

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до комп'ютерних лабораторних робіт з фізики

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою фізики
протокол № 10
від «30» березня 2006 р.

Харків 2006

Методичні вказівки до комп'ютерних лабораторних робіт з фізики для студентів усіх спеціальностей і форм навчання / Упоряд. Коваленко О.М., Лазоренко О.В., Орел Р.П., Мешков С.М. – Харків: ХНУРЕ, 2006.-123 с.

Упорядники: О.М. Коваленко
О.В. Лазоренко
Р.П. Орел
С.М. Мешков

ЗМІСТ

Загальні положення	4
Частина I. Фізичні основи механіки	5
1 Вивчення вільного падіння	5
2 Вивчення вільних коливань лінійного осцилятора	8
3 Вивчення вимушених коливань лінійного та нелінійного осцилятора	12
Частина II. Молекулярна фізика	17
4 Визначення середньої довжини вільного пробігу молекули	17
5 Перевірка основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії	23
6 Вимірювання коефіцієнта в'язкості рідини за методом Стокса	27
Частина III. Електрика та магнетизм	32
7 Вивчення графічного зображення електричного поля точкового заряду та системи точкових зарядів	32
8 Вивчення електричного поля плоского та циліндричного конденсаторів	35
9 Вимірювання електричного опору провідників за методом моста Уїтстона	41
10 Осцилографування фізичних процесів	46
11 Вивчення магнітного поля кругового витка та соленоїда	52
12 Визначення відношення заряду електрона до його маси методом фокусування пучка електронів повздовжнім магнітним полем	56
13 Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона	62
Частина IV. Оптика	68
14 Вивчення явища інтерференції від двох щілин та системи паралельних щілин	68
15 Вивчення дифракції світла на одній щілині та системі паралельних щілин	73
Частина V. Атомна фізика	79
16 Вивчення руху мікрочастинки в потенціальній ямі скінченної глибини	79
17 Проходження мікрочастинки через потенціальний бар'єр	84
18 Дослід Резерфорда з розсіювання α -частинок	89
19 Вивчення будови та спектру атому водню	94
20 Вивчення нормальних коливань кристалічної решітки	100
21 Рух електрона в періодичному полі кристалічної решітки	105
22 Вивчення явища холодної емісії електронів із металу	111
Додатки	116
Перелік посилань	122

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Фізика – наука експериментальна, а тому на першому плані при її вивченні завжди стоїть фізичний практикум.

В даній роботі пропонується комп'ютерний практикум, який включає віртуальні лабораторні роботи з усіх основних розділів та тем курсу фізики і дозволяє після його виконання отримати тверді знання з основних явищ та законів фізики та скласти загальну уяву про предмет фізики.

Методичні вказівки до кожної роботи містять: основні теоретичні відомості про явища, які вивчаються, основні фізичні закони, які їх описують; стислий опис алгоритму комп'ютерної програми та її можливостей; вказівки до виконання роботи; вказівки щодо змісту звіту; питання та завдання для самоконтролю.

Лабораторні роботи виконуються відповідно до семестрового графіка, який знаходиться на стенді в лабораторії, тому кожен студент має можливість підготуватися до них заздалегідь.

Виконання лабораторного завдання складається із попередньої підготовки, проведення комп'ютерного експерименту і складання звіту про результати роботи. До виконання лабораторної роботи необхідно готуватись заздалегідь, вивчити конспект лекцій і рекомендовані розділи навчальних посібників [1...6].

Допуск до виконання лабораторної роботи проводиться викладачем перед початком роботи опитуванням (письмово чи усно) тільки при наявності повністю оформленого звіту за попередньою роботою і підготовленого звіту до роботи, яка виконуватиметься. В комп'ютерному класі проводяться тільки комп'ютерний експеримент та розрахунки.

Після проведення комп'ютерного експерименту результаті розрахунків необхідно показати викладачеві, а до кінця заняття написати звіт з виконаної роботи.

Звіт по лабораторній роботі оформляється згідно ДСТУ 3.008-95 [7]. Захист оформлених звітів проводять у вигляді здачі циклу лабораторних робіт (3-4 роботи) на підсумковому занятті згідно графіку.

До здачі циклу допускають студентів, які виконали лабораторні роботи і оформили звіт. Захист робіт проводиться у формі опитування по змісту виконаних лабораторних робіт. Перелік контрольних запитань та завдань наведений у кінці опису кожної роботи.

ЧАСТИНА I. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1 ВИВЧЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ

1.1 Мета роботи

Вивчити закономірності вільного падіння тіл в полі тяжіння, визначити прискорення вільного падіння. Ознайомитись з методом обчислення похибок прямих та непрямих вимірювань.

1.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Прискорення вільного падіння — це прискорення, якого набуває тіло при русі в полі сили тяжіння. Поблизу поверхні Землі сила тяжіння залежить від географічної широти місцевості та від висоти над рівнем моря. Із збільшенням висоти над поверхнею Землі сила тяжіння зменшується обернено пропорційно квадратові відстані між центрами тіла та Землі.

В даній роботі прискорення вільного падіння g визначається за прямими вимірюваннями часу t та висоти падіння h . Відстань H , яку тіло проходить за час t визначається за кінематичним законом руху:

$$H = \frac{g \cdot t^2}{2}, \quad (1.1)$$

звідки $g = \frac{2H}{t^2}$, або $\sqrt{H} = t \cdot \sqrt{\frac{g}{2}}$. (1.2)

Якщо виміряти час падіння кульки з різної висоти та побудувати графік залежності \sqrt{H} від t , то згідно з (1.2) отримаємо пряму, тангенс кута нахилу якої до осі t буде дорівнювати $\sqrt{g/2}$.

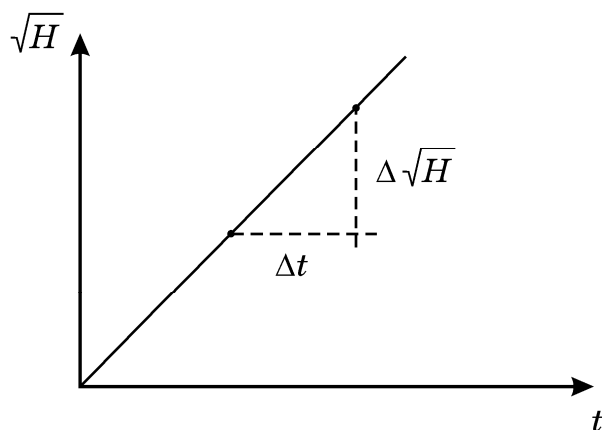


Рисунок 1.1

Графік залежності \sqrt{H} від t (рис.1.1) дає можливість обчислити значення g за формулою

$$g = 2 \cdot \left(\frac{\Delta \sqrt{H}}{\Delta t} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{t_2 - t_1} \right)^2. \quad (1.3)$$

1.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 1.2. Програма моделює рух тіла в середовищі в широких межах зміни густини середовища ρ та коефіцієнта в'язкості, а також в частинному випадку, коли $\rho \approx 0$, $\eta \approx 0$, тобто, у вакуумі. Одновимірний рух тіла (кульки) описується за допомогою модифікованого метода Ейлера (додаток Б) з урахуванням сил, які діють на кульку (з якими ви детально ознайомитесь при виконанні роботи 1.2). Шлях падіння кульки вимірюється за шкалою, на якій нанесені поділки в м. Час падіння кульки вимірюється секундоміром. На екрані дисплею виведені кнопки регулювання секундоміра для вмикання, вимикання та скидання до нуля. Програма дозволяє зупинити процес падіння в будь-який момент, а потім або продовжити із збереженими значеннями величин на цей момент часу, або повернутися до початкового моменту.

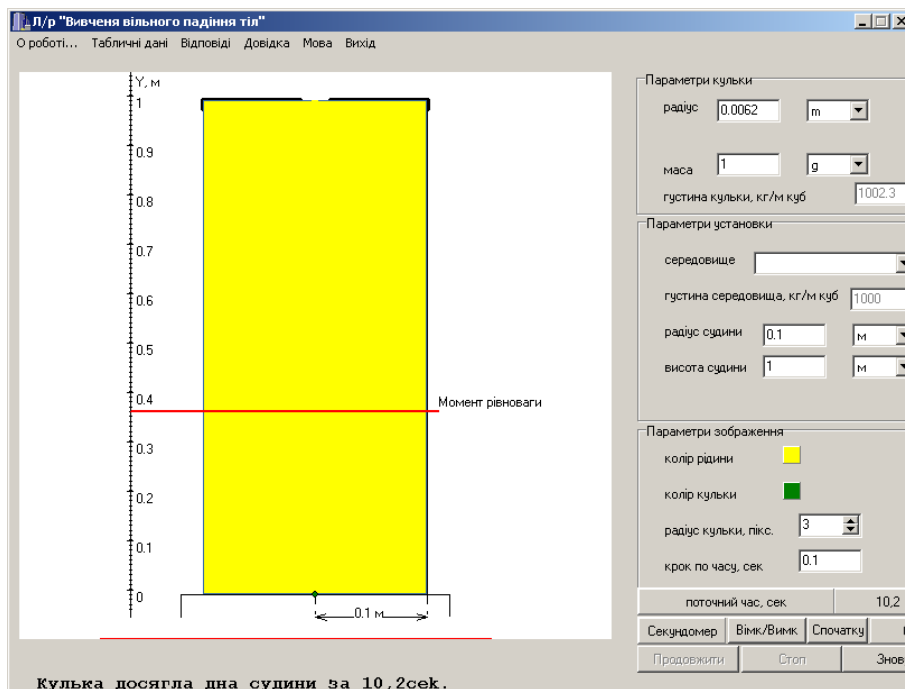


Рисунок 1.2

1.4 Інструкція користувачу

1. Встановити у вікні інтерфейсу "рідина N" — "інша". Задати значення густини $\rho = 0,000001 \text{ кг/м}^3$, в'язкості $\eta = 0,00000001 \text{ Па}\cdot\text{с}$ (вакуум). Обнулити показання секундоміру, натиснувши на "Знову".

2. Натиснути кнопку «Запуск» і після того, як кулька досягне дна посудини встановити висоту посудини 100 м, масу кульки m та її радіус R згідно номеру варіанту з таблиці 1.1.

3. Встановити червону риску лівою кнопкою «миші» на рівні $(100 - H)$ м, H взяти з таблиці 1.1. згідно номеру варіанту.

4. Натиснути кнопку «Запуск». Одразу ж після натискання кнопки «Запуск», ввімкнути секундомір. В момент досягнення кулькою червоної риски, вимкнути секундомір. Занести в таблицю 1.2 значення висоти та часу падіння.

5. Повторити вимірювання 4 рази, збільшуючі кожного разу висоту падіння H на 5 м, починаючи з початкового значення, наведеного в таблиці 1.1. Занесіть дані в таблицю 1.2.

6. Обчислити середнє значення часу $\langle t \rangle$ для кожного значення висоти.

Таблиця 1.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R , м	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
H , м	30	30	30	30	30	30	35	35	35	35	35	35
m , г	1	2	4	6	9	11	1	2	4	6	9	11

7. Побудувати графік залежності \sqrt{H} від $\langle t \rangle$. Обчислити величину g за формулою (1.3).

8. Обчислити похибки вимірювань.

9. Провести експеримент пункту 2 для випадку, коли кулька падає в реальних умовах – у повітрі. Для цього задати значення густини середовища $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнта в'язкості $\eta = 17,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Результати занести в таблицю подібну до таблиці 1.2. Побудувати залежність \sqrt{H} від t на тому ж графіку, що й для вакууму. Обчислити величину g за формулою (1.3).

10. Обчислити похибки вимірювань прискорення вільного падіння.

Таблиця 1.2 – Результати розрахунків

№ експерименту	Час падіння, с					Середнє значення t
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
1						
2						
3						
4						

1.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, дані вимірювань, занесені до таблиці, залежності \sqrt{H} від t для вакууму та повітря, представлені на одному рисунку, висновки з результатів порівняння графіків, результати обчислення похибок вимірювання, результат обчислення прискорення вільного падіння у вигляді

$g = \langle g \rangle \pm \Delta g$ (у вакуумі та у повітрі, порівняння величини g з табличним значенням для даної широти місцевості).

1.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яка мета даної роботи?
2. Як залежить величина прискорення вільного падіння від географічної широти місцевості та висоти над рівнем моря?
3. Яким кінематичним законом описується вільне падіння тіл?
4. Запишіть формулу, за якою визначається прискорення вільного падіння в даній роботі.
5. Які вимірювання називають прямими?
6. Які вимірювання називають непрямыми?
7. Як обчислюються похибки при прямих вимірюваннях?
8. Як обчислюються похибки при непрямих вимірюваннях?

2. ВИВЧЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

2.1 Мета роботи

Вивчити закономірності згасаючих коливань та визначити коефіцієнт згасання, логарифмічний декремент згасання та добротність.

2.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Лінійним осцилятором називають тіло (матеріальну точку), яка здійснює гармонічні коливання.

В ідеальній коливальній системі, в якій відсутні сили опору, можуть існувати коливання із сталою амплітудою. В такій системі у випадку малих значень амплітуди діє квазіпружня сила [1, 4]:

$$F = -kx, \quad (2.1)$$

де k – коефіцієнт пружності.

Рівняння руху матеріальної точки в цьому випадку має вигляд:

$$F = ma = mx'', \quad (2.2)$$

де x'' – друга похідна від x за часом, m – маса тіла.

$$mx'' + kx = 0. \quad (2.3)$$

Такі коливання відбуваються з власною частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.4)$$

В реальних коливальних системах завжди присутні сили опору, їх дія зменшує енергію системи.

Розглянемо вільні згасаючі коливання. Якщо швидкість руху невелика, сила опору середовища пропорційна швидкості:

$$F_0 = -rV = -rx', \quad (2.5)$$

де x' – похідна за часом.

Знак мінус вказує на те, що сила F спрямована проти напрямку руху. Запишемо рівняння руху :

$$mx'' = -kx - rx', \quad (2.6)$$

де r – коефіцієнт опору.

Вводячи позначення $2\delta = r/m$, отримуємо рівняння:

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.7)$$

де δ – коефіцієнт згасання коливань.

Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Якщо згасання незначне ($\delta < \omega_0$), розв'язок рівняння (2.7) має вигляд:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.8)$$

де A_0 – амплітуда коливань в момент часу $t=0$, φ – початкова фаза.

Згасаючі коливання не є періодичними, бо в них ніколи не повторюються максимальні значення зміщення, швидкості, прискорення.

Величину T називають періодом коливань (згасаючих коливань) внаслідок того, що коливальна система проходить положення рівноваги через рівні проміжки часу [1, 4]:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}. \quad (2.9)$$

Амплітуда згасаючих коливань зменшується із зміною часу за законом:

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t). \quad (2.10)$$

З формули (2.10) витікає

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{A_0}{A(t)} \right). \quad (2.11)$$

Натуральний логарифм відношення амплітуд зміщень, які розрізняються в часі на проміжок T , називають логарифмічним декрементом згасання λ :

$$\lambda = \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+T)} \right) = \delta T. \quad (2.12)$$

2.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 2.1. Програма дає можливість вивчати незгасаючі коливання системи за різних умов їх збудження: шляхом відхилення пружинного маятника від положення рівноваги, та шляхом надання йому певного значення початкової швидкості. Програма будує графіки залежності відхилення x від положення рівноваги як функцію часу в широких межах зміни параметрів початкового положення x_0 , початкової швидкості V_0 , значень маси тіла m , жорсткості пружини k та величини коефіцієнта опору r . Для завдання значень змінних параметрів x_0 , V_0 , k , m , r виведено відповідні кнопки (рис.2.1) на інтерфейсі програми. Кнопки `tstart`, `tstop` призначені для регулювання початкового та кінцевого моменту зображення графіка коливань. Програма дозволяє вивчати як незгасаючі коливання, коли сили тертя відсутні ($r = 0$), так і згасаючі коливання, коли $r \neq 0$, а також аперіодичний режим, тобто такий режим, коли тертя в системі досягає таких меж, що система, відхилена від положення рівноваги, повільно повертається до цього положення і коливання не виникають ($\delta > \omega_0$).

Для роботи програми вона повинна розташовуватися в каталогах, імена яких мають не більше восьми символів.

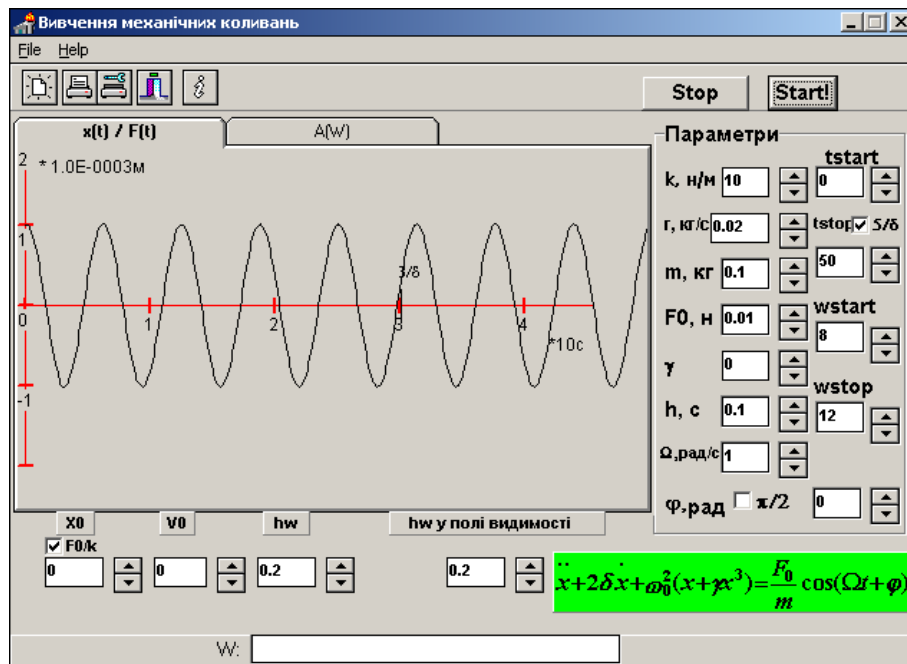


Рисунок 2.1

2.4 Інструкція користувачу

1. Прибрати галочку з $tstop$. Встановити $F_0=0,0001 \text{ Н}$, $r=0 \text{ кг/с}$ ($\delta=0$), $\gamma=0$ (γ – стала величина, яка характеризує нелінійність повертаючої сили). Отримати незгасаючі коливання.

2. Забезпечити режим вільних коливань, прибравши галочку з F_0 / k і поклавши $F_0=0,001 \text{ Н}$, $r=0,2 \text{ кг/с}$. Початкові умови встановити у вигляді $V_0=0 \text{ м/с}$, $x_0=0,1 \text{ м}$. Зауваження:

- 1) Якщо крива виходить не гладкою, а ломаною, то зменшити крок h .
- 2) Якщо крива має дуже багато періодів, то зменшити параметр $tstop$.

3. Отримати $x(t)$ для параметрів m , r та x_0 , взятих з таблиці 2.1. Заміряти кілька амплітуд (A_1, A_2, A_3, A_4) та відповідні їм моменти часу t . Визначити три значення логарифмічного декременту згасання λ та його середнє значення. Результати занести до таблиці 2.2.

Таблиця 2.1 – Вихідні данні

№ вар.	$x_0, \text{ м}$	$r, \text{ кг/с}$	$m, \text{ кг}$	№ вар.	$x_0, \text{ м}$	$r, \text{ кг/с}$	$m, \text{ кг}$
1	0,1	0,1	0,1	7	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,1	8	0,1	0,2	0,2
3	0,1	0,3	0,1	9	0,1	0,3	0,2
4	0,2	0,1	0,1	10	0,2	0,1	0,2
5	0,2	0,2	0,1	11	0,2	0,2	0,2
6	0,2	0,3	0,1	12	0,2	0,3	0,2

4. Збільшуючи r , досягти аперіодичного режиму у двох випадках за початкових умов:

- 1) $x_0=0,1$ м , $V_0=0$;
- 2) $x_0=0$, $V_0=0,5$ м/с.

Таблиця 2.2 – Результати розрахунків

№	t , с	A , м	№	λ	$\langle \lambda \rangle$
1			1		
2			2		
3			3		
4					

5. Замалювати для обох випадків графіки $x(t)$.

2.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, малюнок кривої $x(t)$ при одному із значень r ; значення чотирьох амплітуд (A_1, A_2, A_3, A_4), обчислення трьох значень та середнього значення λ , графіки аперіодичного режиму для двох випадків початкових умов (п.5 завдання), висновки (повинні містити відповідь на питання п.6).

2.6 Контрольні запитання і завдання

1. Який рух називається коливальним?
2. Що таке осцилятор?
3. Запишіть диференціальне рівняння незгасаючих коливань. Який вигляд має його розв'язок?
4. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань. Який вигляд має його розв'язок?
5. Який фізичний зміст має коефіцієнт згасання?
6. Що таке логарифмічний декремент згасання?
7. Отримайте формулу, яка пов'язує коефіцієнт згасання з декрементом.

3 ВИВЧЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

3.1 Мета роботи

Вивчити закономірності процесів установлення коливань осцилятора під дією зовнішньої гармонічної сили, коли квазіпружня (повертаюча) сила має лінійну та нелінійну залежності від зміщення.

3.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Вимушені коливання, які відбуваються під дією нелінійної повертаючої сили описуються диференціальним рівнянням [1, 4]:

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2(x + \gamma x^3) = \frac{F}{m} \cos(\Omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – власна частота осцилятора;

δ – коефіцієнт згасання $\delta = r/2m$;

r – коефіцієнт опору;

m – маса осцилятора;

F_0 – амплітуда сили, що змушує;

Ω – частота сили, що змушує;

γ – стала величина, яка характеризує нелінійність повертаючої сили.

Коли сила, що змушує, діє за лінійним законом ($F_x = -kx$, $\gamma = 0$) в системі встановлюються гармонічні коливання з частотою Ω цієї сили:

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (3.2)$$

де амплітуда A та початкова фаза φ визначаються за формулами:

$$A = \frac{(F_0 / m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \quad \text{та} \quad \varphi = \arctg(2\delta\Omega / (\omega_0^2 - \Omega^2)). \quad (3.3)$$

При певній для даної системи частоті (резонансній частоті)

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (3.4)$$

амплітуда коливань досягає максимального значення:

$$A_p = (F_0 / m) / 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (3.5)$$

Коли повертаюча сила є нелінійною функцією зміщення, вона може бути представлена у вигляді ряду

$$F(x) = -k(x + \gamma x^3 + \dots). \quad (3.6)$$

Коли $\gamma > 0$, квазіпружна сила більша ніж у лінійному випадку. Якщо це сила пружності пружини, то таку пружину називають “жорсткою”. Коли $\gamma < 0$, сила

менша, ніж у лінійному випадку, і пружину називають “м’якою”. На рис.3.1 представлені криві залежності квазіпружної сили від зміщення x відповідно: (1) – для лінійної залежності, (2) – для “жорсткої” пружини. (3) – для “м’якої” пружини.

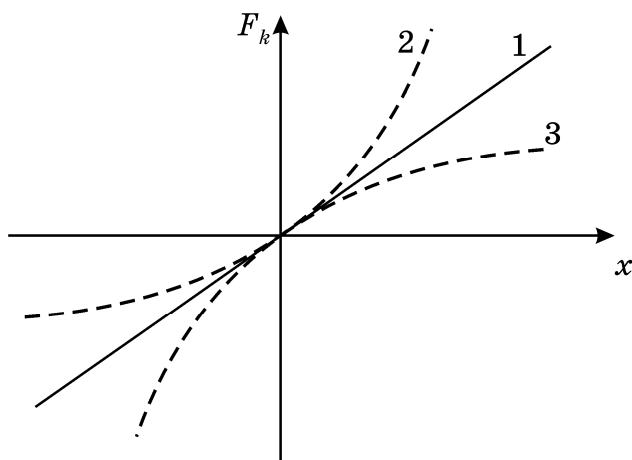


Рисунок 3.1

В системі з нелінійною повертаючою силою такий резонанс, як у лінійному випадку, неможливий. Якщо $\gamma > 0$, власна частота збільшується з ростом амплітуди. Отже, на кривій залежності амплітуди від частоти максимум буде нахилений вправо (рис.3.2.а). Якщо $\gamma < 0$, максимум буде нахилений вліво (рис.3.2.б). Таким чином, одному значенню частоти відповідає декілька значень амплітуди і можливі ударні скачки амплітуди. Якщо графік залежності $A(\omega)$ будують, починаючи із значень $\omega < \omega_p \approx \omega_0$ – крива йде по шляху **c-d-e-f**, якщо починати із значень $\omega > \omega_0$ – крива йде по шляху **f-e-k-c**.

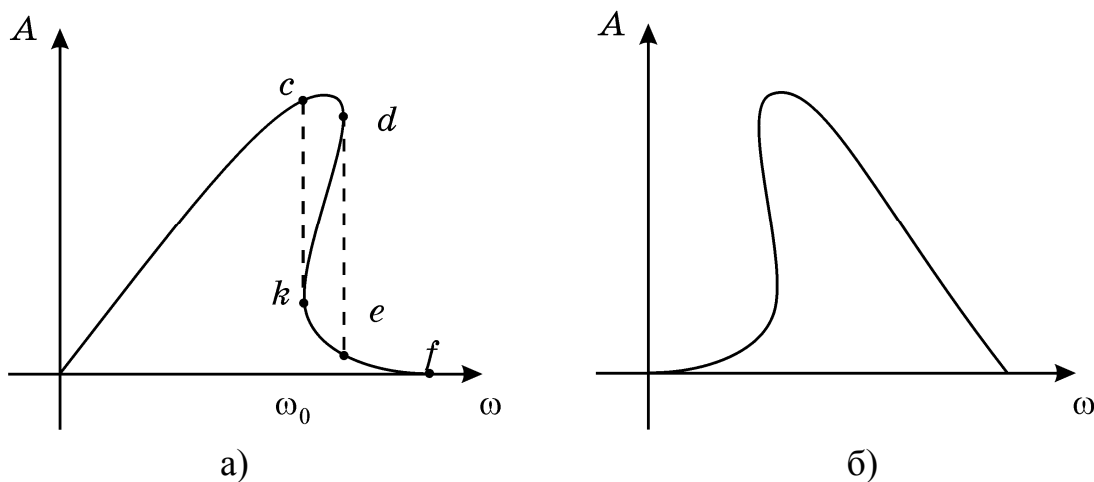


Рисунок 3.2

3.3 Опис комп’ютерної програми

Для вивчення вимушених лінійних та нелінійних коливань використовується та ж сама програма, що й для вивчення вільних коливань (робота 2), але крім режиму $x(t)/F(t)$ в даній роботі використовується режим $A(\omega)$, який дозволяє отримувати залежність амплітуди коливань від частоти як у випадку лінійних ($\gamma=0$), так і нелінійних коливань ($\gamma>0$). Зовнішній вигляд інтерфейсу програми у цьому режимі зображено на рисунку 3.3. На екран

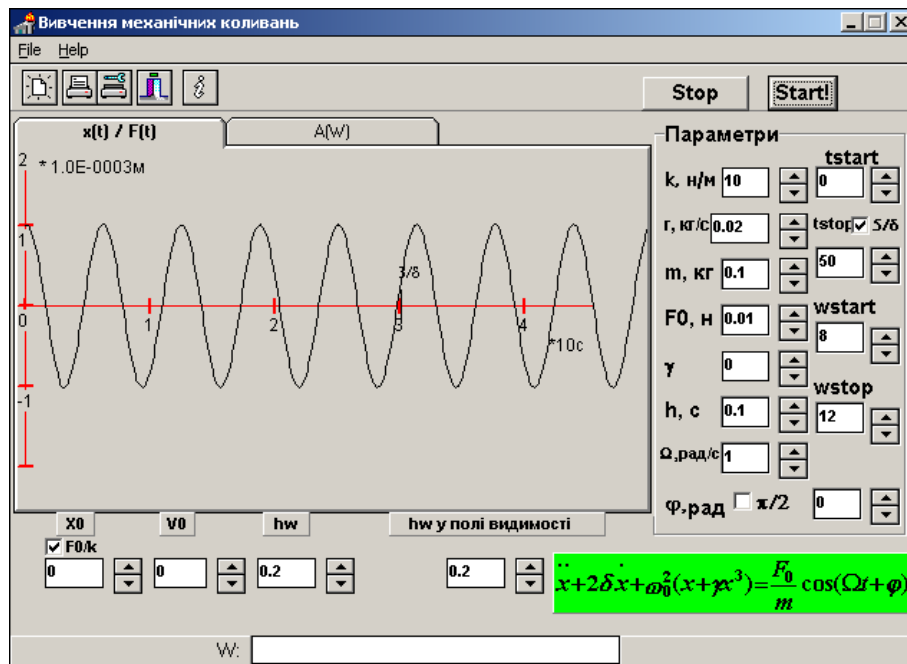


Рисунок 3.3

виведені кнопки: k – жорсткість пружини; r – величина опору; m – маса частини яка коливається; F_0 – амплітуда сили; γ – коефіцієнт нелінійності; h – крок для побудови плавної кривої $x(t)$; w – крок, який впливає на плавність кривої $A(\omega)$; $tstart$, $tstop$ – кнопки, які регулюють початок та кінець побудови графіка $x(t)$; $wstart$, $wstop$ – кнопки, які визначають межі побудови графіка $A(\omega)$; x_0 – початкове зміщення; V_0 – початкова швидкість.

Для роботи програми вона повинна розташовуватися в каталогах, імена яких мають не більше восьми символів.

3.4 Інструкція користувачу

1. Задати значення m та k згідно з таблицею 3.1 та натиснути кнопку «Start». Визначити власну частоту осцилятора ω_0 .

2. Вибрати режим роботи: $x(t)$. Встановити шаг $h=0,005$. Задати значення величин згідно з таблицею 3.1.

3. Отримати графіки $x(t)$ коливань при $\gamma=0$ при початкових умовах x_0 – згідно з таблицею 3.1, $V_0=0$ у трьох випадках :1) $\Omega < \omega_0$, 2) $\Omega \approx \omega_0$, 3) $\Omega > \omega_0$. Зарисувати отримані графіки. Вказівки :

1) якщо криві виходять ломаними, зменшить шаг h ($h_{\min}=0,001$);

2) якщо встановлення амплітуди коливань відбувається за екраном, збільшити час переглядання.

4. Повторити операції п.3 при початкових умовах $x_0=0$, V_0 згідно з таблицею 3.1.

5. Встановити режим програми $A(\omega)$. Отримати графіки залежності $A(\omega)$ при трьох значеннях коефіцієнта опору $r=0,01; 0,05; 0,1$ (покласти $\gamma=0$). Перерисувати на один графік три резонансні криві. Зробити висновок про вплив величини згасання на ширину резонансної кривої та максимальне значення амплітуди коливань (параметри k та m встановити згідно з таблицею 3.1).

Таблиця 3.1 – Вихідні данні

№ вар.	$k, \frac{H}{M}$	$m, кг$	x_0, M	$V_0, \frac{M}{c}$	№ вар.	$k, \frac{H}{M}$	$m, кг$	x_0, M	$V_0, \frac{M}{c}$
1	4	0,1	0,02	0,2	7	18	0,1	0,04	0,2
2	6	0,1	0,02	0,4	8	2	0,1	0,04	0,4
3	8	0,1	0,02	0,6	9	4	0,1	0,04	0,6
4	12	0,1	0,02	0,8	10	6	0,1	0,04	0,8
5	14	0,1	0,02	1,0	11	8	0,1	0,04	1,0
6	16	0,1	0,02	1,2	12	12	0,1	0,04	1,2

6. Надаючи позитивні значення γ (випадок “жорсткої пружини”), отримати резонансну залежність $A(\Omega)$. Зарисувати (якісно) отриману криву.

7. Надаючи негативні значення γ (випадок “м’якої пружини”) спостерігати на екрані резонансну криву. Зарисувати отриману криву.

8. Зробити висновок відносно впливу нелінійності на форму резонансної залежності та величину резонансної частоти ω_0 в порівнянні з лінійним випадком ($\gamma=0$).

3.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, графіки та висновки за пунктами 3...7.

3.6 Контрольні запитання і завдання

1. Які коливання називаються вимушеними?
2. Запишіть рівняння, яке описує вимушені коливання. Який вигляд має його розв’язок?
3. В чому полягає явище резонансу? При яких умовах воно може виникнути? Проаналізуйте вираз для амплітуди коливань та зсуву фаз між швидкістю та силою.
4. Коли виникають нелінійні коливання?
5. Чим відрізняються резонансні криві при нелінійних коливаннях?

ЧАСТИНА II. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

4 ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ ДОВЖИНИ ВІЛЬНОГО ПРОБІГУ МОЛЕКУЛИ

4.1 Мета роботи

Ознайомитись з основними положеннями молекулярно-кінетичної теорії (МКТ). Вивчити хаотичний рух молекул, визначити середню довжину вільного пробігу молекул.

4.2. Вказівки до організації самостійної роботи

Двовимірний динамічний модель ідеального газу базується на загальних положеннях МКТ:

1. Всі речовини складаються з молекул (або атомів).
2. Атоми (молекули) знаходяться в стані хаотичного руху.
3. Молекули і атоми взаємодіють між собою. Характер взаємодії в рідкій речовині і визначає: чи буде речовина газом, рідиною або твердим тілом.

Внаслідок хаотичного (теплого) руху між молекулами безперервно відбуваються зіткнення. Рухаючись рівномірно і прямолінійно молекула проходить деякий шлях між двома послідовними зіткненнями, який називається довжиною вільного пробігу. Довжина вільного пробігу весь час змінюється. Середня відстань, яку проходить молекула між двома послідовними ударами, носить назву середньої довжини вільного пробігу молекули λ_2 . Для визначення λ_2 досить розділити шлях, який проходить молекула за 1с, що чисельно дорівнює середній швидкості V , на середнє число зіткнень z_2 , яких молекула зазнає за 1с: $\lambda_2 = V / z_2$.

Для визначення z_2 будемо вважати молекулу диском, діаметр якого дорівнює d . Зобразимо шлях диска всередині ламаної смуги шириною $2d$ (рис.4.1).

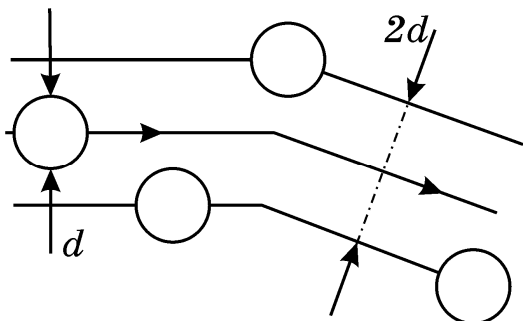


Рисунок 4.1

Інші молекули вважаємо нерухомими. Молекула, що рухається, зіткнеться тільки з тими молекулами, центри яких знаходяться на відстанях рівних або менших d . Середнє число зіткнень z_2 за 1с дорівнює числу молекул в площі ламаної смуги: $z_2 = n_2 S$, де n_2 – концентрація молекул (в даному випадку n_2 – це число молекул (дисків), яке припадає на одиницю площі). Площа ламаної смуги можна прирівняти площі спрямленої смуги довжиною V та шириною $2d$, отже $z_2 = n_2 (2d)V$. Тоді

середня довжина пробігу

$$\lambda_2 = \frac{1}{2dn_2}. \quad (4.1)$$

Подібні міркування приводять для трьохвимірної моделі до формули вигляду

$$\lambda = \frac{1}{\pi nd^2} \quad (4.2)$$

де n – кількість молекул в одиниці об'єму газу.

Порівнюючи формули (4.1) та (4.2) можна встановити зв'язок між довжинами вільного пробігу для дво- та тривимірної моделі

$$\lambda = \frac{1}{\pi nd^2}. \quad (4.3)$$

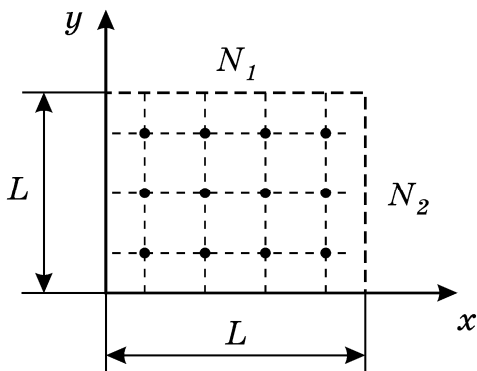


Рисунок 4.2

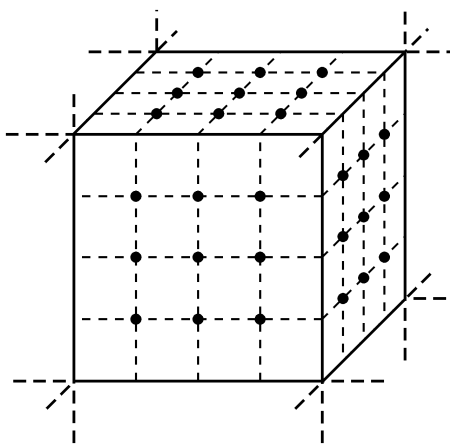


Рисунок 4.3

Встановимо зв'язок між n_2 та n .

Визначимо концентрацію молекул n_2 на площині (грані куба) (рис.4.2)

$$n_2 = \frac{N_1 N_2}{L^2} = \frac{N^2}{L^2}.$$

Якщо розглядати куб з однаковою кількістю молекул в трьох напрямках (рис.4.3), то

$$n = \frac{N^3}{L^3};$$

тоді

$$\frac{n}{n_2} = \frac{N^3}{L^3} \cdot \frac{L^2}{N^2} = \frac{N}{L}. \quad (4.4)$$

Порівнюючи вирази (4.1) та (4.2), можна зробити висновок, що залежність λ від концентрації молекул та розмірів молекули в обох випадках (дво- і тривимірному) залишається однаковою. Звичайно, при цьому треба враховувати, що у двовимірному випадку $n_2 = N^2 / L^2$, розміри молекули ха-

рактизуються діаметром d , а в тривимірному – $n = N^3 / L^3$, розміри $\sim d^2$.

4.3 Опис комп'ютерної програми

Програма створює масиви даних: координати N^2 молекул x_i, y_i на площині XY та їх початкові складові швидкостей V_{xi}, V_{yi} . Початкові швидкості молекул задаються однаковими за величиною та рівними ймовірній швидкості при даній температурі

$$V_{im} = \sqrt{\frac{kT}{m}}, \quad (4.4)$$

де m – маса молекули, T – абсолютна температура, k – стала Больцмана. Ймовірна швидкість (4.4) для двовимірного випадку відрізняється від тривимірного випадку (Додаток В). Напрямок швидкості кожної молекули визначається в межах кутів $0 \dots 2\pi$ за допомогою генератора випадкових чисел. Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 4.4.

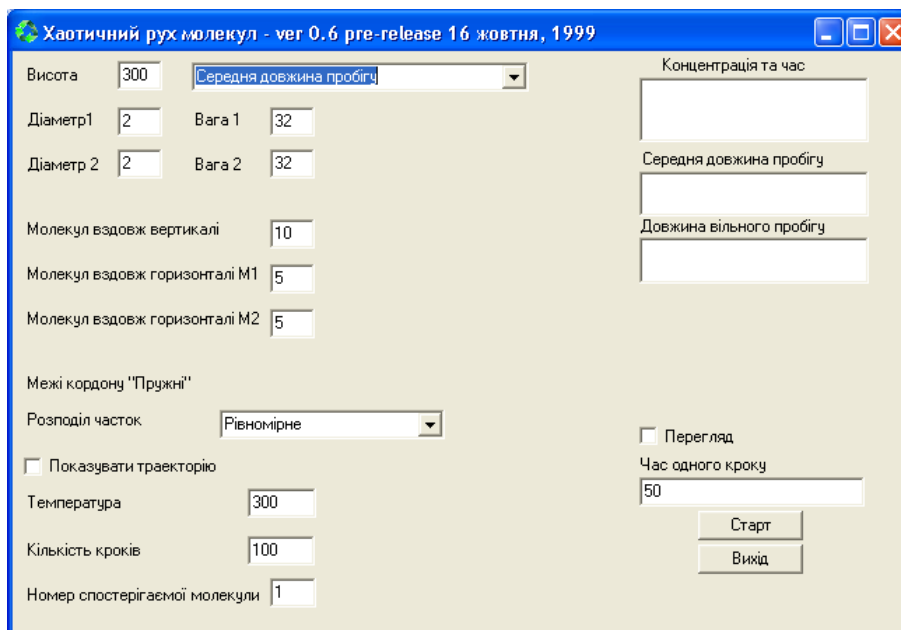


Рисунок 4.4

Розподіл молекул на площині в початковий момент та під час руху відображається на екрані дисплею (рис.4.5). Наступні координати молекул визначаються за кінематичними формулами Ейлера

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + V_{ix} \Delta t, \quad y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + V_{iy} \Delta t, \quad (4.5)$$

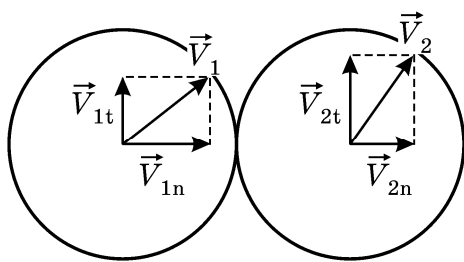


Рисунок 4.5

де $x_i(t)$, $y_i(t)$ – положення i -тої молекули в момент часу t , $x_i(t + \Delta t)$, $y_i(t + \Delta t)$ – положення молекули в наступний момент часу $(t + \Delta t)$. Зіткнення молекул між собою описується як нецентральний удар твердих пружних кульок. Так називають зіткнення, коли в момент удару початкові швидкості куль V_1 , V_2 не співпадають за напрямком з лінією, яка з'єднує їхні центри (рис.4.5). оскільки $V_{1t} \neq V_{2t}$, при зіткненні розвивалися били сили тертя ковзання, що приводило б кульки в обертальний рух і тоді б енергія поступального руху кульок не зберігалася б. А тому приймаючи удар ідеально пружним, ми вважаємо кульки ідеально гладкими. При їх зіткненні тангенціальні сили не виникають, а значить, для тангенціальних швидкостей можна записати

$$V'_{1t} = V_{1t}, \quad V'_{2t} = V_{2t}. \quad (4.6)$$

В цьому випадку виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії, тоді записуючи ці закони

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 V'_{1t} + m_2 V'_{2t}, \quad (4.7)$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_{1t}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2t}^2}{2}, \quad (4.8)$$

де V'_1 , V'_2 – швидкості кульок після удару, для нормальних складових швидкостей після удару, маємо співвідношення:

$$V'_{1n} = -V_{1n} + 2 \cdot \frac{m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n}}{m_1 + m_2},$$

$$V'_{2n} = -V_{2n} + 2 \cdot \frac{m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n}}{m_1 + m_2}$$

4.4 Інструкція користувачу

1. Встановити режим роботи програми „Середня довжина пробігу”, виберіть „Розподіл частинок – рівномірний”, ввімкніть „Перегляд”, „Показати траєкторію”.

2. Задати числові дані у відповідності з номером варіанту завдання, згідно з таблицею 4.1, де маса молекули m вибирається однаковою «Маса 1», «Маса

2», N – число молекул вздовж осі y («Вздовж вертикалі»), $M = M_1 + M_2$, (M_1 – число молекул в першій половині площини, M_2 – число молекул в другій половині площини вздовж осі x – вибираються однаковими $M_1 = M_2$), d – діаметр молекули («Діаметр 1», «Діаметр 2» – вибираються однакові), T – температура. Задайте «Число кроків» – 1000.

Таблиця 4.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4
N	10	10	10	12	12	12	10	10	10	10	10	10
M_1	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5
M_2	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5
d	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4

3. Спостерігати хаотичний рух молекул та траєкторію виділеної молекули (вона виділяється синім кольором).

4. Для прискорення вимірювань вимкнути «Перегляд» та «Показати траєкторію». Обчислити середню довжину вільного пробігу для ваших даних (кнопка «Старт»). Не змінюючи вихідних даних повторити вимірювання чотири рази. Результати записати в таблицю 4.2.

5. Повторити п.4 ще для шести значень діаметру, збільшуючи його від початкового значення з кроком $\Delta d = 1$ (10^{-10} м). При з'явленні помилки роботи програми зменшити кількість кроків у двічі. Програма видає значення середньої довжини пробігу молекули перераховане для трьохвимірної моделі. Результати записати до таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Результати розрахунків

N	$n = const$								$d = const$									
	d	$\lambda \cdot 10^{-9}, \text{ м}$						$\lg \lambda$	$\lg d$	$n \cdot 10^{24}, \text{ м}^{-3}$	$\lambda \cdot 10^{-9}, \text{ м}$						$\lg \lambda$	$\lg n$
		1	2	3	4	$\langle \lambda \rangle$	$\Delta \lambda$				1	2	3	4	$\langle \lambda \rangle$	$\Delta \lambda$		
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

6. Встановити числові дані всіх величин згідно таблиці 4.1 і номеру варіанта.

7. Збільшуючи концентрацію молекул шляхом зміни чисел N та M одночасно від початкових значень з кроком $\Delta N = \Delta M = 2$, отримати сім значень λ для семи значень концентрації n при сталому значенні діаметра молекул d (згідно таблиці 4.1 і номеру варіанта). Записати в таблицю 4.2.

8. За підрахованими значеннями логарифмів величин побудувати графіки в логарифмічному масштабі: $\lg \lambda = f(\lg d)$ при $n = \text{const}$ та $\lg \lambda = f(\lg n)$ при $d = \text{const}$.

9. Порівняти результати, отримані з модельного експерименту, з теоретичними. З теоретичної формули (4.2), беручи десятковий логарифм, маємо для $n = \text{const}$:

$$\lg \lambda = \lg(C_1 d^{-2}) = \lg C_1 - 2 \lg d,$$

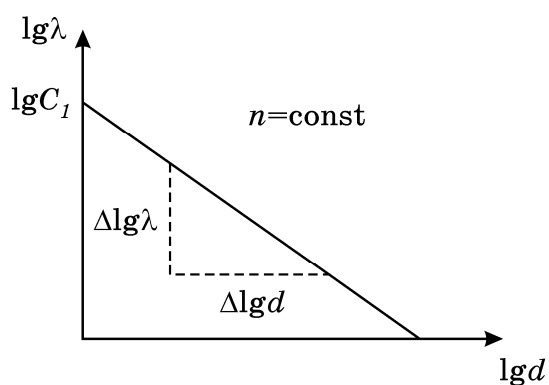


Рисунок 4.6

де $C_1 = 1/(\pi n)$, тобто маємо лінійну залежність $\lg \lambda$ як функції від аргументу $\lg d$, коефіцієнт нахилу якої дорівнює $k_T = -2$. Якщо з експериментального графіка $\lg \lambda = f(\lg d)$ визначити коефіцієнт нахилу $k_C = \Delta \lg \lambda / \Delta \lg d$ (рис.4.6), то з порівняння k_T та k_C можна зробити висновки, як узгоджуються теоретичні результати з експериментальними (як залежить λ від d). Аналогічно перевірити, як залежить λ від n . Зробити висновки.

4.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, зведені в таблиці, похибки вимірювань, графіки залежностей $\lg \lambda = f(\lg d)$ при $n = \text{const}$ та $\lg \lambda = f(\lg n)$ при $d = \text{const}$, висновки.

4.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте три основні положення МКТ.
2. Що таке довжина вільного пробігу молекули?
3. Що таке середня довжина вільного пробігу молекули?
4. Як визначається середня довжина вільного пробігу λ в двовимірній моделі хаотичного руху?
5. Як визначається λ в тривимірній моделі?
6. Як зв'язані концентрації молекул в двовимірній та тривимірній моделях?
7. Який удар тіл називається нецентральним?

8. Як записується закон збереження імпульсу при пружному ударі двох кульок?
9. Як записується закон збереження енергії при пружному ударі двох кульок?
10. За якими формулами обчислюються наступні значення координат молекули через попередні?

5 ПЕРЕВІРКА ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

5.1 Мета роботи

Ознайомитись з основними положеннями молекулярно-кінетичної теорії (МКТ). Переконатись у справедливості основного рівняння МКТ.

5.2 Вказівки з організації самостійної роботи

З точки зору МКТ внаслідок хаотичного руху молекул, газ, який знаходиться в посудині, тисне на її стінки. Тиск, обумовлений тим, що молекули стикаються зі стінками посудини і діють на неї з деякою силою, яка направлена перпендикулярно до стінки. Вивчення цього процесу базується на двовимірній моделі ідеального газу. Спрощені положення, закладені в цю модель, сформулюємо у наступному вигляді:

1. Молекули – пружні кульки малого розміру.
2. Силами взаємодії між молекулами можна знехтувати.
3. Взаємодія між молекулами виникає тільки при ударі між ними, або при зіткненні молекули зі стінками посудини. Удар при зіткненнях вважаємо абсолютно пружним.

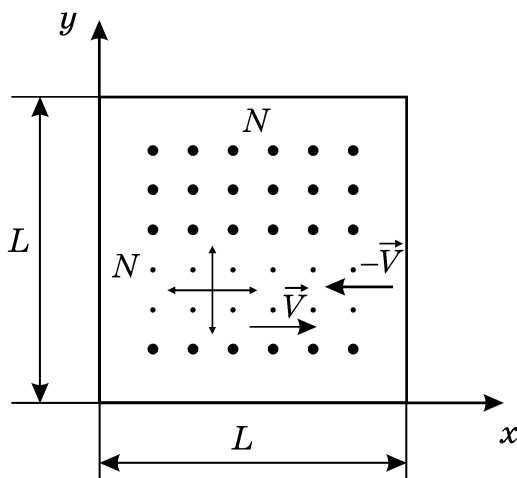


Рисунок 5.1

Виведемо рівняння для випадку двовимірного руху молекул. Нехай в квадратній “посудині” з ребром L , яка являє собою контур квадрата (рисунок 5.1) перебуває ідеальний газ, молекули якого можуть рухатися в площині x, y в межах $0 < x < L, 0 < y < L$. Кількість молекул дорівнює N^2 , де N — кількість молекул в напрямку x і в напрямку y (в межах квадрата) однакова. Тоді концентрація молекул на площині квадрата $n_2 = \frac{N^2}{L^2}$.

Припустимо, що число молекул, які рухаються в двох взаємно перпендикулярних напрямках до сторін квадрата,

дорівнює $N' = \frac{1}{2} \cdot N^2$ (можливість такого припущення підтверджується строгим розрахунком).

Імпульс сили при ударі молекули об “стінку” дорівнює зміні імпульсу молекули:

$$\Delta f_i \Delta t = mV_i - (-mV_i) = 2mV_i.$$

Очевидно, що імпульс, який отримує “стінка” за 1 секунду від i -тої молекули

$$\Delta f_i \cdot 1 = 2mV_i \cdot k,$$

де k – число ударів i -тої молекули об одну й ту ж (наприклад, праву) стінку за 1 секунду: $k = \frac{V_i}{2L}$. Тоді

$$\Delta f_i = 2mV_i \frac{V_i}{2L} = \frac{mV_i^2}{L}.$$

Враховуючи, що в одному напрямі рухається N' молекул, знайдемо сумарну силу, з якою газ діє на праву стінку

$$f = \sum_1^{N'} \Delta f_i = \sum_1^{N'} \frac{mV_i^2}{L}.$$

Розділимо та помножимо праву частину рівняння на N'

$$f = \frac{mN'}{L} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N'} V_i^2}{N'}.$$

Величина $\frac{1}{N'} \cdot \sum_{i=1}^{N'} V_i^2$ є не що інше, як квадрат середньоквадратичної швидкості $U^2 = \frac{1}{N'} \cdot \sum_{i=1}^{N'} V_i^2$. Тоді $f = \frac{mN'U^2}{L} = \frac{1}{2} \cdot N^2 m \frac{U^2}{L}$.

Розділимо обидві частини останнього рівняння на L , тоді

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{mN^2}{L^2} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot mn_2 U^2.$$

Очевидно, що $\frac{f}{L} = P_2$ — “тиск” газу на “стінку”, тобто сила, яка діє на одиницю довжини сторони квадрата. Отже,

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot mU^2 \cdot n_2 = n_2 \mathcal{E}, \quad (5.1)$$

де \mathcal{E} — середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Аналогічні міркування приводять до закону залежності тиску у трьохвимірному випадку

$$P = \frac{2}{3} \cdot n\mathcal{E}. \quad (5.2)$$

Порівнюючи вирази (5.1) та (5.2), можна зробити висновок, що залежність тиску від концентрації молекул та середнього значення енергії залишається однаковою як у двохвимірному, так і в трьохвимірному випадку.

Якщо врахувати, що кінетична енергія поступального руху молекули дорівнює $\frac{3}{2} \cdot kT$, тобто на одну ступінь свободи приходиться $\frac{1}{2} \cdot kT$, рівняння (5.2) можна записати у вигляді

$$P = nkT, \quad (5.3)$$

а рівняння (5.1) теж матиме такий же точно вигляд, бо у двохвимірному випадку число ступенів свободи дорівнює двом

$$P_2 = n_2 kT.$$

5.3 Опис комп’ютерної програми

В даній роботі використовується та ж сама комп’ютерна програма, що і в роботі 4 з тією різницею, що вибирається режим роботи “Визначення тиску”. Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 5.2.

5.4 Інструкція користувачу

1. Встановити режим роботи “Тиск”, вимкнути “Перегляд”.
2. Встановити значення вихідних параметрів у відповідності з таблицею 5.1.
3. Обчислити тиск (трьохмірна модель), натиснувши кнопку «Старт». Не змінюючи вихідних даних, повторити вимірювання чотири рази. Результати записати в таблицю 5.2.

4. Збільшуючи N та M на дві одиниці, отримати залежність тиску P від концентрації молекул n . Для кожного значення концентрації повторювати вимірювання P п'ять разів. Визначити середнє значення $\langle P \rangle$. Результати для семи значень n занести в таблицю 5.2.

Таблиця 5.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m_1 = m_2$	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4
$d_1 = d_2$	2											
N	4											
$M_1 = M_2$	2											
T	600	500	400	300	200	100	600	500	400	300	200	100

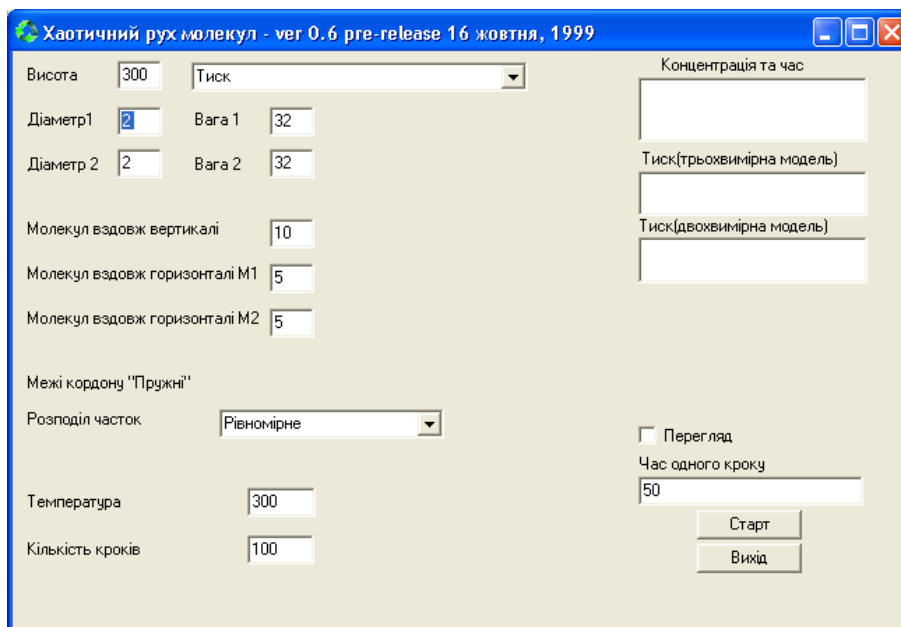


Рисунок 5.2

5. За отриманими даними п.п.3 і 4 побудувати графік залежності $\langle P \rangle = f(n)$ при $T = const$.

6. При сталому значенні концентрації n (повернути значення N, M згідно таблиці (5.1)) виміряти сім значень P , збільшуючи температуру на 100 К. Початкове значення T взяти з таблиці 5.1. При кожному значенні T повторювати вимірювання тиску P п'ять разів. Визначити середнє значення $\langle P \rangle$. Результати вимірювань занести в таблицю 5.2.

7. За отриманими даними п.6 побудувати графік залежності $\langle P \rangle = f(T)$ при $n = const$.

5.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, зведені в таблиці, похибки вимірювань, графіки залежностей $\langle P \rangle = f(n)$ при $T = const$ та $\langle P \rangle = f(T)$ при $n = const$, висновки

Таблиця 5.2 – Результати розрахунків

N	$T = const$								$n = const$									
	$n \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$	$P \cdot 10^3, \text{ Па}$							T	$P \cdot 10^3, \text{ Па}$								
		1	2	3	4	5	$\langle P \rangle$	ΔP		1	2	3	4	5	$\langle P \rangle$	ΔP		
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		

5.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте основні положення моделі ідеального газу.
2. Як в роботі визначається концентрація молекул на площині?
3. Який імпульс отримує стінка посудини при ударі молекули?
4. Як визначається квадрат середньоквадратичної швидкості?
5. Дайте визначення тиску (для двохвимірного простору).
6. Порівняйте вирази (5.1) та (5.2). Зробіть висновок, як залежить тиск від величини концентрації та середнього значення енергії молекули.
7. Сформулюйте закон рівнорозподілу (яка енергія приходить на кожен ступінь свободи молекули).
8. Сформулюйте основне рівняння МКТ.
9. Зробіть висновок з порівняння формул (5.4), (5.5).

6 ВИМІРЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТА В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ ЗА МЕТОДОМ СТОКСА

6.1 Мета роботи

Вивчити явище в'язкості на прикладі руху кульки в в'язкій рідині, ознайомитись з особливостями цього руху та визначити в'язкість рідини за методом Стокса.

6.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Існують різні методи визначення коефіцієнта в'язкості рідини. Один із них, метод Стокса, базується на спостереженні падіння малої кульки в досліджуваній рідині [1, 4].

При русі тіла в рідині сила тертя, яка обумовлена в'язкістю рідини, виникає не між тілом та рідиною, а між шарами рідини, бо її шар, що безпосередньо прилягає до поверхні тіла, прилипає до тіла і рухається із швидкістю тіла. Швидкість, якої набуває кожний наступний шар, тим менше, чим далі шар рідини від тіла. Таким чином, в цьому випадку ми маємо справу з так званим внутрішнім тертям.

Стокс розглядав повільний рух малої кульки в необмеженому середовищі, при відсутності завихрення рідини та вивів теоретично таку формулу для сили внутрішнього тертя

$$F_C = 6\pi r\eta V, \quad (6.1)$$

де r — радіус кульки, η — коефіцієнт в'язкості рідини, V — швидкість кульки відносно рідини.

Розглянемо падіння малої кульки в рідині (рис.6.1). В будь-який момент часу на кульку діють три сили:

- 1) сила тяжіння, яка спрямована вертикально вниз

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad (6.2)$$

де ρ — густина речовини кульки;

- 2) сила, що виштовхує – сила Архімеда, яка спрямована вертикально вгору і дорівнює вазі витісненої тілом рідини [1, 4]:

$$F_A = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \delta g, \quad (6.3)$$

де δ – густина рідини;

- 3) сила внутрішнього тертя F_C , що спрямована проти напрямку швидкості кульки.

Рівняння руху кульки, виходячи з другого закону Ньютона, можна записати у вигляді

$$\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_C = m\vec{a}. \quad (6.4)$$

Сили P і F_A на протязі руху падіння кульки залишаються незмінними, а сила F_C за-

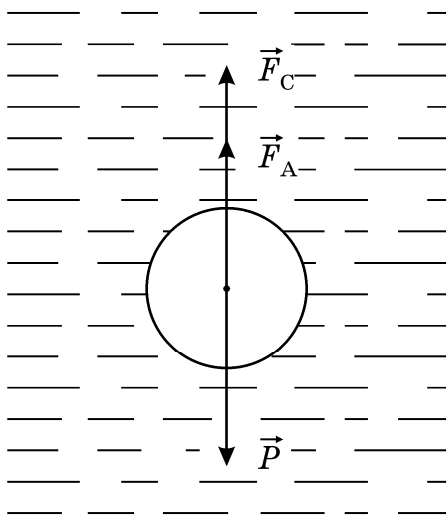


Рисунок 6.1

лежить від швидкості кульки. На початку руху, коли її швидкість в початковий момент $V=0$, ($F_c=0$), а в подальшому вона зростає пропорційно швидкості (6.1). Різниця $P - F_A$, яка спрямована вертикально вниз, викликає прискорення кульки.

Кулька буде рухатися прискорено доти, доки всі сили, що діють на кульку, не врівноважаться. В результаті зростання швидкості кульки настає такий момент, коли

$$P - F_A - F_C = 0. \quad (6.5)$$

Підставляючи (6.1), (6.2), (6.3) до (6.5), отримаємо рівняння

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \delta g = 6 \pi r \eta g,$$

з якого в'язкість

$$\eta = \frac{2}{9} r^2 g (\rho - \delta) \frac{1}{V}, \quad (6.6)$$

де g , ρ , δ — табличні величини, величини r та V легко вимірюються.

Одновимірний рух кульки описується за наближеними кінематичними формулами, за модифікованою схемою Ейлера (див. додаток Б).

6.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 6.2. Програма моделює одновимірний рух кульки у в'язкій рідині за модифікованим алгоритмом Ейлера (додаток Б) з урахуванням всіх сил, які діють на кульку: сили тяжіння, сили Архімеда та сили внутрішнього тертя. Оскільки вимірювання часу треба виконувати для рівномірного руху, програмою передбачено виведення на екран риски в момент, коли всі сили, що діють на кульку, врівноважуються. З цього моменту рух кульки стає рівномірним. На екран виведено два секундоміри. Один вмикається з початком руху кульки і вимикається автоматично, коли кулька досягає дна посудини. Другий можна вмикати і вимикати від руки, клацаючи мишкою на кнопки вмикання та вимикання. Радіус, масу кульки, висоту посудини можна змінювати як завгодно, маючи тільки на увазі, що радіус кульки повинен залишатися меншим за діаметр посудини. Але якщо ви й забудете про це, програма нагадає, висвітить зауваження. Якщо ви виберете кульку з питомою вагою меншою за питому вагу рідини, відразу ж висвітиться віконце з зауваженням, що кулька падати не буде. При малій різниці між ρ кульки та ρ рідини, кулька може пройти всю відстань, так і не досягнувши стану рівномірного руху. На панелі інтерфейсу також виведені параметри зображення, які можна змінювати, такі, як колір рідини, колір кульки, радіус зображення кульки. Тертя рідини об стінки посудини, яке може виникати в реальному експеримен-

ті, коли радіус кульки та діаметр посудини — величини одного порядку, не враховується.

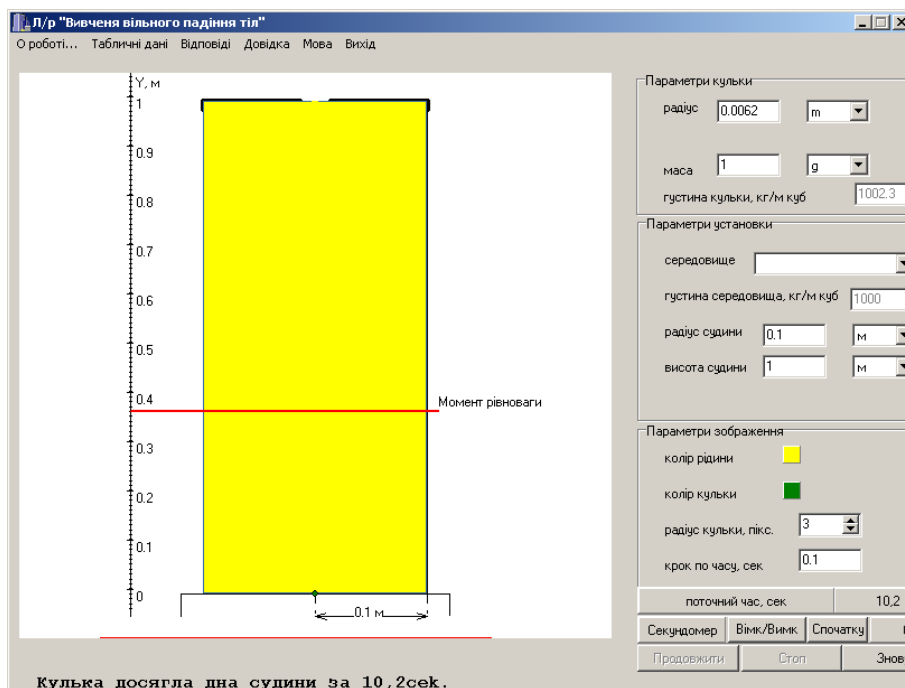


Рисунок 6.2

6.4 Інструкція користувачу

1. Ознайомитись з інтерфейсом програми. На панелі “Параметри установки” виберіть номер № рідини у відповідності з вашим номером варіанту. Встановіть значення радіусу кульки та її масу у відповідності з таблицею 6.1 – таблицею варіантів завдань. Значення величин в віконцях можна змінювати після натискання на кнопку “Заново”. Кнопка “Стоп” зупиняє експеримент із збереженням всіх величин в даний момент часу. Клацнувши кнопкою “Запуск”, можна його продовжити або припинити, клацнувши мишкою на “Заново”.

Таблиця 6.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Номер рідини	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4
R кульки, мм	6,1	6,2	5,7	5,7	5,8	5,9	6,0	6,0	6,3	6,4	6,4	6,35
m кульки, Г	1	1	1	1,1	1,1	1,2	1,3	1	1	1	1,1	1

2. Підібрати висоту падіння таку, щоб не менше половини шляху кулька рухалася із сталою швидкістю. Поставити мітку (нижче мітки, яка висвічується в момент, коли рух стає рівномірним).

3. Виміряти за шкалою та фіксувати шлях, який кулька проходить між встановленою міткою та дном посудини.

4. Визначити час проходження кулькою шляху шість разів. Занести дані в таблицю 6.2. Обчислити похибки прямих та непрямих вимірювань. За похибку вимірювання довжини ΔH взяти ціну найменшої поділки шкали висоти. При обчисленні η змінними вважати величини H та t .

Таблиця 6.2 – Результати розрахунків

№ експерименту	Час падіння, с					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
1						
2						
3						
4						
Середнє значення t						

6.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, зведені в таблиці, обчислення похибок прямих вимірювань (часу), абсолютної та відносної похибки результату – в'язкості рідини, порівняння результату з табличними даними, після встановлення, яка рідина була використана в модельному експерименті.

6.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає мета роботи?
2. Що таке сила внутрішнього тертя?
3. Які сили діють на кульку при її русі в рідині?
4. Запишіть формули для сили Стокса, сили тяжіння, сили Архімеда.
5. Запишіть рівняння руху кульки.
6. Яким буде рух кульки на початку руху?
7. Запишіть рівняння рівномірного руху кульки.

ЧАСТИНА ІІІ. ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

7 ВИВЧЕННЯ ГРАФІЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ ТА СИСТЕМИ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ

7.1 Мета роботи

Познайомитись із графічним зображенням електричного поля точкового заряду та системи точкових зарядів за допомогою електричних силових ліній поля та дослідити особливості їх побудови.

7.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Важливим поняттям електростатики є поняття точкового заряду. Точковими зарядами називають заряджені тіла, розміри яких малі порівняно з відстанню між ними. Кожен заряд створює електричне поле у навколишньому просторі. Важливою характеристикою електричного поля є вектор напруженості поля \vec{E} . Поле будь-якого електричного заряду або системи зарядів можна описати графічним способом за допомогою ліній напруженості, які скорочено називають лініями \vec{E} або силовими лініями поля. Лінії напруженості проводять таким чином, щоб кількість ліній, що пронизують одиницю поверхні, перпендикулярно до площини поверхні, дорівнювала числовому значенню вектора \vec{E} . Тоді за картиною ліній напруженості можна судити про напрям та величину вектора \vec{E} в різних точках простору.

Лінії поля точкового заряду q являють собою сукупність радіальних прямих, які виходять із позитивного заряду або входять в негативний заряд.

Для точкового заряду напруженість поля в будь-якій точці у вакуумі визначається формулою [2, 5]:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad (7.1)$$

де ϵ_0 – електрична стала, r – відстань між зарядом та точкою спостереження.

Повне число ліній N , які перетинають сферичну поверхню довільного радіуса r , називають потоком вектора \vec{E} . Воно буде дорівнювати добутку густини ліній на величину площі поверхні сфери $4\pi r^2$. Густина ліній, згідно з умовою, дорівнює

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}. \quad (7.2)$$

Таким чином, кількість ліній N або потік вектора \vec{E} крізь замкнуту поверхню, яка охоплює заряд, чисельно дорівнює:

$$N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (7.3)$$

Це твердження являє собою зміст теореми Гауса для вакууму [2, 5].

Отриманий результат означає, що кількість ліній на будь-якій відстані від заряду буде одним і тим же. Звідси виходить, що силові лінії можуть починатися на заряді і закінчуватися на заряді, або прямувати в нескінченність. Картина силових ліній точкового заряду в площині, яка включає заряд, буде подібною картині ліній для заряду, розподіленого вздовж тонкої нитки з деякою густиною τ в площині, перпендикулярній нитці. Для зарядженої нитки у вказаній площині напруженість поля визначається формулою

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{N}{2\pi r}, \quad (7.4)$$

а кількість ліній, які перетинають коло радіуса r , тоді буде дорівнювати:

$$N = \frac{\tau}{\epsilon_0}. \quad (7.5)$$

Порівнюючи вирази (7.3) та (7.5) бачимо, що немає значення: будемо ми вивчати поле в площині, що створює точковий заряд або система точкових зарядів, які знаходяться в одній площині, чи поле в площині, перпендикулярній нитці або системі заряджених ниток. Картина силових ліній точкового заряду в площині, в якій розміщується заряд q буде такою ж як і для заряду, розподіленого вздовж тонкої нитки з лінійною густиною, що чисельно дорівнює заряду q : $\tau=q$. Внаслідок доказаної еквівалентності далі ми будемо вживати термін – точковий заряд.

7.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 7.1. Програма будує силові лінії електричного поля у двохвимірному випадку за алгоритмом:

1. Вибирається точка з координатами (x, y) і обчислюються компоненти поля E_x, E_y .
2. Проводиться в цій точці невеликий прямолінійний відрізок ΔS у напрямку вектора \vec{E} .

3. Процедура повторюється з нової точки $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Процес продовжується доти, доки силова лінія не йде в нескінченність, або до будь-якого негативного заряду. Число силових ліній, які починаються біля кожного позитивного заряду, пропорційне величині заряду. Величина заряду вибирається в умовних одиницях.

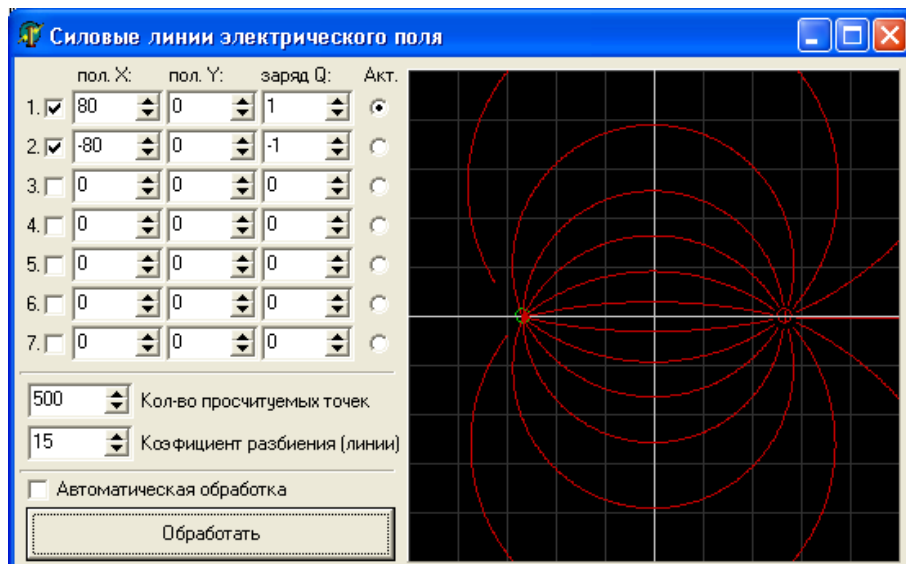


Рисунок 7.1

7.4 Інструкція користувачу

1. Помістіть в точку з координатами $x = 0$, $y = 0$ точковий заряд q (величину q взяти з таблиці 7.1). Виберіть число ліній $N = 10$, число кроків (яке визначає довжину силових ліній на екрані) підберіть так, щоб вони охоплювали весь екран. Зарисуйте картину поля.

2. Збільшіть заряд удвічі. В скільки разів треба збільшити число N , щоб за графічним зображенням поля можна було визначити величину напруженості?

3. Виберіть на картині поля замкнену лінію довільної форми. Підрахуйте число ліній, які входять в площину, охоплену лінією N_1 (потік, який входить), число ліній, які виходять назовні N_2 (потік, що виходить). Чому дорівнює потік, який перетинає замкнену лінію?

4. Розмістіть два однакових заряди на відстані 2-х клітинок (величину q взяти з таблиці 7.1). Отримайте для них картину силових ліній, зарисуйте її.

5. Отримайте картину силових ліній для системи двох однакових зарядів протилежного знаку. Зарисуйте її.

6. Помістіть заряд величиною $Q = 50 \dots 100$ умовних одиниць в точку з координатами $x = 0$, $y = 0$. Внесіть в поле цього заряду невеликий пробний заряд q (згідно з таблицею 7.1). Змінюючи його положення відносно Q , зробіть ви-

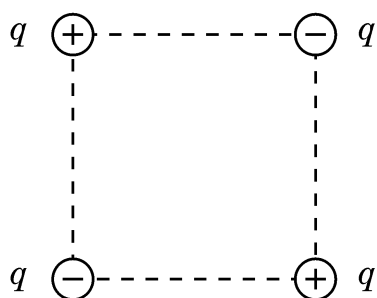


Рисунок 7.2

сновок, наскільки сильно він спотворює картину поля. Повторіть операції для негативного заряду $-q$.

7. Розмістіть у вершинах квадрата заряди однакової величини за схемою (рис.7.2) – така система носить назву – квадруполь. Отримайте картину силових ліній та зарисуйте її. Які особливості має картина поля квадруполя?

Таблиця 7.1 – Вихідні данні

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q	1	2	1	2	3	4	2	3	4	1	5	5
N	8	8	10	10	6	6	6	8	4	12	6	8

7.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, якісні зарисовки картин поля, утворених одним, двома точковими зарядами, диполем, квадруполем (п.п. 1, 4, 5, 7), висновки за п.п. 3, 6, 7.

7.6 Контрольні запитання і завдання

1. Дайте визначення силової лінії поля.
2. Що характерно для силових ліній електростатичного поля ?
3. Нарисуйте лінії електричного поля для точкового позитивного, негативного заряду.
4. Запишіть формулу, яка визначає напруженість точкового заряду.
5. Як пов'язаний потік вектора \vec{E} з повним числом силових ліній, що виходять зі заряду (або входять у заряд)?
6. Сформулюйте теорему Гауса. Що таке диполь?
7. Яку систему зарядів називають квадруполем?

8 ВИВЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ПЛОСКОГО ТА ЦИЛІНДРИЧНОГО КОНДЕНСАТОРІВ

8.1 Мета роботи

Дослідити розподіл потенціалу в електричних полях: одновимірної послідовності N точкових зарядів; циліндричного конденсатора; плоского конденсатора та вплив на розподіл поля обмеженості розмірів його пластин.

8.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Силовою характеристикою електричного поля в кожній точці є вектор напруженості \vec{E} , а енергетичною характеристикою – потенціал φ . Електричне поле будь-якої системи зарядів можна зобразити за допомогою ліній напруженості або екіпотенціальних ліній. Лінії (або поверхні), вздовж яких потенціал не змінюється: $\varphi = const$, носять назву екіпотенціальних ліній (або поверхонь). Лінії напруженості завжди ортогональні екіпотенціальним лініям (поверхням), причому в кожній точці електричного поля [2, 5]:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(x, y, z) = -(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}), \quad (8.1)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні вектори спрямовані вздовж осей x, y, z .

Знак “–” в формулі (8.1) означає, що градієнт потенціалу (векторна величина) спрямований протилежно вектору \vec{E} . Сам градієнт спрямований в бік найшвидшого зростання потенціалу.

Потенціал точкового заряду визначається за формулою:

$$\varphi = k_0 \cdot \frac{q}{r}, \quad (8.2)$$

де $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; q – точковий заряд,

r – відстань від заряду до точки спостереження.

Потенціал системи точкових зарядів в даній точці А обчислюється за формулою :

$$\varphi(x, y) = k_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \sum_{j=1}^m \frac{Q_j}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} \right), \quad (8.3)$$

де q_i – точковий заряд однієї послідовності зарядів;

Q_j – точковий заряд другої послідовності зарядів;

x, y – координати радіус-вектора, що характеризує положення точки, в якій визначається потенціал;

x_i, y_i, x_{jj}, y_j – координати радіус-вектора, який характеризує відповідно положення i -того та j -того заряду (рис.8.1).

Враховуючи широкі можливості комп’ютера, ми відразу розглядаємо поле дискретної послідовності зарядів. Можна було б розглядати заряд, розподілений безперервно вздовж ліній. Але такий підхід є складнішим, бо в цьому ви-

падку потенціал треба визначати через інтеграли, а потім знову ж таки наближено їх обчислювати, розбиваючи лінії, вздовж яких розподілені заряди, на окремі ділянки, тобто замінити інтеграл наближеною сумою вигляду (8.3).

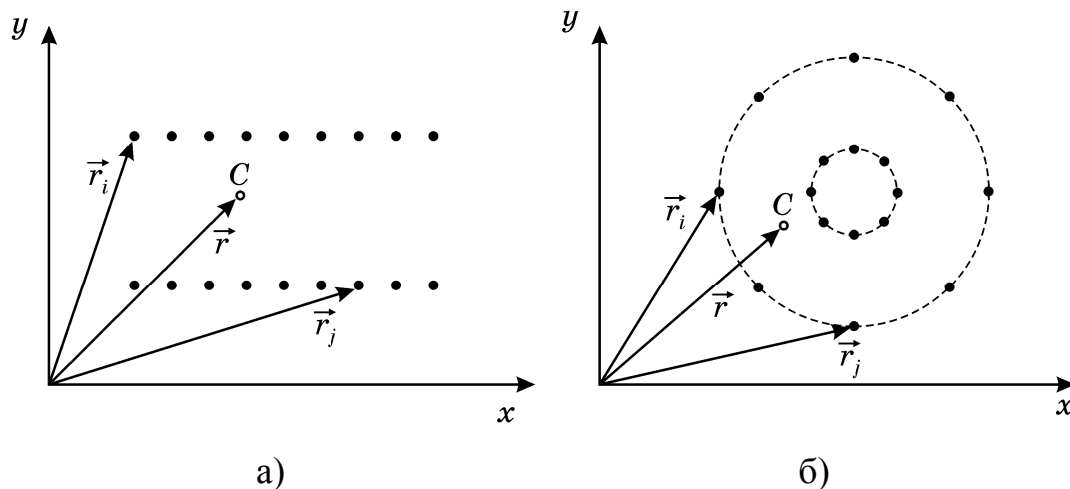


Рисунок 8.1

Потенціал дискретної послідовності числа n зарядів величиною q буде відрізнятися від рівномірного розподілу з еквівалентною лінійною густиною τ лише безпосередньо біля зарядів (в цьому можна впевнитися при виконанні даної роботи, будуючи еквіпотенціальні лінії поля). У випадку, коли заряди знаходяться на прямій (рис.8.1а), лінійна густина заряду:

$$\tau = \frac{nq}{x_n - x_1},$$

де x_1 та x_n – відповідні x -координати першого та n -го зарядів. Коли заряди розташовані на колі (рис.8.1б), маємо

$$\tau = \frac{nq}{2 \cdot \pi R},$$

де R – радіус кола.

Для нескінченно довгих пластин, циліндрів картина еквіпотенціальних ліній в площині, перпендикулярній до них(в площині рисунка) буде такою ж самою, як і для лінійного розподілу зарядів з лінійною густиною τ .

8.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 8.2. Програма дозволяє створювати такі розподіли зарядів: один точковий заряд, диполь, заряджена смуга, дві паралельні смуги, два коаксіальні циліндри і таким

чином моделювати плоский та циліндричний конденсатори. Програма дає можливість знайти точки однакового потенціалу для вказаних розподілів зарядів.

"Вимірювання" потенціалу в будь-якій точці з координатами (x, y) здійснюється за допомогою "зонда", роль якого відіграє курсор "миші". Натискаючи ліву клавішу "миші" в деякій точці отримуємо на екрані висвітлені координати точки та значення потенціалу. За отриманими даними користувач має можливість побудувати екіпотенціальні лінії поля даної системи зарядів, а також обчислити напруженість поля.

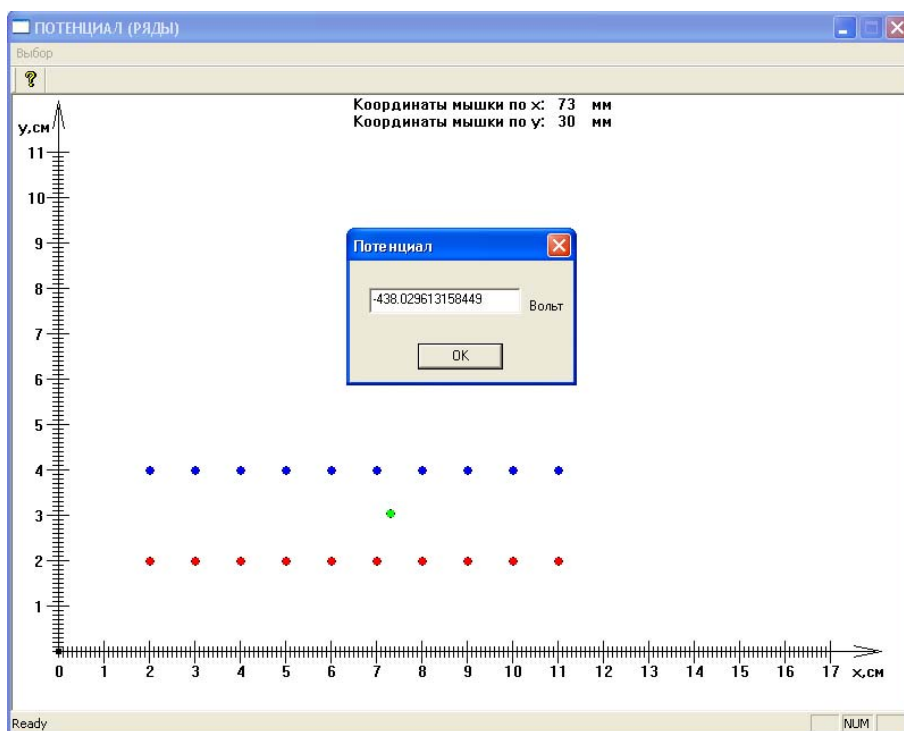


Рисунок 8.2

Число зарядів, відстань між ними можна змінювати в широких межах, добиваючись такої густини зарядів, коли немає великої різниці між дискретним та безперервним розподілом. Користувач може прослідкувати, як впливає дискретність розподілу зарядів на форму екіпотенціальних ліній.

8.4 Інструкція користувачу

1. Створіть один точковий заряд q_1 (значення q_1 візьміть з таблиці 8.1). Відшукайте точки однакового потенціалу для точок, розташованих на відстані від заряду $r = r_1; r_2; r_3; r_4$. З'єднайте точки з однаковим потенціалом ($\varphi = const$), отримайте екіпотенціальні лінії.

2. Обчисліть тричі наближено значення напруженості за формулою:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}. \quad (8.4)$$

Значення $\Delta\varphi$ та Δr візьміть для двох сусідніх екіпотенціальних ліній. Обчисліть напруженість електричного поля як градієнт потенціалу, зробивши виміри φ_1 , φ_2 в двох будь-яких близьких точках, які лежать на сусідніх екіпотенціальних лініях (рис.8.3), за формулою, аналогічною (8.1):

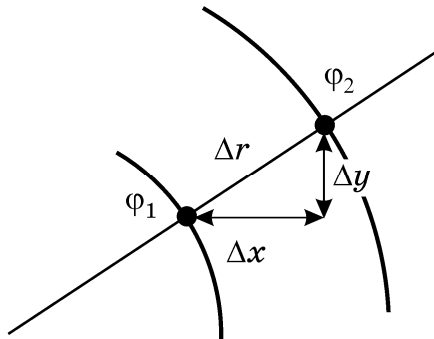


Рисунок 8.3

$$\vec{E} = -\left(\vec{i} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \vec{j} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\right). \quad (8.5)$$

3. Порівняйте результати, отримані за формулами (8.4) і (8.5).

4. Створіть системи точкових зарядів, розташованих паралельно одна одній, значення q , n , та Δx візьміть з таблиці 8.1, заряд однієї системи зарядів $+q$, другої $-q$. (порядок величини $q \sim 10^{-12} \dots 10^{-14}$ Кл).

5. Знайдіть точки однакового потенціалу, починаючи з точки, що лежить на перетині осей симетрії системи (рис.8.1а). Зробіть аналогічні заміри, щоб побудувати не менше трьох екіпотенціальних ліній, розміщених між лінією розташування зарядів та лінією симетрії, яка проходить посередині між системами. Зробіть заміри для точок не тільки всередині системи зарядів, а й для зовнішніх точок, де вже буде добре видно, що екіпотенціальні лінії стають непаралельними одна одній.

6. Обчисліть напруженість поля поблизу точки C (рис.8.1а) – в центрі системи. Якщо екіпотенціальні лінії паралельні, то поле однорідне і величину напруженості поля в конденсаторі можна обчислити за формулою.

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta y}. \quad (8.6)$$

Порівняйте отриманий результат з результатом обчисленим за формулою, справедливою для випадку двох нескінченних паралельних площин:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{nq}{\epsilon_0 \cdot (x_n - x_1)^2}. \quad (8.7)$$

7. Виконайте завдання п.п 4...6 для “пластин”, ширина яких перевищує вибрану в п.3 в декілька m разів (данні в таблиці 8.1). Як розміри пластин впливають на характер поля?

8. Створіть дві системи зарядів, розташованих на концентричних колах з радіусами R_1 і R_2 (дані п.8). Центр кіл виберіть таким чином, щоб вони не вийшли за межі осей x, y . Заряд q_1 та q_2 підберіть так, щоб заряд однієї “пласти-

ни” Q_1 конденсатора дорівнював $-Q_2$ – заряду другої “пластини”. Побудуйте не менше трьох еквіпотенціальних ліній.

Порівнюючи форму еквіпотенціальних ліній для плоских та циліндричних пластин зробіть належний висновок щодо відповідності між формою ліній та пластин.

Таблиця 8.1 – Вихідні данні

№	$q_1 \cdot 10^{-5}$, Кл	$q_2 \cdot 10^{-5}$, Кл	Δx , мм	n	m	R_1 , мм	R_2 , мм
1	1	1	2	10	8	10	40
2	2	2	2	10	8	15	45
3	3	3	2	10	8	20	40
4	4	4	2	10	8	20	50
5	5	5	2	10	8	20	45
6	6	6	2	10	8	10	40
7	7	2	3	10	5	20	50
8	8	2	3	10	5	15	45
9	9	3	3	10	5	10	40
10	10	4	3	10	5	15	45
11	11	5	3	10	5	20	40
12	12	6	3	10	5	25	50

8.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, малюнки побудованих еквіпотенціальних ліній, результати розрахунків (п.п.2, 6) та висновки до п.п 7, 8.

8.6 Контрольні запитання і завдання

1. Запишіть формулу потенціалу точкового заряду.
2. За якою формулою визначається потенціал системи точкових зарядів?
3. Запишіть формулу зв'язку напруженості поля з потенціалом.
4. Опишіть властивості градієнта.
5. Що таке еквіпотенціальні лінії (поверхні). Під яким кутом перетинаються лінії напруженості з еквіпотенціальними лініями?
6. Вивести формули для потенціалу поля в циліндричному та плоскому конденсаторі.
7. Що таке лінійна густина заряду?

9 ВИМІРЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ОПОРУ ПРОВІДНИКІВ ЗА МЕТОДОМ МОСТА УІТСТОНА

9.1 Мета роботи

Навчитись використовувати правила Кірхгофа для розгалужених кіл, вивчити метод вимірювання опору провідників за мостовою схемою та визначити опір провідників зазначеним методом .

9.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Одним з найбільш точних методів вимірювання електричного опору є метод моста Уітстона. Міст Уітстона зображено на рис 9.1.

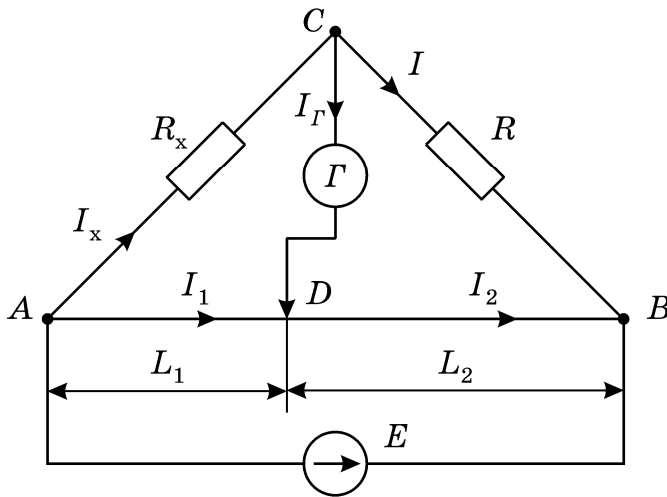


Рисунок 9.1

Напрямок обходу контурів виберемо за годинниковою стрілкою. Згідно з першим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів у вузлі (нагадаємо, що вузол – це точка, де сходяться не менше трьох провідників) дорівнює нулю [2, 5]. Тоді для вузла C маємо:

$$I_x - I - I_G = 0. \quad (9.1)$$

Оскільки I_x входить в вузол, беремо його з плюсом, I , I_G виходять із вузла – беремо їх з мінусом.

Для вузла D :

$$I_1 - I_2 + I_G = 0. \quad (9.2)$$

Згідно з другим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума падінь напруги на елементах замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють у контурі [2, 5]. Причому, якщо напрям струму в елементі співпадає з напрямком

За звичай між точками A та B вмикають калібрований дріт – реохорд із ковзним контактом D ; U – постійна напруга від джерела струму (E); R – відомий еталонний опір; R_x – невідомий опір; G – гальванометр; L_1 і L_2 – “плечі реохорда”.

Метод вимірювання опору за допомогою моста Уітстона базується на порівнянні невідомого опору R_x з відомим еталонним опором R [8].

Нехай струм в плечах моста та в діагоналі CD тече так, як показано на рис.9.1.

контур, то відповідне падіння напруги входить в рівняння з плюсом, якщо не співпадає – з мінусом. Якщо напрям дії ЕРС співпадає з напрямком обходу, то ЕРС береться з плюсом, не співпадає – з мінусом. Виходячи із сформульованих правил отримуємо ще три рівняння:

$$\begin{aligned} \text{для контуру ACDA: } & I_x R_x + I_\Gamma R_\Gamma - I_1 R_1 = 0; \\ \text{для контуру ABEA: } & I_1 R_1 + I_2 R_2 = U; \\ \text{для контуру CBDC: } & IR - I_2 R_2 - I_\Gamma R_\Gamma = 0; \end{aligned} \quad (9.3)$$

де R_Γ – внутрішній опір гальванометра; R_1 , R_2 – опір плечей реохорда L_1 та L_2 .

Всього маємо в схемі п'ять віток, п'ять струмів – п'ять невідомих і відповідно п'ять рівнянь для їх визначення.

Змінюючи положення контакту D (тим самим змінюючи співвідношення між L_1 та L_2), можна досягти того, щоб потенціал точки D став рівним потенціалу точки C ($\varphi_D = \varphi_C$). В цьому випадку струм через гальванометр дорівнює нулю, міст збалансовано. Враховуючи, що $I_\Gamma = 0$, систему із (9.1)...(9.3) можна спростити:

$$I_x = I, I_1 = I_2, I_x R_x = I_1 R_1, IR = I_2 R_2. \quad (9.4)$$

Поділивши останні два рівняння почленно одне на друге, маємо:

$$\frac{I_x R_x}{IR} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_2}. \quad (9.5)$$

Враховуючи перші два рівняння (9.4), вираз (9.5) можна спростити:

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (9.6)$$

Опір плечей L_1 та L_2 реохорду можна визначити за формулами:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{L_1}{S}, R_2 = \rho \cdot \frac{L_2}{S}, \quad (9.7)$$

де ρ – питомий опір дроту реохорда, S – площа поперечного перерізу дроту.

Підставивши значення R_1 і R_2 (9.7) в співвідношення (9.6) отримаємо формулу для обчислення невідомого опору R_x .

$$R_x = R \cdot \frac{L_1}{L_2}. \quad (9.8)$$

Таким чином, підбираючи відповідно співвідношення між плечима L_1 та L_2 (щоб $I_\Gamma = 0$), знаючи еталонний опір R , можна визначити R_x .

В роботі визначається (вимірюється) опір для випадку, коли R_x являє собою два опори R_{x1} , R_{x2} , з'єднані послідовно та паралельно. Схеми послідовного та паралельного з'єднання приведені на рис.9.2.

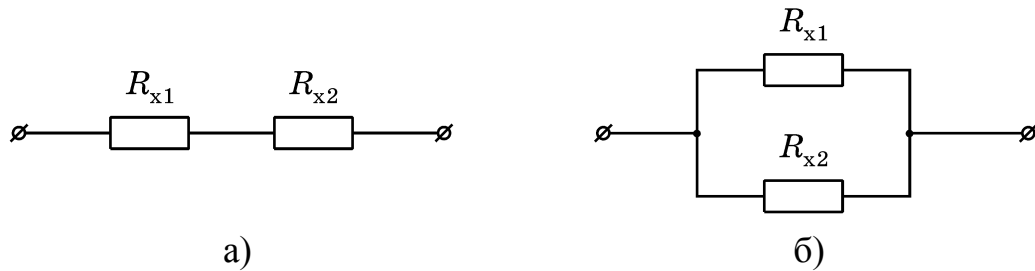


Рисунок 9.2

Для послідовного з'єднання (рис.9.2а) загальний опір

$$R_x = R_{x1} + R_{x2} \quad (9.9)$$

Для паралельного з'єднання (рис. 9.2б):

$$R_x = \frac{R_{x1} \cdot R_{x2}}{R_{x1} + R_{x2}} \quad (9.10)$$

9.3 Опис комп'ютерної програми

Алгоритм обчислень базується на розв'язку системи лінійних рівнянь, складених за правилами Кірхгофа (9.1)...(9.3). Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 9.3.

Програма дозволяє зібрати мостову схему з елементів, перелік яких представлений на основній панелі інтерфейсу. Для цього клацнувши лівою клявішею миші, наприклад, на "Реохорд" викликаємо його появу. Натискаючи на ліву клявішу можна пересунути елемент в будь-яку точку екрану. Для виконання з'єднань між елементами схеми (рис.9.3) треба навести курсор на вивід приладу, і, як тільки з'явиться хрестик, клацнути лівою кнопкою, потім навести курсор на вивід другого елемента, повторити теж саме. Якщо ви помилилися із з'єднанням, для того, щоб прибрати "провід" треба навести на нього курсор, клацнути спочатку лівою, а потім правою клявішею. При появі віконця "прибрати", навести на нього курсор і клацнути лівою клявішею. Якщо з першого разу щось не вийшло, повторіть операції. Коли схема зібрана натискаємо кур-

сором на вимикач — “вкл”. При цьому підключається движок реохорда. Наводячи курсор на движок переміщуємо його вліво-вправо, добиваючись нульового показання гальванометра.

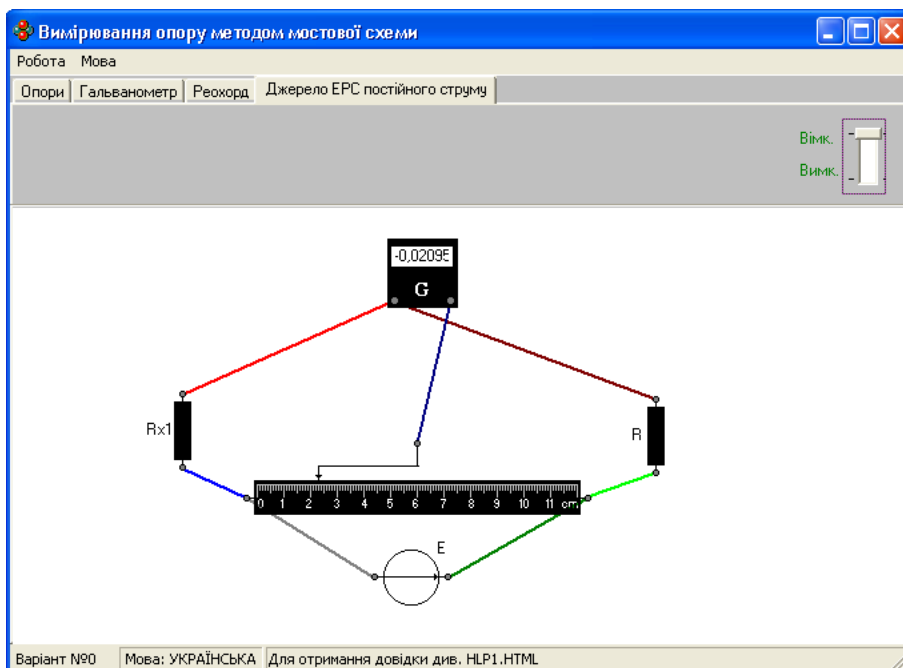


Рисунок 9.3

Якщо клацнути лівою клавішею на елемент — опір R або ЕРС E , висвічується допоміжна панель, з допомогою якої можна встановити певне значення опору R та внутрішньому опору ЕРС.

9.4 Інструкція користувачу

1. Скласти схему (рис.9.1) з резистором R_{x1} .
2. Задати значення опору R згідно с номером варіанта (таблиця 9.1).

Таблиця 9.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R , Ом	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

3. Переміщуючи повзунок реохорда, встановити силу струму, що дорівнює нулю. Виміряти за шкалою довжини плечей L_1 та L_2 , результати записати в таблицю вимірювань.

4. За формулою (9.8) обчислити R_{x1} . Занести результат до таблиці 9.2.

Таблиця 9.2 – Результати розрахунків

Опір / з'єднання опорів	L_1 ,	L_2 ,	R ,	Перевірка R ,
-------------------------	---------	---------	-------	-----------------

	см	см	Ом	Ом
R_{x1}				–
R_{x2}				–
$R_{x1} + R_{x2}$				
$R_{x1} \parallel R_{x2}$				

5. Відключити R_{x1} та підключити R_{x2} , виконати пункти 2, 3.

6. Підключити до клем A, C , як невідомий опір R_x два резистора R_{x1} та R_{x2} з'єднані послідовно, а потім паралельно. Виконати пункти 2, 3.

7. Знаючи опори резисторів R_{x1}, R_{x2} визначити за теоретичними формулами опори при їх паралельному і послідовному вмиканнях. Результати занести до таблиці 9.2.

8. Знайти похибки вимірювань, враховуючи, що $\frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% = 2\%$,
 $\Delta L_1 = \Delta L_2 = 0,5 \text{ мм}$.

9.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, таблицю результатів вимірювань та розрахунки R_x , розрахунок похибок за загальним правилом обчислень похибок для непрямих вимірювань.

9.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулювати та записати перше правило Кірхгофа. Що таке вузол?
2. Сформулювати та записати друге правило Кірхгофа.
3. Використовуючи правила Кірхгофа, вивести формулу невідомого опору.
4. Від чого залежить опір провідників? Записати формулу.
5. Як визначається опір при послідовному та паралельному з'єднанні резисторів? Вивести відповідні формули.
6. При якому відношенні плечей L_1 / L_2 похибка вимірювання R_x буде мінімальною?
7. В чому полягає умова балансування моста?
8. Які переваги має мостовий метод визначення опорів у порівнянні з використанням для цього амперметра та вольтметра?

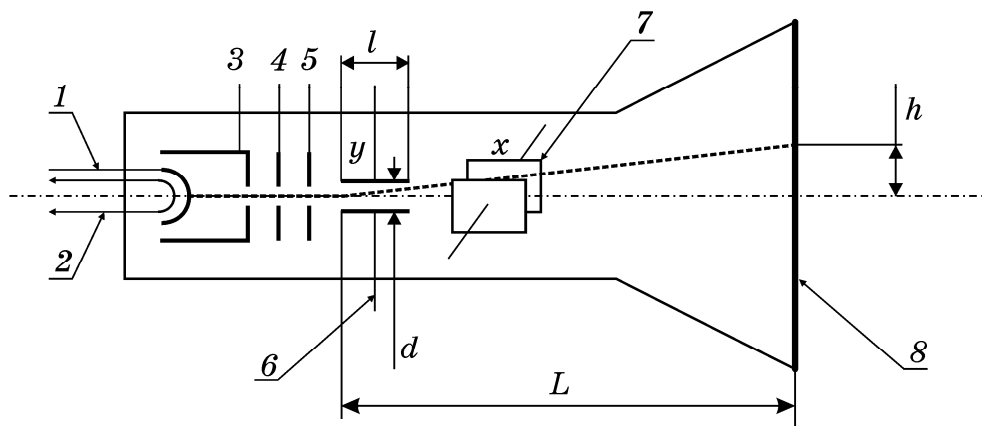
10 ОСЦИЛОГРАФУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

10.1 Мета роботи

З'ясувати принцип дії електронного осцилографа, ознайомитись з застосуванням електронного осцилографа для спостереження форми сигналу, вимірювання напруги, частоти, різниці фаз, вивчити явища, що виникають при складанні взаємно перпендикулярних коливань.

10.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Принцип дії електронно-променевої трубки. Найважливішою деталлю осцилографа є електронно-променева трубка (ЕПТ). Вона складається (рис.10.1) з скляної колби, всередині якої міститься джерело електронів – катод 1, який нагрівається ниткою розжарення 2. Катод знаходиться всередині керуючого (циліндричного) електрода 3. Зміною негативного потенціалу на електроді 3 регулюється кількість електронів, які проходять через його отвір, що змінює яскравість плями на екрані 8 ЕПТ. Перший анод 4 служить для фокусування, а другий 5 для прискорення електронів. Деталі 1...5 складають електронну гармату. Дві пари пластин 6 та 7 служать для відхилення променя: вертикально відхиляючі пластини (пластини Y) – у вертикальній площині, горизонтально відхиляючі пластини (пластини X) – у горизонтальній площині.



- 1 – катод;
- 2 – волосок розжарення;
- 3 – циліндричний електрод;
- 4 – перший анод;
- 5 – другий анод;
- 6 – вертикально відхиляючі пластини;
- 7 – горизонтально відхиляючі пластини;
- 8 – екран.

Рисунок 10.1

Якщо прикласти між катодом та другим анодом напругу U_a (при напрузі між парами пластин $U_x = 0$, $U_y = 0$) пучок електронів буде попадати в центр екрану.

Якщо тепер подати на пластини Y напругу U_y , то між ними виникне однорідне поле напруженістю

$$E_y = \frac{U_y}{d}, \quad (10.1)$$

де d – відстань між пластинами. На кожний електрон, що рухається між пластинами, тепер буде діяти сила F_y , яка спричинятиме його прискорення у вертикальному напрямі

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{e \cdot E_y}{m} = \frac{e \cdot U_y}{md}, \quad (10.2)$$

де m – маса електрона, e – його заряд.

Вертикальна складова швидкості електрона

$$V_y = a_y \Delta t_y \quad (10.3)$$

залежить від прискорення a_y та проміжку часу Δt , протягом якого електрон перебуває між пластинами. Цей проміжок часу залежить від довжини пластини l та повздовжньої швидкості електрона V_z

$$\Delta t_y = \frac{l}{V_z}. \quad (10.4)$$

Підставляючи значення a_y (10.2) у вираз (10.3), а також Δt_y із співвідношення (10.4) отримаємо:

$$V_y = \frac{eU_y l}{mV_z d}. \quad (10.5)$$

Від переднього краю пластин до екрану електрон проходить відстань L , яка значно більша за довжину пластин l (див.рис.10.1). В зв'язку з цим можна знехтувати зміщенням траєкторії електрона в полі пластин порівняно з відхиленням h плями на екрані трубки і записати

$$\frac{V_y}{V_z} = \frac{h}{l}. \quad (10.6)$$

Підставляючи у співвідношення (10.6) значення V_y (10.5) знайдемо по-вздовжню складову швидкості електрона

$$V_z = \sqrt{\frac{eU_y LE}{mdh}}. \quad (10.7)$$

Повздовжню складову швидкості V_z можемо визначити також із умови, що робота анодної напруги над прискоренням електрона eU_a іде на зміну кінетичної енергії електрона.

Таким чином:

$$eU_a = \frac{mV_z^2}{2}, \quad V_z = \sqrt{\frac{2eU_a}{m}}. \quad (10.8)$$

Прирівнюючи (10.7) до (10.8) отримаємо, що відхилення h електрона

$$h = \frac{U_y LE}{2dU_a} = U_y S, \quad (10.9)$$

де S – константа для даної ЕПТ (якщо U_a – фіксована). Величина S носить назву чутливості ЕПТ:

$$S = \frac{h}{U_y}. \quad (10.10)$$

Із визначення (10.10) виходить, що чутливість S ЕПТ відносно напруги чисельно дорівнює величині зміщення променя на екрані, що приходить на один вольт напруги, прикладеної до пластин.

Принцип дії генератора розгортки. Для спостереження ходу процесів в часі (наприклад зміни напруги) на горизонтально відхиляючі пластини необхідно подавати напругу, яка лінійно зростає з часом – напругу розгортки. Якщо при цьому на у-пластини подати напругу, яка вивчається, то електронний пучок

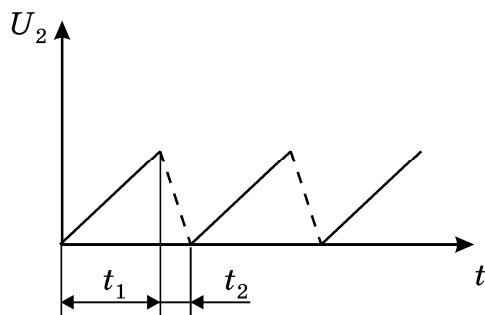


Рисунок 10.2

опише на екрані графік зміни напруги в часі. Для спостереження періодичних процесів необхідно, щоб напруга розгортки змінювалась періодично. Причому період розгортки T був кратний періоду сигналу T_0 , тобто $T = nT_0$ (де n – ціле число). В цьому разі електронний промінь на екрані з кожним повторенням циклу розгортки буде викреслювати одну й ту ж траєкторію. Після проходження по горизонталі до певної точки на

екрані, промінь повинен повертатись в початкове положення (обернений хід). Викладеним вимогам можна задовольнити, якщо напруга U_x розгортки буде змінюватись за законом, зображеним на рис.10.2, де t_1 – час прямого ходу, t_2 – час оберненого ходу променя. Така напруга називається пилкоподібною.

Складання взаємно-перпендикулярних коливань. Маємо два коливання – одне вздовж осі x , друге – вздовж осі y :

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t + \varphi) \\ y &= b \cos(\omega t + \vartheta) \end{aligned} \quad (10.11)$$

Виключаючи з системи рівнянь (10.11) параметр t отримаємо рівняння еліпса у вигляді:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (10.12)$$

де $\delta = \varphi - \vartheta$ – різниця фаз коливань (10.11)

Точку перетину еліпса з віссю y можна знайти з (10.12) поклавши $x=0$ (див.рис.10.3), тоді

$$y_0 = B \sin \delta. \quad (10.13)$$

Таким чином

$$\delta = \arcsin \frac{y_0}{B}. \quad (10.14)$$

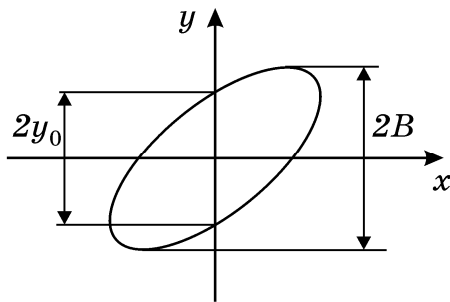


Рисунок 10.3

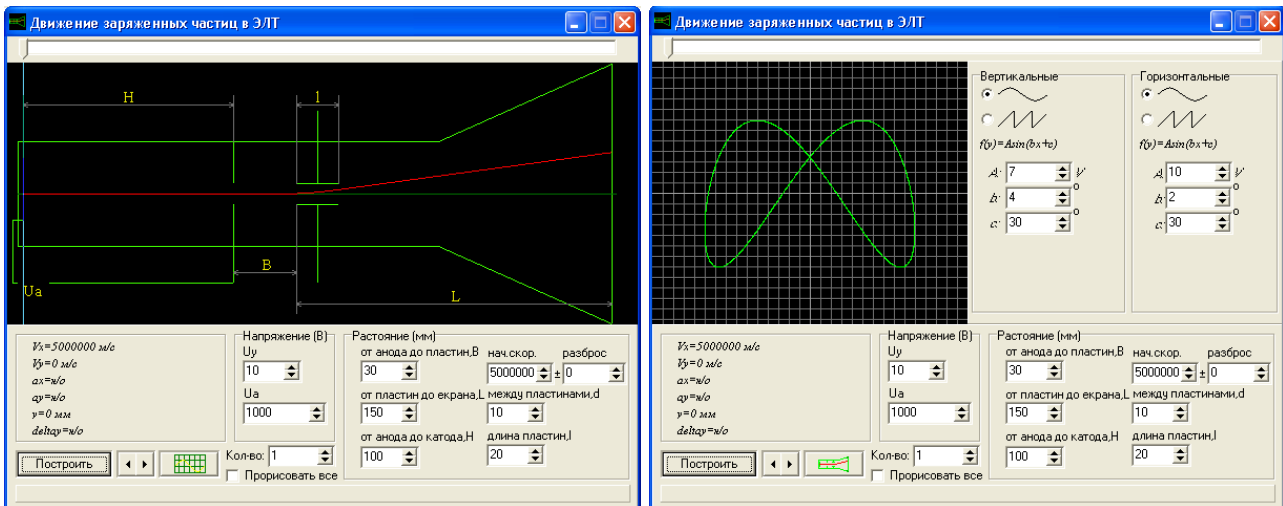
10.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 10.4. Програма має два режиму роботи: в першому можна вивчити призначення відхиляючих пластин ЕПТ, в другому – принцип дії генератора розгортки, та проаналізувати складання двох взаємно перпендикулярних коливань.

В першому режимі (рис.10.4а) на панель інтерфейсу програми виведені вікна для завдання параметрів регулювання: напруги на відхиляючих пластинах U_y , анодної (прискорювальної) напруги U_a , відстані між пластинами d , ширини пластин l , відстаней між анодом та катодом B , пластинами та екраном L , початкової “теплової” швидкості електрона, величини яких можна змінювати в широких межах. При цьому на екрані можна спостерігати траєкторію електро-

на. Рух електрона в ЕПТ описується за допомогою модифікованого алгоритму Ейлера (додаток Б).

В другому режимі (рис.10.4б) на екрані ЕПТ, який розміщується в площині екрану дисплея, можна спостерігати криві напруги, яка подається на вертикальні відхиляючі пластини при увімкненій розгортці, коли подається пілкоподібна напруга на горизонтально відхиляючі пластини. Також можливо вимкнути розгортку та на x - та y -пластини подають два синусоїдальних сигнали, амплітуди, частоти та початкові фази, яких можна змінювати в широких межах, спостерігаючи фігури Лісажу.



а)

б)

Рисунок 10.4

10.4 Інструкція користувачу

1. За допомогою кнопок на інтерфейсі встановіть значення параметрів у відповідності з табл. 10.1. Отримайте на екрані траєкторію електрона.

Таблиця 10.1 – Вихідні данні

№	U_a , В	L , мм	U_y , В	d , мм	№	U_a , В	L , мм	U_y , В	d , мм
1	1000	140	10	10	7	1000	140	10	10
2	1000	150	10	10	8	1000	150	10	10
3	1200	160	10	10	9	1200	160	10	10
4	1200	160	12	10	10	1200	160	12	10
5	1000	150	8	10	11	1000	150	8	10
6	1000	150	12	12	12	1000	150	14	14

2. Змініть полярність U_y . Як змінилася траєкторія?

3. Задайте декілька послідовних значень напруги U_y , від максимального значення $+U_y$ до мінімального значення $-U_y$. Зробіть висновок, яку лінію буде викреслювати електронний промінь на екрані ЕПТ?

4. За даними пункту 1 обчисліть чутливість ЕПТ за формулою (10.9).

5. Змініть режим програми, натиснувши кнопку «~». В цьому режимі можна подавати напругу на обидві пари пластин, причому U_x та U_y можуть мати або синусоїдальну або пилкоподібну напругу. Подайте синусоїдальну напругу на y -пластини, на x -пластини $U_x=0$. Чи співпадає висновок, зроблений в п.3 з отриманим зображенням?

6. Подайте пилкоподібну напругу на x -пластини, на y -пластини – синусоїдальну. Зарисуйте отримане зображення. Подайте тепер на x -пластини теж синусоїдальну напругу. Порівняйте отриману криву з зарисованою.

Зробіть висновок, чому треба на x -пластини подавати пилкоподібну напругу, тобто, висловлюючись мовою математики – напругу, яка змінюється за лінійним законом. В якому з цих двох випадків можна спостерігати істинну форму сигналу, що подається на y -пластини?

7. Підберіть період синусоїди (змінюючи ω_y) так, щоб на екрані було зображено 1, 2, 3, і т.д. періодів синусоїди. Яким співвідношенням зв'язані період розгортки (пилки) з періодом синусоїди?

8. Подайте на обидві пари пластин синусоїдальну напругу однакової амплітуди: $A=B$, та однакової частоти: $\omega_x = \omega_y$. Змінюючи різницю фаз δ отримайте: пряму, еліпс, коло, пряму з протилежним нахилом. Запишіть відповідні значення різниці фаз δ . Визначте різницю фаз за формулою (10.14).

9. Повторіть операції п.8 для випадку, коли амплітуди A і B не дорівнюють одна одній. Якщо подати синусоїдальні напруги на обидві пари пластин, то при кратних співвідношеннях частот ω_x та ω_y ($\omega_x = n\omega_y$, або $\omega_y = n\omega_x$, n – ціле число) можна спостерігати фігури Лісажу.

10. Подайте на обидві пари пластин синусоїдальну напругу, задовольнивши умовам: $A=B$, $\delta=30$ градусів. Зафіксуйте ω_x . Змінюючи ω_y так, щоб $\omega_x / \omega_y = 1, 2, 3, 2/3$, встановіть формулу, за якою при відомому значенні ω_x можна обчислити ω_y .

11. Повторіть пункт 10, але тепер зафіксуйте ω_y і, змінюючи відношення $\omega_y / \omega_x = 1, 2, 3, 2/3$, обчисліть ω_x .

10.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, висновки за пунктами 3, 5, 7, встановлені залежності (формули) за п.п. 8, 10, 11, загальний висновок відносно того, що можна спостерігати та вимірювати за допомогою електронного осцилографа.

10.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яке призначення, спорядження та принцип дії ЕПТ? Яке призначення катода, першого анода, другого анода, електрода?
2. Яке призначення генератора розгортки?
3. Як можна виміряти напругу за допомогою ЕПТ?
4. Що таке чутливість ЕПТ за напругою?
5. Отримайте рівняння еліпса.
6. Як можна виміряти різницю фаз між двома синусоїдальними напругами однакової частоти?

11 ВИВЧЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ КРУГОВОГО ВИТКА ТА СОЛЕНОЇДА

11.1 Мета роботи

Ознайомитись із законом Біо-Савара-Лапласа, дослідити магнітне поле контуру зі струмом та системи співвісних контурів, що утворюють котушку з струмом, базуючись на законі Біо-Савара-Лапласа.

11.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Магнітне поле $\Delta\vec{B}$ елемента струму ($I\Delta\vec{L}$) визначається за законом Біо-Савара-Лапласа [2, 5]:

$$\Delta\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{(\Delta\vec{L} \times \vec{r})}{|\vec{r}|^3}, \quad (11.1)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}}$ – магнітна стала, I – величина постійного електричного струму, \vec{r} – радіус-вектор, який характеризує положення точки, в якій створюється величина індукції ΔB по відношенню до елемента ($I\Delta\vec{L}$).

Закон Біо-Савара-Лапласа має загальний характер і в принципі може бути використаний для визначення магнітного поля, яке створюється провідником із струмом будь-якої форми. Зрозуміло, що ніяких ізольованих ділянок струму не буває і провідник повинен утворювати замкнене коло. Однак ми можемо наближено уявити безперервний провідник у вигляді ряду дискретних ділянок. Тоді вектор індукції \vec{B} в будь-якій точці простору можна визначити за допомогою принципу суперпозиції. Для нашого випадку кінцевих елементів струму

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \Delta\vec{B}_i, \quad (11.2)$$

де m – число елементів, на які розбивається контур. В скалярному вигляді

$$B_x = \sum_{i=1}^m \Delta B_{xi}, B_y = \sum_{i=1}^m \Delta B_{yi}, B_z = \sum_{i=1}^m \Delta B_{zi}. \quad (11.3)$$

Вклад кожної з ділянок довжиною ΔL , розташованої в точці \vec{r}_i , в магнітне поле в точці \vec{r} (рис.11.1) визначається за формулами (в проєкціях)

$$\begin{aligned} \Delta B_x(\vec{r}) &= A \cdot \frac{[\Delta L_y(z - z_i) - \Delta L_z(y - y_i)]}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \\ \Delta B_y(\vec{r}) &= A \cdot \frac{[\Delta L_z(x - x_i) - \Delta L_x(z - z_i)]}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \\ \Delta B_z(\vec{r}) &= A \cdot \frac{[\Delta L_x(y - y_i) - \Delta L_y(x - x_i)]}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

де

$$|\vec{r} - \vec{r}_i|^3 = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}.$$

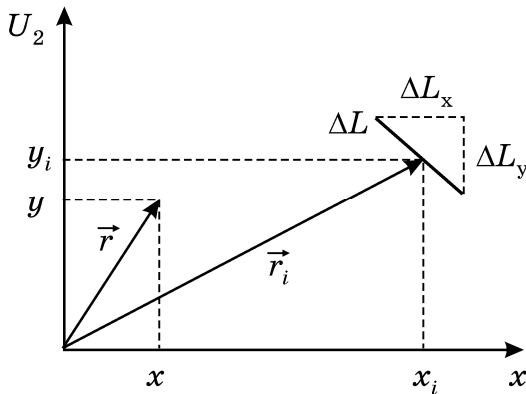


Рисунок 11.1

Для магнітного поля на осі, що проходить через центр системи витків можна отримати аналітичний вираз

$$B = \frac{1}{2} \cdot B_0 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2), \quad (11.5)$$

де кути θ_1 та θ_2 показані на рис.11.2, на якому схематично зображена котушка із струмом, B_0 – індукція всередині довгого соленоїда

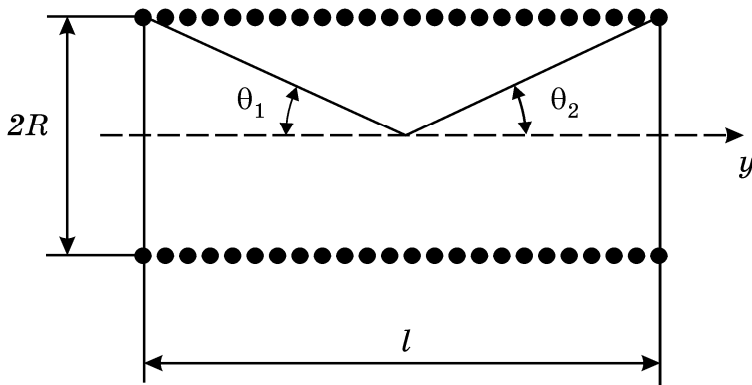


Рисунок 11.2

$$B_0 = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I.$$

11.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 11.3. Програма обчислює та рисує силові лінії магнітного поля кругового витка із струмом, який лежить в площині XZ , та системи N співвісних витків (див. рис.11.2).

Оскільки система має вісь симетрії, досить представити силові лінії в одній площині, яка проходить скрізь неї. Цією площиною є площина XU , вона виступає в ролі екрана. Обчислення виконуються за формулами (11.3), (11.4). Інтерфейс програми має основну та дві допоміжні панелі. На основній панелі виводяться вікна з параметрами котушки: це радіус витка, висота соленоїда, число елементів, на які розбивається виток при обчисленні індукції та загальне число елементів котушки. На одній з допоміжних панелей можна вибрати координати точки, з якої програма починає викреслювати силові лінії. За допомогою другої панелі можна визначити під яким кутом малювати силові лінії у трьохвимірному просторі. Програма обчислює значення індукції в будь-якій точці. Підводячи курсор в будь-яку точку можна “виміряти” індукцію B та координати точки. Програма дозволяє також регулювати швидкість викреслювання силових ліній та їх густину. Розміри на екрані дисплею вимірюються в пікселях.

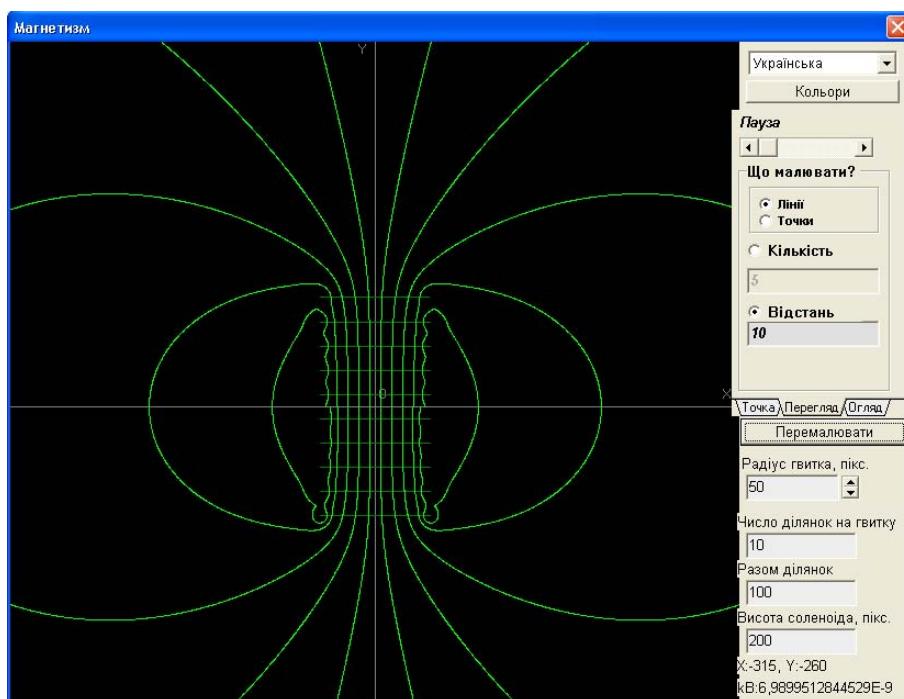


Рисунок 11.3

11.4. Інструкція користувачу

1. Створити один виток із струмом. Для цього вибрати однакове число “ділянок на витку” та “разом ділянок”. “Відстань” між лініями, яка регулює густину ліній встановіть рівною 20 пікселям. Отримати картину силових ліній для

магнітного поля одного витка. Зарисувати її. Зазначити на рисунку координати центра витка та значення індукції.

Збільшуючи число “ділянок на витку” в два, три і т.д. разів, прослідкуйте як змінюється точність розрахунку (шляхом порівняння $B_1 - B_2$, $B_2 - B_3$, і т.д. різниця $B_n - B_{n+1}$ повинна зменшуватись). Вибираючи “кут нахилу” прослідкуйте, як змінюється при цьому апроксимація кругового витка ломаною лінією, внаслідок його розбивки на елементи ΔL .

3. Встановити довжину котушки $L=200$ пікселів, $R=50$ пікселів, координати початкової точки для розрахунку силової лінії покладіть рівними $R_{ox} \approx 50$ пікселів, $R_{oz} = R_{oy} = 0$. Збільшити густину силових ліній (шляхом зменшення “відстані”), встановіть “Разом ділянок” – 30. Збільшити число витків. Прослідкуйте, як ведуть себе силові лінії (яка їх форма) поблизу витків, чи перетинають вони циліндричну поверхню, на якій лежать витки?

4. Визначити значення індукції в центрі соленоїда (параметри взяти за таблицею 11.1). Зняти залежність $B(L)$, тобто визначити шість разів B в центрі соленоїда для шести різних значень довжини котушки L . Результаті занести в таблицю.

5. Встановіть параметри соленоїда у відповідності з таблицею 11.1. Виміряйте та запишіть B_0 в центрі соленоїда. Визначити ще шість значень B для шести значень відстані у від центра соленоїда. Результаті занести в таблицю.

Таблиця 11.1 – Вихідні данні

№ вар.	L , пікс	R , пікс	Разом ділянок	№ вар.	L , пікс	R , пікс	Разом ділянок
1	500	50	300	7	300	60	200
2	200	50	200	8	300	40	200
3	500	100	200	9	400	50	250
4	300	70	200	10	300	50	200
5	400	80	300	11	300	30	300
6	500	90	300	12	500	80	300

6. Побудувати за п.4 графік $\frac{B(l)}{B_0} = f(l)$, зробити висновок, як змінюється відношення $\frac{B(l)}{B_0}$ з ростом довжини соленоїда

7. Побудувати за п.5 графік $\frac{B(y)}{B_0} = f(y)$. На одному рисунку для порівняння побудуйте залежність $f(y) = \frac{1}{2} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$. Зробити висновок.

11.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, картину силових ліній для магнітного поля одного витка, результати вимірювань, зведені в таблиці, графіки $\frac{B(l)}{B_0} = f(l)$ та $\frac{B(y)}{B_0} = f(y)$.

11.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке “елемент струму”?
2. Запишіть закон Біо-Савара-Лапласа у векторній формі та скалярній формі.
3. В чому полягає принцип суперпозиції для магнітного поля?
4. Запишіть формулу для індукції довгого соленоїда.
5. За яких умов соленоїд можна вважати нескінченно довгим?
6. Вивести формулу для індукції магнітного поля у центрі нескінченно довгого соленоїда.

12 ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА ДО ЙОГО МАСИ МЕТОДОМ ФОКУСУВАННЯ ПУЧКА ЕЛЕКТРОНІВ ПОВЗДОВЖНІМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ

12.1 Мета роботи

Дослідити рух зарядженої частинки в магнітному полі в залежності від напрямку її руху по відношенню до вектора індукції та визначити питомий заряд електрона e/m .

12.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи.

Коли в магнітне поле з індукцією \vec{B} влітає електрон з швидкістю \vec{V} під кутом α до ліній поля (рис.12.1), на нього починає діяти сила Лоренца [2, 5]:

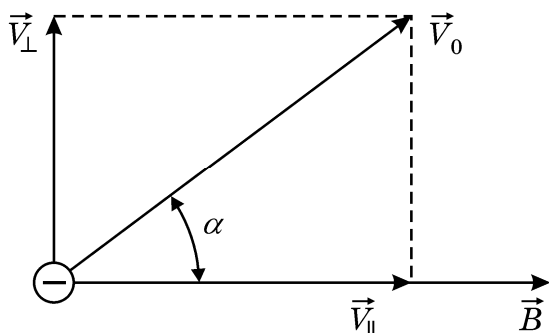


Рисунок 12.1

$$\vec{F} = e \cdot (\vec{V} \times \vec{B}), \quad (12.1)$$

яка у випадку однорідного поля являє собою доцентрову силу

$$eV_{\perp} B = \frac{mV_{\perp}^2}{r}, \quad (12.2)$$

де V_{\perp} – складова швидкості електрона, перпендикулярна вектору \vec{B} , e

– заряд, m – маса електрона.

Сила Лоренца примушує електрон рухатися вздовж кола в площині, перпендикулярній \vec{B} . Радіус кола r визначається із співвідношення (12.2)

$$r = \frac{mV_{\perp}}{eB}. \quad (12.3)$$

На повздовжню складову швидкості V_{\parallel} сила Лоренца не впливає. Складова швидкості V_{\parallel} переміщує електрон вздовж вектора \vec{B} (вздовж осі z , рис.12.1). Таким чином електрон буде приймати участь у двох рухах – русі вздовж кола з швидкістю V_{\perp} та русі в напрямку поля з швидкістю V_{\parallel} . В результаті електрон буде рухатися вздовж гвинтової лінії, крок якої дорівнює

$$l = V_{\parallel}T. \quad (12.4)$$

Період T в (12.4) можна знайти із співвідношення

$$T = \frac{2\pi r}{V_{\perp}}, \quad (12.5)$$

або, використовуючи вираз для r (12.3), отримаємо

$$T = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (12.6)$$

Із співвідношень (12.4), (12.5) виходить, що в однорідному магнітному полі повздовжня складова швидкості не зазнає змін. Таким чином, електрони з різними значеннями V_{\perp} за один оберт переміщуються в повздовжньому напрямі на однакову відстань l і сфокусуються в одній точці.

Зазвичай для визначення відношення l/m використовують осцилографічну електронно-променеву трубку, вміщену в соленоїд (рис.12.2), в якій створюється вузький пучок електронів,

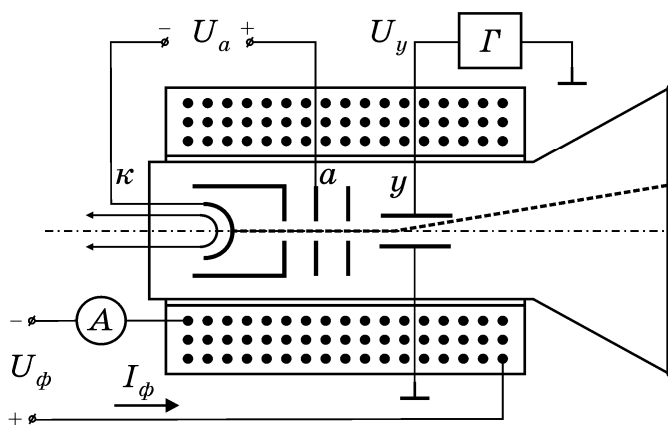


Рисунок 12.2

що мають однакову швидкість V_{\parallel} [9]. Пролітаючи між вертикально відхиляючими пластинами, під дією змінної напруги U_y (подається на ці пластини від генератора Γ) електрони отримують вертикальну складову швидкості V_y під дією прискорювальної напруги U_a . Різні електрони будуть мати різні

швидкості V_y . На екрані трубки буде видно вертикальну лінію, довжина якої буде залежати від максимальної величини V_y , яка в свою чергу буде залежати від амплітуди U_y .

За допомогою соленоїда, надітого на трубку (рис.12.2), створюють спочатку слабе магнітне поле. Електрони починають рухатись у трубці вздовж гвинтової лінії, вертикальна лінія повернеться на деякий кут

$$\varphi = \omega t = 2\pi \frac{t}{T}, \quad (12.7)$$

який залежить тільки від B (або від величини струму I в соленоїді). Із збільшенням I кут φ буде зростати, а радіус гвинтової лінії буде зменшуватися. При деякому значенні струму I_Φ (відповідно індукції B_Φ) кут φ досягне 180° , а пряма лінія стягнеться в точку. Визначивши B_Φ , можна обчислити e/m . Для цього в формулу (12.4) підставимо значення T із співвідношення (12.6), тоді отримаємо :

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi V_{II}}{l B_\Phi}. \quad (12.8)$$

Індукція магнітного поля соленоїда визначається формулою :

$$B_\Phi = \frac{\mu_0 I_\Phi n}{L}, \quad (12.9)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала;

I_Φ – значення струму в соленоїді, за якого відбувається фокусування електронів;

n – число витків соленоїда;

L – довжина соленоїда.

Підставивши значення B_Φ (12.9) в формулу (12.8), знайдемо робочу формулу для визначення питомого заряду електрона.

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi V_{II} L}{\mu_0 I_\Phi n l}. \quad (12.10)$$

12.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 12.3. Програма розраховує та виводить на екран траєкторію руху електронів в магнітному полі. Рух електрона описується за допомогою модифікованого алгоритму

Ейлера (додаток Б). Для управління програмою створено головну панель та три допоміжних панелі настройок.

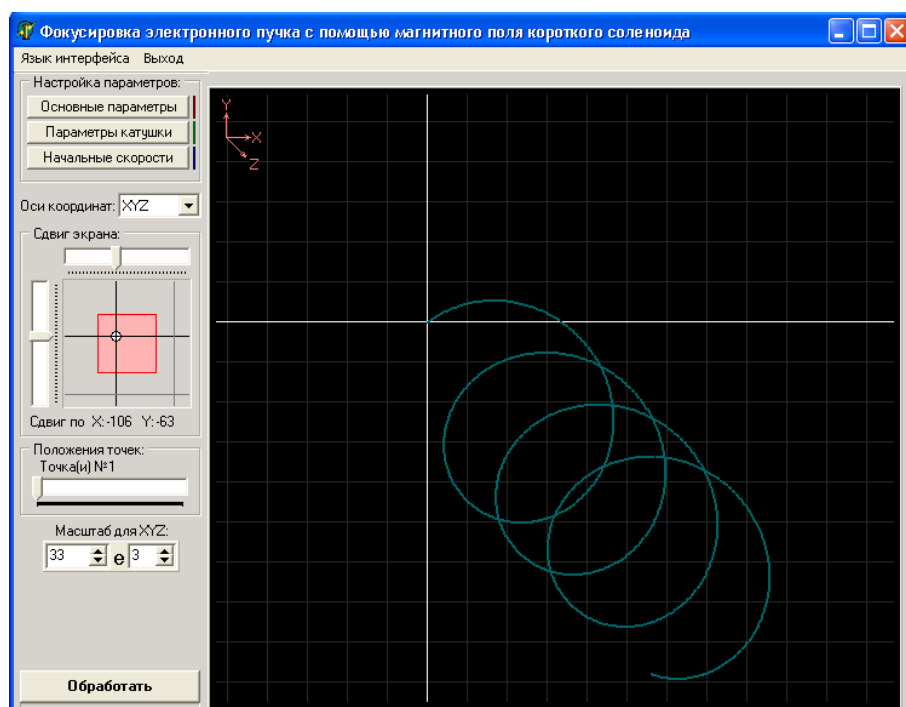


Рисунок 12.3

На головній панелі програми можна вибрати площину спостереження руху частинки: XY , ZX , ZY або трьохвимірний простір – XYZ (рис.12.3). Зображення можна переміщувати вліво, вправо, вгору, вниз, змінювати його масштаб, виділяти одну частинку з групи частинок, “проганяти” її вздовж траєкторії в ручному режимі.

Перша допоміжна панель – “основні параметри”. В ній настраюються такі параметри як: маса частинки m , заряд q , крок в часі t , а також кількість кроків, які обчислюються – “візуалізовані кроки” та кількість “невидимих кроків”, які обчислюються між двома сусідніми візуалізованими.

Друга допоміжна панель – “Параметри котушки”. На ній встановлюються: радіус котушки R , число витків n , число N , на яке розбивається виток котушки при обчислюванні індукції B в заданій точці простору (за формулою Біо-Савара-Лапласа), довжина котушки L та сила струму в соленоїді I . Можна також встановити тип поля “однорідне” або “неоднорідне”. Для однорідного поля B обчислюється один раз. Для неоднорідного поля обчислення індукції здійснюється для кожного кроку, при цьому швидкість обчислень значно знижується.

Третя допоміжна панель – “початкові швидкості”, дає можливість вибрати кількість електронів, траєкторії яких обробляються одночасно (від одного до п’яти), та встановлювати їх початкові швидкості V .

Програма дає можливість обчислювати та спостерігати рух електронів в магнітному полі в широкому діапазоні зміни вказаних параметрів, обираючи їх

таким чином, щоб досягти фокусування електронів повздовжнім магнітним полем.

12.4 Інструкція користувачу

1. Вибрати однорідне магнітне поле. Вибираючи відповідні значення складових V_x , V_y , V_z початкової швидкості отримайте прямолінійну траєкторію для одного електрона вздовж осі Z , кругову траєкторію в площині XU .

2. Встановіть $I=100A$. На панелі “Основные параметры” виберіть максимальне “число шагов” – 1000 . Підберіть значення складових швидкості V_x , V_y , V_z так , щоб спостерігалася спіральна траєкторія (при цьому повинно бути V_x , $V_y \sim 10^6$ м/с, $V_z \sim 10^5$ м/с). Зарисуйте й поясніть отримані криві.

3. Змініть V_x на $-V_x$, V_y на $-V_y$. Отримайте проекції траєкторії на площини XU , ZX , ZU і зарисуйте отримані криві. Порівняйте їх з кривими пункту 2. Поясніть причини змін.

4. Задайте початкові швидкості V_x , V_y , V_z для п’яти електронів, дані візьміть з таблиці 12.1. В цій таблиці приведені величини швидкості для першої частинки. Значення V_y для інших чотирьох електронів підберіть так, щоб вони відрізнялись від V_{y1} на кілька одиниць ($(1..2) \cdot 10^5$, м/с). Наприклад для першого варіанту $V_{x1}=0$, $V_{y1}=4 \cdot 10^5$ м/с, $V_{z1}=6 \cdot 10^6$ м/с. Тоді $V_{y2}=5 \cdot 10^5$ м/с, $V_{z1}=6 \cdot 10^6$ м/с і т.д. Головне, щоб на екрані траєкторії п’яти частинок можна було добре розрізнити. Для всіх частинок складова швидкості $V_x=0$, складова V_z для всіх п’яти частинок – однакова.

Змінюючи величину струму, досягніть фокусування електронів. Спостерігати у площині XU . Щоб точніше визначити момент фокусування, скористайтесь масштабом. Якщо траєкторії виходять за межі радіуса котушки R , змініть R так, щоб електрони знаходились в середині котушки.

Таблиця 12.1 – Вихідні данні

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$V_y \cdot 10^5$, м/с	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
$V_z \cdot 10^6$, м/с	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6
$V_x \cdot 10^5$, м/с	0											
$L \cdot 10^{-3}$, м	40											
n	10											
$l = n_1 n_2$	Число кроків розрахунку, n_1											
	Число невидимих кроків, n_2											

Початкове значення $I=1\text{А}$, кінцеве $I = I_{\phi}$ – струм фокусування – коли всі електрони зберуться в одну точку. Спостерігайте траєкторії електронів в різних площинах. За допомогою движка “Положение точек” при одному із значень $I < I_{\phi}$ пройдіться вздовж траєкторій. Через кінцеві точки “проведіть” пряму, приклавши лінійку до екрана.

5. Визначити значення струму I_{ϕ} . Обчислити значення e/m за формулою (12.10), де $V_{II} = V_z$. Результати занести в таблицю 12.2.

Таблиця 12.2 – Результати розрахунків

№	I_{ϕ} , А	$\langle I_{\phi} \rangle$, А	ΔI_{ϕ} , А	$e/m \cdot 10^{-11}$, Кл/кг	$\langle e/m \rangle \cdot 10^{-11}$, Кл/кг	$\Delta(e/m) \cdot 10^{-11}$, Кл/кг
1						
2						
3						
4						

6. Повторити п.4 і 5 ще тричі, збільшуючи V_{y1} на дві одиниці ($2 \cdot 10^5$, м/с), і визначити середнє значення e/m . Результати занести до таблиці 12.2.

7. Обчислити абсолютну похибку вимірювання I_{ϕ} та e/m . Результати занести до таблиці 12.2.

12.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, рисунки за п.2 і 3, результати вимірювань, зведені в таблиці, похибки вимірів, висновки

12.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке сила Лоренца, коли вона виникає?
2. Проаналізуйте, як змінюється сила Лоренца в залежності від взаємної орієнтації векторів \vec{V} та \vec{B} , коли вона максимальна, мінімальна?
3. Як буде рухатися заряджена частинка в однорідному магнітному полі, коли: $\vec{V} \perp \vec{B}$; $\vec{V} \parallel \vec{B}$; \vec{V} та \vec{B} направлені під кутом α ?
4. Яку установку використовують для визначення відношення заряду електрона до його маси e/m ?
5. Як відбувається фокусування електронів в магнітному полі?

13 ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА

13.1 Мета роботи

Дослідити рух зарядженої частинки у взаємно перпендикулярних електричному і магнітному полях та визначити питомий заряд електрона e/m .

13.2 Вказівки до організації самостійної роботи

В даній роботі відношення e/m для електрона визначається за допомогою методу, який отримав назву «метод магнетрона». Ця назва пов'язана з тим, що конфігурація електричного і магнітного полів, яка використовується в роботі нагадує конфігурацію полів в магнетронах – генераторах електромагнітних коливань в області надвисоких частот.

Рух електронів в цьому випадку відбувається в кільцевому просторі, розташованому між катодом і анодом двохелектродної електронної лампи. Нитка розжарювання (катод) розміщується вздовж осі циліндричного аноду

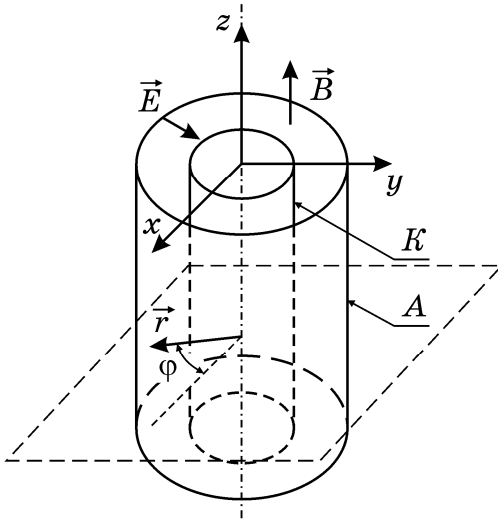


Рисунок 13.1

таким чином, що напруженість електричного поля напрямлена вздовж радіусу (рис.13.1). Лампа розміщується всередині соленоїда, який створює магнітне поле, вектор індукції якого паралельний осі катоду. Розглянемо траєкторію електронів, які рухаються під дією електричного і магнітного полів. Вважатимемо, що початкова (теплова) швидкість електрона, який вилетів із катода, дорівнює нулю.

Тоді за заданої орієнтації електричного і магнітного полів рух електрона відбуватиметься в площині, перпендикулярній магнітному полю. Скористаємось полярною системою координат. В цьому випадку положення точки визначається відстанню від осі циліндра r ,

полярним кутом φ і зсувом вздовж вісі Z . Розглянемо спочатку сили, які діють на електрон збоку електричного поля. Напруженість електричного поля у циліндричному конденсаторі має тільки радіальну компоненту E_r . Тому сила, яка діє на електрон в такому полі спрямована по радіусу, так що

$$F_r^{el} = eE_r, \quad F_z^{el} = F_\varphi^{el} = 0. \quad (13.1)$$

Розглянемо тепер сили, які діють на електрон з боку магнітного поля. Оскільки магнітне поле у нашому випадку спрямовано по вісі Z , для проекції сили на вісь Z маємо:

$$F_z^{mag} = 0. \quad (13.2)$$

Інші дві складові сили знайдемо за допомогою формули Лоренца:

$$F_\phi^{mag} = -eV_r B, \quad F_r^{mag} = eV_\phi B. \quad (13.3)$$

З простих кінематичних міркувань зрозуміло, що

$$V_r = r' = \frac{dr}{dt}, \quad V_\phi = r\phi' = r \frac{d\phi}{dt}. \quad (13.4)$$

Таким чином, ні магнітні, ні електричні сили, які діють на електрон, не мають складових уздовж вісі Z . Рух вздовж вісі Z є рівномірним. Рух в площині (r, ϕ) зручно описати за допомогою рівняння моментів:

$$\frac{dL}{dt} = M_z, \quad (13.5)$$

де L – момент імпульсу електрона відносно осі Z , який дорівнює, як відомо, $mr^2\phi'$. Величина M_z дорівнює rF_ϕ . За допомогою (13.1) і (13.3) знайдемо:

$$M_z = -erV_r B. \quad (13.6)$$

Після підстановки (13.4) і (13.6) у (13.5) знайдемо:

$$\frac{d}{dt} (mr^2\phi') = -eBr \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2} eB \frac{d(r^2)}{dt}. \quad (13.7)$$

Після інтегрування рівняння (13.7) і урахування негативного заряду електрона буде:

$$r^2\phi' + C = |e|Br^2 / 2m, \quad (13.8)$$

де C – стала інтегрування, яку треба визначити з початкових умов. На початку руху радіус r дорівнює радіусу катода і є досить малим. Права частина (13.8) і перший член лівої частини також дуже малі. З достатньою точністю можна припустити, що $C=0$. Тоді рівняння буде мати простий вигляд:

$$\phi' = |e|B / 2m. \quad (13.9)$$

Розглянемо тепер рух електрона вздовж радіусу. Робота сил електричного поля, яка виконується при переміщенні електрона від катода до точки з потенціалом U , дорівнює $A=eU$. Магнітне поле ніякої роботи не виконує. Знайдена робота повинна дорівнювати кінетичній енергії електрона (початковою швидкістю електрона ми знову нехтуємо):

$$eU = \frac{mV^2}{2} = \frac{m(V_r^2 + V_\phi^2)}{2}.$$

За допомогою (13.4) і (13.9) знаходимо:

$$eU = \frac{m}{2} \left[(r')^2 + \left(\frac{reB}{2m} \right)^2 \right]. \quad (13.10)$$

Рівняння (13.10) визначає радіальний рух електрона.

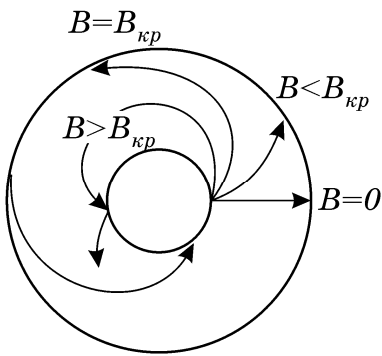


Рисунок 13.2

Далі розглядаємо траєкторію електронів, які вилетіли із катода при анодній напрузі U_a . За відсутності магнітного поля (рис. 13.2) електрони рухаються прямолінійно вздовж радіуса. В слабкому полі траєкторія трохи викривляється, але електрон досягає анода. При збільшенні магнітного поля траєкторія викривляється настільки, що стає дотичною до анода. Це поле називається критичним $B_{кр}$.

У випадку $B > B_{кр}$ електрон не потрапляє на анод і повертається до катода. Знайдемо величину $B_{кр}$ із співвідношення (13.8), звернувши увагу на те, що в цьому випадку радіальна швидкість електрона r' при $r = r_a$ перетвориться на нуль:

$$U_a = \frac{eB_{кр}^2 r_a^2}{8m} \quad (13.11)$$

звідки

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{B_{кр}^2 r_a^2}. \quad (13.12)$$

Із формули (13.12) знаходимо e/m , якщо при заданому U_a визначене таке значення магнітного поля (або навпаки, при заданому B таке значення U_a), при якому електрони перестають попадати на анод.

13.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 13.3. Програма базується на модифікованому алгоритмі Ейлера (додаток Б), який описує двохвимірний рух електрона в перехрещених магнітному та електричному полях. Програма має основну – “траєкторія” та допоміжну – “Схема та настройки” панелі. В режимі “траєкторія” програма дозволяє вивчити траєкторію руху електрона в широких межах; зміни анодної напруги, величини струму в соленоїді, початкової (теплової) швидкості електрона, з якою він вилітає із катода. Програма також дає можливість спостерігати рух будь-якого числа електронів, які вилітають із катода з різними початковими швидкостями, прослідкувати вплив на рух електрона (або електронів) просторової густини заряду, який

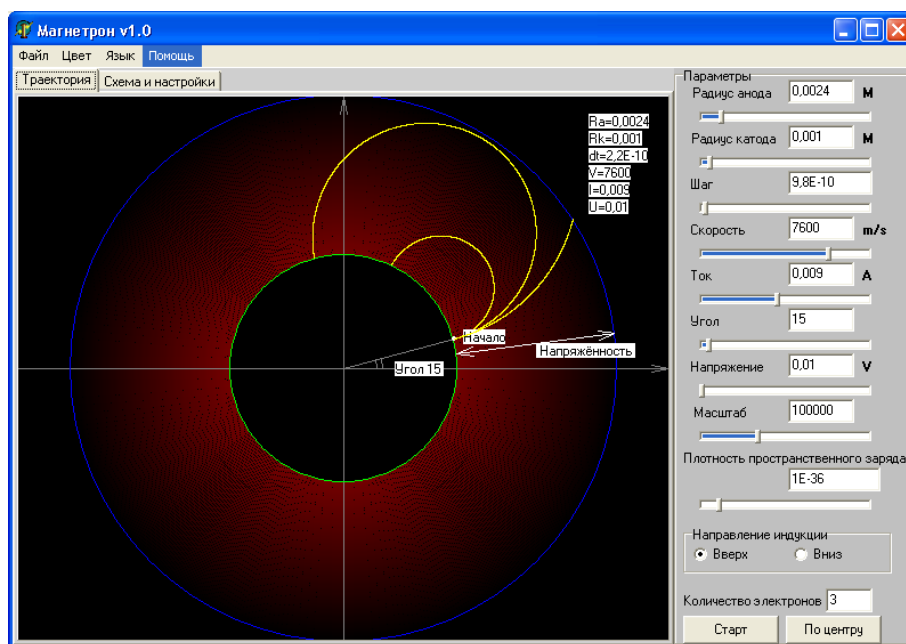


Рисунок 13.3

завжди існує в проміжку між анодом та катодом двохелектродної лампи. В процесі роботи з програмою є також можливість змінювати параметри електронної лампи – радіус катода, анода, регулювати точність обчислень, змінюючи крок переміщення електрона, змінювати масштаб зображення, його положення відносно центра екрана і, нарешті, вибрати приємні кольори зображення траєкторії, анода, катода та електронів.

13.4 Інструкція користувачу

1. Значення об'ємної густини заряду ρ_0 , індукції B (струм котушки), анодної напруги U_a покласти рівними нулю. Значення радіусу аноду r_a покласти 0,0024 м, радіусу катода – 0,001 м. Початкову швидкість V вибрати у відповідності з таблицею 13.1. Зарисувати траєкторію руху електрона.

2. Покладіть $V=0$, анодну напругу U_a згідно з таблицею. Збільшуючи індукцію (струм котушки) від нуля добийтесь, щоб електрон пролітав повз анод. Запишіть значення струму I_k (критичне значення).

3. Обчисліть критичне значення індукції B_k за формулою $B_k = 0,266 \cdot I_k$. Результат запишіть в таблицю 13.2.

Таблиця 13.1 – Вихідні данні

№ вар.	V , м/с	U_a , В	№ вар.	V , м/с	U_a , В
1	3000	2,5	7	750	1
2	2000	2	8	1250	2
3	1000	1,5	9	1750	1,5
4	500	1	10	2250	1
5	1500	1,2	11	3250	2
6	2500	1,8	12	2750	2,5

Таблиця 13.2 – Результати розрахунків

№	U_a , В	I , А	$e/m \cdot 10^{-11}$, Кл/кг	$\langle e/m \rangle \cdot 10^{-11}$, Кл/кг	$\Delta(e/m) \cdot 10^{-11}$, Кл/кг
1					
2					
3					
4					
5					

4. Повторіть дослід п.3, 4 п'ять разів, збільшуючи кожного разу U_a на $0,2V$. Отримані дані запишіть в таблицю 13.2.

5. Обчисліть відношення e/m за формулою (13.12), знайдіть його середнє значення и похибку. Похибку визначення U_a та I взяти 5%.

6. Встановіть швидкість електрона, анодну напругу згідно з таблицею. Чому при малих швидкостях траєкторія електрона утворює петлю при збільшенні величини індукції?

7. Змінюючи об'ємну густину заряду ρ_0 зробіть висновок, як ρ_0 впливає на величину B_k .

8. Встановіть початкову швидкість згідно з таблицею, задайте кількість електронів: $n=2, 3, 5$.

9. Зробіть висновок, як впливає на значення B_k початкова швидкість електронів (в залежності від значення n початкова швидкість 1-го електрона $V = \frac{V_0}{n}$, другого $\frac{2V_0}{n}$ і т.д.).

13.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, три замальовані траєкторії у вигляді прямої, кривої, петлі з поясненнями, чому вони мають такий вигляд, результати у вигляді таблиці, похибки вимірювань, висновки.

13.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що являє собою прилад магнетрон?
2. Які сили діють на електрон при його русі в лампі?
3. Запишіть формулу для сили Лоренца у векторному вигляді.
4. Проаналізуйте формулу для сили Лоренца . Коли сила буде максимальна, мінімальна?
5. Який напрямок буде мати сила Лоренца на рис.13.1?
6. Якими рівняннями описується рух електрона?
7. Який наближений метод розв'язку рівнянь руху використовується в даній роботі?

ЧАСТИНА IV. ОПТИКА

14 ВИВЧЕННЯ ЯВИЩА ІНТЕРФЕРЕНЦІЇ ВІД ДВОХ ЩІЛИН ТА СИСТЕМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЩІЛИН

14.1 Мета роботи

Ознайомитись з принципом Гюйгенса-Френеля та дослідити явище інтерференції світла і умови, за яких воно може спостерігатися.

14.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Дві хвилі, що мають однакову частоту ω , називаються когерентними, якщо різниця фаз δ коливань, які збуджуються цими хвилями в будь-якій точці, залишається незмінною з часом. Явище складання когерентних хвиль називають інтерференцією.

Уявімо собі дві вузькі паралельні щілини (кожна шириною b), розташовані одна від одної на відстані a і освітлені джерелом, що випромінює світло тільки однієї частоти. Якщо таке джерело розташоване симетрично відносно щілин, то щілини будуть когерентними вторинними джерелами світла з однаковою фазою.

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля, кожна точка, до якої дійшов хвильовий рух в даний момент часу, являє собою точкове джерело сферичної хвилі [2, 5]. Сукупність таких точок утворює поверхню, яка називається фронтом хвилі (фронт хвилі точкового джерела a – сферична поверхня, вздовж якої фаза $\varphi = \text{const}$).

Поки що будемо ігнорувати той факт, що щілини будуть діяти як лінійні джерела і будемо їх вважати точковими джерелами. На відстані L від щілин розташований екран на якому відтворюється результат складання інтенсивностей світла від обох джерел (рис.14.1).

Світло яке випромінюється точковим джерелом являє собою сферичну хвилю вигляду

$$E(r, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(kr - \omega t + \varphi). \quad (14.1)$$

Множник $1/r$ в (14.1) відображає той факт, що інтенсивність світла зменшується з відстанню від джерела. Згідно з принципом суперпозиції результуюче електричне поле в точці спостереження P (рис.1.1) дорівнює

$$E = E_1 + E_2 = \frac{A}{r_1} \cdot \cos(kr_1 - \omega t) + \frac{A}{r_2} \cdot \cos(kr_2 - \omega t). \quad (14.2)$$

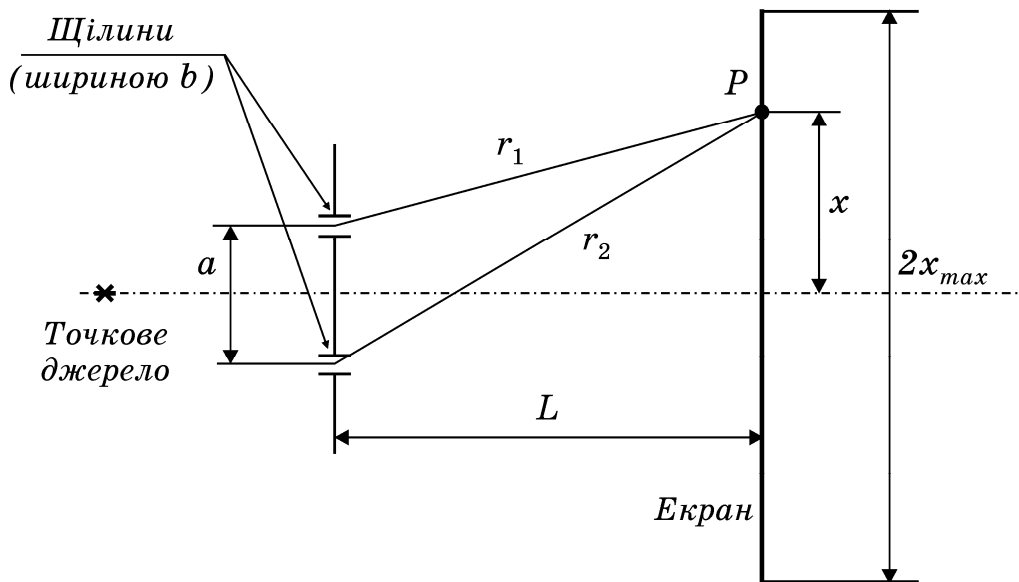


Рисунок 14.1

Інтенсивність, що спостерігається, пропорційна середньому з часом значенню $|E|^2$.

Для щілини скінченної ширини та для системи щілин кількість доданків у виразі (14.2) буде відповідати кількості елементарних вторинних точкових джерел.

Різниця фаз між двома хвилями від двох щілин (точкових джерел), зображених на рис.14.1, буде пропорційна різниці довжин оптичного ходу L_1, L_2

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \quad (14.3)$$

де λ_0 – довжина оптичної хвилі у вакуумі $L_1 = nr_1, L_2 = nr_2$;

Δ – оптична різниця ходу;

n – коефіцієнт заломлення середовища.

З формули (14.3) видно, що якщо оптична різниця ходу дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі

$$\Delta = \pm m \lambda_0, \quad (m = 0; 1; 2; \dots), \quad (14.4)$$

то різниця фаз δ буде кратною 2π і коливання, які збуджуються в точці P обома хвилями, будуть відбуватися з однаковою фазою (хвилі, які приходять – когерентні). Таким чином, (14.4) є умовою інтерференційного максимуму.

Якщо

$$\Delta = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda_0 \quad (m = 0; 1; 2; \dots), \quad (14.5)$$

то $\delta = \pm(2m + 1)\pi$, тобто коливання 1 та 2 будуть в протифазі. Таким чином, (14.5) є умовою інтерференційного мінімуму.

На екрані (рис.14.1) в результаті накладання двох когерентних хвиль буде спостерігатися інтерференційна картина у вигляді темних та світлих смуг.

Якщо вибрати співвідношення між розмірами та відстанями, позначеними на рис.14.1, так, що $x \ll L$, $a \ll L$, то можна отримати для оптичної різниці ходу вираз

$$\Delta = n \cdot \frac{xa}{L}. \quad (14.6)$$

Підставляючи (14.6) в (14.4), отримаємо значення координати x максимумів інтенсивності

$$x_{\max} = \pm m \cdot \frac{L}{a} \cdot \lambda_0 n = \pm m \cdot \frac{L}{a} \cdot \lambda \quad (m = 0; 1; 2; \dots). \quad (14.7)$$

Підставляючи (14.6) в (14.5), отримаємо координати мінімумів інтенсивності

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{L}{a} \cdot \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (14.8)$$

Назвемо відстань між двома сусідніми максимумами відстанню між інтерференційними смугами, а відстань між сусідніми мінімумами – шириною інтерференційної смуги Δx . З формул (14.7), (14.8) постає, що

$$\Delta x = \frac{L}{a} \cdot \lambda. \quad (14.9)$$

14.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 14.1. Програма видає на екрані дисплею інтерференційну картину, що зумовлена світлом, випущеним відповідною кількістю точкових джерел.

Основні особливості програм:

1) Програма видає залежність середньої з часом інтенсивності від відстані x , яка є координатою вздовж екрану (рис.14.1)

2) У випадку гармонічної хвилі вигляду (14.1) інтенсивність, що спостерігається, дорівнює $0,5A^2$, де множник 0,5 виникає за рахунок усереднювання за часом. Замість усереднювання за областю неперервних значень t усереднювання відбувається за кінечним набором значень $\omega t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (три значення ωt , тобто $n_y = 3$).

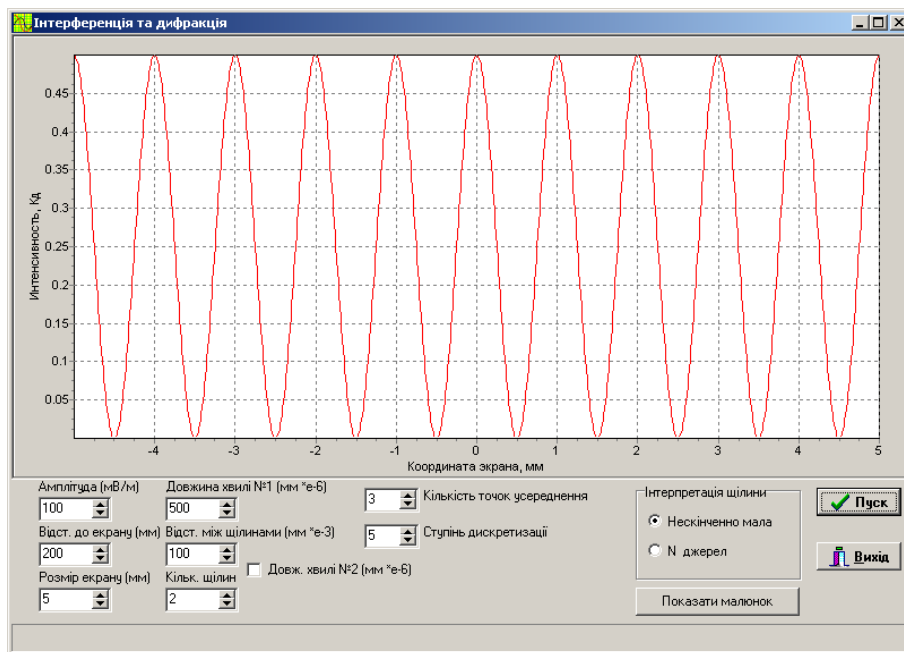


Рисунок 14.1

14.4 Інструкція користувачу

1. Задати ширину щілини “нескінченно мала”, кількість щілин $M=2$, $L=200$ мм, відстань між щілинами $a=0,1$ мм розмір екрану $x_{\max}=5$ мм та довжину хвилі $\lambda=5000\text{\AA}$. Отримати інтерференційну картину для усереднювання згідно з одним, двома значеннями ωt (усереднювання рівне 1 і 2), натискаючи кнопку «Пуск». Чому картина дуже спотворена?

2. Задати число усереднювання рівне 3. Прослідкувати, чи дуже зміниться картина, якщо число усереднювання взяти більше трьох? Проста процедура усереднювання, яка використовується в програмі, дає такий же результат, як і справжнє усереднювання, що відбувається в реальному експерименті.

3. Змінювати λ від 4000\AA до 6000\AA із сталим шагом. Для шести значень довжини хвилі виміряти та фіксувати відповідні значення координат мінімуму інтенсивності x_{\min} . Побудувати графік залежності x_{\min} від λ . Порівняйте отримані результати з формулою (14.8). Зробіть висновок, як залежить x_{\min} від λ .

4. Зафіксувати λ (згідно з таблицею 14.1 поданою нижче). Змінювати L від 1 до 100 мм. На початку, в середині інтервалу та в кінці заміряти ширину інтерференційної смуги Δx . Як залежить положення максимуму інтенсивності від L , якщо $L \gg a$? Підрахуйте (тричі) ширину інтерференційної смуги за формулою

(14.9). При якому значенні співвідношення параметрів $\frac{b^2}{L\lambda}$ справедлива формула (14.9)?

Таблиця 14.1 – Вихідні данні

№ вар.	$\lambda \cdot 10^{-6}$, мм	$a \cdot 10^{-3}$, мм	$b \cdot 10^{-3}$, мм	№ вар.	$\lambda \cdot 10^{-6}$, мм	$a \cdot 10^{-3}$, мм	$b \cdot 10^{-3}$, мм
1	400	50	20	7	600	50	20
2	400	100	40	8	600	100	40
3	400	150	60	9	600	150	60
4	500	50	20	10	700	5	20
5	500	10	40	11	700	100	40
6	500	150	60	12	700	150	60

5. Встановити ($L=100$ мм, $M=1$, a , λ – згідно з таблицею) ширину щілини “нескінченно мала”. Змінюючи число щілин $M=1, 2, 3, 4$, отримати та зарисувати графіки. Визначити значення інтенсивності. Підрахувати число додаткових максимумів, які виникають в кожному з цих випадків (не забувайте підбирати зручні розміри екрана x_{\max}).

14.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, у вигляді таблиці, графік залежності x_{\min} від λ , висновки.

14.6 Контрольні запитання і завдання

1. Які хвилі називаються когерентними? В чому полягає явище інтерференції?
2. Що таке фронт хвилі?
3. Як залежить інтенсивність від числа щілин?
4. Як залежить число додаткових максимумів та мінімумів (які лежать між основними максимумами) від числа щілин?
5. Що таке оптичний хід променя, оптична різниця ходу?
6. Запишіть умову інтерференційного максимуму і мінімуму для двох когерентних хвиль.
7. Що являє собою інтерференційна картина для двох щілин?
8. Що розуміють під шириною інтерференційної смуги, за якою формулою вона визначається?
9. Що таке інтенсивність світла, якій величині вона пропорційна?

15 ВИВЧЕННЯ ДИФРАКЦІЇ СВІТЛА НА ОДНІЙ ТА СИСТЕМІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЩІЛИН

15.1. Мета роботи

Базуючись на принципі Гюйгенса-Френеля, дослідити основні властивості явища дифракції світла на одній, двох та системі паралельних щілин, що утворюють дифракційну решітку.

15.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Явище дифракції полягає у відхиленні від прямолінійного розповсюдження світла, що призводить до його проникнення в область геометричної тіні. Явище дифракції завжди супроводжується інтерференцією променів, відхилених від прямолінійного розповсюдження.

В теорії дифракції розрізняють в залежності від співвідношення між розмірами джерела світла b , відстані від джерела до екрану, на якому спостерігається дифракційна картина L , довжини хвилі λ такі різновиди дифракції (рис.15.1) [5]:

$$\frac{b^2}{L\lambda} \begin{cases} \ll 1 - \text{дифракція Фраунгофера,} \\ \approx 1 - \text{дифракція Френеля,} \\ \gg 1 - \text{геометрична оптика.} \end{cases}$$

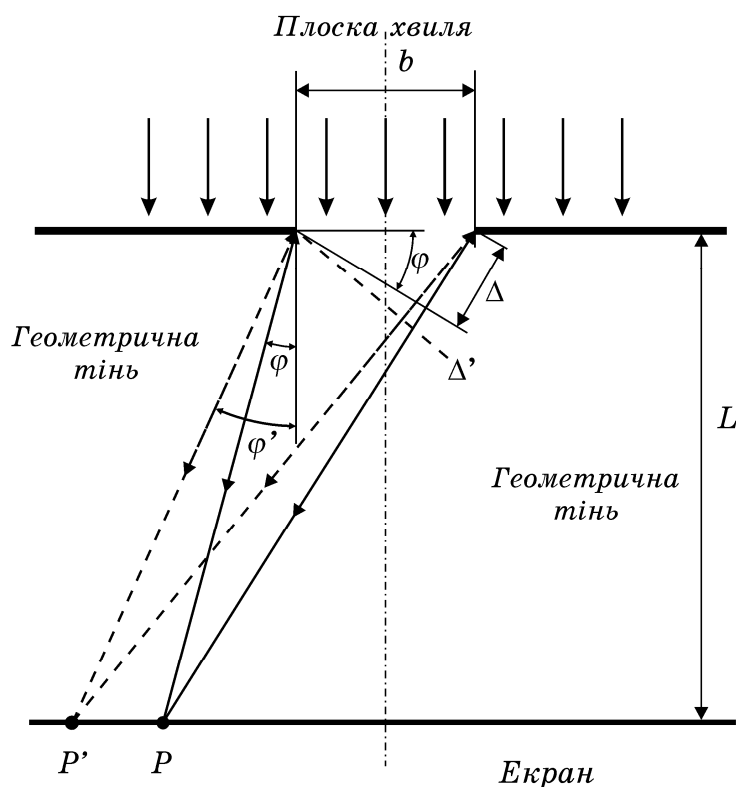


Рисунок 15.1

Нехай на нескінченно довгу широкую щілину падає плоска світлова хвиля (рис.15.1). Оскільки щілина нескінченно довга (в напрямі, перпендикулярному площині рисунка) картина, яка буде спостерігатися в будь-якій площині, що перпендикулярна щілині, буде однаковою.

Внаслідок дифракції промені будуть відхилятися від первинного напрямку. Кут відхилення променя ϕ (рис.15.1) носить назву кута дифракції. Розглянемо пучок променів, який приходить в таку точку P (рис.15.1), що різниця ходу Δ між крайніми

променями буде дорівнювати довжині хвилі $\Delta = \lambda = 2 \frac{\lambda}{2}$.

Тоді весь пучок можна розділити на такі дві рівні зони, котрі називають зонами Френеля, для яких різниця ходу між кожним променем з першої зони і відповідним променем другої зони буде рівною $\lambda/2$ [2, 5]. В результаті інтерференції такі пучки променів взаємно загасяться. В результаті, через точку P буде проходити темна смуга – дифракційний мінімум. Можна знайти таку точку P' , для якої різниця ходу Δ' між крайніми променями буде дорівнювати $\Delta' = \frac{3}{2}\lambda$. Тоді весь пучок можна розділити на три зони Френеля: перша та друга зони будуть гасити одна одну, а третя залишиться не загашеною і дасть дифракційний максимум. Переходячи до узагальнення, можна сказати, що пучки променів, які дифрагують під кутами, що відповідають парному числу зон Френеля, утворюють на екрані дифракційні мінімуми, а пучки, які дифрагують під кутами, що відповідають непарному числу зон Френеля, утворюють дифракційні максимуми.

З рисунка 15.1 видно, що

$$\Delta = b \cdot \sin \varphi. \quad (15.1)$$

Підставляючи (15.1) в (14.4) та відповідно в (14.5) можна отримати умови максимуму

$$\sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2b}, \quad (15.2)$$

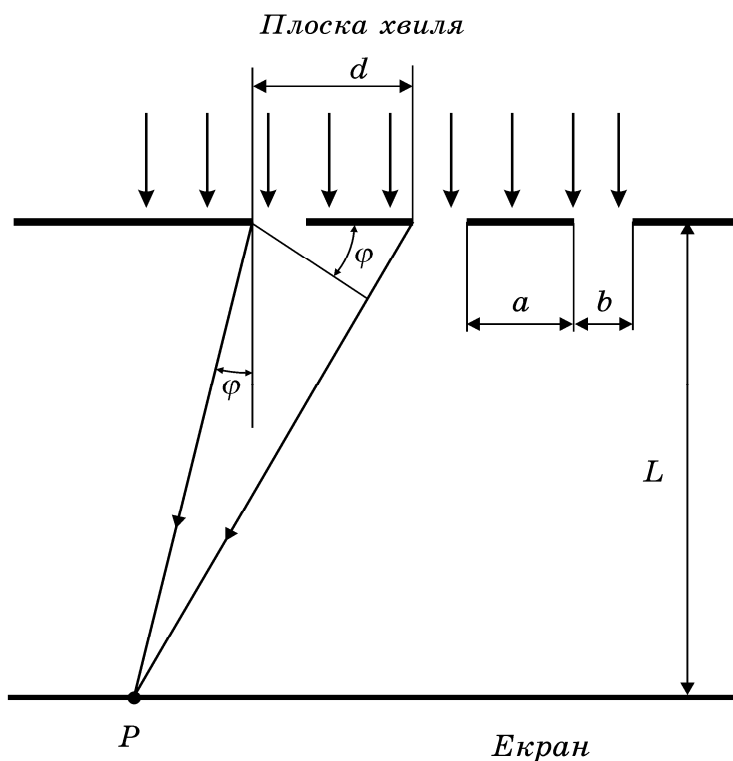


Рисунок 15.2

та мінімуму

$$\sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2b}. \quad (15.3)$$

Розглянемо тепер дифракцію від двох щілин. Нехай пучок паралельних монохроматичних променів падає перпендикулярно екрану з щілинами, ширина яких дорівнює b , а відстань між ними d (рис.15.2). Розглянемо промені, які падають, наприклад, на ліві краї обох щілин. З рисунка видно, що різниця ходу $\Delta = d \cdot \sin \varphi$.

Результат інтерференції в точці P буде залежати від Δ . Якщо $\Delta = m\lambda$, то умова

$$d \cdot \sin \varphi = m\lambda \quad (15.4)$$

буде умовою максимуму ($m=0, 1, 2, \dots$). Причому цей результат залишається незмінним для будь-якого числа щілин. При великому числі щілин їх послідовність створює дифракційну решітку.

Дифракційна решітка – важливий спектральний прибор, за допомогою якого визначають довжину хвилі світла. Основними його характеристиками є дисперсія та розрізнявальна сила.

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}, \quad (15.5)$$

де кут $\Delta\varphi$ – кутова відстань між спектральними лініями, довжини хвиль яких відрізняються на $\Delta\lambda$.

Розрізнявальною силою спектрального прибору називають величину

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (15.6)$$

де $\Delta\lambda$ – мінімальна різниця довжини хвиль двох спектральних ліній, які ще можна розрізнити.

Розрізнявальна сила решітки R визначається формулою

$$R = mN, \quad (15.7)$$

де N – число щілин, m – порядок дифракційного максимуму.

Кутова дисперсія решітки D (для невеликих значень m) дорівнює

$$D \approx \frac{m}{c+b}, \quad (15.8)$$

де c – ширина непрозорої смуги

15.3 Опис комп'ютерної програми.

Обчислення виконуються за програмою, яка використовується в роботі 14. В даній роботі програма рисує на екрані залежність інтенсивності світла від координати екрану для щілини кінцевої ширини та системи з будь-якою кількістю паралельних щілин, що утворюють дифракційну решітку, в широкому діапазоні зміни параметрів: ширини щілин, відстані між щілинами, відстані

від площини, в якій прорізані щілини, до екрану спостереження, довжини хвилі. Розрахунок дифракційної картини можна виконувати відразу для двох довжин хвиль, що дозволяє моделювати явище дисперсії та обчислити розрізнявальну силу і кутову дисперсію решітки.

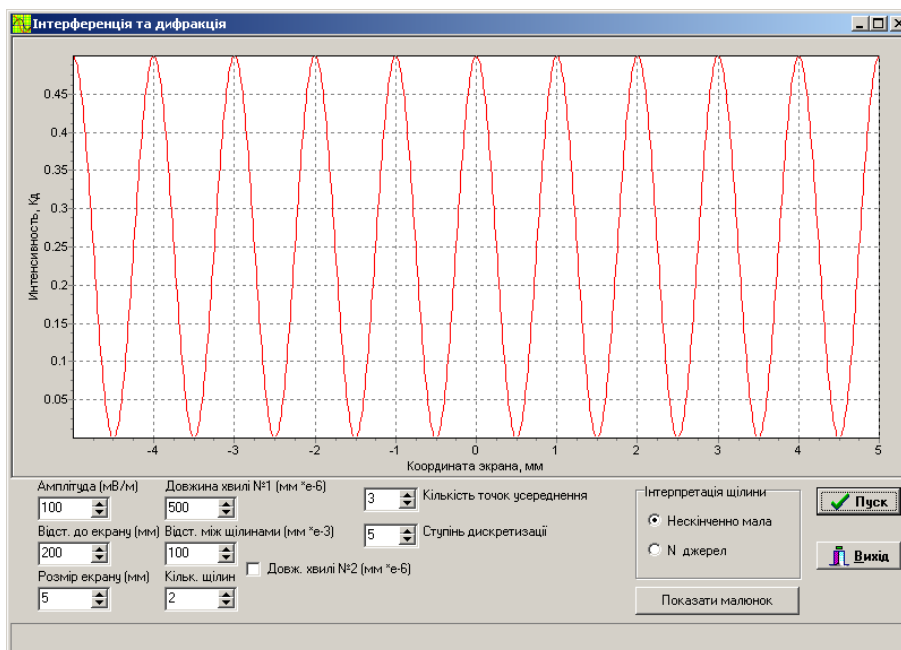


Рисунок 15.3

15.4 Інструкція користувачу

1. Отримати дифракційну картину для світла з довжиною хвилі λ (за таблицею 15.1) від однієї щілини $M=1$ шириною b (взяти значення b з таблиці 15.1), $b=50 \cdot 10^{-3}$ мм, розбиваючи її на $N=20$ точкових джерел. Встановить $L=200$ мм, число $n_y = 3$. Записати значення інтенсивності та ширину центрального максимуму для трьох значень b .

Таблиця 15.1 – Вихідні данні

№ вар.	$\lambda, 10^{-6}$ мм	$a, 10^{-3}$ мм	$b, 10^{-3}$ мм	№ вар.	$\lambda, 10^{-6}$ мм	$a, 10^{-3}$ мм	$b, 10^{-3}$ мм
1	400	50	20	7	600	50	20
2	400	100	40	8	600	100	40
3	400	150	60	9	600	150	60
4	500	50	20	10	700	5	20
5	500	10	40	11	700	100	40
6	500	150	60	12	700	150	60

3. Отримати дифракційну картину для $L=1$ мм та $L=100$ мм (інші величини взяти з таблиці 15.1).

4. Задати значення λ_1 згідно з таблицею 15.1, $b=20 \cdot 10^{-3}$ мм, $L=200$ мм, $M=3$, $m=2$. Обчислити кут дифракції (кут, під яким видно із центра дифракційної системи максимум m -го порядку (рис 15.1)). Для цього визначити відстань x_m від центра екрану до центра m -го максимуму; тоді $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_m}{L}$. Порівняйте значення φ , отримане за цим розрахунком, із значенням φ , обчисленим за формулою (15.4).

5. Ввімкнути другу довжину хвилі λ_2 . В цьому випадку кожна щілина є джерелом випромінювання двох хвиль з довжинами λ_1 та λ_2 . Значення параметрів: λ_1 – згідно з таблицею 15.1, $\lambda_2=550 \cdot 10^{-6}$ мм, $L=200$ мм, відстань між щілинами $a=100 \cdot 10^{-3}$ мм, ширина щілини $b=20 \cdot 10^{-3}$ мм. Кількість щілин $N=4$. Переконайтесь, що максимум третього порядку $m=3$ (або другого порядку) роздвоєний. Змінюючи λ_2 , дійти до такого значення λ_2 , щоб при найменшій різниці $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ максимум третього (або другого) порядку ще був роздвоєний, тобто при цьому ще можна розрізнити дві хвилі з довжинами λ_1 та λ_2 . Записати координати x_1 , x_2 положення максимумів для λ_1 та λ_2 .

6. Обчислити розрізнявальну силу як $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Порівняти отримане значення R з величиною R , визначеною за теоретичною формулою (15.5), справедливою тільки для решітки. Обчислити кутову дисперсію за формулою $D_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}$, де кут φ можна визначити з отриманих даних:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{x_2}{L}.$$

Розрахувати D_k за теоретичною формулою та порівняти із значенням, отриманим за допомогою дифракційної картини.

7. Збільшити (або зменшити) кількість щілин. Повторити розрахунки R та D . Зробити висновок: як залежить розрізнявальна здатність та кутова дисперсія решітки від кількості щілин.

15.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати розрахунків ширини b_i , кута дифракції φ , розрізнявальної сили R , кутової дисперсії решітки D_k , та їх порівняння з відповідними величинами розрахованими за формулами (15.4), (15.5), (15.6), висновки.

15.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає явище дифракції?
2. Яким явищем завжди супроводжується явище дифракції?
3. Які різновиди дифракції розрізняють в залежності від співвідношення таких параметрів як розміри джерела світла, довжина хвилі та відстані між джерелами та точкою спостереження?
4. Що таке зони Френеля?
5. Як, виходячи з поняття зон Френзеля, можна сформулювати загальне правило щодо максимуму та мінімуму для пучків променів, які приходять в одну точку від однієї широкої щілини?
6. Запишіть умову максимуму для двох щілин. Чи зміниться вона для $N > 2$?
7. Що являє собою дифракційна решітка?
8. Запишіть формулою визначається розрізнявальної сили решітки.
9. Як визначається кутова дисперсія решітки?
10. Що таке кут дифракції?

ЧАСТИНА V. АТОМНА ФІЗИКА

16 ВИВЧЕННЯ РУХУ МІКРОЧАСТИНКИ В ПОТЕНЦІАЛЬНІЙ ЯМІ СКІНЧЕНОЇ ГЛИБИНИ

16.1 Мета роботи

Дослідити рух мікročастинки в потенціальній ямі кінцевої глибини, визначити власні значення енергії, власні хвильові функції мікročастинки та ймовірність її знаходження в будь-якому інтервалі значень координат в потенційній ямі та за її межами. Вивчити вплив обмеженості та асиметрії потенціальних бар'єрів на зазначені величини.

16.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Потенціальна яма – це обмежена область простору, що визначається фізичною природою взаємодії частинок, в якій потенціальна енергія частинки менша ніж за її межами.(рис.16.1)

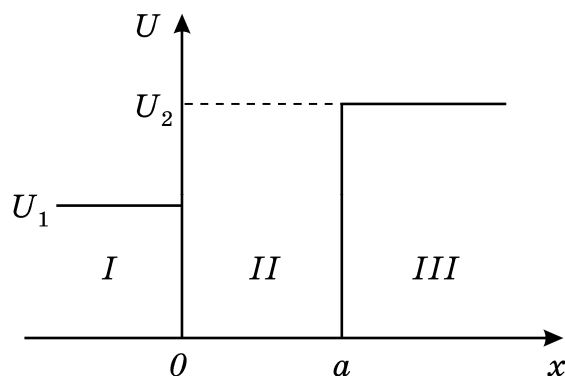


Рисунок 16.1

Одновимірний рух частинки в стаціонарному силовому полі, яке характеризується потенціальною енергією U визначається стаціонарним рівнянням Шредінгера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - U)\psi = 0, \quad (16.1)$$

де m – маса частинки;

E – повна енергія частинки;

$\psi = \psi(x)$ – псі-функція;

\hbar – стала Планка, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Для несиметричної одновимірної ями (рис.16.1) в області I ($x \leq 0$) в рівнянні (16.1) необхідно покласти $U = U_1$, в III ($x \geq a$) $U = U_2$, та в області II ($0 \leq x \leq a$), для вільного руху $U=0$.

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E, \quad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (U_1 - E), \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_2 - E). \quad (16.2)$$

Вводячи позначення (для різних областей), отримаємо з рівняння (16.1) відповідно для областей I, II, III рівняння:

$$x < 0 : \quad \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad (16.3)$$

$$0 \leq x \leq a : \quad \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + k^2 \psi_2 = 0, \quad (16.4)$$

$$x \geq a : \quad \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + k_2^2 \psi_3 = 0. \quad (16.5)$$

Розв'язок рівнянь (16.3), (16.4), (16.5) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1 e^{ik_1 x} + C_3 e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2 = C \sin(kx + \delta), \\ \psi_3 = C_2 e^{-ik_2 x} + C_4 e^{ik_2 x} \end{cases}. \quad (16.6)$$

Всередині ями ψ -функція змінюється періодично (осцилює). За її межами, коли $x \rightarrow \pm\infty$, щоб задовольнити умовам на нескінченності, необхідно покласти $C_3 = C_4 = 0$, бо нас цікавить випадок, коли частинка буде рухатись в межах ями. А це буде тоді, коли $U_1 > E$, $U_2 > E$. За цих умов величини k_1 , k_2 будуть уявними: $k_1 = iP_1$, $k_2 = iP_2$, і експоненти при коефіцієнтах наближатися до нескінченності ($e^{-k_1 x} \rightarrow \infty$, коли $x \rightarrow -\infty$; $e^{k_2 x} \rightarrow \infty$, коли $x \rightarrow \infty$).

На межах ями ($x=0$, $x=a$) ψ -функції та їх похідні повинні задовольняти граничним умовам

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi'_1(0) = \psi'_2(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi'_2(a) = \psi'_3(a) \end{cases}, \quad (16.7)$$

Якщо тепер підставити вирази ψ -функцій (16.6), (поклавши в них $C_3=C_4=0$) в граничні умови (16.7), можна отримати однорідну систему рівнянь, сумісний розв'язок якої вресітї рещт приведе до трансцендентного рівняння відносно хвильового числа k :

$$ka = n\pi - \arcsin \frac{k\pi}{\sqrt{2mU_1}} - \arcsin \frac{k\pi}{\sqrt{2mU_2}}, \quad \text{де } n=1,2,3,\dots, \quad (16.8)$$

а значення \arcsin беруться в сенсі головного значення. Корені рівняння (16.8) визначають дискретні рівні енергії $E_n = \frac{k_n^2 \hbar^2}{2m}$.

Для кожного значення n є один єдиний корінь, значення n нумерують корені в порядку їх зростання

Обчислення коренів здійснюється за методом Ньютона, який полягає ось у чому. Нехай y_0 є наближене значення кореня рівняння $F(y) = 0$, тоді, як більш точно наближене значення є

$$y_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)}, \quad y_2 = y_1 - \frac{F(y_1)}{F'(y_1)} \text{ і т.д.}$$

Як нульове наближення вибираємо значення в рівнянні (16.8) $(ka)_0 = n\pi$, що відповідає кореням рівняння для ями з нескінченно високими бар'єрами.

16.3 Опис комп'ютерної програми

Інтерфейс програми зображено на рисунку 16.2. Програма видає на екран монітора: схему енергетичних рівнів електрона в несиметричній ямі, тобто в ямі, обмеженій потенціальними стінками різної "висоти" $U_1 \neq U_2$ (в частинно му випадку в симетричній ямі $U_1 = U_2$); графік ψ -функції, квадрата модуля ψ -функції $|\psi|^2$, ймовірність P знаходження мікрочастинки в будь-якій області всередині ями та за її межами. Отримати відповідну інформацію можна, натиснувши мишкою на кнопки: ψ , $|\psi|^2$, \sqcap або P . У відповідних вікнах можна змінювати значення U_1 та U_2 , ширини ями a , маси частинки m . За допомогою курсору можна встановлювати дві мітки в вибраних точках і обчислювати ймовірність P знаходження частинки в області між цими точками. Змінюючи номер n ψ -функції можна отримувати графіки ψ , $|\psi|^2$ та значення P для будь-якого значення n від 1 до n_{\max} . Програма дає можливість проводити обчислення в широких межах зміни параметрів.

16.4 Інструкція користувачу

1. Задати значення a , $U_1 = U_2 = U'_1$ згідно з таблицею. Отримати на екрані схему рівнів енергії (синім кольором позначені рівні E_n для ями з кінцевими бар'єрами, коричневим рівні E'_n для ями з нескінченно високими бар'єрами). Збільшуючи U вдвічі, потім втричі, прослідкувати за зміною різниці $\Delta E_n = E_n - E'_n$. Зробити висновок.

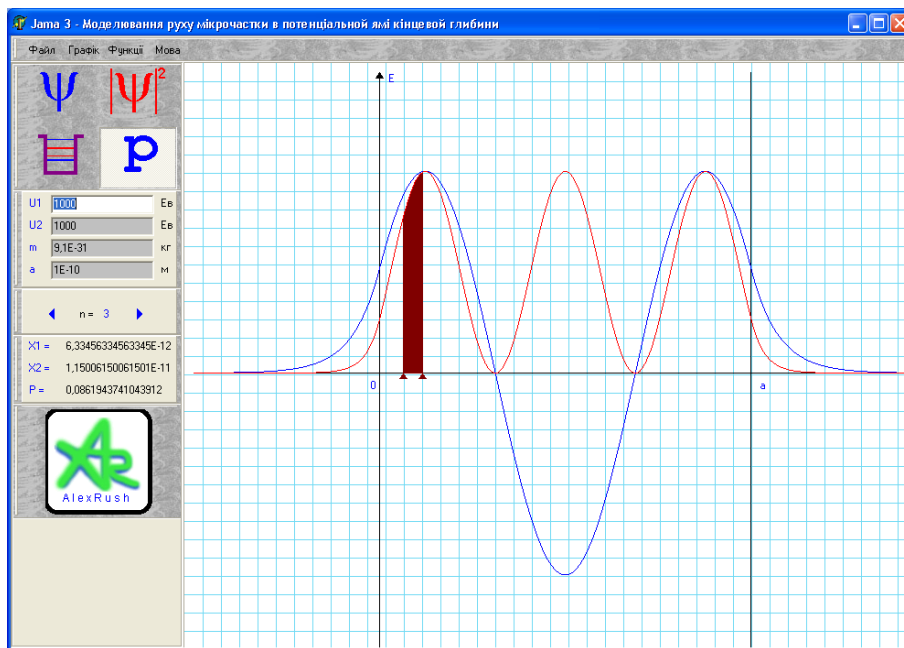


Рисунок 16.2

2. Для табличного значення $U_1 = U_2 = U'_1$ отримати на екрані графіки ψ_n , $|\psi_n|^2$ для значень $n = 1, 2, 3$. Замалювати ці графіки. Визначити формулу залежності числа вузлів (нулів) $|\psi_n|^2$ від номера n .

3. Збільшуючи U вдвічі, потім в три рази (і більше) визначити ймовірність знаходження частинки в межах ями для $n = 1, 2, 3$.

4. Задати значення $U_1 = U'_1$, $U_2 = U'_2$ згідно з таблицею. Отримати та замалювати графіки функцій ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , $|\psi_1|^2$, $|\psi_2|^2$, $|\psi_3|^2$. Обчислити ймовірність знаходження частинки зліва та справа за межами ями. Змінюючи висоту одного з бар'єрів вдвічі, потім втричі, повторити обчислення ймовірностей для $n = 1, 2, 3$. Зробити висновок, як впливає асиметрія ями на ймовірність проникнення частинки в бар'єр.

5. Встановити висоту бар'єрів $U_1 = U_2 = U'_1$ згідно з таблицею. Змінюючи масу частинки ($m = 10m_e, 10^2m_e, 10^3m_e$), прослідкувати, як вона впливає на значення енергії E_n та різницю сусідніх значень $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$.

6. Повторити завдання ($n=5$), відновивши $m = m_e$, змінюючи a в два, а потім у три рази.

16.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати обчислення значень енергії E_n , ΔE_n , ймовірностей (у вигляді таблиці), замальовані графіки ψ , $|\psi|^2$, та висновки за пунктами роботи.

Таблиця 16.1 – Вихідні данні

№ вар.	$U'_1,$ еВ	$a \cdot 10^{-10},$ м	$U'_2,$ еВ	№ вар.	$U'_1,$ еВ	$a \cdot 10^{-10},$ м	$U'_2,$ еВ
1	100	1	300	8	400	3	700
2	200	2	400	9	400	1	800
3	200	1	700	10	200	4	600
4	300	2	500	11	300	4	800
5	200	3	400	12	400	5	900
6	400	2	900	13	450	3	800
7	300	3	500	14	500	4	700

16.6 Контрольні запитання і завдання

1. Запишіть одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера, яке описує рух мікрочастинки в потенціальному полі.
2. Отримайте одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера для вільної частинки з рівняння (16.1).
3. Як запишеться стала розповсюдження k в різних областях простору, та який вигляд відповідно прийме рівняння Шредінгера в цих областях?
4. Який вигляд має розв'язок (ψ -функція) в різних областях?
5. Як будуть вести себе ψ_1, ψ_2, ψ_3 в ямі та за її межами у випадку, коли енергія частинки $E < U_1, E < U_2^2$, наростати, загасати, осцилювати?
6. Яким граничним умовам повинна задовольняти ψ -функція та її похідна на межах ями?
7. Якого вигляду рівняння отримуємо для обчислення власних значень сталої розповсюдження k ?
8. Який метод застосовується для розв'язання трансцендентного рівняння?
9. Як із рівняння (16.8) отримати відповідне рівняння для ями з нескінченно високими стінками?
10. Дайте визначення потенціальної ями.
11. Який фізичний зміст має ψ -функція (згідно з Бором)?

17 ПРОХОДЖЕННЯ МІКРОЧАСТИНКИ ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦІАЛЬНИЙ БАР'ЄР

17.1 Мета роботи

Дослідити явище проходження мікрочастинки через потенціальний бар'єр та отримати залежність ймовірності проходження мікрочастинки через такий бар'єр від його висоти, ширини і форми.

17.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Нехай частинка, що рухається зі сторони від'ємних значень x , зустрічає бар'єр висотою U_0 і шириною l (рис.17.1). Згідно квантової механіки, існує ймовірність того, що частинка відіб'ється від бар'єра при $E < U_0$. Існує також певна ймовірність того, що частинка проникне через бар'єр, навіть якщо її енергія $E < U_0$ (тунельний ефект). Розглянемо цей випадок. Рівняння Шредінгера для областей I і III має вигляд [3, 6]:

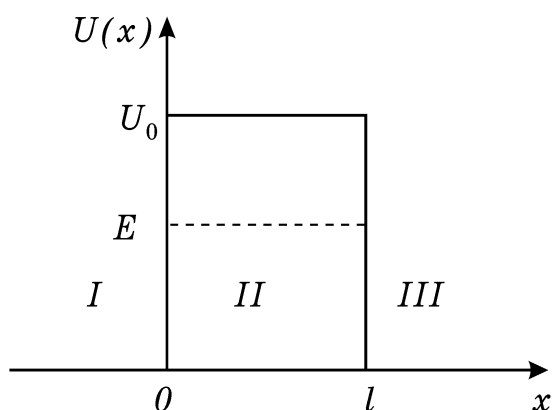


Рисунок 17.1

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + \alpha^2 \psi_{1,3} = 0, \quad (17.1)$$

а для області II, причому $E - U_0 < 0$:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \beta^2 \psi_2 = 0, \quad (17.2)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad \beta = \frac{1}{\hbar} \cdot \sqrt{2m(U_0 - E)} = \alpha \cdot \sqrt{(U_0 / E) - 1} \quad (17.3)$$

Загальний розв'язок рівняння (17.1) має вигляд

$$\psi_1 = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \quad \text{для області I,} \quad (17.4)$$

$$\psi_2 = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \quad \text{для області II,} \quad (17.5)$$

$$\psi_3 = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x} \quad \text{для області III.} \quad (17.6)$$

Слід відзначити, що вираз вигляду $e^{i\alpha x}$ відповідає хвилі, що розповсюджується в додатному напрямку осі x , а вигляду $e^{-i\alpha x}$ – хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку.

В області III є лише хвиля, що пройшла через бар'єр і розповсюджується зліва направо (рис.17.1). Тому коефіцієнт B_3 у виразі (17.5) для ψ_3 слід брати рівним нулю.

Задовольняючи граничним умовам безперервності ψ -функції, а також безперервності її похідної

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \psi_2(0), \quad \psi_2(l) = \psi_3(l), \\ \psi'_1(0) &= \psi'_2(0), \quad \psi'_2(l) = \psi'_3(l),\end{aligned}\tag{17.7}$$

отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 :

$$\begin{aligned}1 + b_1 &= a_2 + b_2, \quad a_2 e^{\beta l} + b_2 e^{-\beta l} = a_3 e^{i\alpha l} \\ i - ib_1 &= na_2 - nb_2, \quad na_2 e^{\beta l} - nb_2 e^{-\beta l} = ia_3 e^{i\alpha l},\end{aligned}\tag{17.8}$$

$$\text{де } b_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad b_2 = \frac{B_2}{A_2}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1}, \quad n = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}.$$

Відношення квадратів модулів амплітуд відбитої і падаючої хвиль

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |b_1|^2\tag{17.9}$$

визначає ймовірність відбиття частинки від бар'єра і називається коефіцієнтом відбиття.

Відношення квадратів модулів амплітуд пройденої і падаючої хвиль:

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = |a_3|^2\tag{17.10}$$

визначає ймовірність проходження частинки через бар'єр і називається коефіцієнтом проходження. Коефіцієнти R і D зв'язані співвідношенням

$$R + D = 1.\tag{17.11}$$

Розв'язуючи систему (17.8), отримаємо вирази для коефіцієнтів b_1, a_3 :

$$b_1 = \frac{2i[(n+1)e^{-\beta l} + (n-1)e^{\beta l}]}{(n+1)^2 e^{-\beta l} - (n-1)^2 e^{\beta l}} - 1, \quad (17.12)$$

$$a_3 = i \frac{4ne^{-\alpha l}}{(n+1)^2 e^{-\beta l} - (n-1)^2 e^{\beta l}},$$

через які визначаються коефіцієнти проходження та відбивання (17.9), (17.10) (для спрощення обчислень вибираємо коефіцієнт $A_1=1$).

Величина βl , як правило, буває набагато більше одиниці. Якщо в формулах (17.12) покласти $\beta l \gg 1$, то для коефіцієнта проходження можна отримати наближений вираз

$$D \approx e^{-2\beta l} = \exp\left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right]. \quad (17.13)$$

Із отриманого виразу (17.13) випливає, що ймовірність проходження залежить від ширини бар'єра l , від співвідношення між енергією частинки E і висотою потенціального бар'єра та від маси частинки m .

Для точних виразів для коефіцієнтів відбивання R та проходження D складена програма обчислень, яка дозволяє вивчити їх залежність від параметрів l , E , U_0 та m .

17.3 Опис комп'ютерної програми

Інтерфейс програми зображено на рисунках 17.2 та 17.3. В режимі “Прямокутний бар'єр” програма обчислює точні вирази коефіцієнтів ψ -функцій (17.9)...(17.12) в трьох областях, на які ділить простір прямокутний бар'єр (рис.17.1), коефіцієнти прозорості D та відбивання R мікрочастинки, вимальовує графік модуля ψ -функції, та її реальну частину. Програма рисує графіки залежності коефіцієнта відбивання та коефіцієнта прозорості від відношення енергії частинки до висоти бар'єра E/U_0 при сталих значеннях ширини бар'єра та маси частинки. Програма також дає можливість провести обчислення коефіцієнта D за наближеною формулою (17.13) та встановити її область застосування.

17.4 Інструкція користувачу

1. Ознайомитись із змістом “Help” (клавіша F1).
2. Для значення маси $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, значення ширини бар'єра $l = 10^{-10}$ м, та значення U_0 взятого з таблиці, отримати на екрані графіки ψ та $|\psi|^2$, замальовати. Для порівняння зробити те ж саме для m , U_0 та l взятих з таблиці варіантів (графіки не замальовувати).

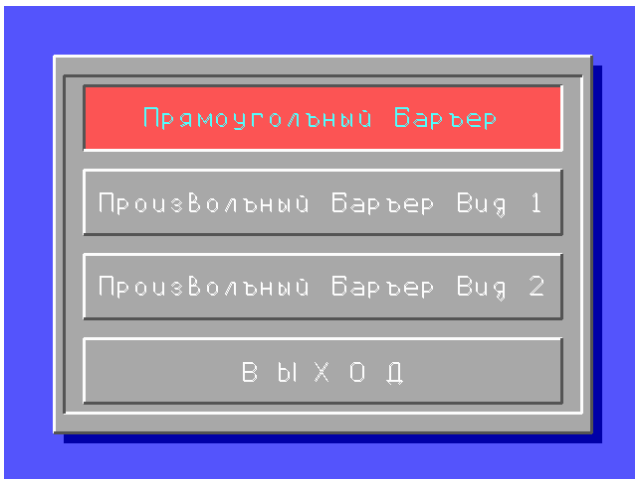


Рисунок 17.2

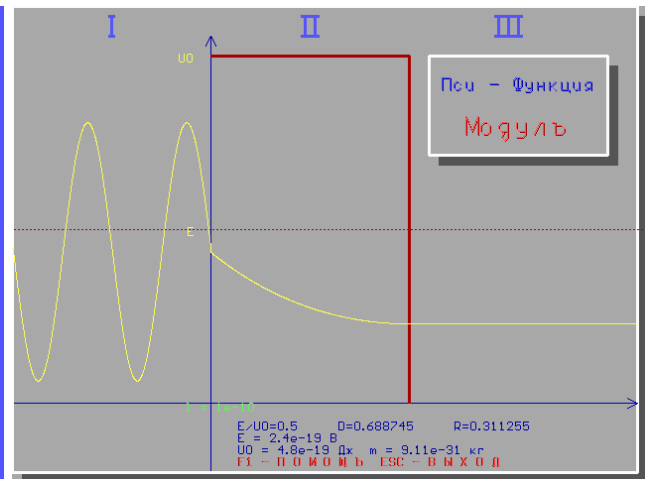


Рисунок 17.3

3. Для величин m , U_0 , l взятих з таблиці, отримати на екрані графіки коефіцієнтів D та R в залежності від відношення E/U_0 . Повторити розрахунки ще для шести значень l , змінюючи l кожного разу на $\Delta l = 0,2 \cdot 10^{-12}$ м. Замалювати всі сім графіків $D(E/U_0)$ на одному малюнку.

4. Для двох значень відношення $E/U_0 = 0,5; 0,8$ побудувати графіки залежності D від ширини бар'єра l , користуючись результатами п.3.

5. Отримати на екрані графіки коефіцієнтів D та R в залежності від E/U_0 для семи значень маси (значення маси для всіх варіантів однакові: від $1,9$ до $30 \cdot 10^{-28}$ кг, що приведені в таблиці). Замалювати графіки для коефіцієнта D на одному малюнку.

6. Користуючись результатами п.5. побудувати для двох значень відношення $E/U_0 = 0,5, 0,8$ графіки залежності коефіцієнта прозорості від маси.

7. Побудувати графік $D(E/U_0)$ за наближеною формулою (17.13) та порівняти його з результатами точного розрахунку. Дані взяти з таблиці 17.1.

8. Встановити (змінюючи l), при якому значенні

$$\beta l = \frac{l}{\hbar} \sqrt{2mV_0 \left(1 - \frac{E}{U_0}\right)}$$

похибка при обчисленні D за формулою (17.13) не перевищує 10%, 3%.

17.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи; малюнок бар'єру; всі графічні залежності, отримані за пунктами 2...7; висновки, які виходять із графіків щодо залежності коефіцієнта прозорості D від відносної висоти бар'єра E/U_0 , ширини бар'єра, та маси частинки; висновки щодо застосування наближеної формули (17.13).

Таблиця 17.1 – Вихідні данні

№ вар.	Позначення частинки	$m \cdot 10^{-28}$, кг	U_0 , еВ	$l \cdot 10^{-12}$, м
1	μ^\pm (мезон)	1,9	5	4
2	π^\pm (мезон)	2,5	4	3,5
3	ν_τ (лептон)	4,5	5	3
4	K^0 (мезон)	8,9	2	2,5
5	η (мезон)	9,8	3	2
6	P (протон)	17	2	1,5
7	Ω (гіперон)	30	1	1
8	μ^\pm (мезон)	1,9	4	3
9	π^\pm (мезон)	2,5	5	3
10	ν_τ (лептон)	4,5	4	3,5
11	K^0 (мезон)	8,9	3	2
12	η (мезон)	9,8	2	2,5
13	P (протон)	17	1	1
14	Ω (гіперон)	30	2	1,5

17.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке “потенціальний бар’єр” та “висота потенціального бар’єру”
2. Чи може відбиватись частинка від бар’єра у випадку коли її енергія $E > U_0$; проходити крізь бар’єр, коли $E < U_0$?
3. Запишіть рівняння Шредінгера всередині бар’єра та за його межами.
4. Який вид має ψ -функція в трьох різних областях на які поділяє простір бар’єр?
5. Який експоненціальний множник із множників $e^{i\alpha x}$, $e^{-i\alpha x}$ відповідає хвилі, що розповсюджується в напрямку позитивних значень x , негативних значень x ?
6. Яким граничним умовам повинна задовольняти ψ -функція та її похідна на межах бар’єру?
7. Як визначається коефіцієнт проходження (прозорості) D , коефіцієнт відбивання R частинки?
8. Яке співвідношення пов’язує R та D ?
9. Що визначають коефіцієнти R та D в квантовій механіці?

18 ДОСЛІД РЕЗЕРФОРДА З РОЗСИЮВАННЯ α -ЧАСТИНОК

18.1 Мета роботи

Вивчити будову атома, впевнитись у справедливості теорії, яка базується на кулонівській взаємодії між α -частинкою та ядром атома.

18.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Розподіл позитивних та негативних зарядів в атомі можна з'ясувати шляхом безпосереднього “зондування” внутрішніх областей атома. Такий експеримент здійснив Резерфорд за допомогою α -частинок, спостерігаючи за напрямком їхнього руху при проходженні крізь тонкий шар речовини [3, 6].

Дослід був здійснений таким чином. Вузкий пучок α -частинок, які випромінювались радіоактивною речовиною Р (рис.18.1), падав на тонку металічну фольгу \emptyset . Розсіяні α -частинки спричиняли сцинтиляції, які спостерігались у мікроскоп М. Екран та мікроскоп можна було встановлювати під будь-яким кутом ϑ . Весь пристрій знаходився у вакуумі.

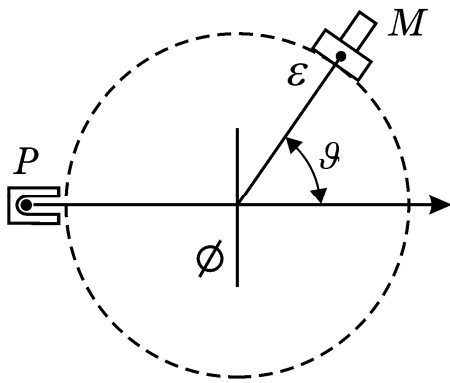


Рисунок 18.1

Шар речовини фольги був настільки тонкий, що кожна α -частинка при проходженні крізь нього пролітала поблизу тільки одного ядра і зазнавала лише одного розсіювання.

Відхилення α -частинок обумовлені дією на них тільки з боку ядра. Помітного відхилення із-за взаємодії з електронами бути не може, оскільки маса електрона на чотири порядки менше маси α -частинки. Коли частинка пролітає поблизу ядра, на неї діє кулонівська сила відштовхування

$$F = k \frac{2Ze^2}{r^2},$$

де $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ϵ_0 – електрична стала, e – заряд електрона, Z – порядковий

номер елемента в т. Менделєєва, r – відстань між α -частинкою та ядром. Відстань від ядра до вихідного напрямку польоту α -частинки b називається прицільним параметром. Чим ближче від ядра пролітає частинка, тим сильніше вона повинна відхилитися.

В результаті дослідів виявилось, що на великі кути (близькі до 180°) розсіювалася дуже мала кількість частинок. Аналізуючи результати, Резерфорд дійшов висновку, що сильне розсіювання частинок можливе тільки в тому разі, якщо всередині атома існує надзвичайно сильне електричне поле, яке створюється зарядом, зв'язаним з великою масою та сконцентроване в малому об'ємі.

Базуючись на цьому висновку, Резерфорд запропонував у 1911 р. ядерну модель атома. Згідно з Резерфордом атом являє собою систему зарядів, в центрі якої розташоване важке позитивне ядро з зарядом Ze розміри якого не перевищують 10^{-14} м, а навколо нього розташовані Z електронів.

Виходячи з таких положень, Резерфорд розробив кількісну теорію розсіювання α -частинок, згідно з якою відхилення α -частинок обумовлені дією на них з боку атомного ядра. Помітного відхилення внаслідок взаємодії з електронами бути не може, оскільки маса електрона на чотири порядки менше маси α -частинки. Коли частинка пролітає поблизу ядра, на неї діє кулонівська сила відштовхування

$$F = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (18.1)$$

Сила (18.1) залежить від відстані як $\frac{\alpha}{r^2}$, (якщо позначити $\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} = \alpha$) і являє собою центральну силу.

Якщо $F(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, де $\alpha > 1$, то це відштовхуюча сила. У випадку відштовхування траєкторією частинки є гіпербола, а кут ϑ являє собою кут між асимптотами гіперболи.

За формулою, яку отримав Резерфорд, можна обчислити відносне число частинок $\frac{dN_V}{N}$ від загального числа α -частинок N , які розсіюються на ядрі в межах кута від V до $V + dV$ (рис.18.1).

$$\frac{dN_V}{N} = na \cdot \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha V^2} \right) \cdot \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4 \sin^4 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)} \quad (18.2)$$

де n – число атомів в одиниці об'єму, a – товщина фольги. Ця формула відома як формула Резерфорда для розсіювання α -частинок.

Для даної речовини певної товщини фольги формулу можна записати у вигляді

$$\frac{\Delta N_\vartheta}{N} = C \cdot \frac{\sin \vartheta \Delta \vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)}, \quad (18.3)$$

де $C = na \cdot \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha V^2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, ΔN_V – число частинок, які розсіюються в межах кутів від ϑ до $\vartheta + \Delta \vartheta$.

Справедливість теорії, яка виходить із кулонівської взаємодії між α -частинкою та ядром атома, свідчить про те, що навіть та частинка, яка відкидається в зворотному напрямку не проникає в середину ядра атома.

α -частинка, що точно летить в напрямку до ядра, підійшла б до його центра на відстань, яку можна визначити, прирівнюючи кінетичну енергію α -частинки потенціалній енергії взаємодії α -частинки з ядром в момент повної зупинки частинки:

$$\frac{m_{\alpha}V^2}{2} = \frac{2Ze^2}{r_{\min}},$$

де r_{\min} – мінімальна відстань між центрами α -частинки та ядра

$$r_{\min} = \frac{4Ze^2}{mV^2}. \quad (18.4)$$

18.3 Опис комп'ютерної програми

Інтерфейс програми зображено на рисунку 18.2. Програма базується на модифікованому алгоритмі Ейлера (див. додаток Б) та дозволяє розраховувати траєкторії руху α -часток. Відповідні параметри дорівнюють: $m_{\alpha} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ кг, $q_{\alpha} = 2e$, де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Вважаємо, що ядро ($q = Ze$) нерухоме. Внаслідок того, що характерна відстань взаємодії є порядку 10^{-15} м, для сили вираженої в ньютонках будуть виходити дуже великі числа, які не придатні для комп'ютера. Відстані будемо вимірювати в фермі ($1\text{ф} = 10^{-15}$ м) [10], а швидкості в одиницях швидкості світла $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Програма дозволяє розраховувати і спостерігати на екрані траєкторію α -частинки в полі нерухомого ядра з величиною заряду $q = Ze$. Величина кута ϑ , під яким розсіюється α -частинка, залежить від її швидкості та прицільного параметра b . При натискуванні на старт α -частинки починають одна за одною вилітати із джерела, розташованого в лівій частині кола. Для того, щоб обмежитися спостереженням однієї частинки, треба після натискування на кнопку “Старт”, натиснути відразу кнопку “Стоп”, при цьому в вікні “Количество частиц” з'являється цифра один. Можна спостерігати взагалі будь-яке число частинок, вони будуть вилітати доки не буде натиснута кнопка “Стоп”. На панель виведені вікна для введення заряду ядра Z (в одиницях заряду електрона) початкової швидкості частинки. Причому швидкість в одиницях швидкості світла всіх частинок – однакова. Прицільний параметр b_i для кожної наступної частинки випадково змінюється в межах від b до $-b$.

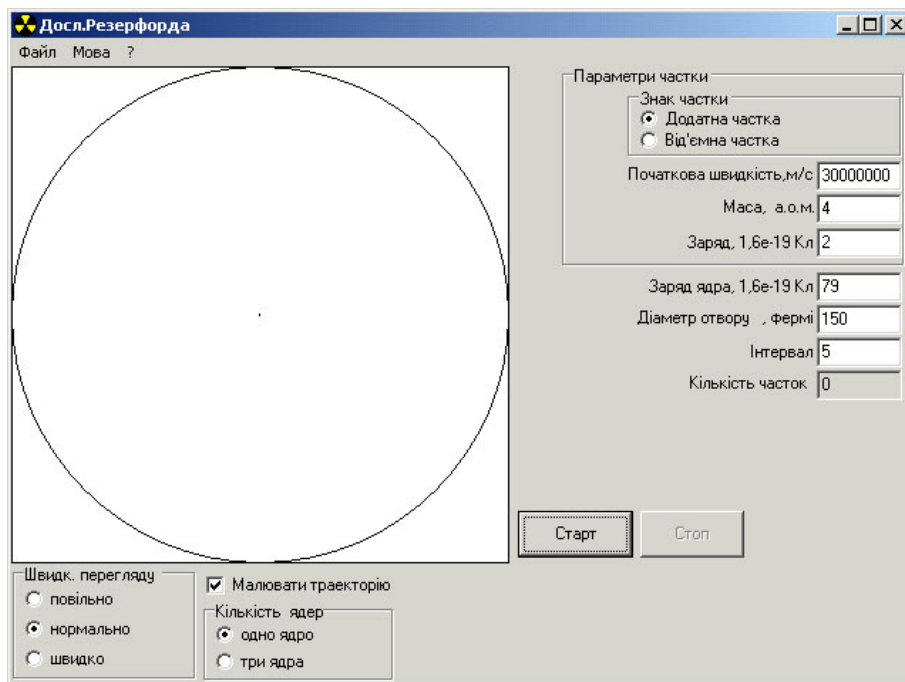


Рисунок 18.2

Програма також дає можливість побудувати діаграму розподілу числа частинок ΔN_{ϑ} , кут відхилення яких попадає в проміжок кутів ϑ , $\vartheta + \Delta\vartheta$. Отримуючи розподіл $\Delta N_{\vartheta}(\vartheta)$ для різного числа частинок N , можна переконатись, що розподіл, отриманий в комп'ютерному експерименті, буде тим ближчий до теоретичного (отриманого за формулою (18.2)), чим більше число частинок буде приймати участь в експерименті.

Програма дозволяє регулювати швидкість огляду руху частинки.

Щоб прискорити побудову діаграми при великому числі частинок, можна взагалі не рисувати траєкторії руху.

18.4 Інструкція користувачу

1. Вибрати максимальне значення прицільного параметру (діаметр отвору) $b_{\max} = 100 \dots 150$ ф. Спостерігати траєкторію руху α -частинок в залежності від значення b .

2. Створити умови для спостереження однієї – декількох α -частинок при параметрі b_{\max} . Яку форму має траєкторія α -частинки?

3. Задати “діаметр отвору” b_{\max} (тобто діаметр пучка α -частинок) та початкову швидкість згідно з таблицею 18.1. Натиснути на кнопку “Старт” і спостерігати розсіювання $N = 100$ частинок.

4. Зарисувати діаграму розсіювання частинок. Виконати розрахунок за формулою (18.2). Порівняти результати розрахунку з представленими на діаграмі.

Таблиця 18.1 – Вихідні данні

№ вар.	b_{\max}, ϕ	Z	$V \cdot 10^7, \text{ м/с}$	№ вар.	b_{\max}, ϕ	Z	$V \cdot 10^7, \text{ м/с}$
1	300	79	3	7	300	79	3,5
2	300	79	3	8	300	79	3,5
3	300	79	3	9	300	79	3,5
4	200	79	3,5	10	200	79	3
5	200	79	3,5	11	200	79	3
6	200	79	3,5	12	200	79	3

5. Повторити дослід п.п.3, 4 для $N = 1000$, $N = 10000$ частинок. Зробити висновок.

6. Результати виконання роботи занести до таблиці 18.2. Таблиця складена для випадку, коли $\Delta\vartheta = 10^0$, підраховано відношення для цього випадку величини $\frac{\sin \vartheta}{\sin^4 \vartheta/2}$ змінної в формулі Резерфорда (18.3). В величині теоретичній

$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N_T} N_T$ повинно підраховуватися як сума всіх значень $\frac{\sin \vartheta}{\sin^4 \vartheta/2}$, приведених у

відповідній колонці таблиці 18.2, тобто $N_T = 3221$. В цьому випадку не має значення яку величину буде мати константа C у формулі (18.3).

Таблиця 18.2 – Результати розрахунків

$\vartheta, ^\circ$	$N = 100$				$N = 1000$				$N = 10000$			
	Експер.		Теорія		Експер.		Теорія		Експер.		Теорія	
	ΔN_{ϑ}	$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N}$	$\frac{\sin \vartheta}{\sin^4 \vartheta/2}$	$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N_T}$	ΔN_{ϑ}	$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N}$	$\frac{\sin \vartheta}{\sin^4 \vartheta/2}$	$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N_T}$	ΔN_{ϑ}	$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N}$	$\frac{\sin \vartheta}{\sin^4 \vartheta/2}$	$\frac{\Delta N_{\vartheta}}{N_T}$
10			2591			2591					2591	
20			410			410					410	
30			109			109					109	
40			49			49					49	
50			25			25					25	
60			14			14					14	
70			9,4			9,4					9,4	
80			5,8			5,8					5,8	
90			4			4					4	
100			2,8			2,8					2,8	

Експериментальне значення $\frac{\Delta N_9}{N}$ підраховується для відповідного значення θ , як відношення висоти стовпчика на діаграмі ΔN_9 до повного числа частинок, які приймають участь в експерименті.

18.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, діаграму розсіювання частинок, результати вимірювань і розрахунків, зведені в таблиці, висновки на основі отриманих результатів та пунктів завдання 1...5.

18.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає ідея експерименту Резерфорда?
2. З чого складалась експериментальна установка Резерфорда?
3. Яку модель атома запропонував Резерфорд, базуючись на результатах дослідів?
4. На чому базувалася кількісна теорія розсіювання α -частинок?
5. Яку траєкторію повинні описувати α -частинка в центральному полі кулонівської сили?
6. Що дає можливість обчислити формула Резерфорда?
7. Як описується рух α -частинки в полі ядра (яким алгоритмом)?
8. Що таке “прицільний параметр”?
9. В якому вигляді повинні бути представлені результати модельного експерименту?
10. Яким чином здійснюється порівняння теоретичних результатів (за формулою Резерфорда) та результатів модельного експерименту?

19 ВИВЧЕННЯ БУДОВИ ТА СПЕКТРУ АТОМА ВОДНЮ

19.1 Мета роботи

Ознайомитись з квантовомеханічною моделлю воднеподібного атома та дослідити будову та спектр атома водню.

19.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Розглянемо систему, яка складається з нерухомого ядра з зарядом Ze (Z – ціле число, e – заряд електрона) та електрона, що рухається навколо нього. Якщо $Z = 1$ маємо атом водню. Коли $Z > 1$ така система носить назву воднеподібного атома (або іона). Потенціальна енергія електрона в полі ядра дорівнює

$$U = -k \cdot \frac{Ze^2}{r}, \quad (19.1)$$

де $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, r – відстань від точки, в якій розташоване ядро.

Таким чином, рівняння Шредінгера має вигляд

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(E + k_0 \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (19.2)$$

де m_0 – маса електрона, \hbar – стала Планка.

Поле, в якому рухається електрон є центрально-симетричним, а тому доцільно скористатися сферичною системою координат (r, ϑ, φ) (рис.19.1). В сферичній системі координат оператор Лапласа буде

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (19.3)$$

Будемо розв'язувати трьохвимірне рівняння (19.2) методом розділу змінних, відшукуючи хвильову функцію як добуток

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) \quad (19.4)$$

Підстановка розв'язку (19.4) у рівняння (19.2) дає можливість отримати одновимірне рівняння для кожної з функцій окремо: $R(r)$, $\theta(\vartheta)$, $\Phi(\varphi)$.

Рівняння (19.2) має розв'язок:

- 1) при будь-яких значеннях E ;
- 2) при дискретних значеннях E_n .

Значення $E > 0$ відповідають вільному електрону, який пролітає повз ядро. Дискретні значення $E_n < 0$

$$E_n = -k_0^2 \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad (19.5)$$

відповідають електрону, зв'язаному з ядром. У цьому випадку електрон рухається в потенціальній ямі, вигляд якої зображено на рис.19.2 суцільною лінією (U_{ef}). Пунктирна лінія зображає можливий графік функції $R(r)$.

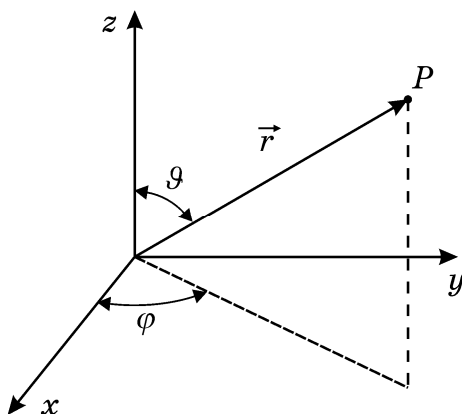


Рисунок 19.1

Власні функції рівняння (19.2) характеризуються трьома квантовими числами n, l, m :

$$\Psi = \Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot \Theta_{lm}(\vartheta) \cdot \Phi_m(\varphi). \quad (19.6)$$

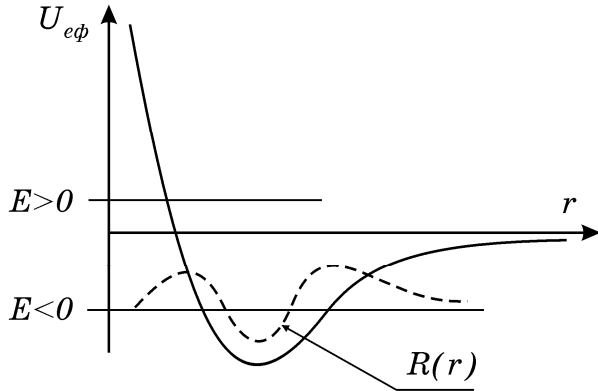


Рисунок 19.2

Параметр n , який називають головним квантовим числом збігається з номером рівня енергії (див. формулу (19.5)). Параметри l та m являють собою азимутальне та магнітне квантові числа і визначають відповідно модуль моменту імпульсу та його проекцію на певний напрямок Z .

Розв'язок, який задовольняє стандартним умовам, можна отримати тільки для цілих значень l , які не перевищують $(n - 1)$: $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$. Квантове число m може мати $(2l + 1)$ різних значень $m = -l, (-l + 1), \dots, -1, 0, +1, \dots, (l - 1), l$.

Деякі (ненормовані) радіальні та кутові функції, з яких можна побудувати повні хвильові функції Ψ_{nlm} для атома водню, приведені в таблиці 19.1, де $\rho = r / a_0$.

Таблиця 19.1 - Ненормовані радіальні та кутові функції

R_{nl}		$\Theta_{lm} = \Theta_{l l-m}$		Φ_m	
R_{10}	$e^{-\rho}$	Θ_{00}	1	Φ_0	1
R_{20}	$\left(1 - \frac{1}{2}\rho\right)e^{-\rho/2}$	Θ_{10}	$\cos\theta$		
R_{21}	$\rho e^{-\rho/2}$	Θ_{11}	$\sin\theta$	Φ_1	$e^{i\varphi}$
R_{30}	$\left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2\right)e^{-\rho/3}$	Θ_{20}	$3\cos^2\theta - 1$		
R_{31}	$\rho\left(1 - \frac{1}{6}\rho\right)e^{-\rho/3}$	Θ_{21}	$\sin\theta\cos\theta$	Φ_2	$e^{i2\varphi}$
R_{32}	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	Θ_{22}	$\sin^2\theta$		

Величина a_0 носить назву радіуса Бора. Це є перша орбіта (при $n = 1$) незбудженого електрона в атомі водню.

Дискретні значення енергії (19.5) визначають енергетичні рівні, які дозволено займати електронам у воднеподібному атомі. Згідно з постулатами Бора, електрон може випромінювати енергію(або поглинати) теж тільки певними порціями – квантами. Їх енергія визначається різницею енергій, які відповідають певним рівням

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} = Z^2 k_0^2 \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (19.7)$$

Частоти, на яких може випромінювати атом водню визначаються формулою Бальмера, яка була встановлена експериментально

$$\omega = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (19.8)$$

де R – стала Рідберга. $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$.

Взявши для водню $Z = 1$ в формулі (19.7), та порівнюючи вирази (19.7), (19.8) можна визначити залежність сталої Ридберга від інших констант.

$$R = k_0^2 \frac{m_0 e^4}{2\hbar^3}. \quad (19.9)$$

Якщо тепер підставити R у співвідношення (19.7) можна отримати формулу для її обчислення.

$$R = \frac{E_{n_1} - E_{n_2}}{Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)} \quad (19.10)$$

Із виразу (19.7) можна отримати також формулу для обчислення частот випромінювання воднеподібного атома.

19.3 Опис комп'ютерної програми

Алгоритм програми базується на результатах розв'язку рівняння Шредінгера (19.2), представлених в таблиці (19.1). Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 19.3. Програма будує на екрані дисплею електронну густину (густину ймовірності dP/dr) для різних наборів квантових чисел n , l , m (обмежених значеннями приведеними в таблиці) в сферичній системі координат в залежності від r , θ , φ . Програма дозволяє також обчислювати значення енергії, будувати на екрані діаграму енергетичних рівнів для атома водню та воднеподібного атома. Порівняти ці значення із значеннями ρ для яких густина

ймовірностей має максимум. Зробити висновок, в чому обидва підходи співпадають та в чому докорінно відрізняються. Висновки, які базуються на порівнянні графіків густини ймовірності для ψ -функції із значеннями квантових чисел щодо характеру симетрії електронної хмаринки (електронної густини).

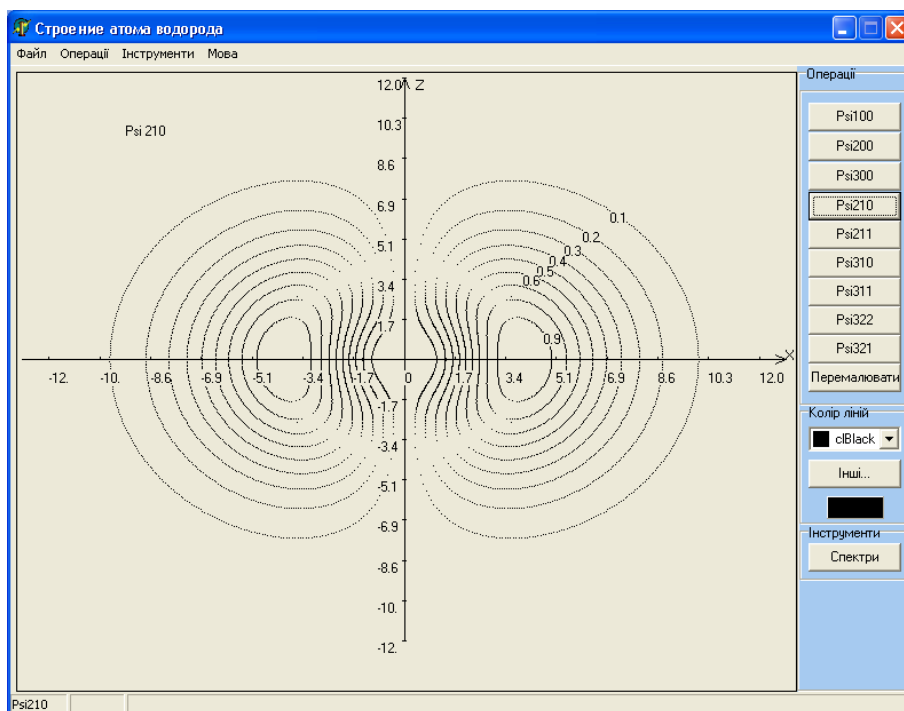


Рисунок 19.3

19.4 Інструкція користувачу

1. Отримати на екрані розподіл електронної густини (густина ймовірності $\frac{dP}{d\rho} = \rho^2 |\psi|^2$) в залежності від $\rho = \frac{r}{a_0}$, яка визначається Ψ -функціями $\Psi_{100}, \Psi_{200}, \Psi_{300}$. Зрисувати отримані графіки. Визначити з графіків і записати значення ρ , які відповідають максимальним значенням $\frac{dP}{d\rho}$.

2. Отримати послідовно на екрані розподіл електронної густини у вигляді рівнів однакових значень $\frac{dP}{d\rho}$ в площині xoz для станів, які характеризуються Ψ -функціями $\Psi_{210}, \Psi_{211}, \Psi_{310}, \Psi_{321}, \Psi_{322}$. Зрисувати отримані розподіли, обмежуючись рівнями $\frac{dP}{d\rho} = 0,9$, $\frac{dP}{d\rho} = 0,5$.

3. Задати Z та n у відповідності з таблицею 19.2 Отримати на екрані систему енергетичних рівнів воднеподібного атома, зрисувати у масштабі. Записати значення енергії які відповідають значенням $n = n_1 \dots n_2$ завдання.

4. Користуючись значеннями n_1 і n_2 таблиці 19.2 обчислити сталу Рідберга за формулою (19.10).

5. Визначити потенціал іонізації та потенціал збудження (взяти відповідні значення N та K з таблиці 19.2).

6. Послідовно збільшуючи число n , отримати таку картину енергетичних рівнів, щоб рівні з великими значеннями n не можна було розрізнити. Пояснити, як цей результат збігається з принципом додатковості.

7. Базуючись на теорії Бора, обчислити три перших значення радіусів орбіт (для $n=1,2,3$), порівняти їх із значеннями, отриманими в п.1. Зробити висновки в чому полягає збіг та принципіальна розбіжність уявлень квантової теорії та напівкласичної теорії Бора?

8. Порівняти графіки $\frac{dP}{dr}$ для різних значень чисел n, l, m та формули для відповідних Ψ -функцій (таблиця 19.1), зробити висновки про характер симетрії електронної хмари(електронної густини).

Пояснити, чим обумовлена наявність вузлів $|\Psi_{200}|^2, |\Psi_{300}|^2$ (точок, в яких ці функції дорівнюють нулю).

Таблиця 19.2 – Вихідні данні

№ вар.	Z	n	n_1	n_2	N	K
1	1	4	1	2...4	1	2
2	2	5	2	3...5	1	1
3	3	6	1	2...4	1	2
4	1	6	3	4...6	2	3
5	2	4	1	2...4	2	2
6	3	5	1	3...5	2	3
7	2	7	4	5...7	3	1
8	2	8	3	4...6	3	3
9	3	7	3	4...6	2	1
10	3	8	4	5...7	1	2
11	1	5	2	2...4	2	3
12	1	7	4	3...5	3	1

N – номер потенціалу іонізації, K – номер потенціалу збудження.

19.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати роботи, а саме:

1. Діаграми розподілу електронної густини dP/dr для Ψ -функцій: $\Psi_{100}, \Psi_{200}, \Psi_{300}$ (пункт 1), функцій $\Psi_{210}, \Psi_{211}, \Psi_{310}, \Psi_{321}, \Psi_{322}$ (пункт 2). При

цьому слід зарисовувати тільки рівні, які відповідають $dP/d\rho = 0,9$; $dP/d\rho = 0,5$;

2. Схему енергетичних рівнів, причому вісь енергій E направити вниз;
3. Обчислені величини сталої Ридберга, потенціалів іонізації та збудження;
4. Обчислення на основі теорії Бора трьох перших радіусів електронних орбіт та їх порівняння з отриманими в роботі;
5. Висновки за п.п.6...8 інструкції 19.4.

19.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яка будова атома водню, воднеподібного атома?
2. Чому дорівнює потенціальна енергія електрона в полі ядра воднеподібного атома? Як називається це поле?
3. Запишіть рівняння Шредінгера для електрона в воднеподібному атомі. В якій системі координат доцільно розв'язувати задачу?
4. В чому полягає метод розділу змінних?
5. Запишіть власні значення енергії E електрона в воднеподібному атомі. Проаналізуйте формулу для E :
 - що означає знак (+) ?
 - що означає знак (–) ?
 - який спектр відповідає позитивним, негативним значенням енергії?
6. Чому відповідає суцільна, пунктирна лінія на рис.19.2 ?
7. Як називаються числа, якими характеризується стан електрона в атомі?
8. Які значення квантових чисел n, l, m задовольняють розв'язок?
9. Що таке радіус Бора?
10. Які значення енергії визначаються формулою (19.5)?

20 ВИВЧЕННЯ НОРМАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ КРИСТАЛІЧНОЇ РЕШІТКИ

20.1 Мета роботи

Дослідити спектр нормальних коливань кристалічної решітки на прикладі коливань одновимірного ланцюжка N частинок, зв'язаних між собою пружними зв'язками, встановити дисперсійну залежність частоти коливань від хвильового числа.

20.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи.

Атоми твердих тіл здійснюють теплові коливання навколо положення рівноваги. Характер цих коливань дуже складний, а тому для їх описання звертаються до наближених методів та різноманітних спрощень в розв'язанні цієї задачі.

Замість того, щоб описувати індивідуальні коливання частинок, розглядають їх колективний рух у кристалі. Таке спрощення базується на тому, що внаслідок значних сил зв'язку, коливання, яке виникло у однієї частинки, відразу ж передається сусіднім частинкам, і в кристалі виникає колективний рух у вигляді пружної хвилі. Такий колективний рух носить назву нормального коливання решітки. Число нормальних коливань, яке може виникнути в решітці, дорівнює числу ступенів свободи частинок кристала, тобто $3N$, де N – число частинок, що утворюють кристал.

На рис.20.1, показана одновимірна модель твердого тіла – лінійний ланцюжок частинок (атомів), які знаходяться на однаковій відстані “ a ” одна від одної. Частинки зв'язані пружинками нульової маси з коефіцієнтом жорсткості

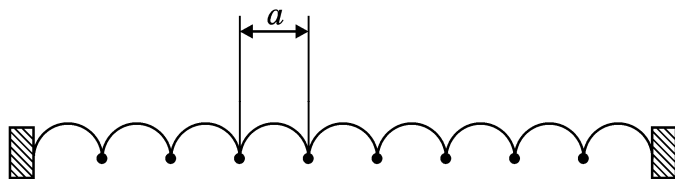


Рисунок 20.1

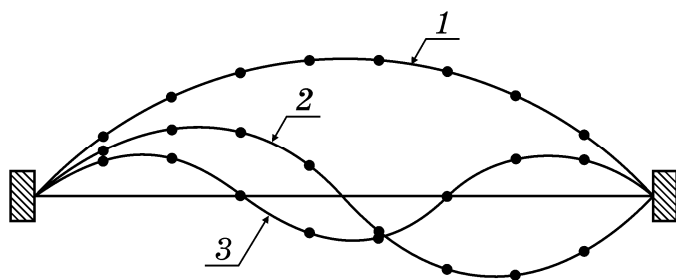


Рисунок 20.2

k_c , за винятком двох крайніх пружинок, для яких коефіцієнт жорсткості дорівнює k . Позначимо U_1, U_2, \dots, U_N – зміщення з рівноважного положення вздовж осі системи. Кінці лівої та правої пружинки вважаємо нерухожими.

Якщо кінці ланцюжка нерухомі, то основне коливання, яке відповідає найнижчій частоті ω_{\min} , відповідає виникненню стоячої хвилі з вузлами на кінцях (рис.20.2, крива 1). Наступному коливанню відповідає стояча хвиля з вузлами на кінцях і всередині ланцюжка (крива 2). Наступному коливанню відповідає стояча хвиля з вузлами на кінцях та двома вузлами всередині ланцюжка (крива 3) і т.д. Найкоротша довжина хвилі, яка може утворюватися в такому ланцюжку, дорівнює

кінцях та двома вузлами всередині ланцюжка (крива 3) і т.д. Найкоротша довжина хвилі, яка може утворюватися в такому ланцюжку, дорівнює

$$\lambda_{\min} = 2a. \quad (20.1)$$

Їй відповідає максимальна частота

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi V}{\lambda_{\min}} = \frac{\pi V}{a}, \quad (20.2)$$

де V – швидкість розповсюдження хвиль (звуку) в ланцюжку.

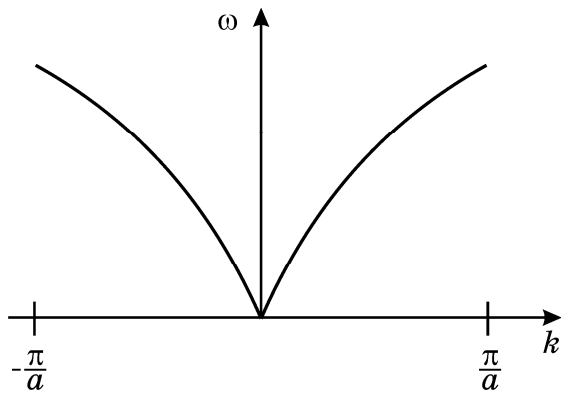


Рисунок 20.3

В фізиці кристалів (наприклад, при визначенні теплоємності) важливо знати характер залежності частоти ω від хвильового числа $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Така залежність носить назву дисперсійної залежності. Для звукових (акустичних) хвиль ця залежність має вигляд приведений на рис.20.3. Позитивні значення k відповідають пружній хвилі, яка розповсюджується у додатному, від'ємні – хвилі, що розповсюджується у від'ємному напрямку.

Оскільки сила, яка діє на кожну окрему частинку, визначається тільки стискуванням та розтягуванням з'єднаних з нею пружинок, рівняння руху другої частинки має вигляд:

$$m \frac{d^2 U}{dt^2} = -k_c (U_i - U_{i+1}) - k_c (U_i - U_{i-1}) = k_c (2U_i - U_{i+1} - U_{i-1}), \quad (20.3)$$

$$i = 2, \dots, N - 1$$

Рівняння для частинок $i = 1$ та N , що знаходяться біля стінок мають вигляд

$$m \frac{d^2 U_1}{dt^2} = -k_c (U_1 - U_2) - k U_1, \quad (20.4)$$

$$m \frac{d^2 U_N}{dt^2} = -k_c (U_N - U_{N-1}) - k U_N.$$

Відмітимо, що коли $k_c = 0$, приведена система рівнянь для U_i розпадається на незалежні рівняння і рух кожної точкової маси не залежить від сусідів.

Для моделювання динамічної поведінки N зв'язаних мас скористаємось алгоритмом Ейлера (Додаток Б). Програма малює зміщення як функцію часу для чотирьох частинок.

20.3 Опис комп'ютерної програми

Інтерфейс програми зображено на рисунку 20.4. Програма моделює по-вздовжній коливальний рух зв'язаних осциляторів, який описується рівняннями (20.3) та (20.4); максимальна кількість частинок – $N_{\max} = 12$. Для моделювання

динамічної поведінки N частинок однакової маси m , які зв'язані між собою пружними зв'язками, використовується алгоритм Ейлера (Додаток Б). Програма малює зміщення як функцію часу для чотирьох частинок (номер частинки, з якої починається огляд, задається у віконці зліва, біля верхнього графіка). Відстань між частинками можна змінювати у вікні над рисунком.

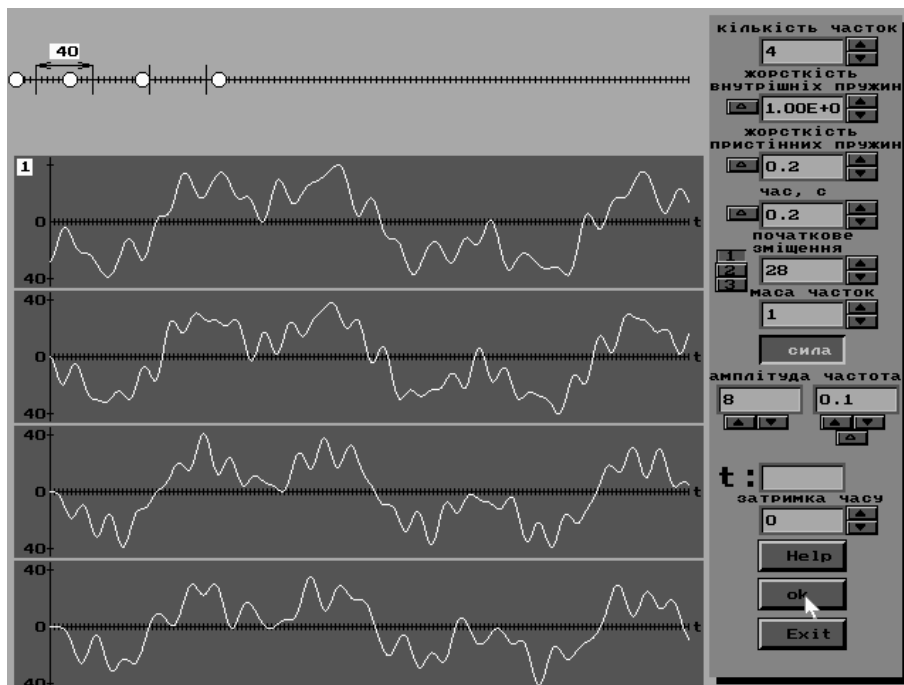


Рисунок 20.4

Праворуч виведені вікна, в яких можна задавати кількість частинок, коефіцієнт жорсткості внутрішніх та зовнішніх пружин, початкові значення зміщення трьох перших частинок. Швидкість, з якою рухаються частинки та малюються графіки, можна регулювати за допомогою вікна “затримка часу”. В вікні « t » можна прочитати тривалість процесу від початкового моменту до точки, в яку підводиться курсор. В системі частинок можна збуджувати як вільні незгасаючі коливання, так і вимушені коливання: перші – шляхом завдання початкового зміщення від положення рівноваги, другі – шляхом вмикання гармонічної сили (натиснувши кнопку “сила”).

20.4 Інструкція користувачу

1. Вибрати значення k , m , a , N згідно з таблицею 20.1 ($k_c = k$). Визначити всі нормальні коливання, прикладаючи зовнішню силу до першої частинки. Частота нормального коливання визначається по зростанню амплітуди коливання. Вибрати при цьому зручний інтервал часу дії сили. Змінювати значення ω в діапазоні від $0,2(k/m)^{1/2}$ до $3(k/m)^{1/2}$. Якщо ви вважаєте, що знаходитесь поблизу резонансу, для отримання точнішого значення ω_n використайте ще кілька зна-

чень ω . Скільки всього нормальних коливань? Визначити їх згідно з таблицею для двох значень N .

Таблиця 20.1 – Вихідні данні

№ вар.	k	M	a	N_1	N_2
1	1	1	4	5	12
2	0,8	0,8	4	6	12
3	1	2	3	5	10
4	1	0,5	3	6	10
5	1	2	3	6	10
6	0,5	1	4	5	11
7	0,8	1	4	6	11
8	1	0,8	3	5	11
9	1	1	5	6	12
10	1,5	2,5	3	5	10
11	1	1,5	3	6	11
12	1	1,5	4	6	11

2. Підрахувати всі можливі значення довжини хвилі для ланцюжка з N_1 , та N_2 частинок. Занести в таблицю значення λ , $k = 2\pi/\lambda$ та відповідні значення ω_n .

3. Побудувати дисперсійну залежність $\omega(k)$ для двох випадків N_1 , N_2 .

4. Порівняти результати отримані в п. 1 з аналітичними

$$\omega_n^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{n\pi}{2(N+1)}, \text{ де } n = 1, 2, \dots, N.$$

5. Порівняти хід залежності $\omega(k)$ з залежністю приведеною на рис.20.3.

20.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати виконання роботи, а саме:

1. Зведені в таблицю значення частот нормальних коливань та відповідних для двох значень λ і k значень $N = N_1$, $N = N_2$ з висновком: як залежить число коливань від числа частинок в ланцюжку;

2. Обчислені та занесені в таблицю значення ω_n за аналітичною наближеною формулою (пункт 4 інструкції 20.4);

3. Побудовані графіки залежності $\omega = \omega(k)$ для двох значень N на основі отриманих в роботі значень ω та k і обчислених за наближеною теоретичною формулою;

4. Порівняння “експериментальних” результатів з результатами за наближеною формулою.

20.6 Контрольні запитання і завдання

1. В стані якого руху перебувають атоми твердого тіла? Що таке нормальне коливання решітки?
2. Яке число нормальних коливань виникає в кристалі із N атомів?
3. Що являє собою одновимірною моделлю твердого тіла?
4. Запишіть мінімальну λ_{\min} та максимальну λ_{\max} довжини хвиль, максимальну ω_{\max} та мінімальну ω_{\min} частоти нормальних коливань, що виникають в одновимірному ланцюжку із N атомів.
5. Що таке дисперсійна залежність? Який вид вона має для акустичних хвиль?
6. Запишіть рівняннями, що описує рух атомів в одновимірному ланцюжку?

21 РУХ ЕЛЕКТРОНА В ПЕРІОДИЧНОМУ ПОЛІ КРИСТАЛІЧНОЇ РЕШІТКИ

21.1 Мета роботи

Вивчити природу виникнення зонної структури енергетичного спектра електрона в кристалі та дослідити залежність ефективної маси електрона від його розташування в енергетичній зоні.

21.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Розглянемо найпростіший приклад одновимірного періодичного поля, який дозволяє отримати точний розв'язок задачі. Незважаючи на схематичність моделі кристала, цей приклад точно показує природу виникнення зонної структури енергетичного спектра електрона. Нехай електрон рухається в одновимірному полі, що зображено на рис.21.1 .

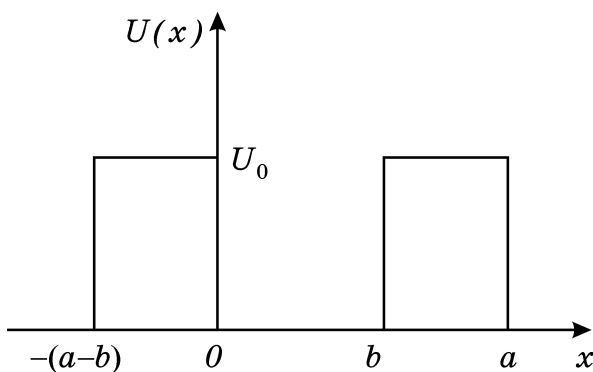


Рисунок 21.1

В цьому випадку розв'язок рівняння Шредінгера в областях, де потенціальна енергія дорівнює нулю, буде мати вигляд:

$$\Psi_1(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad (21.1)$$

де $\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ — хвильове число

вільного електрона;

m — маса електрона;

E — його повна енергія;

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – стала Планка.

В областях, які відповідають бар'ерам,

$$\Psi_2(x) = Ce^{i\beta x} + De^{-i\beta x}, \quad (21.2)$$

де $\beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$ – хвильове число в області бар'ера.

Граничні умови для Ψ -функції та її похідних на межах $+b$, 0 , $-(a-b)$ запишемо у вигляді:

$$\Psi_2(0) = \Psi_1(0), \quad \Psi_2'(0) = \Psi_1'(0), \quad (21.3)$$

та

$$\Psi_2(b-a) = e^{-ika}\Psi_1(b), \quad \Psi_2'(b-a) = e^{-ika}\Psi_1'(b). \quad (21.4)$$

де k – дійсна величина.

В співвідношеннях (21.4) ми скористались загальними властивостями хвильових функцій електрона в періодичному полі $\Psi(x+a) = e^{ika}\Psi(x)$.

Підставляючи розв'язок рівняння Шредінгера (21.1), (21.2) в граничні умови (21.3) і (21.4), отримаємо рівняння для визначення невідомих сталих A , B , C , D , k :

$$\begin{aligned} C + D &= A + B, \\ C - D &= i\frac{k}{\beta}(A - B), \\ Ce^{-\beta(a-b)} + De^{\beta(a-b)} &= e^{ika}\left[Ae^{i\alpha b} + Be^{-i\alpha b}\right], \\ Ce^{-\beta(a-b)} - De^{\beta(a-b)} &= i\frac{\alpha}{\beta}e^{-ika}\left[Ae^{i\alpha b} - Be^{-i\alpha b}\right]. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Сумісний розв'язок системи рівнянь (21.5) можливий, якщо її детермінант дорівнює нулю, тобто якщо:

$$\cos ka = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \operatorname{sh} \beta(a-b) \sin \alpha b + \operatorname{ch} \beta(a-b) \cos \alpha b. \quad (21.6)$$

Розв'язуючи рівняння (21.6) графічним способом, можна визначити енергетичний спектр електрона. З метою спрощення задачі перейдемо у виразі потенціальної функції (рис.21.1) до спрощення виразу, покладаючи $(a-b) \rightarrow 0$, $U \rightarrow \infty$. При цьому переході величина

$$P = \frac{mU_0}{\hbar^2} a(a-b) \quad (21.7)$$

пропорціональна площі бар'єра і залишається скінченною. Тоді, зважаючи на те, що в цьому наближенні $sh\beta(a-b) \approx \beta(a-b)$, $ch\beta(a-b) \approx 1$, замість (21.6) отримуємо рівняння:

$$\cos ka = P \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a \quad (21.8)$$

Внаслідок того, що величина k – дійсна, це рівняння (21.8) задовольняється у випадку, коли його права частина залишається в межах від -1 до $+1$.

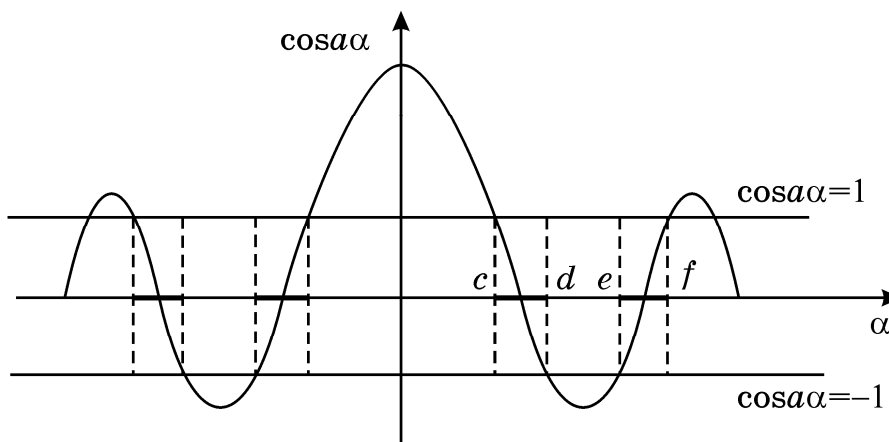


Рисунок 21.2

Значення α , які задовольняють рівняння (21.8) будуть лежати в межах $c-d$, $e-f$. В проміжку $d-e$ коренів немає, бо права частина виразу (21.8) за модулем більше одиниці. Цим значенням будуть відповідати значення λa , межі яких визначаються нерівністю: $-1 \leq \cos \lambda a \leq 1$.

Таким чином, енергетичний спектр електрона буде мати зонну структуру: значенням k , які належать проміжкам $c-d$, $e-f$ відповідають значенням енергії, які утворюють дозволені зони. В проміжку $d-e$ корені відсутні – він відповідає забороненій зоні. Межам першої (по порядку) зонн – $c-d$ відповідають значення $k\alpha = 0, -\pi$; другої: $k\alpha = \pi - 2\pi$ і т.п.

Динаміку електрона в кристалічній решітці можна описати за допомогою другого закону Ньютона:

$$m^* \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad (21.9)$$

де m^* – ефективна маса електрона:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 E}{dk^2}} . \quad (21.10)$$

Вона формально відіграє роль маси по відношенню до зовнішньої сили $F = -eE$, яка діє з боку зовнішнього поля напруженістю E .

Ефективна маса може дуже відрізнятись від фактичної маси електрона m . Це обумовлено тими обставинами, що в дійсності рівняння другого закону Ньютона для електронів в кристалі має вигляд

$$m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{крист}} ,$$

де $F_{\text{крист}}$ – сила, обумовлена дією на електрон поля решітки.

Введення ефективної маси дозволяє, абстрагуючись від взаємодії електрона з решіткою, визначати характер руху електрона під дією зовнішнього поля. Приписуючи електрону масу m^* ми можемо вивчати поведінку електрона під дією сили eE , вважаючи його вільним.

Ефективну масу в даній роботі поблизу “дна” та “стелі” зони можна обчислити за формулою

$$m^* = -m \frac{\varphi'(\alpha a)}{\alpha a} , \quad (21.11)$$

де через $\varphi(\alpha a)$ позначено праву частину рівняння (21.8), $\varphi'(\alpha a)$ – її похідна за змінною αa

$$\varphi'(\alpha a) = -\sin \alpha a + P \frac{\cos \alpha a}{\alpha a} . \quad (21.12)$$

21.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 21.3. Алгоритм програми обчислень в даній роботі базується на рівнянні (21.8). Програма будує графіки лівої та правої частини рівняння, точки перетину яких дають корені рівняння. Змінюючи параметри задачі, можна отримати всі можливі випадки спектру власних значень хвильового числа та енергії електрона, що рухається в періодичному полі кристала: безперервного, квазі-безперервного (тобто, спостерігати важливий момент – появу енергетичних зон в кристалі) та дискретного, коли висота бар'єра сягає таких значень, що електрон стає “запертим” в “глибокій” потенціальній ямі. Програма дозволяє також шляхом підведення курсору “миші” в будь-яку точку графіка, отримати значення ефективної маси електро-

на в залежності від його “положення”: поблизу “дна”, поблизу “стелі” та всередині дозволеної зони.

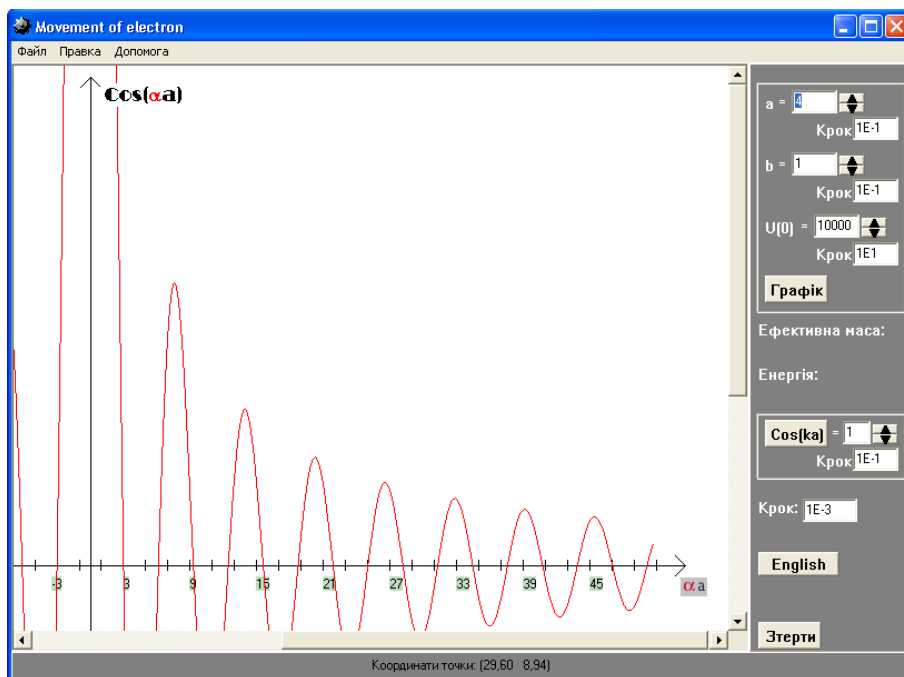


Рисунок 21.3

21.4 Інструкція користувачу

1. Занести значення параметрів a , b (в ангстремах), U – в електрон-вольтах у відповідності з таблицею 21.1 завдань. Отримати на екрані графік лівої та правої частини рівняння (21.6).

2. Записати значення α , які відповідають межах дозволених зон (по горизонтальній осі відкладені значення $\alpha \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$).

3. Відкласти отримані значення αa на горизонтальній осі та позначити жирною лінією дозвалені зони. Зробити висновок, як ведуть себе ширина дозволеної та ширина забороненої зони із збільшенням хвильового числа α ?

4. Збільшуючи величину U_0 (при незмінних значеннях a та b) здобути звуження дозволених зон практично до нуля. Записати значення α , визначити відповідне значення енергії

$$E = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m} \quad (21.13)$$

та порівняти з відповідними значеннями енергії електрона, який знаходиться в нескінченно глибокій ямі шириною a .

5. Поступово зменшувати величину U_0 (від початкової величини п.2) до того, поки не залишиться лише одна зона. Записати для п'яти $\cos ka$ відповідні значення α . Обчислити відповідні значення енергії за формулою (21.13). Побу-

дувати залежність $E(k)$. Зробити висновок, де будуть густіше розташовані рівні енергії: поблизу “дна” або “стелі” зони чи всередині зони?

Таблиця 21.1 – Вихідні данні

№ вар.	$a \cdot 10^{-10}$, м	$b \cdot 10^{-10}$, м	U , еВ	№ вар.	$a \cdot 10^{-10}$, м	$b \cdot 10^{-10}$, м	U , еВ
1	4	3,9	600	7	2	1,9	3000
2	4	3,5	700	8	3,5	3,3	1500
3	4	3	800	9	4,5	4,2	500
4	5	4	600	10	5	4,8	600
5	5	4,5	700	11	3	2,5	1500
6	3	2,9	2000	12	2,5	2,2	3000

6. Зменшуючи подалі висоту бар’єрів U_0 , здобути зникнення зон. Яким буде спектр електрона в цьому випадку?

7. Обчислити значення ефективної маси біля “дна” та “стелі” першої енергетичної зони за даними пункту 6. Зробити висновки.

21.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати виконання роботи, а саме:

- 1) Схема дозволених та заборонених зон;
- 2) Порівняльна таблиця значень енергії, обчислених за результатами обчислення на ПК величини αa із значеннями енергії для ями з нескінченно високими стінками тієї ж ширини a ($E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2} n^2$);

3) Значення ефективної маси відповідно в середині, поблизу “дна”, та “стелі” дозволеної зони;

4) Графік залежності $E(k)$;

5) Висновки щодо спектру значень енергії в даній структурі взагалі, всередині дозволеної зони, для значень U_0 , коли зони зникають, а також у випадку, коли $U_0 \rightarrow \infty$.

21.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яка фізична модель кристала покладена в основу даної роботи?
2. Який вигляд мають ψ -функції між бар’єрами та в самих бар’єрах?
3. Запишіть граничні умови, яким повинна задовольняти ψ -функція та її похідна?
4. Що таке “ефективна маса” електрона?

5. Яким методом розв'язується рівняння для властивих значень сталої розповсюдження (хвильового числа)?

6. Що таке “дозволена зона”, “заборонена зона”?

7. Як веде себе ефективна маса електрона біля “дна”, всередині та біля “стелі” дозволеної зони?

22 ВИВЧЕННЯ ЯВИЩА ХОЛОДНОЇ ЕМІСІЇ ЕЛЕКТРОНІВ ІЗ МЕТАЛУ

22.1 Мета роботи

Вивчити явища виривання електронів із металу під дією сильних зовнішніх полів.

22.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Виходячи з моделі руху електронів у металі (рис.22.1), відомо, що для виривання електрона із металу необхідно надати йому енергію, не меншу, ніж робота виходу A

$$A = U_0 - E_F, \quad (22.1)$$

Вакуум Метал Вакуум

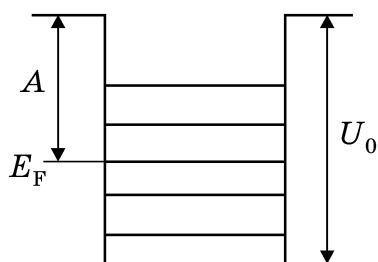


Рисунок 22.1

де E_F – максимальна енергія, яку може мати електрон у металі при температурі близькій до абсолютного нуля, енергія Фермі. Надати електрону необхідну енергію можна шляхом опромінювання металу світлом, шляхом нагрівання. Однак виникнення струму електронів можливе також при низьких температурах під впливом зовнішнього електростатичного поля. У цьому випадку потенціальна енергія електрона має вигляд (рис.22.2)

$$U(x) = U_0 - k_0 e \mathcal{E} x$$

де e – заряд електрона,

\mathcal{E} – напруженість електричного поля,

$$k_0 = 1/4\pi\epsilon_0.$$

На рисунку 22.2 суцільною лінією позначено енергію електрона в зовнішньому полі, пунктиром – хід потенціальної енергії електрона в полі з урахуванням так званих «сил електричного зображення».

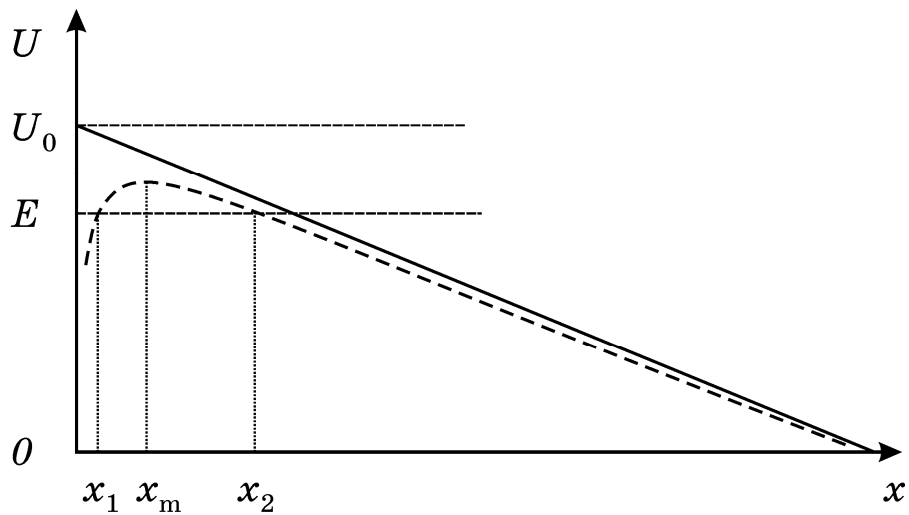
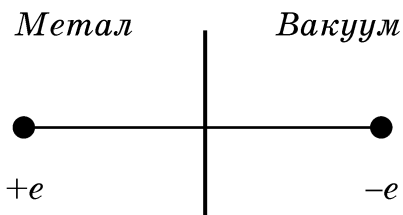


Рисунок 22.2

Окрім зовнішнього електричного поля, на електрон діє «сила електричного зображення». Справа в тому, що електрон, який покинув метал, створює на поверхні металу індукований заряд $+e$ (рис.22.3).

Таким чином, повна енергія електрона має вигляд



$$U = U_0 - e\epsilon x - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0\chi\epsilon}. \quad (22.2)$$

Величина U має максимум в точці x_m , положення якої визначається з рівняння

Рисунок 22.3

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x_m = \sqrt{\frac{e}{16\pi\epsilon_0\chi\epsilon}}, \quad (22.3)$$

причому максимальне значення U_m менше за U_0

$$U_m = U_0 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^3\chi\epsilon}{\pi\epsilon_0}}. \quad (22.4)$$

Врахування сил електростатичного зображення показує, що при накладанні зовнішнього поля робота виходу зменшується і стає рівною

$$A' = A - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^3\chi\epsilon}{\pi\epsilon_0}}. \quad (22.5)$$

Однак сили електростатичного зображення не в змозі пояснити холодну емісію. Дійсно, оцінка значення напруженості поля, при якому струм досягає максимуму (із умови $A' = 0$) дає, наприклад для вольфраму, значення

$$\mathcal{E} = \frac{4A\pi^2\epsilon_0}{e^3} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ В/м}, \quad (22.6)$$

в той час як на практиці досить сильний струм з'являється вже при $\mathcal{E} \approx 10^8$ В/м.

Таким чином в межах класичної теорії неможливо кількісно описати явище холодної емісії.

В квантовій теорії електрон може проходити через бар'єр у випадку, коли його енергія E менша за висоту бар'єра завдяки тунельному ефекту.

Для бар'єра довільної форми коефіцієнт прозорості для частинки маси m має вигляд

$$D = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx\right]. \quad (22.7)$$

Інтеграл в експоненті треба взяти в межах від x_1 до x_2 (див. рис.22.2), які можна визначити виходячи з умови

$$U(x) = U_0 - ex\mathcal{E} - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x} = E. \quad (22.8)$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (22.8), отримаємо

$$x_{12} = \frac{U_0 - E}{2e\mathcal{E}} \mp \sqrt{\left(\frac{U_0 - E}{2e\mathcal{E}}\right)^2 - \frac{e}{16\pi\epsilon_0\mathcal{E}}}.$$

Струм холодної емісії пропорціональний коефіцієнту прозорості

$$J = J_0 \cdot D,$$

де J_0 – величина, стала для даної речовини.

22.3 Опис комп'ютерної програми

Обчислення в даній роботі виконуються за програмою, що використовується також в роботі 17, в режимах „Произвольный барьер Вид 1” та „Произвольный барьер Вид 2”. Інтерфейс програми у першому із цих режимів зображено рисунку 22.4. В цьому режимі програма видає на екран графіки коефіцієн-

та проходження D відбивання R електрона бар'єра трикутної форми в залежності до висоти потенціального бар'єра U_0 для різних значень напруженості зовнішнього електричного поля, створеного поблизу поверхні металу. У другому з вказаних режимів (рис.22.5) програма рисує аналогічні графіки з урахуванням додаткової сили, так званої "сили зображення", яка змінює форму бар'єру. Для коефіцієнта прозорості для бар'єра будь-якої форми обчислення виконуються за наближеною формулою (22.7).

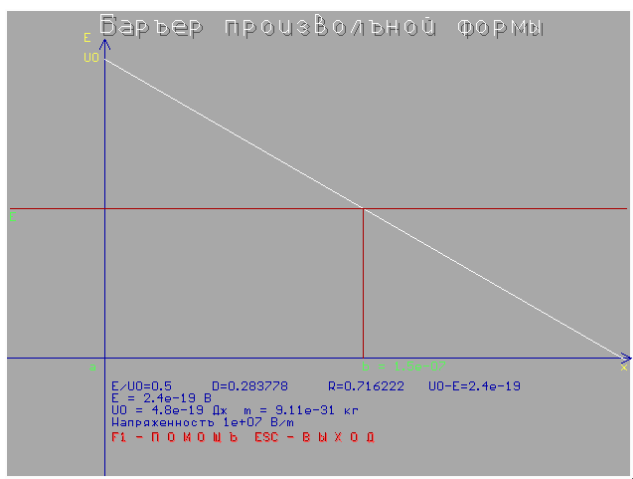


Рисунок 22.4

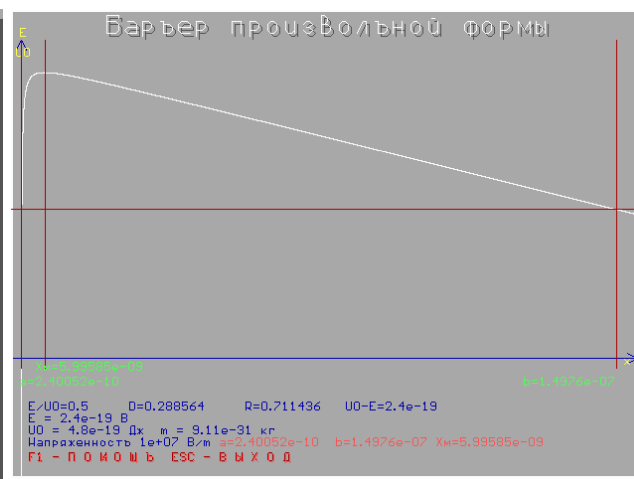


Рисунок 22.5

22.4. Інструкція користувачу

1. Ознайомитись із змістом "Help" (клавіша F1).
2. Для бар'єра трикутної форми (рис.22.2) отримати на екрані графіки залежності $D(E/U_0)$, $R(E/U_0)$ для семи значень напруженості поля \mathcal{E} (значення U_0 , \mathcal{E} , $\Delta\mathcal{E}$ взяти з таблиці 22.1). Зарисувати графіки $D(E/U_0)$ на одному рисунку; користуючись отриманими графіками $D(E/U_0)$ побудувати залежності $D(\mathcal{E})$ при трьох значеннях відношення E/U_0 (в межах $E/U_0 = 0,2...0,9$).

3. Аналізуючи побудовані графіки, зробити висновки щодо залежності густини струму холодної емісії J від відношення E/U_0 та напруженості зовнішнього поля \mathcal{E} .

4. Визначити, на яку величину зменшиться висота бар'єра (робота виходу) при врахуванні електростатичного зображення (за формулою (22.4) або (22.5)). Взяти \mathcal{E} за таблицею 22.1.

5. Для одного із значень \mathcal{E} отримати на екрані та зарисувати залежність $D(E/U_0)$ (на одному рисунку) для бар'єра трикутної форми та бар'єра з урахуванням електростатичного зображення. Зробити висновки.

Таблиця 22.1 – Вихідні данні

№	$\mathcal{E} \cdot 10^6$, В/м	$\Delta\mathcal{E} \cdot 10^6$, В/м	U_0 , еВ
1	4	2	2,5
2	5	2	2
3	10^6	3	1,5
4	4	10	4,5
5	8	2	4
6	4	3	5
7	6	2	3
8	3	3	4
9	2	3	5
10	2	10	2
11	10	10	5
12	5	2	1

22.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, ряд характеристик $D(E/U_0)$, для семи значень напруженості електричного поля \mathcal{E} , побудованих на одному рисунку (аналогічно для $R(E/U_0)$); графік $D(\mathcal{E})$ побудований за графіками попереднього пункту. Щоб отримати дані для побудови графіка $D(\mathcal{E})$ необхідно провести лінію на рисунку залежностей $D(E/U_0)$ перпендикулярно осі E/U_0 . Точки перетину її з залежностями $D(E/U_0)$.

22.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що означає термін „вільний електрон в металі”?
2. Що таке робота виходу електрона із металу?
3. Дайте визначення енергії Фермі.
4. Який вид має потенціальний бар’єр на межі метал-вакуум (при відсутності зовнішнього поля)?
5. Який вид приймає бар’єр на межі метал-вакуум внаслідок дії зовнішнього поля?
6. Як впливає на форму бар’єра поява „зображення” електрона, коли він покидає метал?
7. Що таке тунельний ефект?
8. Якою формулою визначається коефіцієнт прозорості для бар’єру довільного вигляду?
9. Якою формулою визначаються межі інтегрування в коефіцієнті прозорості?

ДОДАТОК А

ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ.

А.1 Основні положення теорії похибок

Якими б точними не були прибори, досконалыми методи вимірювань, при вимірюванні фізичної величини x (часу, довжини, тощо) неможливо отримати точне, “істинне значення” величини x_{icm} .

Якщо позначити x_i результат деякого i -того вимірювання величини x , то величину

$$\Delta x_i = x_i - x_{icm}, \quad (\text{A.1})$$

називають абсолютною похибкою даного вимірювання. Для характеристики точності вимірювання вводять також поняття відносної похибки

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{icm}}. \quad (\text{A.2})$$

Завдання, яке стоїть перед теорією похибок, є визначення похибок вимірювання фізичних величин.

Вимірювання поділяються на прямі та непрямі. Прямим називають вимірювання, завдяки якому значення величини знаходять безпосередньо з показань прибору. Прикладами прямих вимірювань є: вимірювання температури за допомогою термометра; довжини штангенциркулем – тощо.

При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини знаходять завдяки відомій залежності цієї величини від величин, які можуть бути виміряні шляхом прямих вимірювань. Наприклад, густину тіла – за його масою та розмірами, тощо.

Найважливіший клас похибок – випадкові похибки. Ці похибки обумовлені недосконалістю наших органів чуття, а тому не можуть бути усунуті.

А.2 Розрахунок випадкових похибок для прямих вимірювань

Нехай, вимірюючи багато разів деяку фізичну величину, наприклад, час, за який тіло проходить одну і ту ж відстань S отримали ряд значень $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, тоді за x_{icm} приймають середнє арифметичне

$$\langle x \rangle = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (\text{A.3})$$

яке при $n \rightarrow \infty$ повинно співпадати з x_{icm} .

Найважливіше завдання теорії похибок – знаходження інтервалу значень фізичної величини, в середині якого з деякою ймовірністю (яку називають довірчою ймовірністю) знаходиться величина

$$(\langle x \rangle - \Delta x) < x_{icm} < (\langle x \rangle + \Delta x). \quad (A.4)$$

Цей інтервал значень величини x називають довірчим інтервалом. Якщо, наприклад, ми гарантуємо, що вимірюючи один раз величину x за даною методикою, отримаємо результат, який лежить в межах даного інтервалу (A.4) з ймовірністю 95% , то довірна ймовірність $P_{дов}$ буде дорівнювати $P_{дов} = 0,95$.

Для обґрунтування методу обчислення похибок треба встановити закон, якому підпорядковуються випадкові відхилення величини, яка вимірюється. Ми тільки вкажемо основну ідею, яка полягає в припущенні (що є виправданим): невеликі відхилення Δx від x_{icm} є більш ймовірними ніж великі. На цій ідеї базується нормальний закон розподілу – закон Гауса. Але цей закон справедливий для великого числа вимірювань n .

В інженерній практиці базуються на розподілі Стюдента. Для кожної довірчої ймовірності P можна обчислити таке число t_{nP} (коефіцієнт Стюдента) для якого випадкова величина x , що підпорядковується розподілу Стюдента, буде знаходитися в межах

$$(\langle x \rangle - t_{nP}\sigma) < x_{icm} < (\langle x \rangle + t_{nP}\sigma), \quad (A.5)$$

де величина σ – середньоквадратичне відхилення результату вимірювань

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad (A.6)$$

де n – число вимірювань.

Таким чином $\Delta x = t_{nP}\sigma$. Коефіцієнти Стюдента для різного числа вимірювань приведено в таблиці А.1.

Таблиця А.1 – Залежність коефіцієнта Стюдента від числа вимірювань

n	2	3	4	5	10	100
t_{nP}	12.7	4.3	3.2	2.8	2.0	2.0

А.3 Розрахунок випадкових похибок для непрямих вимірювань

При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини F визначається за формулою

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{A.7})$$

де x_1, x_2, \dots, x_n – фізичні величини, які вимірюються прямо.

Абсолютна похибка ΔF непрямих вимірювань визначається за формулою:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}, \quad (\text{A.8})$$

де $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ – частинна похідна функції F за змінною x_i (при її обчисленні інші змінні вважаються сталими величинами); Δx_i – абсолютна похибка вимірювання величини x_i .

Результат непрямого вимірювання (кінцевий результат у звіті) подається у вигляді

$$F = \langle F \rangle \pm \Delta F \quad (\text{A.9})$$

де $\langle F \rangle = (\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle)$ – значення функції F від середніх значень змінних $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$.

Приклад. Обчислення випадкової похибки при розрахунку густини ρ твердого тіла циліндричної форми.

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h} = \frac{4}{\pi} \cdot m d^{-2} h^{-1},$$

де m – маса тіла; d – діаметр циліндра; h – висота циліндра.

В даному випадку $\rho = \rho(m, d, h)$. Згідно з (A.8)

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \Delta h\right)^2},$$

де

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{4}{\pi} \cdot m d^{-2} h^{-1} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot d^{-2} h^{-1};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8}{\pi} \cdot m d^{-3} h^{-1};$$

$$\frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{4}{\pi} \cdot m d^{-2} h^{-2}$$

А.4 Правила заокруглювання результатів обчислень.

1. В результаті обчислень абсолютної похибки вимірювань фізичної величини треба залишати лише першу значущу цифру.
2. В середньому значенні величини остання значуща цифра повинна бути одного й того ж порядку, що й перша значуща цифра похибки.

Приклад. При обчисленні прискорення земного тяжіння g були отримані результати:

$$\langle g \rangle = 9,737 \text{ м/с}^2 ; \quad \Delta g = 0,2364 \text{ м/с}^2.$$

У відповідності з формулою (А.9) та правилами (1) і (2) відповідь має наступний вигляд:

$$\langle g \rangle = (9,7 \pm 0,2) \text{ м/с}^2.$$

ДОДАТОК Б

МОДИФІКОВАНИЙ АЛГОРИТМ ЕЙЛЕРА

Нехай $\vec{r}(t)$, $\vec{V}(t)$, $\vec{a}(t)$ – радіус-вектор, вектор швидкості та вектор прискорення в момент часу t . $\vec{F}(t)$ – рівнодіюча сила, яка діє на матеріальну точку. Тоді рух матеріальної точки маси m можна описати за допомогою рівняння динаміки

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(x, y, z, t) \quad (\text{Б.1})$$

Згідно з (Б.1) рух точки для моментів часу $t > t_0$ визначено однозначно, якщо відомо початковий стан точки в момент часу t_0 (початкове положення $\vec{r}(t_0)$ та початкова швидкість $\vec{V}(t_0)$). Розглянемо наближені кінематичні формули:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x + V_x(t)\Delta t, & V_x(t + \Delta t) &= V_x(t) + a_x(t)\Delta t, \\ y(t + \Delta t) &= y + V_y(t)\Delta t, & V_y(t + \Delta t) &= V_y(t) + a_y(t)\Delta t, \\ z(t + \Delta t) &= z + V_z(t)\Delta t, & V_z(t + \Delta t) &= V_z(t) + a_z(t)\Delta t. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

З формул (Б.2) виходить, що положення та швидкість точки в момент часу $(t + \Delta t)$ можна обчислити, якщо відомі її положення, швидкість та прискорення в момент t , завданням початкового стану в момент t , а прискорення $a(t)$ – з динамічного рівняння Ньютона (Б.1)

$$a_x(t) = \frac{F_x(x, y, z, t)}{m}, \quad a_y(t) = \frac{F_y(x, y, z, t)}{m}, \quad a_z(t) = \frac{F_z(x, y, z, t)}{m}. \quad (\text{Б.3})$$

Таким чином, послідовно застосовуючи (Б.2) та (Б.3), можна визначити положення точки в будь-який момент часу.

Оскільки схема Ейлера має похибку обчислень $\sim \Delta t$, то для її зменшення застосовується модифікований метод Ейлера — коефіцієнти виразів (Б.2) (тобто значення швидкості та прискорення підставляються в момент часу, який відповідає середині інтервалу Δt , тобто в момент $t + \frac{\Delta t}{2}$). При цьому похибка розрахунків за формулами (Б.2), (Б.4) має порядок Δt^2 . Така видозмінена схема називається модифікованим методом Ейлера.

ДОДАТОК В

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОЇ ШВИДКОСТІ МОЛЕКУЛ

Згідно з [4] функції розподілу складових V_x , V_y швидкості молекули на площині XOY мають вигляд:

$$\varphi(V_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mV_x^2}{2kT}\right),$$

$$\varphi(V_y) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mV_y^2}{2kT}\right),$$

де m — маса молекули, T — абсолютна температура газу, k — стала Больцмана.

Ймовірність того, що швидкість деякої молекули має значення в межах V_x , $V_x + dV_x$, V_y , $V_y + dV_y$ буде визначатися за формулою:

$$dP_V = \varphi(V)dS = \frac{m}{2\pi kT} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)dS,$$

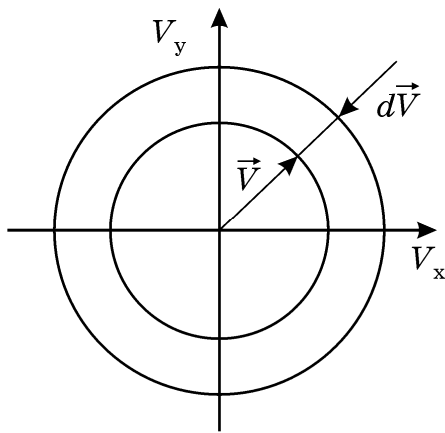


Рисунок В.1

де dS , згідно з рис.В.1, дорівнює $dS = 2\pi V dV$.

Таким чином, функція розподілу, яка характеризує ймовірність того, що величина швидкості лежить в межах V , $V + dV$

$$F(V) = \frac{dP}{dV} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right) \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) 2\pi V.$$

Ймовірну швидкість можна тоді знайти з умови максимуму функції $F(V)$:

$$\frac{dF(V)}{dV} = \frac{m}{2kT} \exp\left(-\frac{mV_i^2}{2kT}\right) \left(1 - \frac{m}{kT} V_i^2\right) = 0. \quad (\text{В.1})$$

Розв'язуючи рівняння (В.1), маємо $V_i = \sqrt{\frac{kT}{m}}$.

В трьохвимірному випадку, аналогічний розрахунок, як відомо, дає результат

$$V_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: Навч.-довідковий посібник/ Упоряд. Т. Б. Ткаченко, М. І. Українець, В. В. Калінін, А. І. Рибалка, А. В. Безуглий, А. І. Козарь, С. І. Мельник, В. О. Маслова. – Харків; ХНУРЕ, 2004. – 108 с.
2. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: Навч. посібник/ Упоряд. М. І. Українець, Т. Б. Ткаченко, В. В. Калініна та ін. – Харків; ХНУРЕ, 2000. – 164 с.
3. Квантова та ядерна фізика: Навч. посібник/ Упоряд. М. І. Українець, Т. Б. Ткаченко та ін. – Харків; ХНУРЕ, 2003. – 124 с.
4. Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
5. Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука, 1982. – 496 с.
6. Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
7. ДСТУ 3.008-95. Документація звіту у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. – К.: друк. ФПУ.
8. Лабораторний практикум з фізики / За ред. К.А.Барсукова та Ю.І.Уханова. – М.: Вищ. шк., 1988. – 351с.
9. Лабораторні заняття з фізики / За ред. Л.Л.Гольдїйна. – М.: Наука, 1973. – 688с.
10. Фізичний енциклопедичний словник/ За ред. А.М.Прохорова. – М.: Рад. енциклопідія, 1984. – 944с.