

Для ККД одержимо формулу

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 0{,}109.$$

Відповідь: $\eta = 0{,}109$.

Задача 7. Водень масою *m* був ізобарно нагрітий так, що його об'єм збільшився в *n* разів, а потім ізохорно охолоджений так, що його тиск зменшився у *n* разів. Знайти зміну ентропії.

Дані: $m = 2$кг, $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$, $n = 5$.

Знайти: ΔS.

Аналіз і розв'язання

Графік процесу складається з ізобари 1-2 та ізохори 2-3 (рис. 7.3). Оскільки ентропія – величина адитивна, повна зміна ентропії

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'',$$

де $\Delta S'$, $\Delta S''$ – зміна ентропії відповідно на дільницях 1-2, 2-3. Зміна ентропії в оборотних термодинамічних процесах визначається загальною формулою

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{dT}.$$

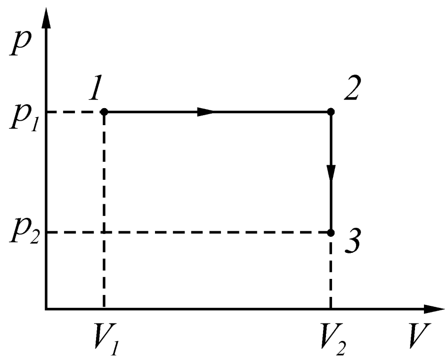


Рисунок 7.3

При ізобарному процесі $dQ = \frac{m}{M} C_p dT$. Таким чином,

$$\Delta S' = \frac{m}{M} C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

При ізохорному процесі

$$dQ = \frac{m}{M} C_V dT$$

і відповідна зміна ентропії

$$\Delta S'' = \frac{m}{M} C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Виразимо тепер відношення T_2/T_1 та T_3/T_2 через дані задачі. Проаналізуємо процес переходу системі зі стану 1 у стан 3. Перехід 1-2 відбувається при p_1=const, тому

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = n.$$

Перехід 2-3 відбувається при V_2=const. Таким чином, $p_1/T_2=p_3/T_3$ або $p_1/p_3=T_2/T_3=n$.

Зміна ентропії при переході зі стану 1 у стан 3

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \cdot \ln n - \frac{m}{M} C_V \cdot \ln n = \frac{m}{M} R \cdot \ln n = 9{,}13 \cdot 10^3.$$

Відповідь: $\Delta S = 9{,}13 \cdot 10^3$.

7.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Маса $m = 12$ г газу знаходиться в об'ємі $V = 4$ л при температурі $t_1 = 7°$C. Після нагрівання при сталому тиску густина газу дорівнює $\rho = 0{,}6$ кг/м^3. До якої температури T_2 нагріли газ?

Відповідь: T_2=1400 К.

Задача 2. Середня кінетична енергія молекули одноатомного ідеального газу дорівнює $< E >= 6{,}00 \cdot 10^{-21}$. Тиск газу $p = 2{,}00 \cdot 10^5$ Па. Знайти кількість молекул газу в одиниці об'єму за цих умов.

Відповідь: $n = 5{,}00 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 3. Знайти густину суміші газів, що складається з водню та кисню. Масові частки їх відповідно 1/9 та 8/9. Тиск суміші $p = 100$ кПа, температура T=300 К.

Відповідь: $\rho = 0{,}402$ кг/м^3.

Задача 4. У зачиненій посудині об'ємом $V = 20$ л знаходяться водень масою $m_1 = 6$ г та гелій масою $m_2 = 12$ г. Визначте тиск та молярну масу суміші в посудині при температурі 300 К.

Відповідь: $p = 0{,}75$ МПа, $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 5. При якій температурі повітря середні швидкості молекул азоту (N_2) і кисню (O_2) відрізняються на 20 м/с?

Відповідь: $T = 563$ К.

Задача 6. Газовий термометр складається з кулі з припаяною до нього горизонтальною скляною трубкою. Крапелька ртуті, що поміщена у трубку, відокремлює об'єм кулі від зовнішнього простору. Площа S поперечного перерізу трубки дорівнює 0,1 см^2. При температурі T_1=273 К крапелька знаходилася на відстані l_1=30 см від поверхні кулі, при температурі T_2=278 К – на відстані l_2=50 см. Знайти об'єм кулі.

Відповідь: $V = 106$ см^3.

Задача 7. У посудині об'ємом 10 л міститься ідеальний газ при температурі 10°С. Знайти масу випущеного газу, якщо тиск у посудині зменшився при сталій температурі на $\Delta p = 0{,}5$ атмосфери, а густина газу за нормальних умов $\rho = 1{,}25$ кг/м^3.

Відповідь: $\Delta m = 6$ г.

Задача 8. Визначити частку молекул, енергія яких знаходиться в інтервалі від $E_1 = 0$ до $E_2 = 0{,}01kT$.

Відповідь: $\Delta N / N = 7{,}53 \cdot 10^{-4}$.

Задача 9. Барометр у кабіні вертольоту показує тиск $p = 90$ кПа. На якій висоті летить вертоліт, якщо на поверхні Землі барометр показував $p_0 = 100$ кПа? Вважати температуру $T = 290$ К незмінною.

Відповідь: $h = 885$ м.

Задача 10. На скільки зменшиться атмосферний тиск $p = 100$ кПа, якщо спостерігач піднімається над поверхнею Землі на висоту $h = 100$ м? Температуру повітря вважати сталою $T = 290$ К.

Відповідь: $\Delta p = 1{,}18$ кПа.

Задача 11. Знайти силу, що діє на частинку, яка знаходиться в однорідному полі сили тяжіння, якщо відношення n_1 / n_2 концентрацій частинок на двох рівнях, відстань між якими $\Delta z = 1$ м, дорівнює e. Температуру $T = 300$ К вважати сталою.

Відповідь: $F = 4{,}14 \cdot 10^{-21}$ Н.

Задача 12. Обчислити питомі теплоємності c_V і c_p газів: 1) гелію; 2) водню; 3) двооксиду вуглецю.

Відповідь: 1) 3,12 кДж/кг·К; 5,19 кДж/кг·К; 2) 10,4 кДж/кг·К; 14,6 кДж/кг·К; 3) 567 Дж/кг·К; 756 Дж/кг·К.

Задача 13. Різниця питомих теплоємностей $c_p - c_V$ деякого двоатомного газу дорівнює 260 Дж/кг·К. Знайти молярну масу M газу та його питомі теплоємності c_V і c_p.

Відповідь: $M = 0{,}032$ кг/моль; $C_V = 650$ Дж/кг·К; $C_p = 910$ Дж/кг·К.

Задача 14. Визначити питому теплоємність c_V суміші газів, що містить $V_1 = 5$ л водню і $V_2 = 3$ л гелію. Гази знаходяться в однакових умовах.

Відповідь: $c_V = 4{,}53$ кДж/кг·К.

Задача 15. Знайти показник адіабати γ для суміші газів, що містить гелій масою $m_1 = 10$ г і водень масою $m_2 = 4$ г.

Відповідь: $\gamma = 1{,}51$.

Задача 16. Деяка кількість азоту, що знаходиться при температурі 27°C і тиску в 1 атм, стискується адіабатично до об'єму в 5 разів меншого, ніж початковий. Чому дорівнюватимуть після стиснення тиск і температура азоту? Порівняти тиск з тим, який створюється при ізотермічному стисненні.

Відповідь: 9,5 атм; 298°C; при адіабатичному стисненні тиск у 1.9 рази більше, ніж при ізотермічному.

Задача 17. При ізохорному нагріванні кисню об'ємом $V = 50$ л тиск газу змінився на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Знайти кількість теплоти Q, наданої газу.

Відповідь: $Q = 62{,}5$ Дж.

Задача 18. 10 л азоту, що були під тиском $p_1 = 1$ атм, стискуються до тиску $p_2 = 100$ атм. Визначити роботу *A* стискування для двох випадків: 1) стискування здійснюється ізотермічно; 2) стискування здійснюється адіабатично.

Відповідь: 1) $A = -4{,}6$ кДж; 2) $A = -6{,}8$ кДж.

Задача 19. Азот нагрівався при сталому тиску, причому йому була надана кількість теплоти $Q = 21$ кДж. Визначити роботу *A*, що здійснив при цьому газ, і зміну ΔU його внутрішньої енергії.

Відповідь: $A = 6$ кДж; $\Delta U = 15$ кДж.

Задача 20. Газ, що займав об'єм $V = 12$ л під тиском $p = 100$ кПа був ізобарно нагрітий від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Визначити роботу *A* розширення газу.

Відповідь: $A = 400$ Дж.

Задача 21. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0{,}02$ кг при температурі $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатно, збільшивши свій об'єм у п'ять разів, а потім був стиснений ізотермічно, причому об'єм газу зменшився у п'ять разів. Знайти температуру T_2 наприкінці адіабатного розширення і повну роботу *A*, що здійснена газом. Зобразити процес графічно.

Відповідь: $T_2 = 157$ К; $A = -21$ кДж.

Задача 22. Здійснюючи замкнутий процес, газ отримав від нагрівача кількість теплоти $Q_1 = 4$ кДж. Визначити роботу газу *A* при перебігу циклу, якщо його термічний ККД η=0,1.

Відповідь: $A = 400$ Дж.

Задача 23. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура нагрівача T_1 дорівнює 470 К, температура охолоджувача дорівнює $T_2 = 280$ К. При ізотермічному розширенні газ здійснює роботу $A = 100$ Дж. Визначити термічний ККД η циклу, а також кількість теплоти Q_2, яку газ віддає охолоджувачу при ізотермічному стискуванні.

Відповідь: $\eta = 0{,}404$; $Q_2 = 59{,}6$ Дж.

Задача 24. Внаслідок кругового процесу газ здійснив роботу $A = 1$ Дж і передав охолоджувачу кількість теплоти $Q_2 = 4{,}2$ Дж. Визначити термічний ККД η циклу.

Відповідь: $\eta = 0{,}193$.

Задача 25. Знайти зміну ΔS ентропії при ізобаричному розширенні азоту масою $m = 4$ г від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

Відповідь: $\Delta S = 2{,}43$ Дж/К.

Задача 26. Знаючи функцію розподілу Максвелла за швидкостями $F(\upsilon)$, знайти формулу для найбільш ймовірної швидкості $\upsilon_{iм}$.

Відповідь: $\upsilon_{iм} = \sqrt{2kT/\pi m}$.

Задача 27. Знаючи функцію розподілу Максвелла $F(\upsilon)$, одержати формулу для середньої швидкості $< \upsilon >$.

Відповідь: $< \upsilon >= \sqrt{8kT / \pi m}$.

Задача 28. Знаючи функцію розподілу Максвелла $F(\upsilon)$, одержати формулу для середньоквадратичної швидкості.

Відповідь: $< \upsilon_{кв} >= \sqrt{3kT / m}$.

Задача 29. У закритій колбі, стінки якої оточені нетеплопровідним матеріалом, знаходитися повітря при підвищеному порівняно з атмосферним тиском p_1 і температурою T_1. Відкривши кран, дають тискові повітря усередині колби швидко вирівнятися з атмосферним тиском H, після чого кран закривають. Після того, як температура повітря усередині колби набула значення T_1, тиск усередині колби став рівним p_2. Визначити за цими даними відношення γ теплоємностей повітря при сталому тиску і сталому об'ємі.

Відповідь: $\gamma = \lg\left(\dfrac{H}{p_1}\right) \Big/ \lg\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)$.

Задача 30. Мотор передає 1 Дж механічної енергії холодильнику Карно, що поглинає тепло з морозильної камери при температурі 0°C і передає його оточуючому повітрю при 27°C. Наскільки зміниться ентропія морозильної камери? Усієї системи?

Відповідь: $-3{,}7 \cdot 10^{-2}$ Дж/К; 0.

8 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

8.1 Мета заняття

Навчитися розраховувати напруженість електричного поля, створеного системою точкових електричних зарядів і об'ємними зарядженими тілами, набути практичних навичок розрахунку потенціалу та різниці потенціалів електростатичних полів, які створені зарядами, зарядженими провідниками.

8.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи

Під час підготовки до заняття ознайомитися з контрольними запитаннями і завданнями. Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом і [3, розд. 1; 4, розд. 1; 5, §13…16]. Особливу увагу слід звернути на поняття точкового заряду, пробного заряду, на межу застосування закону Кулона, за яким визначається сила взаємодії двох точкових зарядів.

8.3 Основні закони та формули

1. Закон збереження заряду у замкнутій системі:

$$\sum_i q_i = const.$$

2. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} \qquad \text{(у вакуумі)},$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon\cdot r^2} \qquad \text{(у середовищі)},$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2; r – відстань між зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; ε – діелектрична проникність середовища.

3. Напруженість електростатичного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

де F – сила, що діє на точковий позитивний заряд q_0, поміщений у дану точку поля.

4. Напруженість електростатичного поля точкового заряду на відстані r від заряду:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}.$$

5. Потік вектора напруженості електростатичного поля:

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS \quad \text{(крізь елементарну площину } dS\text{)},$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS \quad \text{(крізь замкнуту поверхню } S\text{)},$$

де $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль якого дорівнює dS, а напрямок збігається з зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до поверхні; E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$.

6. Принцип суперпозиції електростатичних полів:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i ,$$

де $\vec{E}_i$ – напруженість поля, створюваного зарядом q.

7. Густина зарядів (лінійна, поверхнева, об'ємна):

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \ \sigma = \frac{dq}{dS}, \ \rho = \frac{dq}{dV}.$$

8. Теорема Гауса для електростатичного поля у вакуумі:
у випадку дискретного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i ;$$

у випадку безперервного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV ,$$

де $\sum\limits_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, що знаходяться у середині замкнутої поверхні S; N – число зарядів; ρ – об'ємна густина зарядів.

9. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженою нескінченною площиною:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

де σ – поверхнева густина заряду.

10. Напруженість поля, створеного двома нескінченними паралельними різнойменно зарядженими площинами:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

11. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженою сферичною поверхнею радіусом R із загальним зарядом q на відстані r від центру сфери:

$$E = 0 \qquad \text{при } r < R \text{ (всередині сфери)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (поза сферою)}.$$

12. Напруженість поля, створеного об'ємно зарядженою кулею радіусом R із загальним зарядом q на відстані r від центру кулі:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} r \qquad \text{при } r \leq R \text{ (всередині кулі)},$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (поза кулею).}$$

13. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженим нескінченним циліндром радіусом R на відстані r від осі циліндра:

$$E=0 \qquad \text{при } r<R \text{ (всередині циліндра),}$$

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{r} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (поза циліндром),}$$

де τ – лінійна густина заряду.

14. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж замкнутого контуру:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l}=\oint_L E_l dl=0,$$

де E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$. Інтегрування проводиться по замкненому контуру L.

15. Потенціальна енергія заряду q_0 у полі заряду q на відстані r від нього:

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r}.$$

16. Потенціал електростатичного поля :

$$\varphi=\frac{U}{q_0},\ \varphi=\frac{A_\infty}{q_0},$$

де q_0 – точковий позитивний заряд, поміщений у дану точку поля; U – потенціальна енергія заряду q_0; A_∞ – робота переміщення заряду q_0 з даної точки поля за його межі.

17. Потенціал електростатичного поля точкового заряду на відстані від заряду:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

18. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля:

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей. Знак «–» визначається тим, що вектор $\vec{E}$ поля спрямований у бік зменшення потенціалу.

19. У випадку поля з центральною або вісьовою симетрією:

$$E=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

20. Робота, що здійснюється силами електростатичного поля під час переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2:

$$A_{12}=q_0(\varphi_1-\varphi_2),\quad A_{12}=q_0\int_1^2\vec{E}d\vec{l}=q_0\int_1^2 E_l dl,$$

де E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$.

21. Різниця потенціалів між двома точками 1 і 2 в електростатичному полі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

де A_{12} – робота, що здійснюються силами електростатичного поля під час переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2; E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$; інтегрування проводиться вздовж будь-якої лінії, що з'єднує початкову та кінцеву точки, тому що робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії переміщення.

22. Різниця потенціалів між точками, що знаходяться на відстані x_1 і x_2 від рівномірно зарядженої нескінченної площини:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1),$$

де σ – поверхнева густина заряду.

23. Різниця потенціалів між нескінченними різнойменно зарядженими площинами, відстань між якими дорівнює d:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d Edx = \int_0^d \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d.$$

24. Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від центру рівномірно зарядженої сферичної поверхні (об'ємно зарядженого кулі) радіусом R із загальним зарядом q за умови $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

25. Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від центру об'ємно зарядженої кулі радіусом R із загальним зарядом q, за умови $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3} dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

26. Різниця потенціалів між двома точками, що знаходяться на відстанях r_1 і r_2, від осі рівномірно зарядженого з лінійною густиною τ нескінченного циліндра радіусом R, за умови $r_1 < R$, $r_2 > R, r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

8.4 Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте закон Кулона.
2. Для яких зарядів можна застосувати закон Кулона?
3. Який заряд називається точковим, пробним?
4. Фізичний смисл напруженості електростатичного поля.
5. Які властивості має електростатичне поле?
6. Як визначається напруженість електростатичного поля точкового заряду?
7. Дайте визначення ліній напруженості електричного поля.
8. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів.
9. Що таке циркуляція вектора напруженості електростатичного поля і чому вона дорівнює?
10. Чому дорівнює потенціальна енергія взаємодії двох точкових електричних зарядів?
11. Що таке потенціал електричного поля?
12. Що таке різниця потенціалів?
13. Чому дорівнює робота сил електричного поля з переміщення заряду з точки 1 в точку 2?
14. Як пов'язані різниця потенціалів з вектором напруженості електричного поля?
15. Як пов'язані вектор напруженості електричного поля з потенціалом?
16. Чому дорівнює потенціал поля точкового заряду?

8.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Три точкових заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл розташовані у вершинах рівнобічного трикутника. Який заряд q_4 слід розташувати в центрі трикутника, щоб ця система зарядів була в рівновазі?

Дані: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл.

Знайти: q_4.

Аналіз і розв'язання

Всі три заряди, що розташовані у вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах. Тому достатньо з'ясувати, який заряд слід розташувати в центрі трикутника, щоб будь-який з трьох зарядів, наприклад q_1, перебував у рівновазі. Заряд q_1 знаходитиметься в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнює нулю (рис. 8.1).

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (8.1)$$

де $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ – сили, які відповідно діють на заряд q_1 з боку зарядів q_2, q_3, q_4; $\vec{F}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

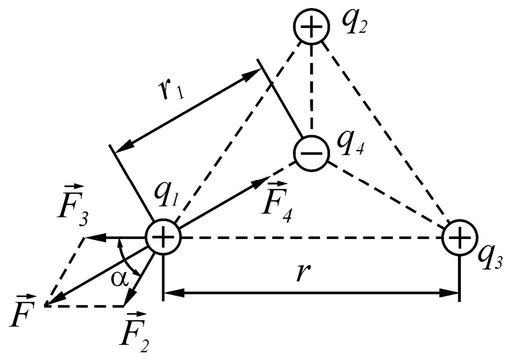


Рисунок 8.1

Беручи до уваги, що $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ спрямовані по одній прямій у протилежні боки, векторне рівняння (8.1) можна замінити скалярним $F - F_4 = 0$, звідки $F_4 = F$. Враховуючи, що $F_3 = F_2$, маємо:

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Застосовуючи закон Кулона і маючи на увазі, що $q_1 = q_2 = q_3$, визначаємо:

$$\frac{q_1 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Звідки:

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Беручи до уваги, що трикутник $q_1 q_2 q_3$ рівнобічний, маємо:

$$r_1 = \frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}};\ \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}};\ q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5{,}77\cdot 10^{-7}\ \text{Кл} = 577\ \text{нКл}.$$

Відповідь: q_4 = 577 нКл. Слід відзначити, що рівновага системи зарядів буде нестійкою.

Задача 2. Кільце радіусом R з тонкого дроту має заряд q, що рівномірно розподілений по кільцю. Знайти модуль напруженості електричного поля на осі кільця в точці A як функцію відстані f до його центра. Дослідити одержану залежність при $f >> R$.

Дані: R, q, f, $f >> R$.

Знайти: $E(f)$.

Аналіз і розв'язання

Поєднаємо координатну площину xOy з площиною кільця, а вісь Oz – з віссю кільця (рис. 8.2). На кільці виділимо малий елемент довжиною dl. Заряд цього елемента $dq = \tau dl = \dfrac{q}{2\pi R}dl$ можна вважати точковим, тоді напруженість $d\vec{E}$ електричного поля, створеного цим зарядом, може бути записана у вигляді:

$$d\vec{E} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R (R^2 + f^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

$$r = \sqrt{R^2 + f^2},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, спрямований від еле-мента dl до точки A.

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: $d\vec{E}_1$, перпендикулярну площині кільця, (спрямовану так само, як і вісь O_z), і $d\vec{E}_2$, паралельну площині кільця (площині xOy), тобто:

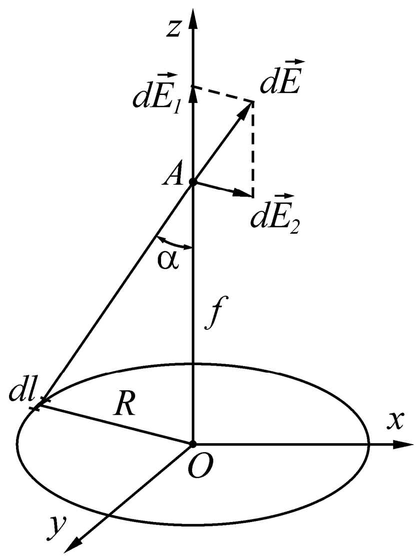


Рисунок 8.2

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напруженість $\vec{E}$ електричного поля у точці A знайдемо інтегруванням:

$$E = \oint_L d\vec{E}_1 + \oint_L d\vec{E}_2,$$

де інтегрування ведеться за довжиною кільця $L = 2\pi R$. Врахуємо, що для кожної пари зарядів dq і dq' ($dq = dq'$), розташованих симетрично відносно центра кільця, вектори $d\vec{E}_2$ і $d\vec{E}'_2$ у точці A однакові за модулем і протилежні за напрямком, тобто $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}'_2$. Тому векторна сума (інтеграл):

$$\oint_L d\vec{E}_2 = 0.$$

Складові $d\vec{E}_1$ для всіх елементів кільця спрямовані вздовж осі Oz, (вздовж одиничного вектора $\vec{k}$), тобто $d\vec{E} = \vec{k} dE_1$. Тоді $\vec{E} = \vec{k} \int_L dE_1$.

Зважаючи на те, що

$$dE = \frac{qdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R (R^2 + f^2)} \text{ і } \cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{R^2 + f^2}},$$

маємо:

$$dE_1 = \frac{fqdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R (R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким чином:

$$\vec{E}(f) = \vec{k} \cdot \oint_L \frac{fqdl}{8\pi^2 \varepsilon R \left(R^2 + f^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \vec{k} \frac{fq}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + f^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

При $f >> R$: $E(f) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 f^2}$ – як для точкового заряду.

Відповідь: $\vec{E}(f) = \vec{k}\dfrac{fq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 3. Тонкий стрижень довжиною l =10 см рівномірно заряджений зарядом $q = 10^{-7}$ Кл. Знайти силу, яка діє на точковий заряд q_0 = 6 нКл, розташований на подовженні стрижня на відстані $a = 20$ см від нього. Знайти напруженість поля як функцію відстані до стержня a.

Дані: $q = 10^{-7}$ Кл, $q_0 = 6$ нКл $= 6\cdot 10^{-9}$ Кл, $a = 20$ см = 0,2 м.

Знайти: F, $E(a)$.

Аналіз і розв'язання

Безпосередньо застосувати закон Кулона неможливо, тому що стрижень – не точковий заряд. Але можна застосувати метод диференціювання та інтегрування. Виділимо на стержні дуже малий елемент довжиною dx, заряд якого $dq = \dfrac{q}{l}dx$ можна вважати точковим (рис. 8.3).

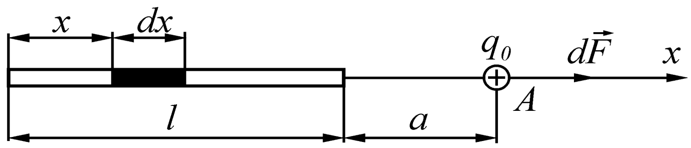


Рисунок 8.3

Сила взаємодії dF точкового заряду q_0 та елементарного точкового заряду dq за законом Кулона:

$$dF = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 (l + a - x)^2},$$

де $(l + a - x)$ – відстань від елемента dx до точкового заряду q_0, x – відстань від початку координат до елемента dx (рис. 8.3). Інтегруючі вираз для dF за довжиною стрижня, отримаємо результуючу силу:

$$F = \int dF = \int_0^l \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 (l + a - x)^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\int_0^l \frac{dx}{(l + a - x)^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l}\right) = 90 \text{ мкН.}$$

Напруженість поля в точці A дорівнює:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l}\right).$$

За напрямком напруженість $\vec{E}$ збігається з $\vec{F}$. Для будь-якої точки на подовженні стрижня:

$$E(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l}\right),$$

де a – відстань від кінця стрижня до точки, де визначається напруженість поля.

Відповідь: $F = 90$ мкН, $E(a) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+l}\right)$.

Задача 4. Електричне поле створене тонким прямим провідником, рівномірно зарядженим з лінійного густиною $\tau = 0,2$ мкКл/м. Визначити потенціал φ поля в точці C, яка розташована від кінців провідника на відстанях, що дорівнюють довжині провідника *l*. Яку роботу здійснить електричне поле по переміщення заряду $q = 10^{-5}$ Кл з точки C на нескінченно велику відстань?

Дані: $\tau = 0,2$ мкКл/м, $r_{\max} = l$, $q = 10^{-5}$ Кл.

Знайти: φ_C, A.

Аналіз і розв'язання

Заряд, який знаходиться на провіднику, не можна вважати точковим, тому необхідно розподілити провідник на елементарні відрізки (рис. 8.4). У цьому випадку заряд $dq = \tau dl$, який перебуває на кожному з них, можна розглядати як точковий. Потенціал, утворений у точці C зарядом dq:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{8.2}$$

де r – відстань від точки, в якій визначається потенціал, до елемента провідника. З рис. 8.4 можна бачити, що $dl = \dfrac{\tau d\alpha}{\cos\alpha}$. Тоді з формули (8.2):

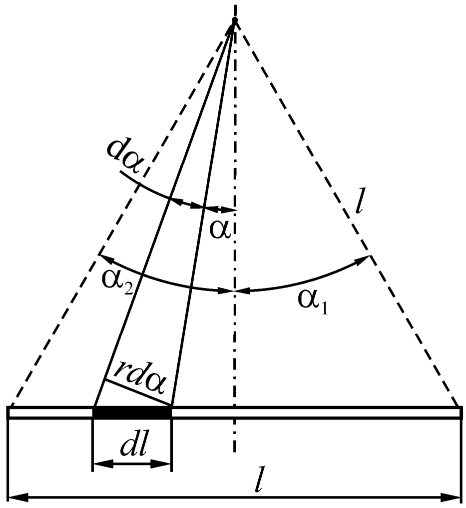


Рисунок 8.4

$$d\varphi = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

Інтегруючи одержаний вираз від, α_1до α_2, знайдемо потенціал у точці C:

$$\varphi_C = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Внаслідок симетрії розташування точки C відносно кінців провідника маємо: $\alpha_1 = \alpha_2$, тому:

$$\varphi_C = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln tg\frac{\pi}{3} - \ln tg\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\frac{\pi}{3}.$$

Робота переміщення заряду q з точки C на нескінченність:

$$A = q(\varphi_C - \varphi_\infty) = q\varphi_c,$$

де потенціал поля на нескінченності $\varphi_C = 0$. Розрахуємо:

$$\varphi_C = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}55}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}98 \cdot 10^3 \text{ В}; \; A = 10^{-5} \cdot 1978 \approx 0{,}02 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $\varphi_C = 1{,}98 \cdot 10^3$ В, $A = 0{,}02$ Дж.

Задача 5. Електричне поле створюється точковим диполем, електричний момент якого $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м. Знайти роботу A_{12} сил поля з переміщення заряду $q = +0{,}1$ Кл з точки 1 (рис. 8.5), яка розташована на осі диполя на відстані $r_1 = 0{,}1$ м від його центра з боку позитивного заряду, в точку 2, яка розташована на осі диполя на відстані $r_2 = 0{,}2$ м від його центра.

Дані: $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м, $q = +0{,}1$ Кл, $r_1 = 0{,}1$ м, $r_2 = 0{,}2$ м.

Знайти: A_{12}.

Аналіз і розв'язання

Для визначення роботи сил поля скористаємося співвідношенням

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)\,. \qquad (8.3)$$

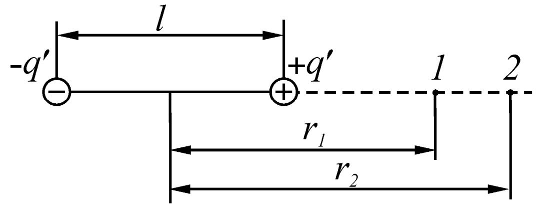


Рисунок 8.5

З принципу суперпозиції полів випливає, що потенціал будь-якої точки електричного поля диполя:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}. \qquad (8.4)$$

Враховуючи, що для точкового диполя $l << r$, можна знехтувати значенням $\frac{l^2}{4}$ у знаменнику, з формул (8.3) та (8.4) одержимо:

$$A_{12} = \frac{q\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right);$$

$$A_{12} = \frac{0{,}1 \cdot 2 \cdot 10^{-14}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right) = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Відповідь: $A_{12} = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 6. Тонкий диск радіусом R рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ. Знайти потенціал і напруженість поля в точці A, що лежить на осі диска на відстані a від нього.

Дані: $R,\ \sigma,\ a$.

Знайти: φ, $\vec{E}$.

Аналіз і розв’язання

Для визначення потенціалу в точці A застосуємо принцип суперпозиції полів. Розіб'ємо диск на елементарні кільця шириною dx (рис. 8.6). Площа кільця радіусом x дорівнює $2\pi x \cdot dx$, заряд кільця $dq = 2\pi\sigma x \cdot dx$. Потенціал поля кільця в точці A дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, утворе-них усіма його точковими елементами, які рівновід-далені від точки A.

Потенціал кільця A:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi\sigma x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \qquad (8.5)$$

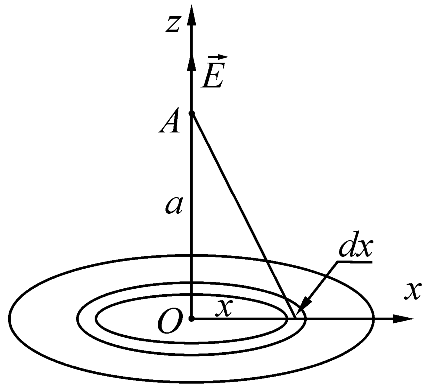


Рисунок 8.6

Потенціал диска визначимо інтегруванням (8.5):

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right).$$

Враховуючи симетрію, можна бачити, що вектор напруженості електричного поля в точці A спрямований уздовж осі диска, тому, розглядаючи a як змінну, отримаємо $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{da}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k},$$

де $\vec{k}$ – орт, спрямований вздовж осі z.

Відповідь: $\varphi = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right)$, $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k}$.

8.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Відстань l між вільними зарядами $q_1 = 180$ нКл і $q_2 = 720$ нКл дорівнює 60 см. Який негативній заряд q_3 потрібно розташувати між вказаними зарядами, щоб система зарядів знаходилася в рівновазі? Визначити його відстань від заряду q_1.

Відповідь: $q_3 = -8 \cdot 10^{-8}$ Кл, $l_1 = 20$ см від заряду q_1.

Задача 2. У вершинах квадрата знаходяться однакові заряди $q = 0,33$ нКл. Який заряд q_1 необхідно розташувати в центрі квадрата, щоб система була у рівновазі?

Відповідь: $q_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right)q = -0,287$ нКл.

Задача 3. Тонкий стрижень довжиною $l=10$ см рівномірно заряджений. Лінійна густина τ заряду дорівнює 1 мкКл/м. На продовженні осі стрижня на відстані $a=20$ см від ближнього його кінця знаходиться точковий заряд $q=100$ нКл. Визначити силу F взаємодії зарядженого стрижня і точкового заряду.

Відповідь: $F=\dfrac{q\tau l}{4\pi\varepsilon_0(l+a)a}=1{,}5$ мН.

Задача 4. Тонке напівкільце радіусом $R=10$ см несе рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau=1$ мкКл/м. У центрі кривизни напівкільця розташовано заряд $q=20$ нКл. Визначити силу F взаємодії точкового заряду і зарядженого напівкільця.

Відповідь: $F=\dfrac{q\cdot\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}=3{,}6$ мН.

Задача 5. Електричне поле створене двома точковими зарядами $q_1=10$ нКл і $q_2=-20$ нКл, що розташовані на відстані $d=20$ см один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, віддаленій від першого заряду на $r_1=30$ см і від другого – на $r_2=50$ см.

Відповідь: $E=280$ В/м.

Задача 6. Електричне поле, створене двома точковими зарядами $q_1=40$ нКл і $q_2=-10$ нКл, що знаходяться на відстані $d=10$ см один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, віддаленій від першого заряду на $r_1=12$ см і від другого на $r_2=6$ см.

Відповідь: $E=23{,}4\cdot10^3$ В/м.

Задача 7. Дві кульки масою $m=1$ г кожна підвішені на нитках, верхні кінці яких з'єднані. Довжина кожної нитки $l=10$ см. Які однакові заряди слід передати кулькам, щоб нитки розійшлися на кут $\alpha=60^\circ$?

Відповідь: $q=2l\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 mg}{\sqrt{3}}}=79{,}3$ нКл.

Задача 8. Довгий прямий тонкий дріт несе рівномірно розподілений заряд. Обчислити лінійну густину τ заряду, якщо напруженість поля на відстані $r=0{,}5$ м від дроту напроти його середини $E=2$ В/см.

Відповідь: $\tau=2\pi\varepsilon_0 rE=5{,}65$ мКл/м.

Задача 9. Тонке дротяне кільце радіусом r має електричний заряд q. Яким буде приріст сили, яка розтягує дріт, якщо в центрі кільця розташувати точковий заряд q_0?

Відповідь: $\Delta F=\dfrac{q_0 q}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$.

Задача 10. Чотири позитивні точкові заряди, по $q = 7$ нКл кожен, розміщені у вершинах квадрата. Сила, яка діє з боку трьох зарядів на четвертий, дорівнює 20 мкН. Знайти довжину сторони квадрата.

Відповідь: $a = \sqrt{\dfrac{1,9}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 F}} = 0,2$ м.

Задача 11. Дуже довга пряма рівномірно заряджена нитка має заряд τ на одиницю довжини. Знайти модуль і напрямок вектора напруженості електричного поля в точці, яка віддалена від нитки на відстань y і розташована на перпендикулярі до нитки, що проходить через один із її кінців.

Відповідь: $E = \dfrac{\sqrt{2}\tau}{4\pi\varepsilon_0 y}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 12. На відрізку тонкого прямого провідника рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Обчислити потенціал φ, створений зарядом у точці, що розташована на осі провідника та віддалена від ближнього кінця провідника на відстань, що дорівнює довжині цього відрізка.

Відповідь: $\varphi = 62,4$ В.

Задача 13. Тонкий стрижень довжиною $l = 0,1$ м має рівномірно розподілений заряд $q = 1$ нКл. Знайти потенціал φ електричного поля в точці, що міститься на осі стрижня на відстані $a = 0,2$ м від найближчого кінця.

Відповідь: $\varphi = 36,5$ В.

Задача 14. По тонкому кільцю радіусом $R = 10$ см рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Визначити потенціал φ у точці, яка лежить на осі кільця на відстані $a = 5$ см від його центра.

Відповідь: $\varphi = 505$ В.

Задача 15. Тонкі стрижні утворюють квадрат зі стороною $a = 0,1$ м. Стрижні заряджені з лінійною густиною $\tau = 1,33$ нКл/м. Знайти потенціал φ у центрі квадрата.

Відповідь: $\varphi = 84,2$ В.

Задача 16. Два точкових заряди $q_1 = 6$ нКл і $q_2 = 3$ нКл розташовані на відстані $d = 0,6$ м один від одного. Яку роботу необхідно виконати зовнішнім силам, щоб зменшити відстань між зарядами вдвічі?

Відповідь: $A = 2,7 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 17. Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною $\tau = 0,4$ мкКл/м. Визначити різницю потенціалів точок 1 і 2, якщо точка 2 знаходиться в $\eta = 2$ рази далі від нитки, ніж точка 1.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2 = 5$ кВ.

Задача 18. Зігнутий кільцем радіусом $R = 0,1$ м тонкий стрижень заряджений з лінійною густиною $\tau = 600$ нКл/м. Яку роботу A потрібно виконати, щоб перенести заряд $q=5$ нКл з центра кільця в точку, що розташована на осі кільця на відстані $l=0,2$ м від його центра?

Відповідь: $A=94$ мкДж.

Задача 19. Знайти напруженість електричного поля E в точці $A(4,2)$, потенціал якого залежить від координат за законом $\varphi=a(2x-xy)$, де $a=4$ В/м.

Відповідь: $E=16$ В/м.

Задача 20. Знайти потенціальну енергію U системи трьох точкових зарядів $q_1=10$ нКл, $q_2=20$ нКл та $q_3=-30$ нКл, які розташовані у вершинах рівнобічного трикутника зі стороною $a=0,1$ м.

Відповідь: $U=-63$ мкДж.

Задача 21. Чому дорівнює потенціальна енергія U системи чотирьох однакових точкових зарядів $q=10$ нКл, які розташовані у кутах квадрата зі стороною $a=0,1$ м?

Відповідь: $U=48,8$ мкДж.

Задача 22. Різниця потенціалів між точками однорідного електричного поля, що лежать на одній силовій лінії на відстані 12 см одна від одної, дорівнює 24 В. Яка напруженість електричного поля?

Відповідь: $E=200$ В/м.

Задача 23. Напруженість однорідного електричного поля в деякій точці дорівнює 120 В/м. Визначити різницю потенціалів між цією точкою та іншою, яка лежить на цій силовій лінії на відстані $\Delta r=1$ мм від першої.

Відповідь: $\varphi_1-\varphi_2=0,12$ В.

Задача 24. У центрі куба розташований точковий заряд q. Визначити потік Φ_E вектора напруженості крізь: а) повну поверхню куба; б) одну із граней куба.

Відповідь: а) $\Phi_E=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$ незалежно від положення заряду в кубі;

б) $\Phi_E=\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$, якщо заряд розташований в центрі куба.

Задача 25. По нескінченній площині рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma=1$ мкКл/м^2. На деякій відстані від площини розташовано коло радіусом $r=10$ см. Знайти потік вектора напруженості поля Φ_E через коло, якщо кут між площиною кола і нескінченною площиною α.

Відповідь: $\Phi_E=35\cos\alpha$ В·м.

Задача 26. Металевій сфері надали заряд $q=1$ нКл. Радіус сфери $R=15$ см. Визначити напруженість поля $\vec{E}$: а) в центрі сфери; б) на поверхні сфери; в) зовні сфери на відстані $r=10$ см від її поверхні.

Відповідь: а) 0; б) 0,4 кВ/м; в) 144 В/м.

Задача 27. Заряд $q = 0,4$ мкКл рівномірно розподілений по об'єму сфери радіусом $R = 3$ см**.** Знайти напруженість поля E на відстані $r_1 = 2$ см і $r_2 = 4$ см від центра сфери. Відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 5$.

Відповідь: $E_1 = 533$ кВ/м, $E_2 = 2,26$ кВ/м.

Задача 28. Нескінченна тонка пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною τ. Користуючись теоремою Гауса, знайти модуль напруженості поля E в залежності від відстані r між ниткою та точкою спостереження.

Відповідь: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Задача 29. Три однакових точкових заряди по 20 нКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. На кожен заряд діє сила $F = 10$ мН. Знайти довжину a сторони трикутника.

Відповідь: $a = q\sqrt{\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 F}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 30. Дві однакових кульки вагою $m = 9$ г знаходяться одна від одної на відстані r, яка значно перевищує їх розміри. Які однакові заряди необхідно помістити на кульках, щоб сила їх кулонівської взаємодії врівноважувала силу гравітаційного тяжіння?

Відповідь: $q = m\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} = 7,74 \cdot 10^{-13}$ Кл.

9 ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

9.1 Мета заняття

Навчитися розраховувати електричні поля в діелектриках, визначати поверхневі та об'ємні густини вільних і зв'язаних зарядів, поляризованість і діелектричну проникність діелектриків.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [3, розд. 2; 4, розд. 2; 5, §13…16], відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв’язання завдань, наведених як приклад.

Під час вивчення теоретичного матеріалу особливу увагу необхідно звернути на те, що під дією зовнішнього поля діелектрики, незалежно від типу молекул, набувають дипольний момент, тобто поляризуються. Поляризований діелектрик стає джерелом електричного поля, яке накладається на поле вільних зарядів, а самі молекули зазнають дії цього сумарного поля. Для розв'язання задач необхідно мати уяву про вільні і зв'язані заряди, засвоїти смисл теореми Гауса і таких фізичних величин, як вектор поляризації діелектрика, вектор електричного зміщення.

9.3 Основні закони і формули

1. Вектор поляризації (поляризованість) діелектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{\vec{p}_V}{\Delta V},$$

де $\vec{p}_i$ – електричний дипольний момент i-ї молекули, N – кількість молекул в об’ємі ΔV, $\vec{p}_V$ – дипольний момент об’єму ΔV.

2. Зв’язок поляризованості $\vec{P}$ з вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

де χ – діелектрична сприйнятливість діелектрика, ε_0 – електрична стала.

3. Теорема Гауса для поляризованості

– в інтегральній формі

$$\oint\limits_S \vec{P}d\vec{S} = -\sum q',$$

де $\oint\limits_S \vec{P}d\vec{S}$ – потік вектора поляризації крізь замкнуту поверхню, $\sum q'$ – алгебраїчна сума зв’язаних зарядів всередині поверхні S.

– в диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{P} = -\rho',$$

де ρ' – об'ємна густина зв'язаних зарядів.

4. Вектор електричного зміщення (електричної індукції)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

5. Теорема Гауса для вектора електричної індукції

– в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q,$$

де $\oint_S \vec{D} d\vec{S}$ – потік вектора електричної індукції, $\sum q$ – алгебраїчна сума сторонніх (вільних) зарядів, охоплених поверхнею S;

– в диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho,$$

де ρ – об'ємна густина вільних зарядів.

6. Зв'язок вектора електричного зміщення з вектором напруженості електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\chi + 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

де $\varepsilon = \chi + 1$ – діелектрична проникність діелектрика.

7. Напруженість поля всередині діелектрика

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

де E_0 – зовнішнє електричне поле.

8. Умови на межі розділу двох діелектриків

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad D_{1n} = D_{2n};$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma;$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

де E_τ, E_n – тангенціальна та нормальна складові вектора напруженості, D_τ, D_n – тангенціальна та нормальна складові вектора електричного зміщення, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – діелектричні проникності двох діелектриків, σ, σ' – поверхневі густини вільних і зв'язаних зарядів на граничній поверхні.

9. Зв'язок вектора поляризованості з поверхневою густиною зв'язаних зарядів

$$P_n = \sigma'.$$

10. Зв'язок вектора електричного зміщення з поверхневою густиною вільних зарядів

$$D_n = \sigma.$$

9.4 Контрольні запитання та завдання

1. У чому відмінність діелектриків від провідників?

2. Що називається поляризацією?

3. Які види поляризації діелектриків ви знаєте?

4. Які заряди називаються зв'язаними, вільними?

5. Дайте визначення поляризованості.

6. Як поляризованість пов'язана з напруженістю електричного поля?

7. Як зв'язана поляризованість діелектрика з поверхневою та об'ємною густинами зв'язаних зарядів?

8. Сформулюйте теорему Гауса для поляризованості в інтегральній та диференціальній формах.

9. Який фізичний смисл діелектричної проникності?

10. Що називається вектором електричного зміщення.

11. Як вектор електричного зсуву пов'язаний з напруженістю електричного поля?

12. Сформулюйте теорему Гауса для вектора електричного зсуву в інтегральній та диференціальній формах.

13. Які речовини називаються сегнетоелектриками?

14. За якими ознаками можна відрізнити сегнетоелектрики від звичайних діелектриків?

15. Що називається коерцитивною силою?

16. Що називається залишковою поляризацією?

17. Які умови для напруженості та вектора електричного зсуву на границі розділу двох діелектриків?

9.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Металева куля радіусом $R=5$ см оточена шаром фарфору завтовшки $d = 2$ см (рис. 9.1). Визначити поверхневі густини σ_1' і σ_2' зв'язаних зарядів відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях діелектрика. Заряд кулі $Q = 10$ нКл.

Дані: $Q = 10$ нКл, $\varepsilon = 6$, $R = 5$ см, $d = 2$ см.

Знайти: σ_1', σ_2' .

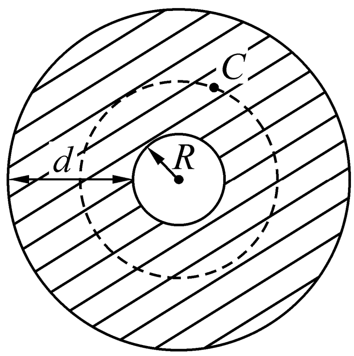


Рисунок 9.1

Аналіз і розв'язання

Наявність шару діелектрика, що оточує металеву кулю, внаслідок поляризації приведе до зміни напруженості поля. Щоб знайти напруженість поля всередині діелектрика, скористаємося теоремою Гауса для вектора зміщення $\vec{D}$.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i \,. \qquad (9.1)$$

Лінії вектора $\vec{D}$, як і силові лінії поля $\vec{E}$, будуть спрямовані радіально. Виберемо всередині діелектричного шару точку C і проведемо через неї допоміжну сферичну поверхню s_C. Тоді

$$\oint_{s_C} \vec{D} d\vec{S} = \oint_{s_C} D dS = D \oint_{s_C} dS = D 4\pi r_C^2 . \quad (9.2)$$

Допоміжна поверхня охоплює вільні заряди, що знаходяться на внутрішній кулі, тобто

$$\sum q_i = Q . \quad (9.3)$$

Підставивши (9.2) і (9.3) в (9.1), одержимо:

$$D 4\pi r_C^2 = Q ;$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r_C^2} . \quad (9.4)$$

Оскільки

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} , \quad (9.5)$$

то з (9.4) і (9.5) знаходимо:

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r_C^2} .$$

В діелектричному середовищі, для $R_1 > r > R$, $R_1 = R + d$

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} . \quad (9.6)$$

У вакуумі, для $r > R_1$

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} . \quad (9.7)$$

З (9.6) і (9.7) випливає, що на межі $(r = R_1)$ діелектрик-вакуум вектор напруженості E зазнає розрив і величина стрибка

$$|\Delta E| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} ,$$

де σ' – поверхнева густина зв'язаних зарядів на межі діелектрик-вакуум. Знайдемо поверхневу густину зв'язаних зарядів, що з'явилися на зовнішній і внутрішній поверхнях діелектричного шару.

При $r = R_1$

$$\sigma_2' = \varepsilon_0 |\Delta E| . \quad (9.8)$$

Стрибок ΔE знайдемо з рівнянь (9.7) і (9.6)

$$\left|\Delta E\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right). \qquad (9.9)$$

Тоді поверхневу густину зв'язаних зарядів на зовнішній поверхні діелектрика отримаємо, підставивши (9.9) у (9.8) і врахувавши, що $R_1 = R + d$

$$\sigma_2' = \frac{Q}{4\pi\left(R+d\right)^2}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right) = \frac{10^{-8}}{4\pi\left(7\cdot 10^{-2}\right)^2}\cdot\frac{5}{6} = 0{,}13 \text{ мкКл/м}^2.$$

Щоб знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів σ_1' на внутрішній поверхні діелектричного шару ($r = R$), необхідно звернути увагу, що на цій поверхні, яка межує з поверхнею металевої кулі, крім зв'язаних зарядів, що виникли внаслідок поляризації, є і вільні заряди з поверхневою густиною σ.

Таким чином

$$\sigma + \sigma_1' = \varepsilon_0\left|\Delta E\right|,$$

де $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

$$\left|\Delta E\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} - E_{внутр},$$

де $E_{внутр}$ − поле у металевій кулі.

Але $E_{внутр} = 0$, тому

$$\left|\Delta E\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}.$$

Тоді

$$\sigma_1' = \varepsilon_0\left|\Delta E\right| - \sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} - \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -0{,}255 \text{ мкКл/м}^2.$$

Відповідь: $\sigma_1' = -0{,}255$ мкКл/м^2, $\sigma_2' = 0{,}13$ мкКл/м^2.

Задача 2. Нескінченна пластина з проникністю ε заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ. Товщина пластини дорівнює $2a$. Поза пластиною $\varepsilon_1 = 1$. Вісь x перпендикулярна до пластини, а початок координат збігається з серединою пластини (рис. 9.2). Знайти потенціал φ і поле E_x всередині пластини як функцію x (потенціал у точці O пластини покласти рівним нулю).

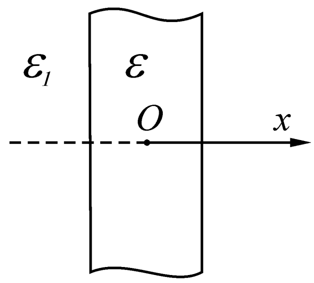


Рисунок 9.2

Дані: ε, ρ, $d = 2a$, $\varepsilon_1 = 1$;

Знайти: φ , E_x.

Аналіз і розв'язання

Вектор зміщення $\vec{D}$ і об'ємна густина вільних зарядів зв'язані, як відомо, теоремою Гауса у диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho .$$

Цей самий вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} .$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля у пластині.

Або для проекції $\vec{D}$ на вісь x маємо:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \rho . \qquad (9.10)$$

І аналогічно

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon E_x . \qquad (9.11)$$

З рівняння (9.10) маємо:

$$D_x = \rho x . \qquad (9.12)$$

З рівняння (9.11) з урахуванням (9.12) отримаємо для $|x| \le a$:

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0 \varepsilon} . \qquad (9.13)$$

Для того, щоб визначити потенціал φ всередині діелектричної пластини, скористаємося тим, що вектор напруженості поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi ,$$

або для проекції вектора $\vec{E}$ на вісь x маємо:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Звідки з урахуванням (9.13)

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Відповідь: $\varphi(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Задача 3. Скляна пластинка з проникністю $\varepsilon_2 = 6$ внесена в однорідне електричне поле з напруженістю $E_1 = 10$ В/м і розташована так, що кут α_1 між нормаллю до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює 30° (рис. 9.3). Знайти: 1) напруженість E_2 поля у пластинці; 2) кут α_2, який це поле утворює з

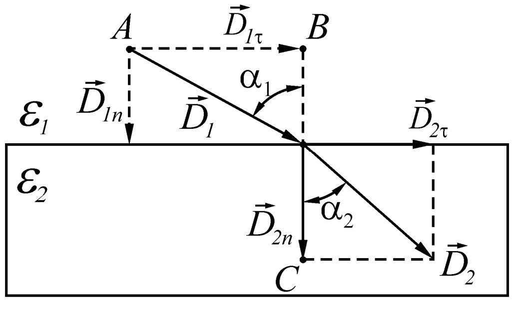


Рисунок 9.3

нормаллю до пластинки; 3) густину σ' зв'язаних зарядів, що виникли на поверхнях пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

Дані: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 6$, $E_1 = 10$ В/м, $\alpha_1 = 30°$,

Знайти: E_2, α_2, σ'.

Аналіз і розв'язання

1. З граничних умов, яким задовольняють вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на межі розділу двох однорідних та ізотропних діелектричних середовищ, виходить, що нормальна складова вектора зміщення $\vec{D}$ в обох діелектриках одна й та сама, тобто

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Оскільки $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ то

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n},$$

звідки

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (9.14)$$

Таким чином, нормальні складові вектора $\vec{E}$ на межі розподілу зазнають розриву.

Для тангенціальних складових граничні умови, як відомо, мають такий вигляд:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \qquad (9.15)$$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

З рис. 9.3 випливає, що

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}} = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}. \qquad (9.16)$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}. \qquad (9.17)$$

Поділимо (9.16) на (9.17):

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{E_{1\tau} E_{2n}}{E_{1n} E_{2\tau}}.$$

З урахуванням (9.14) і (9.15) одержимо:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \qquad (9.18)$$

звідки

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\alpha_1 \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\alpha_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot \mathrm{tg}\alpha_1\right) = \mathrm{arctg}\left(6\cdot \mathrm{tg}30^\circ\right) = 74^\circ .$$

2. Щоб знайти напруженість поля E_2 у пластинці, скористаємося рис. 9.3. З прямокутного трикутника OCD_2

$$D_2 = \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}\right)^2} = D_{2n}\sqrt{1+tg^2\alpha_2} .$$

Оскільки з (9.18) $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\alpha_1 \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, а $D_{1n} = D_{2n}$, то

$$D_2 = D_{2n}\sqrt{1+\left(\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} = D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}} =$$

$$= \frac{D_{2n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1}. \quad (9.19)$$

З прямокутного трикутника ABO

$$D_{1n} = D_1\cos\alpha_1 . \quad (9.20)$$

Враховуючи, що $D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1$, $D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2$ і підставляючи ці вирази, а також вираз (9.20) у формулу (9.19), отримаємо

$$E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1} = 5{,}2 \text{ В/м}.$$

3. Під дією електричного поля E_1 скляна пластинка поляризується і на поверхнях пластини з'являються зв'язані заряди з густиною σ', яка визнача-ється нормальною складовою вектора поляризації $\vec{P}$, тобто

$$\sigma' = P_n .$$

Оскільки

$$P_n = \varepsilon_0\left(\varepsilon_2 - 1\right)E_{2n}, \text{ а } E_{2n} = E_{1n}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

то

$$\sigma' = \left(\varepsilon_2 - 1\right)\varepsilon_0\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n},$$

тобто

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_2 - 1\right)\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1\cos\alpha_1 = 64 \text{ нКл/м}^2.$$

Відповідь: $E_2 = 5{,}2$ В/м, $\alpha_2 = 74^\circ$, $\sigma' = 64$ нКл/м².

9.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. В однорідному електростатичному полі напруженістю 700 В/м перпендикулярно полю розміщена нескінчена плоскопаралельна скляна пластина (ε =7). Визначити: 1) напруженість електростатичного поля всередині пластини; 2) електричне зміщення всередині пластини; 3) поляризованість скла; 4) поверхневу густину зв’язаних зарядів на склі.

Відповідь: $E = 100$ В/м, $D = 6{,}19$ нКл/м^2, $P = 5{,}31$ нКл/м^2, $\sigma' = 5{,}31$ нКл/м^2.

Задача 2. Між пластинами плоского конденсатора розміщені два шари діелектрика – слюдяна пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) товщиною 1 мм та парафін ($\varepsilon_2 = 2$) товщиною 0,5 мм. Визначити: 1) напруженість електростатичних полів у шарах діелектрика; 2) електричне зміщення, якщо різниця потенціалів між пластинами конденсатора 500 В.

Відповідь: $E_1 = 182$ кВ/м, $E_2 = 637$ кВ/м, $D = 11{,}3$ мкКл/м^2.

Задача 3. Відстань між пластинами плоского конденсатора складає 1 см, різниця потенціалів 200 В. Визначити поверхневу густину зв’язаних зарядів ебонітової пластинки, розміщеної на нижній обкладинці конденсатора. Товщина пластини 8 мм.

Відповідь: $\sigma' = 253$ нКл/м^2.

Задача 4. Вільні заряди рівномірно розташовані з об’ємною густиною $\rho = 5$ нКл/м^3 по кулі радіусом 10 см з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 5$. Визначте напруженість електростатичного поля на відстанях 5 см та 15 см від центра кулі.

Відповідь: $E_1 = 1{,}88$ В/м, $E_2 = 8{,}37$ В/м.

Задача 5. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений парафіном ($\varepsilon = 2$). Відстань між пластинами $d = 8{,}85$ мм. Яку різницю потенціалів необхідно подати на пластини, щоб поверхнева густина зв’язаних зарядів на парафіні склала $\sigma = 0{,}1$ нКл/см^2?

Відповідь: $U = 1$ кВ.

Задача 6. Відстань d між пластинами плоского конденсатора дорівнює 2 мм, різниця потенціалів U = 1,8 кВ. Діелектрик – скло (ε =7). Визначити діелектричну сприйнятливість скла і поверхневу густину σ' поляризаційних (зв’язаних) зарядів на поверхні скла.

Відповідь: $\chi = 6$, $\sigma' = 47{,}7$ мкКл/м^2.

Задача 7. Ебонітова плоскопаралельна пластина розташована в однорідному електричному полі напруженістю E_0 =2 МВ/м. Площина пластини перпендикулярна лініям напружености. Визначити поверхневу густину σ' зв’язаних зарядів на поверхнях пластини.

Відповідь: $\sigma' = \pm\ 11{,}8$ мкКл/м^2.

Задача 8. У деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю ε електричне зміщення має значення $\vec{D}$. Чому дорівнює поляризованість $\vec{P}$ у цій точці?

Відповідь: $\vec{P} = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\vec{D}$.

Задача 9. Поляризованість нескінченної плоско-паралельної пластини з парафіну (ε=2), розміщеної перпендикулярно до напрямку електричного поля, дорівнює 0,44 нКл/м^2. Визначити напруженість поля E_0.

Відповідь: E_0=100 В/м.

Задача 10. Дві нескінченні паралельні площини заряджені з густиною $+\sigma$ і $-\sigma$. Спочатку вони перебувають у вакуумі. Потім проміжок між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ε. Що відбувається при цьому у проміжку з напруженістю $\vec{E}$ поля, зміщенням $\vec{D}$, різницею потенціалів U між площинами?

Відповідь: а)$\vec{E}$ зменшується у ε разів; б)$\vec{D}$ залишається незмінним; в)U зменшується в ε разів.

Задача 11. Знайти напруженість $\vec{E}$ і електричне зміщення $\vec{D}$ всередині нескінченної плоскопаралельної пластини з фарфору (ε=5), яку розмістили перпендикулярно до напрямку поля напруженістю E_0=200 В/м.

Відповідь: E = 40 В/м, D =1,77 нКл/м^2.

Задача 12. Визначити, за якою напруженості E середнього макроскопічного поля у діелектрику (ε=3) поляризованість P досягає значення, що дорівнює 200 мкКл/м^2.

Відповідь: $E = 11{,}3$ МВ/м.

Задача 13. Діелектрик розмістили в електричному полі напруженістю E_0=20 кВ/м. Чому дорівнює поляризованість P діелектрика, якщо напруженість E середнього макроскопічного поля у діелектрику виявилась рівною 4 кВ/м?

Відповідь: $P = 141{,}6$ нКл/м^2.

Задача 14. У середині кулі з однорідного ізотропного діелектрика з $\varepsilon = 5$ утворене однорідне електричне поле з напруженістю E = 100 В/м. Знайти максимальну поверхневу густину $\sigma'_{\max}$ зв'язаних зарядів і середнє значення σ' зарядів одного знака.

Відповідь: $\sigma'_{\max} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3{,}5$ нКл/м^2, $\langle\sigma'\rangle = \dfrac{\sigma'_{\max}}{2} = 1{,}75$ нКл/м^2.

Задача 15. Напруженість електричного поля біля поверхні Землі $E_0 = -130$ В/м (знак мінус показує, що вектор напруженості спрямований до центра Землі). На висоті h=0,5 км напруженість $E_1 = -50$ В/м. Обчислити об'ємну густину ρ електричних зарядів в атмосфері, вважаючи, що вона до висоти h є сталою. Радіус Землі $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Відповідь: $\rho = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м^3.

Задача 16. У проміжок між різнойменними зарядженими площинами ввели пластину з діелектрика, яка не несе сторонніх зарядів (рис. 9.4). Штриховою лінією на рисунку показана уявна замкнена поверхня, яка частково проходить всередині діелектрика, частково поза ним. Чому дорівнює потік вектора D через цю поверхню?

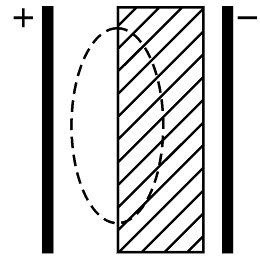


Рисунок 9.4

Відповідь: $\Phi_D = 0$.

Задача17. Всередині діелектрика відомі його поляризованість $\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$ і напруженість поля $\vec{E} = \frac{a}{\varepsilon_0}(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$, де a – стала. Визначити густини зв'язаних та сторонніх зарядів всередині діелектрика. Чому дорівнює діелектрична проникність матеріалу?

Відповідь: $\rho' = -12a$, $\rho = 18a$, $\varepsilon = 3$.

Задача 18. Проміжок між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком. Товщина проміжку $d = 1$ мм, напруга на пластинах конденсатора $U = 1000$ В, а поверхнева густина індукованого на діелектрику заряду дорівнює 11,5 мкКл/м^2. Обчислити діелектричну проникність матеріалу, що заповнює проміжок між пластинами.

Відповідь: $\varepsilon = 2{,}3$.

Задача 19. Поверхнева густина зв'язаних зарядів на діелектричній пластині, що розміщена між пластинами плоского конденсатора дорівнює $\sigma' = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. Пластини конденсатора притягуються одна до одної з силою $F = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н. Площа пластин дорівнює $S = 100$ см^2. Визначити проникність діелектричної пластини.

Відповідь: ε =7.

Задача 20. Однорідний діелектрик має вигляд сферичного шару. внутрішній та зовнішній радіуси якого дорівнюють a і b. Нарисуйте і поясніть графіки залежності напруженості E і потенціалу φ електричного поля від відстані r до центра системи, якщо діелектрику надати позитивний сторонній заряд, що розподілений рівномірно: 1) по внутрішній поверхні шару; 2) по об'єму шару.

Задача 21. Сферичний шар радіусами $R_1 = 3$ см і $R_2 = 5$ см рівномірно заряджений з об'ємною густиною ρ= 3 мкКл/м^3. Діелектрична проникність шару $\varepsilon_1 = 5$, діелектрична проникність середовища зовні шару ($r > R_2$) $\varepsilon_2 = 2{,}5$. Знайти індукцію і напруженість електричного поля: в центрі кулі; між поверхнями шару на відстані 4 см від центра; зовні шару на відстані 4 см від зовнішньої поверхні. Чому дорівнює різниця потенціалів між поверхнями шару?

Відповідь: 1) $D = E = 0$; 2) $D = 23$ нКл /м^2, $E = 523$ В/м;

3) $D = 12{,}1$ нКл /м^2, E= 550 В/м; 4) $\Delta\varphi = 9{,}94$ В.

Задача 22. Система з двох однорідних та ізотропних діелектриків, що розділені плоскою межею, розміщена в електричному полі. Напруженість поля у першому діелектрику утворює з нормаллю до межі розподілу кут $\alpha_1 = 20^\circ$. У другому діелектрику ($\varepsilon_2 = 3$) кут α_2 між нормаллю до межі розподілу і напрямком поля в ньому складає $28^\circ 36'$. Визначити проникність ε_1 першого діелектрика.

Відповідь: $\varepsilon_1 = 2$.

Задача 23. Біля поверхні фарфору (ε=6) напруженість поля у повітрі дорівнює $E = 2 \cdot 10^4$ В/м. Напрямок поля утворює з нормаллю до поверхні кут α =40°. Визначити: 1) кут β між напрямком поля та нормаллю у фарфорі;

2) напруженість поля у фарфорі; 3) поверхневу густину зв'язаних зарядів у фарфорі.

Відповідь: $\beta = 78°46'$; $E = 1{,}31 \cdot 10^4$ В/м; $\sigma' = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2.

Задача 24. Поблизу межі розділу скло-вакуум напруженість електричного поля у вакуумі E_0=10 В/м, кут між вектором напруженості та нормаллю до межі $\alpha_0 = 30°$. Знайти напруженість поля у склі, кут між вектором напруженості та нормаллю до межу розділу у склі, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі розділу.

Відповідь: $tg\alpha = \varepsilon tg\alpha_0, E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2\alpha_0}$,

$\sigma' = \varepsilon_0(1 - 1/\varepsilon)E_0 \cos\alpha_0$.

Задача 25. За деяких умов поляризованість нескінченої незарядженої пластини має вигляд $\vec{P} = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$, де P_0 − вектор, перпендикулярний до пластини, x – відстань від середини пластини, d − її напівтовщина. Знайти напруженість електричного поля всередині пластини та різницю потенціалів між її поверхнями.

Відповідь: $\vec{E} = -\vec{P}_0(1 - x^2/d^2)/\varepsilon_0$, $U = \dfrac{4P_0 d}{3\varepsilon_0}$.

Задача 26. Точковий заряд q розташований у центрі кулі з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ε. Знайти поляризованість $\vec{P}$ як функцію радіус-вектора $\vec{r}$ відносно центра сфери, а також зв'язаний заряд всередині кулі.

Відповідь: $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$, $q' = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot q$.

Задача 27. Нескінчена пластина з діелектрика з проникністю ε заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ. Товщина пластини *2a*. Поза пластиною $\varepsilon = 1$. Знайти: а) поляризованість $\vec{P}$ діелектрика як функцію x; б) поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на лівій ($x = -a$) і правій ($x = +a$) межах пластини; в) об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів.

Відповідь: а) $\vec{P} = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\rho x\vec{i}$; б) на обох поверхнях $\sigma' = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\rho a$;

в) $\rho' = \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)\rho$.

Задача 28. Нескінченна пластина з ізотропного діелектрика розміщена в перпендикулярному до неї однорідному зовнішньому електричному полі напруженістю E_0. Товщина пластини a, проникність змінюється лінійно від значення ε_1 на лівій межі до ε_2 на правій. Поза пластиною $\varepsilon = 1$ (рис. 9.5). Знайти: а) $\nabla\vec{E}$ всередині пластини як функцію x; б) потік вектора $\vec{E}$ крізь уявну циліндричну поверхню, з твірними, паралельними осі x; основи циліндра розміщені у точках $x_1 = -a/2$, $x_2 = a/2$; площа кожної основи дорівнює *S*; в) об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів як функцію *x*.

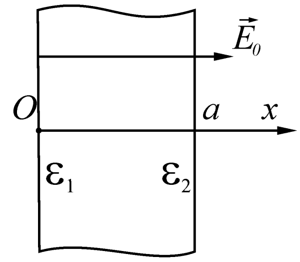


Рисунок 9.5

Відповідь: а) $\nabla\vec{E} = -\dfrac{E_0 k}{(\varepsilon_1 + kx)^2}$, де $k = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}$;

б) $\Phi_E = SE_0\left[\dfrac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - 1\right]$;

в) $\rho' = -\dfrac{\varepsilon_0 E_0 k}{(\varepsilon_1 + kx)^2}$.

Задача 29. Знайти ρ' усередині пластини з задачі 18, якщо $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, a=1см, E_0=3кВ/м.

Відповідь: $\rho' = -\dfrac{(4\varepsilon_0 E_0/a)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^2} = -0{,}59$ мкКл/м^2.

Задача 30. Нескінченна діелектрична пластина товщиною *a* розміщена у зовнішньому, перпендикулярному до пластини, однорідному електричному полі з напруженістю E_0. Проникність пластини змінюється за деяким законом $\varepsilon(x)$, причому $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ де *x*=0 знаходиться на одній грані, а вісь *x* спрямована перпендикулярно до пластини від цієї грані до іншої. Який вигляд повинна мати функція $\varepsilon(x)$, щоб густина об'ємних зв'язаних зарядів змінювалася за законом $\rho' = \rho_1'/(1 + \alpha x)$ де ρ_1' і α сталі? Поза пластиною $\varepsilon = 1$.

Відповідь: $\varepsilon(x) = \alpha\varepsilon_1\varepsilon_0 E_0\left[\varepsilon_1\rho_1' \ln(1 + \alpha x) + \alpha\varepsilon_0 E_0\right]$.

10 ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ, ЕЛЕКТОЄМНІСТЬ

10.1 Мета заняття

Ознайомитися з поведінкою провідників в електричному полі. З′ясувати, як розміщуються електричні заряди на поверхні зарядженого провідника, яке явище носить назву електростатичної індукції, а також яке значення приймає напруженість електростатичного поля всередині провідника. З'ясувати, що таке електроємність та навчитися розраховувати ємності простих систем та енергію електричного поля.

10.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи

Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом та [3, розд. 3; 4, розд. 3; 5, §17,18]. Якщо металевий провідник розміщений в електричному полі, то на хаотичний рух електронів накладається впорядкований рух у напрямі, протилежному напрямку напруженості поля. Явище перерозподілу зарядів усередині провідника під дією зовнішнього електричного поля називається електростатичною індукцією. Заряди, які виникають на поверхні провідника, мають назву наведених або індукованих. Внаслідок такого перерозподілу зарядів поле всередині провідника дорівнює нулю, а поверхня провідника стає еквіпотенціальною.

10.3 Основні закони та формули

1. Напруженість електростатичного поля біля поверхні провідника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

де σ − поверхнева густина зарядів; ε − діелектрична проникність середовища, що оточує провідник.

2. Електрична ємність (ємність) відокремленого провідника:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де q − заряд провідника; φ − потенціал провідника.

3. Електрична ємність кулі радіусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

4. Електрична ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

де q − заряд, накопичений в конденсаторі; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ − різниця потенціалів між його пластинами.

5. Електрична ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

де S − площа кожної пластини конденсатора; d − відстань між пластинами.

6. Електрична ємність сферичного конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

де r_1 і r_2 − радіуси концентричних сфер.

7. Електрична ємність циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}},$$

де l − довжина пластин конденсатора; r_1 і r_2 − радіуси порожнистих коаксіальних циліндрів.

8. Ємність при послідовному з’єднанні n конденсаторів:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

9. Ємність при паралельному з’єднанні n конденсаторів:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

10. Енергія відокремленого зарядженого провідника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де C, q, φ − ємність, заряд і потенціал провідника відповідно.

11. Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де q − заряд конденсатора; C − його електроємність; $\Delta\varphi$ − різниця потенціалів між пластинами.

12. Енергія електростатичного поля плоского конденсатора:

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V,$$

де S − площа однієї пластини; U − різниця потенціалів між пластинами; $V = S \cdot d$ − об'єм конденсатора.

13. Об’ємна густина енергії електростатичного:

$$w_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

де E − напруженість електростатичного поля; D − електричне зміщення.

10.4 Контрольні запитання та завдання

1. Як розподіляються електричні заряди на зарядженому провіднику?

2. Чому дорівнюють напруженість і потенціал електростатичного поля всередині і на поверхні провідника?

3. Як виникають індуковані заряди?

4. Що таке електроємність відокремленого провідника, від чого вона залежить?

5. Чому дорівнюють електроємність конденсатора, ємність плоского, циліндричного та сферичного конденсаторів?

6. Як розрахувати електроємність батареї при паралельному та послідовному з'єднаннях конденсаторів?

7. Чому дорівнює енергія відокремленого провідника та енергія зарядженого конденсатора?

8. Як визначити електричну енергію системи заряджених тіл (провідників і непровідників)? Де локалізована ця енергія?

9. Виведіть формулу для об'ємної густини енергії електричного поля.

10. Чому зменшується сила взаємного притягання пластин зарядженого плоского конденсатора при зануренні його в рідкий діелектрик?

10.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Нескінченну металеву площину, товщина якої a, зарядили так, що густина заряду на кожній поверхні площини дорівнює σ. Далі цю площину розмістили в однорідному електричному полі напруженістю, $\vec{E} = E_0\vec{i}$ перпендикулярно площині, як подано на рис. 10.1. Визначити: 1) напруженість поля $\vec{E}'$ всередині площини, а також поле зовні площини; 2) поверхневу густину зарядів σ_1 і σ_2, яка виникає на правому та лівому боці площини.

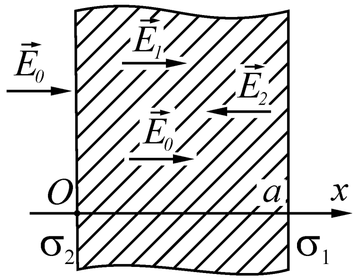


Рисунок 10.1

Дані: a, σ, $\vec{E} = E_0\vec{i}$.

Знайти: $\vec{E}'$, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$.

Аналіз і розв'язання

Після внесення зарядженої площини в поле заряди на поверхні площини перерозподілятимуться доти, доки напруженість поля всередині металевої поверхні не дорівнюватиме нулю ($\vec{E}' = 0$). Припустимо, що в такому випадку поверхнева густина заряду на лівому боці площини дорівнює σ_2, а на правому – σ_1. Електростатичне поле всередині металу є суперпозицією трьох полів: поля $\vec{E}_0$;

поля, обумовленого зарядами на правому боці площини $\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$; поля обумовленого зарядами на лівому боці площини $\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Згідно з рис.10.1,

$$E_0 + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0.$$

Сумарний заряд пластини не зменшиться, тому:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma,$$

звідки маємо:

$$\sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0; \; \sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0.$$

Тоді ліворуч від площини:

$$E_1 = E_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

праворуч:

$$E_2 = E_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Відповідь: $\vec{E}' = 0$, $E_1 = E_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = E_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $\sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0$, $\sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0$.

Задача 2. Ємність плоского повітряного конденсатора $C = 10^{-9}$ Ф, відстань між пластинами $d = 4$ мм. На заряд $q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл, розміщений між пластинами конденсатора, діє сила $F = 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н. Площа пластини конденсатора S=100 см^2. Визначити: 1) напруженість електричного поля і різницю потенціалів між пластинами; 2) енергію і густину енергії електричного поля конденсатора.

Дані: $F = 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н, $q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл, $C = 10^{-9}$ Ф, $S = 10^{-2}$ м^2, $d = 4 \cdot 10^{-3}$м, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Знайти: E, U, W, w.

Аналіз і розв'язання

Поле між пластинами конденсатора вважаємо однорідним. Напруженість поля E можна визначити як

$$E = \frac{F}{q} = 2 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Різницю потенціалів між пластинами знайдемо зі співвідношення

$$U = E \cdot d = 80\,\text{В}.$$

Ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Енергія електричного поля зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = 7{,}04 \cdot 10^{-8}\ \text{Дж}.$$

Врахувавши, що $V = S \cdot d$ − об'єм конденсатора , густина енергії:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = 1{,}75 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж/м}^3.$$

Відповідь: $E = 2 \cdot 10^4$ В/м, $U = 80\,$В, $W = 7{,}04 \cdot 10^{-8}$ Дж, $w = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^3.

Задача 3. Встановити, як змінюються ємність і енергія плоского повітряного конденсатора, якщо паралельно його обкладкам (рис. 10.2) помістити металеву пластину завтовшки $d_0 = 1$ мм. Площа обкладок конденсатора і пластини 150 см^2 , відстань між обкладками $d = 6$ мм. Конденсатор заряджений до напруги 400 В і відімкнений від батареї.

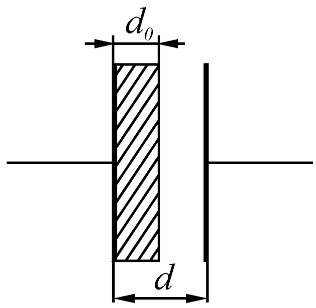


Рисунок 10.2

Дані: $\varepsilon = 1$, $d_0 = 1$ мм = 10^{-3} м, $S = 150$ см^2 = $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2, $d = 6$ мм = $6 \cdot 10^{-3}$ м, $U = 400\,$В.

Знайти: ΔC, ΔW .

Аналіз і розв’язання

Ємність та енергія конденсатора при внесенні в нього металевої пластини зміняться. Це спричинено зменшенням відстані між пластинами з d до $(d - d_0)$. Використавши формулу електроємності плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

одержимо:

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S d_0}{d(d - d_0)} = 4{,}42 \cdot 10^{-12}\,\Phi.$$

При внесенні металевої пластини паралельно обкладинкам об'єм електричного поля зменшився на $\Delta V = S(d - d_0) - Sd = -Sd_0$.

Об’ємна густина енергії електричного поля конденсатора

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2},$$

отже,

$$\Delta W = w \cdot \Delta V = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S d_0}{2}.$$

Напруженість E поля пов'язана з напругою на обкладинках:

$$E = \frac{U}{d},$$

отже,

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2 S d_0}{2d^2} = -2{,}95 \cdot 10^{-7}\,\text{Дж}.$$

Відповідь: $\Delta C = 4{,}42 \cdot 10^{-12}$ Ф, $\Delta W = -2{,}95 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 4. Знайти ємність системи з двох однакових металевих кульок з радіусами a, відстань між центрами яких b, до того ж $b >> a$.

Дані: $a,\ b,\ b >> a$.

Знайти: C.

Аналіз і розв'язання

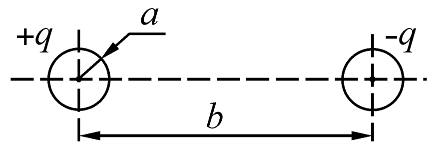


Рисунок 10.3

За визначенням ємність системи $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$.

Нехай ліва кулька має заряд $+q$, а права $-q$ (рис. 10.3).

Згідно з принципом суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a}\right),\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{a} + \frac{q}{b-a}\right).$$

Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a} + \frac{q}{a} - \frac{q}{b-a}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b-2a}{a(b-a)}.$$

Враховуючи, що $b >> a$, отримаємо :

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Тоді

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 2\pi\varepsilon_0 a.$$

Відповідь: $C = 2\pi\varepsilon_0 a$.

Задача 5. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл рівномірно розподілений по поверхні сфери радіусом $R = 1$ см. Діелектрична проникність середовища, яке оточує сферу, $\varepsilon = 1$. Визначити енергію поля, яка пов'язана зі сферою.

Дані: $q = 10^{-10}$ Кл, $R = 1$ см $= 10^{-2}$, $\varepsilon = 1$.
Знайти: W.

Аналіз і розв'язання

Енергію W поля, пов'язану зі сферою, визначимо за формулою:

$$W = \int_V^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV = \int_R^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

де $4\pi r^2 dr$ – сферичний шар радіусом r і завтовшки dr, а об'ємна густина енергії $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$.

Значення напруженості поля зовні сфери можна визначити за допомогою теореми Гауса. Отримаємо: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Тоді:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2R} = 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ Дж.}$$

Відповідь: $W = 4,5$ нДж.

10.5 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Відстань між вертикальними пластинами в плоскому повітряному конденсаторі дорівнює $d = 6$ мм. Його занурюють до половини в масло ($\varepsilon = 7$). Як зміниться ємність конденсатора?

Відповідь: збільшиться в чотири рази.

Задача 2. Пластини плоского повітряного конденсатора площею S=150 см^2 розсувають так, що відстань між ними збільшується від 5 до 14 мм. Яку роботу A слід при цьому виконати, якщо напруга між пластинами конденсатора стала (тобто конденсатор не відключений від джерела) і дорівнює 380 В?

Відповідь: $A = 1,2 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 3. Між обкладинками плоского конденсатора площею S= 100 см^2 кожна розташована слюда. Обкладинки притягуються одна до одної з силою F= 0,03 Н. Визначити напруженість поля конденсатора (для слюди $\varepsilon = 6$).

Відповідь: $E = 3,3 \cdot 10^5$ В/м.

Задача 4. На пластинках плоского вакуумного конденсатора рівномірно розподілений заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Площа обкладинок S=100 см^2, а відстань між обкладинками d=3 мм. Заряджений конденсатор відключений від батареї. Яку необхідно виконати роботу, щоб розсунути пластини до 8 мм *?*

Відповідь: A= 0,706 Дж .

Задача 5. У батарею з'єднали послідовно 10 однакових конденсаторів. Ємність кожного дорівнює C_i= 100 пф. Визначити ємність батареї C.

Відповідь: C= 10 пф.

Задача 6. Як слід з'єднати конденсатори $C_1 = 2$ пф, $C_2 = 4$ пф та $C_3 = 6$ пф, щоб загальна ємність дорівнювала 3 пф ?

Відповідь: $\left(C_1 \mid \mid C_2\right) + C_3$.

Задача 7. Площа обкладки конденсатора S. Простір між обкладками заповнений двошаровим діелектриком. Діелектрична проникність і товщина першого шару дорівнює ε_1 та d_1, другого – ε_2 та d_2. Знайти ємність конденсатора C.

Відповідь: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$.

Задача 8. Плоский конденсатор заповнений речовиною з діелектричною проникністю ε і питомим опором ρ. Чому дорівнює опір конденсатора, якщо його ємність C?

Відповідь: $R = \dfrac{\rho \varepsilon \varepsilon_0}{C}$.

Задача 9. Який заряд q' пройде по провідниках, що з'єднують пластини повітряного конденсатора з джерелом струму з напругою U, при зануренні конденсатора в гас (діелектрична проникність ε). Площа пластини конден-сатора S, відстань між пластинами d.

Відповідь: $q' = \dfrac{\varepsilon_0 SU}{d}(\varepsilon - 1)$.

Задача 10 Плоский повітряний конденсатор зарядили до різниці потенціалів U_0. Далі конденсатор відключили від джерела струму. Якою стала різниця потенціалів між пластинами, якщо відстань між ними збільшиться від d_0 до d, а простір між пластинами заповнити слюдою з діелектричною проникністю ε?

Відповідь: $U = \dfrac{d \cdot U_0}{\varepsilon \cdot d_0}$.

Задача 11. Електричне поле створене двома паралельними нескінчен-ними зарядженими площинами з поверхневими густинами зарядів та σ_2. Визначити напруженості електричного поля, створеного цими площинами між ними (E_1 і E_2) і зовні (E_3).

Відповідь: $E_1 = -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}$, $E_3 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Задача 12. Два конденсатори зарядили до напруги U_1 та U_2, після чого їх з'єднали паралельно. Різниця потенціалів між обкладинками конденсаторів стала рівною U. Знайти відношення величин ємностей конденсаторів.

Відповідь: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U}$.

Задача 13. На пластинах плоского повітряного конденсатора з площею пластин $S = 150$ см^2 розміщений заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Чому дорівнює сила F взаємного притягання між пластинами конденсатора?

Відповідь: $F = 0{,}94 \cdot 10^{-2}$ Н.

Задача 14. На пластинах плоского повітряного конденсатора з площею пластин $S = 150$см^2 розміщений заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Чому дорівнює об'ємна густина w енергії електричного поля конденсатора?

Відповідь: $w = 0{,}628$ Дж/м^3 .

Задача 15. Два однакових плоских конденсатори з'єднали паралельно і зарядили до різниці потенціалів U_0. Знайти різницю потенціалів U між пластинами конденсаторів, якщо після відключення конденсаторів від джерела струму в одному з них зменшили відстань між пластинами вдвічі.

Відповідь: $U = \frac{2}{3} U_0$.

Задача 16. Два конденсатори з ємностями C_1 та C_2 зарядили до різниці потенціалів U_1 та U_2. Знайти різницю потенціалів U після з'єднання конденсаторів однойменними полюсами.

Відповідь: $U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}$.

Задача 17. Точковий заряд q розташований у середовищі з діелектричною проникністю ε. Визначити енергію електричного поля у шарі, радіуси якого a та b. Заряд знаходиться в центрі шару.

Відповідь: $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Задача 18. Плоский конденсатор має ємність $C = 5$ пФ. Який заряд знаходиться на кожній з його пластин, якщо різниця потенціалів між ними $U = 1000$ В?

Відповідь: $q = C \cdot U = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Задача 19. Знайти заряд, який потрібно передати двом паралельно з'єднаним конденсаторам з ємностями $C_1 = 2$ мкФ і $C_2 = 1$ мкФ, щоб зарядити їх до різниці потенціалів $U = 20$ кВ.

Відповідь: $q = (C_1 + C_2) \cdot U = 6 \cdot 10^{-7}$ Кл.

Задача 20. Два конденсатори з ємностями $C_1 = 1$ мкФ і $C_2 = 2$ мкФ зарядили до різниць потенціалів $U_1 = 20$ В і $U_2 = 50$ В. Знайти різницю потенціалів U після з'єднання конденсаторів однойменними полюсами.

Відповідь: $U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 40$ В.

Задача 21. Два послідовно з'єднаних конденсатори з ємностями $C_1 = 1$ мкФ і $C_2 = 3$ мкФ підключені до джерела струму з напругою $U = 220$ В. Знайти напругу на кожному конденсаторі.

Відповідь: $U_1 = \dfrac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 165$ В, $U_2 = \dfrac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 55$ В.

Задача 22. Два послідовно з'єднаних конденсатори з ємностями $C_1 = 1$ мкФ і $C_2 = 2$ мкФ підключені до джерела струму з напругою $U = 900$ В. Чи можлива робота такої схеми, якщо напруга пробою конденсаторів $U_{пр} = 500$ В?

Відповідь: $U_1 = 600$ В, $U_2 = 300$ В. Не можлива, бо $U_1 > U_{пр}$.

Задача 23. Плоский повітряний конденсатор заряджений до різниці потенціалів $U_0 = 50$ В і відключено від джерела струму. Після цього в конденсатор паралельно обкладинкам вноситься металева пластинка товщини $d_n = 1$ мм. Відстань між обкладинками $d = 5$ мм, площі обкладинок і пластинки однакові. Знайти різницю потенціалів U між обкладинками конденсатора з металевою пластиною.

Відповідь: $U = \dfrac{(d - d_n)U_0}{d} = 40$ В.

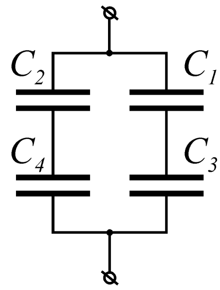


Рисунок 10.4

Задача 24. Знайти загальну ємність конденсаторів, підключених за схемою, зображеною на рис. 10.4. Ємності конденсаторів $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ, $C_4 = 5$ мкФ.

Відповідь: $C = \dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \dfrac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Задача 25. Конденсатору ємністю $C = 2$ мкФ передано заряд $q = 1$ мКл. Обкладки конденсатора з'єднали провідником. Знайти кількість теплоти Q, яка виділилась у провіднику під час розрядження конденсатора, і різницю потенціалів між обкладинками конденсатора до розрядження.

Відповідь: $Q = \dfrac{q^2}{2C} = 0{,}25$ Дж, $U = \dfrac{q}{C} = 500$ В.

Задача 26. Конденсатору, електроємність C якого дорівнює 10 пФ, передано заряд $q = 1$ пКл. Визначити енергію W конденсатора.

Відповідь: $W = 5 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Задача 27. Яка кількість теплоти Q виділиться під час розрядження плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів U між пластинками дорівнює 15 кВ, відстань між пластинками $d = 1$ мм, діелектрик – слюда, і площа S кожної пластинки дорівнює 300 см^2?

Відповідь: $W = 0{,}209$ Дж.

Задача 28. Сила F притягання між пластинами плоского повітряного конденсатора дорівнює 50 мН. Площа S кожної пластини дорівнює 200 см^2. Знайти густину енергії w поля конденсатора.

Відповідь: $w = 2{,}5$ Дж/м^3.

Задача 29. Конденсатори електроємностями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ і $C_3 = 3$ мкФ, увімкнені в коло з напругою $U = 1{,}1$ кВ. Визначити енергію кожного конденсатора у випадках: 1) послідовного їх включення; 2) паралельного включення.

Відповідь: 1) 0,18 Дж, 0,09 Дж, 0,06 Дж; 2) 0,605 Дж, 1,21 Дж, 1,815 Дж.

Задача 30. Електроємність C плоского конденсатора дорівнює 111 пФ. Діелектрик – фарфор. Конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U = 600$ В і відключили від джерела напруги. Яку роботу A потрібно виконати, щоб вийняти діелектрик із конденсатора? Тертям знехтувати.

Відповідь: $A = 8 \cdot 10^{-5}$ Дж.

11 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

11.1 Мета заняття

Засвоїти основні закони теорії постійного електричного струму: узагальнений закон Ома, правила Кірхгофа та закон Джоуля-Ленца, а також навчитися розраховувати електричні кола, тобто, маючи довільне електричне коло і будь-які його параметри (електрорушійну силу (ЕРС), опір та ін.), вміти визначити інші невідомі величини (силу струму, роботу, потужність, кількість теплоти тощо).

11.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи

Теоретичний матеріал даної теми слід вивчити за [3, розд. 4; 4, розд. 4; 5, глава 4] і конспектом лекцій, відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв'язання завдань, наведених як приклади.

11.3 Основні закони та формули

1. Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

2. Густина струму у провіднику

$$j = \frac{I}{S},\ \vec{j} = ne\langle\vec{\upsilon}\rangle,$$

де S – площа поперечного перерізу провідника; $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ – середня швидкість впорядкованого руху зарядів у провіднику; n – концентрація зарядів.

3. Електрорушійна сила, що діє у колі,

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q_0},$$

де A_{cm} – робота сторонніх сил; q_0 – одиничний позитивний заряд,

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} \qquad \text{(замкнене коло)},$$

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \qquad \text{(ділянка кола 1-2)},$$

де $\vec{E}_{cm}$ – напруженість поля сторонніх сил.

4. Різниця потенціалів між двома точками кола

$$\varphi_1 - \varphi_2 == \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} == \int_1^2 E_l dl,$$

де $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля; E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок елементарного переміщення $d\vec{l}$.

5. Напруга на ділянці 1-2 кола:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon,$$

де $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – різниця потенціалів між точками кола; ε – ЕРС, що діє на ділянці 1-2 кола.

6. Опір R однорідного лінійного провідника, провідність G провідника і питома електропровідність γ речовини провідника:

$$R = \rho\frac{l}{S},\ G = \frac{1}{R},\ \gamma = \frac{1}{\rho},$$

де ρ – питомий електричний опір; S – площа поперечного перерізу провідника; l – його довжина.

7. Опір при послідовному з'єднанні *n* провідників:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

8. Опір при паралельному з'єднанні *n* провідників:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}.$$

9. Закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{(для однорідної ділянки кола)},$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R} \quad \text{(для неоднорідної ділянки кола)},$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad \text{(для замкнутого кола)},$$

де U – напруга на ділянці кола; R – опір кола (ділянки кола); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола; ε_{12} – ЕРС джерел струму, що входять до кола; ε – ЕРС всіх джерел струму кола.

10. Залежність питомого опору ρ і опору R від температури

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),\ R = R_0(1 + \alpha t),$$

де ρ і ρ_0, R і R_0 – відповідно питомий опір та опір провідника при довільній t і $t = 0^\circ C$; α – температурний коефіцієнт опору.

11. Закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \gamma\vec{E},$$

де $\vec{j}$ – густина струму; $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля; γ – питома електропровідність провідника.

12. Робота струму

$$dA = Udq = IUdt = I^2Rdt = \frac{U^2}{R}dt,$$

де U – напруга, прикладена до кінців однорідного провідника; I – сила струму в провіднику; R – опір провідника; dq – заряд, що переноситься через переріз провідника за період часу dt.

13. Потужність струму

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R},$$

де U – напруга, прикладена до кінців одного провідника; I – сила струму в провіднику; R – його опір.

14. Закон Джоуля-Ленца:

$$dQ = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt.$$

15. Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі

$$w = jE = \gamma E^2,$$

де w – питома теплова потужність струму; j – густина струму; E – напруженість електростатичного поля; γ – питома електропровідність речовини.

16. Перше правило Кірхгофа

$$\sum_k I_k = 0, \tag{11.1}$$

де I_k – струм, що входить у вузол / виходить з вузла; k – кількість струмів у вузлі.

17. Друге правило Кірхгофа

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k, \tag{11.2}$$

де $I_i R_i$ – падіння напруги на i-му елементі кола; i – кількість елементів у колі; ε_k – k-та ЕРС, що діє у колі; k – кількість ЕРС, що діють у колі.

Порядок розв'язання задач з використовуванням правил Кірхгофа:

1. Вибрати довільний напрямок струмів на всіх ділянках кола; дійсний напрямок визначається під час вирішення задачі: якщо шуканий струм виходить позитивним, то його напрямок обраний вірно, негативним – його вірній напрямок протилежний обраному.

2. Підрахувати число m вузлів у колі і записати рівняння (11.1) для $(m-1)$ вузлів.

3. Виділити в розгалуженому колі замкнені контури, визначити напрямок обходу кожного і записати систему рівнянь (11.2) для кожного з них. Контури слід вибирати так, щоб кожен новий контур мав хоча б одну ділянку кола, яка б не входила в попередні контури. Добуток $I \cdot R$ позитивний, якщо струм на даній ділянці збігається з напрямком обходу, і навпаки; ЕРС, що діють за обраним напрямком обходу, вважаються позитивними, проти – негативними.

4. Розв’язати отриману систему рівнянь і знайти шукані струми.

11.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке електричний струм, сила і густина струму?
2. Що таке електроопір провідника, від чого залежить?
3. Чому дорівнює електроопір при паралельному та послідовному з'єднанні провідників?
4. Який вигляд має залежність електроопору від температури?
5. Що розуміють під сторонніми силами і яка їхня роль у колі постійного струму?
6. Поясніть фізичний смисл електрорушійної сили, напруги і різниці потенціалів на ділянці електричного кола.
7. Запишіть закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральному вигляді.
8. Запишіть закон Ома у диференціальній формі.
9. Запишіть закон Ома для неоднорідної ділянки кола.
10. Сформулюйте правила знаків для сили струму і ЕРС в узагальненому законі Ома для ділянки кола.
11. Запишіть правила Кірхгофа та їх обґрунтування.
12. Чому дорівнює робота і потужність електричного струму?
13. Запишіть закон Джоуля-Ленца в інтегральній і диференціальній формах.

11.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Який заряд переноситься у таких випадках: а) струм рівномірно збільшується від нуля до $3\,\text{А}$ за $10\,\text{с}$; б) струм зменшується від $18\,\text{А}$ до нуля, до того ж за кожні $0{,}01\text{с}$ він спадає вдвічі: в) сила струму зменшувалася від $10\,\text{А}$ до $5\,\text{А}$ протягом $10\,\text{с}$, причому опір провідника рівномірно зростав, а різниця потенціалів на кінцях провідника залишалася постійною?

Дані:

а) $I_0 = 0$, $I_1 = 3\text{А}$, $\tau = 10\,\text{с}$; б) $I_0 = 18\text{А}$, $I_1 = 0$, $\tau = 0{,}01\,\text{с}$, $\dfrac{I(t)}{I(t+\tau)} = 2$;

в) $I_0 = 10\,\text{А}$, $I = 5\,\text{А}$, $\tau = 10\,\text{с}$.

Знайти: q.

Аналіз і розв'язання

а) Відомо, що $I = \dfrac{dq}{dt}$, звідки $dq = Idt$ і $q = \int\limits_0^\tau Idt$. Але за умовами $I = kt$, де $k = \dfrac{I_1}{\tau}$, тоді $q = \int\limits_0^\tau ktdt = \dfrac{k\tau^2}{2} = \dfrac{I_{1\tau}}{2} = 15\,\text{Кл}$.

б) Знайдемо закон зміни струму з часом. За умовами задачі

$$\frac{I(t)}{I(t+\tau)} = 2, \text{ тобто } I(\tau) = \frac{I_0}{2};\ I(2\tau) = \frac{l_0}{2^2};\ I(3\tau) = \frac{I_0}{2^3}.$$

Одержимо залежність струму від часу:

$$I(t)=\frac{I_0}{2^{\frac{t}{\tau}}}=I_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Тепер розрахуємо q

$$q=\int\limits_0^\infty I(t)dt=\int\limits_0^\infty I_0 2^{-\frac{t}{\tau}}dt=-\frac{I_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\tau}{\ln 2}\Bigg|_0^\infty=\frac{I_0\tau}{\ln 2}=0,26\,\text{Кл}.$$

в) З умов задачі випливає, що величина опору є лінійною функцією часу, тобто

$$R=R_0+kt\ , \tag{11.3}$$

де R_0 і R – відповідно початковий і кінцевий опір провідника; k – стала величина, яка відповідає швидкості зміни опору:

$$k=\frac{R-R_0}{\tau}.$$

За законом Ома для однорідної ділянки кола можна записати:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}.$$

Очевидно, що сила струму не є лінійною функцією часу. Знаючи залежність *I(t),* можна визначити заряд за формулою:

$$q=\int\limits_0^\tau Idt=\int\limits_0^\tau\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}dt=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\cdot\int\limits_0^\tau\frac{d(R_0+kt)}{R_0+kt}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\cdot\ln\frac{R_0+kt}{R_0}.$$

Маючи на увазі (11.3) і співвідношення $R=(\varphi_1-\varphi_2)/I$; $R_0=(\varphi_1-\varphi_2)/I_0$, одержимо:

$$q=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)\tau}{R-R_0}\ln\frac{R}{R_0}=\frac{I_0 I_\tau}{I_0-I}\ln\frac{I_0}{I}=69,3\,\text{Кл}.$$

Відповідь: а) $q=15\,\text{Кл}$, б) $q=0,26\,\text{Кл}$, в) $q=69,3\,\text{Кл}$.

Задача 2. Джерело струму з ЕРС $\varepsilon_1=12\,\text{В}$ і внутрішнім опором $r_1=0,2\,\text{Ом}$ заряджає батарею акумуляторів з ЕРС $\varepsilon_2=10\,\text{В}$ і внутрішнім опором $r_2=0,6\,\text{Ом}$. Паралельно батареї підключено лампу розжарювання опором $R=3\,\text{Ом}$ (рис. 11.1). Визначити величину струмів в батареї акумуляторів I_2 та крізь лампу I.

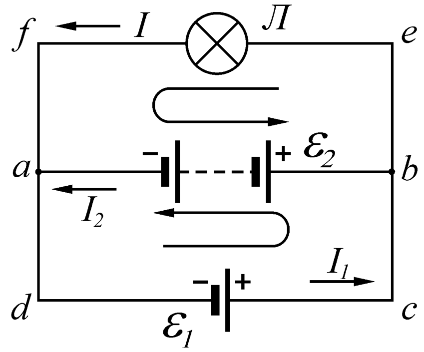


Рисунок 11.1

Дані: $\varepsilon_1=12\,\text{В}$, $r_1=0,2\,\text{Ом}$, $\varepsilon_2=10\,\text{В}$, $r_2=0,6\,\text{Ом}$, $R=3\,\text{Ом}$.

Знайти: I_2, I.

Аналіз і розв'язання

У процесі заряджання акумулятора його полюси з'єднуються з однойменними полюсами генератора. Вибираємо напрямки струмів, вказані на рисунку, тоді за першим законом Кірхгофа (11.1) для вузла а маємо:

$$I_1 = I + I_2. \qquad (11.4)$$

В обох замкнутих колах *abef* та *abcd* напрямок обходу беремо проти напрямку руху годинникової стрілки. Тоді за другим законом Кірхгофа (11.2) одержимо:

$$IR - I_2 r_2 = \varepsilon_2;$$

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Разом з рівнянням (11.4) маємо систему рівнянь, після розв’язання якої одержимо:

$$I_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R - \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} = 1{,}6\ \text{А};$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} = 3{,}6\,\text{А}.$$

Відповідь: $I = 3{,}6\,\text{А}$, $I_2 = 1{,}6\,\text{А}$.

Задача 3. Величина струму в колі змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-at}$, де $I_0 = 5\,\text{А}$. Визначити кількість теплоти, яка виділиться у провіднику опором $R = 20\,\text{Ом}$ за час, протягом якого струм зменшиться в e разів. Коефіцієнт a дорівнює $2 \cdot 10^{-2}\,\text{с}^{-1}$.

Дані: $I = I_0 e^{-at}$, $I_0 = 5\,\text{А}$, $R = 20\,\text{Ом}$, $a = 2 \cdot 10^{-2}\,\text{с}^{-1}$.

Знайти: Q.

Аналіз і розв’язання

За законом Джоуля-Ленца маємо:

$$Q = \int_0^t I^2 R dt,$$

підставимо закон струму $I = I_0 e^{-at}$ і одержимо:

$$Q = I_0^2 R \int_0^\tau e^{-2at} dt = I_0^2 R \left(-\frac{1}{2a} e^{-at} \right) \Bigg|_0^\tau = \frac{I_0^2 R}{2a}\left(1 - e^{2a\tau}\right).$$

Розрахуємо час τ, протягом якого струм зменшиться в e разів.

$$I = \frac{I_0}{e};\ \frac{I_0}{e} = I_0 e^{-a\tau};\ e^{-1} = e^{-a\tau};\ \tau = \frac{1}{a} = 50\,c.$$

Обчислення дає результат:

$$Q = \frac{I_0^2}{2a}\cdot\left(1 - e^{-2a\tau}\right) \approx 1{,}1\cdot 10^4\ \text{Дж}.$$

Відповідь: $Q \approx 11\text{кДж}$.

Задача 4. Визначте внутрішній опір джерела струму, якщо у зовнішньому колі при силі струму $I_1 = 4\,\text{А}$ розвивається потужність $P_1 = 10\,\text{Вт}$, а при силі струму $I_2 = 6\,\text{А}$ – потужність $P_2 = 12\,\text{Вт}$.

Дані: $I_1 = 4\,\text{А}$, $P_1 = 10\,\text{Вт}$, $I_2 = 6\,\text{А}$, $P_2 = 12\,\text{Вт}$.

Знайти: r.

Аналіз і розв’язання

Потужність, що розвивається струмом,

$$P_1 = I_1^2 R_1 \text{ и } P_2 = I_2^2 R_2, \tag{11.5}$$

де R_1 і R_2 – опір зовнішнього кола.

Згідно з законом Ома для замкнутого кола,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r},\ I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r},$$

де ε – ЕРС джерела. Розв’язавши ці два рівняння відносно r, отримуємо

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \tag{11.6}$$

Виразивши $I_1 R_1$ і $I_2 R_2$ з рівняння (11.5) і підставивши в вираз (11.6), знайдемо внутрішній опір джерела струму:

$$r = \frac{P_1 / I_1 - P_2 / I_2}{I_2 - I_1} = 0{,}25\,\text{Ом}.$$

Відповідь: $r = 0{,}25\,\text{Ом}$

Задача 5. По провіднику з опором $R = 10$ Ом тече струм, сила струму зростає при цьому лінійно. Кількість теплоти Q, яка виділилася в провіднику за час $\tau = 10$ с, дорівнює 300 Дж. Визначте заряд q, який пройшов за цей час по провіднику, якщо в початковий момент часу сила струму в провіднику дорівнює нулю.

Дано: $R = 10$ Ом, $\tau = 10$ с, $Q = 300$ Дж, $I_0 = 0$.

Знайти: q.

Аналіз і розв'язання

З умови рівномірності зростання сили струму (при $I_0 = 0$) випливає, що $I = kt$, де k − коефіцієнт пропорційності. Враховуючи, що $I = \frac{dq}{dt}$, можемо записати:

$$dq = Idt = ktdt. \qquad (11.7)$$

Інтегруючи вираз (11.7), отримаємо:

$$q = \int_0^\tau ktdt = \frac{k\tau^2}{2}. \qquad (11.8)$$

Для знаходження коефіцієнта k запишемо закон Джоуля-Ленца для нескінченно малого проміжку часу dt:

$$dQ = I^2 Rdt.$$

Інтегруючи цей вираз від 0 до τ, отримаємо кількість теплоти Q, задану в умові задачі:

$$Q = \int_0^\tau I^2 Rdt = \int_0^\tau k^2 t^2 Rdt = \frac{1}{3} k^2 R\tau^3,$$

звідки знайдемо k:

$$k = \sqrt{\frac{3Q}{\tau^3 R}}. \qquad (11.9)$$

Підставивши формулу (11.7) у вираз (11.8), визначимо шуканий заряд

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q}{R}} = 15 \text{ Кл}.$$

Відповідь: $q = 15$ Кл.

11.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Величина струму в провіднику рівномірно збільшується від $I_0 = 2$ А до $I = 8$ А за 10 с. Знайти величину заряду, що пройшов.

Відповідь: $q = 30$ Кл.

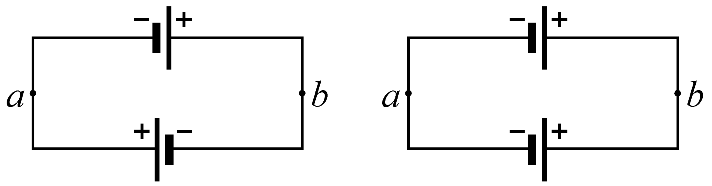
Задача 2. Визначити густину струму в залізному провіднику, довжина якого 10 м, якщо провідник знаходиться під напругою $U = 6$ В.

Відповідь: $j = 6{,}1$ МА/м^2.

Задача 3. Внутрішній опір гальванометра $r = 680$ Ом. Як та який опір $R_ш$ слід підключити до нього, щоб за його допомогою можна було б вимірювати струм 2,5 А? Шкала гальванометра розрахована на 300 мкА.

Відповідь: $R_ш = 0{,}0618$ Ом.

Задача 4. Внутрішній опір гальванометра $r_a = 720$ Ом, шкала розрахована 300 мкА. Як та який опір $R_д$ слід додати до нього, щоб за його допомогою можна було б вимірювати напругу $U = 300$ В?



а) б)

Рисунок 11.2

Відповідь: $R_д \approx 10^6$ Ом.

Задача 5. Два однакових джерела струму з $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}2$ В, внутрішній опір яких $r = 0{,}4$ Ом, з'єднані, як зображено на рис. 11.2. Визначити величину струму в колі та різницю потенціалів між точками a і b в першому та другому випадках.

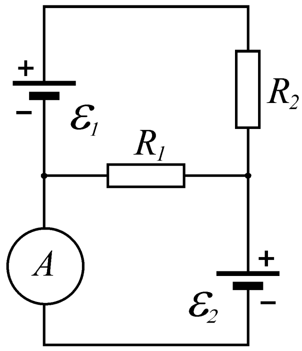


Рисунок 11.3

Відповідь: а) $I = 3$ А; $U = 0$; б) $I = 0$; $U = 1{,}2$ В.

Задача 6. Два елементи $\varepsilon_1 = 1{,}2$ В з внутрішнім опором $r_1 = 0{,}10$ Ом та $\varepsilon_2 = 0{,}9$ В з внутрішнім опором $r_2 = 0{,}3$ Ом з'єднані однойменними полюсами. Опір R провідників, що їх з'єднує, дорівнює $0{,}2$ Ом. Визначити величину струму в колі.

Відповідь: $I = 0{,}5$ А.

Задача 7. На рис. 11.3 $\varepsilon_1 = 110$ В, $\varepsilon_2 = 220$ В, $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 500$ Ом. Яку величину струму покаже амперметр? Опором батарей та амперметра знехтувати.

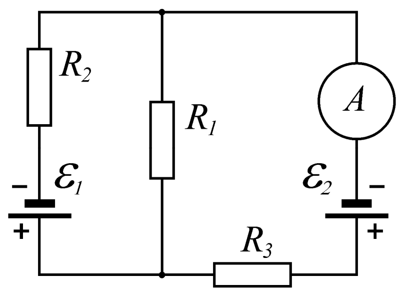


Рисунок 11.4

Відповідь: $I = 0{,}4$ А.

Задача 8. Яку величину струму показує амперметр (рис. 11.4), якщо $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 1$ В, $R_1 = 10^3$ Ом, $R_2 = 500$ Ом, $R_3 = 200$ Ом. Опір амперметра $R_A = 200$ Ом. Внутрішнім опором елементів знехтувати.

Відповідь: $I = 0{,}45$ мА.

Задача 9. На схемі (рис. 11.5) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $R_2 = 2R_1$. У скільки разів струм, що тече через вольтметр, більше струму, що тече через R_2? Опором батарей знехтувати.

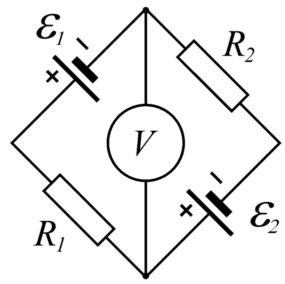


Рисунок 11.5

Відповідь: в 3 рази.

Задача 10. На схемі (рис. 11.5) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 110$ В, $R_1 = R_2 = 200$ Ом, опір вольтметра 1000 Ом. Знайти напругу, що показує вольтметр. Опором батареї знехтувати.

Відповідь: $U = 100$ В.

Задача 11. Дві батареї акумуляторів ($\varepsilon_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом, $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом) та реостат ($R = 6$ Ом) з'єднані так, як зображено

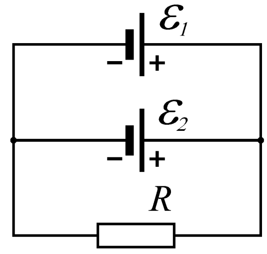


Рисунок 11.6

на рис.11.6. Визначити величину струму в батареях та реостаті.

Відповідь: $1{,}6\,\text{А},\ 0{,}2\,\text{А},\ 1{,}4\,\text{А}$.

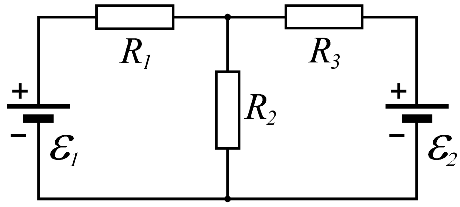


Рисунок 11.7

Задача 12. Визначити величину струму в резисторі (рис. 11.7), який має опір $R_3 = 3\,\text{Ом}$, та напругу на його кінцях, якщо $\varepsilon_1 = 4\,\text{В}$, $\varepsilon_2 = 3\,\text{В}$, $R_1 = 2\,\text{Ом}$, $R_2 = 6\,\text{Ом}$. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

Відповідь: $I_3 = 0$, $U_3 = 0$.

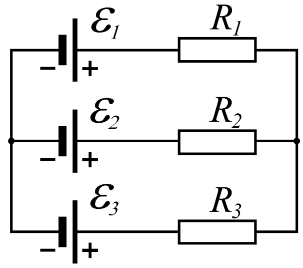


Рисунок 11.8

Задача 13. Три джерела струму $\varepsilon_1 = 11\text{В}$, $\varepsilon_2 = 4\,\text{В}$ та $\varepsilon_3 = 6\,\text{В}$ з'єднані, як зображено на рис. 11.8. Визначити величину струму в резисторах, якщо $R_1 = 5\,\text{Ом}$, $R_2 = 10\,\text{Ом}$ та $R_3 = 2\,\text{Ом}$. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

Відповідь: $I_1 = 0{,}8\,\text{А}$, $I_2 = 0{,}3\,\text{А}$, $I_3 = 0{,}5\,\text{А}$.

Задача 14. Від батареї $\varepsilon = 500\,\text{В}$ потрібно передати енергію на відстань $2{,}5\,\text{км}$. Споживна потужність дорівнює $10\,\text{кВт}$. Визначити мінімальні втрати потужності $\Delta P_{\min}$ в мережі, якщо діаметр мідних провідників $1{,}5\,\text{см}$.

Відповідь: $\Delta P_{\min} = 212\,\text{Вт}$.

Задача 15. Від генератора $\varepsilon = 110\,\text{В}$ слід передати енергію на відстань $250\,\text{м}$. Споживна потужність дорівнює $1\,\text{кВт}$. Знайти мінімальну площу перерізу мідного провідника, якщо втрати потужності в мережі не повинні перевищувати 1%.

Відповідь: $S = 85\,\text{мм}^2$.

Задача 16. Для нагрівання $4{,}5\,\text{л}$ води від 23°C до кипіння нагрівач споживає $0{,}5\,\text{кВт}\cdot\text{год}$. Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії η нагрівача?

Відповідь: $\eta = 80\%$.

Задача 17. Величина струму в провіднику, що має опір $R = 12\,\text{Ом}$, рівномірно спадає від $I_0 = 5\,\text{А}$ до $I = 0$ протягом 10 секунд. Яка кількість теплоти Q виділяється в цьому провіднику за вказаний проміжок часу?

Відповідь: $Q = 1\,\text{кДж}$.

Задача 18. Електрорушійна сила батареї акумуляторів $\varepsilon = 12\,\text{В}$. Величина струму короткого замикання дорівнює $5\,\text{А}$. Яку найбільшу потужність $P_{\max}$ можна одержати в зовнішньому колі, з'єднаному з такою батареєю?

Відповідь: $P_{\max} = 15\,\text{Вт}$.

Задача 19. Величина струму в провіднику; який має опір $R = 100\,\text{Ом}$, рівномірно зростає від $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10\,\text{А}$ протягом $\tau = 30\,\text{с}$. Знайти кількість теплоти Q, що виділяється за цей час у провіднику.

Відповідь: $Q = 100\,\text{кДж}$.

Задача 20. Амперметр з опором $R_1 = 2$ Ом, підключений до джерела струму, показує струм $I_1 = 5$ А. Вольтметр з опором $R_1 = 150$ Ом, підключений до такого ж джерела струму, показує напругу $U = 12$ В. Знайти струм короткого замикання $I_к$ джерела.

Відповідь: $I_к = \dfrac{I_1 U\left(R_2 - R_1\right)}{R_2(U - I_1 R_1)} = 29{,}6$ А.

Задача 21. Два паралельно з'єднані резистори з опором $R_1 = 40$ Ом і $R_2 = 10$ Ом підключені до джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 10$ В. Струм у колі $I = 1$ А. Знайти внутрішній опір джерела і струм короткого замикання $I_к$.

Відповідь: $r = \dfrac{\varepsilon\left(R_1 + R_2\right) - I R_1 R_2}{I\left(R_1 + R_2\right)} = 2$ Ом, $I_к = \dfrac{\varepsilon}{r} = 5$ А.

Задача 22. При підключенні зовнішнього кола напруга на затискачах джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 30$ В виявилась рівною $U = 18$ В. Зовнішній опір кола $R = 6$ Ом. Знайти внутрішній опір джерела r.

Відповідь: $r = \dfrac{R\left(\varepsilon - U\right)}{U} = 4$ Ом.

Задача 23. Джерело струму з ЕРС $\varepsilon = 15$ В і внутрішнім опором $r = 5$ Ом замкнуте на резистор з опором $R = 10$ Ом. До затискачів джерела підключений конденсатор ємністю $C = 1$ мкФ. Знайти заряд на конденсаторі q.

Відповідь: $q = \dfrac{C\varepsilon R}{R + r} = 10^{-5}$ Кл.

Задача 24. У колі джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 30$ В проходить струм $I = 3$ А. напруга на затискачах джерела $U = 18$ В. Знайти зовнішній опір кола R і внутрішній опір джерела r.

Відповідь: $R = \dfrac{U}{I} = 6$ Ом, $r = \dfrac{\varepsilon - U}{I} = 4$ Ом.

Задача 25. Лампа підключена мідними дротами до джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 2$ В і внутрішнім опором $r = 0{,}04$ Ом. Довжина дротів $l = 4$ м, їх діаметр $D = 0{,}8$ мм, питомий опір міді $\rho = 0{,}017$ мкОм$\cdot$м напруга на затискачах джерела $U = 1{,}98$ В. Знайти опір лампи R.

Відповідь: $R = \dfrac{Ur}{\varepsilon - U} - \dfrac{4\rho l}{\pi D^2} = 3{,}82$ Ом.

Задача 26. Загальний опір двох послідовно з'єднаних провідників $R = 5$ Ом, а паралельно з'єднаних $R_0 = 1{,}2$ Ом. Знайти опір кожного провідника.

Відповідь: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 2$ Ом.

Задача 27. При підключенні в електричне коло провідника, що має діаметр $D = 0{,}5$ мм і довжину $l = 47$ мм, напруга на ньому $U = 1{,}2$ В при струмі у колі $I = 1$ А. Знайти питомий опір ρ матеріалу провідника.

Відповідь: $\rho = \dfrac{U\pi D^2}{4Il} = 5\cdot 10^{-6}\,\text{Ом}\cdot\text{м}$.

Задача 28. Який необхідно взяти опір R, щоб можна було підключити в мережу з напругою $U = 220\,\text{В}$ лампу, розраховану на напругу $U = 120\,\text{В}$ і струм $I_0 = 4\,\text{А}$?

Відповідь: $R = \dfrac{U - U_0}{I_0} = 25\,\text{Ом}$.

Задача 29. Знайти напругу на провіднику з опором $R = 10\,\text{Ом}$, якщо за час $t = 5\,\text{хв}$, протікає заряд $q = 120\,\text{Кл}$.

Відповідь: $U = \dfrac{qR}{t} = 4\,\text{В}$.

Задача 30. Знайти струм у ланцюгу джерела струму, замкнутого на провідник з опором $R = 1000\,\text{Ом}$, якщо при послідовному з'єднанні з міліамперметром з опором $R_0 = 100\,\text{Ом}$ він показав струм $I_0 = 25$ мА.

Відповідь: $I = \dfrac{I_0(R + R_0)}{R} = 27{,}5\,\text{мА}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник/ Упоряд.: Ткаченко Т.Б. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2004. – 108 с.
2. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина І. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник / В.О. Стороженко, І.М. Кібець, А.І. Рибалка, Т.Б. Ткаченко. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 320 с.
3. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: навч. посібник / Упоряд.: Українець М.І. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 164 с.
4. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина ІІ. Електрика та магнетизм: навч. посібник / І.М. Кібець, А.І. Рибалка, В.О. Стороженко. – Харків: Компанія СМІТ, 2009. – 424 с.
5. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. – М.: 1981. – 496 с.
6. Савельев И.В. Курс общей физике: в 3 т. – М.: 1982. – Т.1. – 432 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: 1988. – 416 с.
8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: 1982. – 420 с.
9. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – М.: Высш. шк. 1999. – 591 с.

Електронне навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять

з дисципліни
«ФІЗИКА»
Частина 1

для студентів денної форми навчання
напрямів 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика», 6.040303 «Системний аналіз», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія», 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050201 «Системна інженерія», 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 «Електронні пристрої та системи», 6.050803 «Акустотехніка», 6.050901 «Радіотехніка», 6.050902 «Радіоелектронні апарати», 6.050903 «Телекомунікації», 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», 6.051002 «Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.051004 «Оптотехніка», 6.051402 «Біомедична інженерія», 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», 6.170102 «Системи технічного захисту інформації», 6.170103 «Управління інформаційною безпекою»

Упорядники: СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович
ОРЕЛ Роман Петрович
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна
МАЛИК Світлана Борисівна

Відповідальний випусковий: О. В. Лазоренко

Авторська редакція