ИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ ФИЗИКИ
ЧАСТЬ 1

Харьков 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ ФИЗИКИ
ЧАСТЬ 1

для студентов-иностранцев всех направлений бакалаврата

дневной формы обучения

УТВЕРЖДЕНО
кафедрой физики.
Протокол № 8 от 29.03.2018.

Харьков 2019

Методичні вказівки до практичних занять з курсу фізики. Ч.1, для студентів-іноземців усіх напрямків бакалаврата денної форми навчання / Упоряд.: А.І. Рибалка, О.М. Коваленко, В.О. Стороженко, Р.П. Орел, А.І. Козар, С.М. Мєшков, В.В. Калінін, А.А. Онищенко, О.В. Мягкий, С.Г. Кравченко. – Харьков: ХНУРЕ, 2019. – 156 с. – Рос. мовою.

Упорядники: А.І. Рибалка,
О.М. Коваленко,
В.О. Стороженко,
Р.П. Орел,
А.І. Козар,
С.М. Мєшков,
В.В. Калінін,
А.А. Онищенко,
О.В. Мягкий,
С.Г. Кравченко

Рецензент О.Н. Юнакова, канд. фіз.-мат. наук, пров. наук. співробітник фізичного факультету ХНУ ім. В.Н. Каразіна.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения 4
1 Кинематика 5
2 Динамика поступательного движения 18
3 Работа, энергия, мощность. Законы сохранения в механике 31
4 Динамика вращательного движения 44
5 Механические колебания 57
6 Основы специальной теории относительности 73
7 Молекулярно-кинетическая теория. Термодинамика 84
8 Электрическое поле в вакууме 102
9 Диэлектрики в электрическом поле 117
10 Проводники в электрическом поле. Электроемкость 130
11 Постоянный электрический ток 141
Рекомендуемая литература 153

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Во время изучения дисциплины физики умение решать задачи – один из основных критериев оценки глубины изучения и усвоения материала, что свидетельствует о способности студента анализировать физические процессы и явления, уметь находить связь между этими явлениями, понимать границы применимости физических законов.

Данные методические указания содержат типовые задачи из механики, молекулярной физики и термодинамики, электростатики и электродинамики.

К каждому занятию даны указания к организации самостоятельной работы студентов, приведены краткие теоретические сведения по рассматриваемой теме в виде основных законов и формул.

Согласно цели занятия предложен набор теоретических вопросов общего характера. Их адаптация к конкретному направлению бакалаврата приведена в соответствующем пакете контрольных заданий. Данные вопросы могут быть использованы для текущей проверки знаний лекционного материала по теме в виде экспресс-контрольных.

Предложенный в каждой теме набор задач содержит в себе пять-шесть задач с пояснениями в виде краткого анализа и решения, а также тридцать задач для самостоятельного решения.

1 КИНЕМАТИКА

1.1 Цель занятия

Усвоить основные методы решения прямой и обратной задач кинематики, используя законы кинематики поступательного и вращательного движения.

1.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Прежде чем решать задачи по кинематике, нужно усвоить основные понятия и определения физических величин, которые используются в этом разделе. Обратите особое внимание на векторные и псевдовекторные величины (скорость, ускорение, угловая скорость, угловое ускорение), а также на формулы связи между векторными величинами [1, разд. 1; 2, разд. 1; 5, §1]. Повторите определение вектора, модуля вектора, проекции вектора на ось и действия над векторами.

Задачи кинематики делят на прямые и обратные. В первом случае находят скорость, ускорение тел и другие величины, используя известные кинематические уравнения движения. Решая обратную задачу по известным зависимостям от времени скорости или ускорения и начальным условиям, находят кинематические уравнения движения.

1.3 Основные законы и формулы

1. Кинематическое уравнение движения материальной точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

2. Средняя и мгновенная скорости материальной точки:

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение точки за промежуток времени Δt.

3. Модуль мгновенной скорости:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad \upsilon = \frac{ds}{dt}, \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2},$$

где Δs – путь, который прошла точка за промежуток времени Δt.

4. Средняя путевая скорость:

$$<\upsilon> = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

5. Среднее и мгновенное ускорение материальной точки:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

6. Модуль вектора мгновенного ускорения:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

7. Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

8. Полное ускорение при криволинейном движении:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

9. Путь и скорость для равноускоренного/равнозамедленного движения:

$$\Delta s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \quad \upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

где υ_0 – начальная скорость.

10. Длина пути, который прошла материальная точка за промежуток времени от t_1 до t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,dt.$$

11. Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

где $d\vec{\varphi}$ – элементарный угол поворота.

12. Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота произвольного радиуса от начального положения; Δt – промежуток времени, за который произошел данный поворот; T – период вращения; n – частота вращения.

13. Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

14. Угол поворота и угловая скорость для равноускоренного / равнозамедленного вращательного движения:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

15. Связь между линейными (длина пути ds, который прошла точка по дуге окружности радиусом R, линейная скорость υ, тангенциальная составляющая ускорения a_τ, нормальная составляющая ускорения a_n) и угловыми ($d\varphi$ – угол поворота, ω – угловая скорость, ε – угловое ускорение) величинами:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}],\ ds = |d\vec{r}| = R \cdot d\varphi,$$

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}],\ \upsilon = R\omega,$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}],\ a_\tau = \varepsilon R,$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}],\ a_n = \omega^2 R.$$

1.4 Контрольные вопросы

1. Что такое система отсчета?
2. Что такое траектория, перемещение, длина пути?
3. Какой вид имеет кинематический закон движения для координатного способа определения движения материальной точки?
4. Какой вид имеет кинематический закон движения для векторного способа определения движения материальной точки?
5. Какой вид имеет кинематический закон движения для естественного способа определения движения материальной точки?
6. Какое движение называется поступательным и вращательным?
7. Какую формулу можно использовать для нахождения пути, который прошла точка при неравномерном движении?
8. Что такое средняя скорость, мгновенная скорость?
9. Как найти вектор скорости для разных способов задания движения?
10. Что такое среднее ускорение, мгновенное ускорение?
11. Как найти вектор ускорения для различных способов определения движения?
12. Что характеризует тангенциальная и нормальная составляющие ускорения?
13. Что такое угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение?
14. Как связаны линейная и угловая скорости?
15. Как связана нормальная составляющая линейного ускорения с угловыми параметрами?
16. Как связана тангенциальная составляющая линейного ускорения с угловыми параметрами?

1.5 Примеры решения задач

Задача 1. Уравнение движения точки по прямой имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3.

Найти положение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с; среднюю скорость за время, прошедшее между этими моментами; мгновенные скорости в указанные моменты времени, среднее ускорение за указанный промежуток времени, мгновенные ускорения в эти моменты времени.

Дано: $x = A + Bt + Ct^3$, $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3, $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с.

Найти: x_1, x_2, $<\upsilon>$, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, $<a>$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Анализ и решение

Предложенная задача является примером прямой задачи кинематики. Кинематическое уравнение движения представлено в координатном виде $x = A + Bt + Ct^3$. Из этого уравнения можно найти разные физические величины, характеризующие движение материальной точки.

Положение точки, движущейся прямолинейно, в некоторый момент времени определяется расстоянием x точки от начала отсчета. Чтобы найти это расстояние, надо в уравнение движения подставить вместо времени t заданное значение времени

$$x_1 = \left(4 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^3\right) \text{м} = 9{,}6 \text{ м};$$

$$x_2 = \left(4 + 2 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 5^3\right) \text{м} = 39 \text{ м}.$$

Средняя путевая скорость по определению равна $<\upsilon>= \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где Δx – изменение расстояния x за промежуток времени Δt.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \left(39 - 9{,}6\right) \, м = 29{,}4 \text{ м};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left(5 - 2\right) \text{с} = 3 \text{ с};$$

$$<\upsilon>= \frac{29{,}4}{3} \text{ м/с} = 9{,}8 \text{ м/с}.$$

Общее выражение для вектора мгновенной скорости найдем, если продифференцируем по времени уравнение движения

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \left(B + 3Ct^2\right)\vec{i}.$$

Подставив сюда значения постоянных *B* и *C*, а также значение времени, получим:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 2^2\right) \text{м/с} = 4{,}4\vec{i} \text{ м/с};$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2\right) \text{м/с} = 17\vec{i} \text{ м/с}.$$

Модуль среднего ускорения по определению равен

$$<a>= \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t},$$

где $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ – изменение скорости υ за время Δt.

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = |17 - 4{,}4|\ \text{м/с} = 12{,}6\ \text{м/с},$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = |5 - 2|\ \text{с} = 3\ \text{с},$$
$$< a > = \frac{12{,}6}{3}\ \text{м/с}^2 = 4{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Общее выражение для вектора мгновенного ускорения получим, если продифференцируем по времени выражение для скорости.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 6Ct\vec{i}\ .$$

Подставив сюда значение C и заданные значения времени, получим

$$\vec{a}_1 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 2\vec{i}\ \text{м/с}^2 = 2{,}4\vec{i}\ \text{м/с}^2;$$
$$\vec{a}_2 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 5\vec{i}\ \text{м/с}^2 = 6\vec{i}\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $x_1 = 9{,}6$ м, $x_2 = 39$ м, $< \upsilon > = 9{,}8$ м/с, $\vec{\upsilon}_1 = 4{,}4\vec{i}$ м/с, $\vec{\upsilon}_2 = 17\vec{i}$ м/с, $< a > = 4{,}2$ м/с^2, $\vec{a}_1 = 2{,}4\vec{i}$ м/с^2, $\vec{a}_2 = 6\vec{i}$ м/с^2.

Задача 2. Автомобиль движется по закругленному шоссе с радиусом кривизны $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля – $S(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорение в момент времени $t = 5$ с.

Дано: $S(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2, $R = 50$ м, $t = 5$ с.

Найти: $\vec{\upsilon},\ \vec{a}_\tau,\ \vec{a}_n,\ \vec{a}.$

Анализ и решение

В данной задаче известна зависимость пути s от времени, то есть известно кинематическое уравнение движения $s(t)$. Используется естественный способ определения движения.

Прежде всего находим общее выражение для скорости автомобиля. Известно, что

$$\vec{\upsilon} = \vec{\tau}\upsilon = \vec{\tau}\frac{ds}{dt},$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории движения.

Взяв производную по времени от заданного уравнения пути s, получим

$$\upsilon = B + 2Ct\ .$$

Подставив сюда значения постоянных B и C, а также заданное значение времени, найдем модуль скорости

$$\upsilon = |10 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 5|\ \text{м/с} = 5\ \text{м/с}.$$

Вектор скорости, направленный по касательной к траектории, в данный момент времени равен

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = 5\vec{\tau}\ \text{м/с}.$$

Теперь найдем общее выражение для тангенциального ускорения. Из теории известно, что

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}.$$

Взяв производную по времени от общего выражения скорости и подставив значения постоянной C и времени, получим:

$$\vec{a}_\tau = 2C\vec{\tau} = -\vec{\tau}\ \text{м/с}^2.$$

Полученное выражение для тангенциального ускорения не содержит времени, это означает, что тангенциальное ускорение постоянное по величине; вектор $\vec{a}_\tau$ – противоположен направлению вектора скорости, модуль этого вектора равен $a_\tau = 1\ \text{м/с}^2$.

Модуль нормального ускорения найдем, подставив в общее уравнение его известные значения скорости и радиуса кривизны траектории

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{5^2}{50}\ \text{м/с}^2 = 0{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Полное ускорение будет геометрической суммой взаимно перпендикулярных тангенциального и нормального ускорений

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0{,}25}\ \text{м/с}^2 = 1{,}12\ \text{м/с}^2.$$

Направление вектора полного ускорения можно определить, если найти угол, образованный полным ускорением с направлением нормального ускорения

$$\cos(\vec{a}, \vec{a}_n) = \frac{a_n}{a} = \frac{0{,}5}{1{,}12} = 0{,}446,$$

$$(\vec{a}, \vec{a}_n) = 63^\circ 30'.$$

Ответ: $\vec{\upsilon} = 5\vec{\tau}\ \text{м/с}$, $\vec{a}_\tau = -\vec{\tau}\ \text{м/с}^2$, $a_n = 0{,}5\ \text{м/с}^2$, $a = 1{,}12\ \text{м/с}^2$, $(\vec{a}, \vec{a}_,) = 63^\circ 30'$.

Задача 3. Материальная частица движется с ускорением $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$м/с^2. Определить модуль скорости частицы и ее координаты в момент времени $t = 2$ с, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ ее скорость была $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с, а начальные координаты точки равны $x_0 = 1$м; $y_0 = 0$; $z_0 = 2$ м.

Дано: $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ м/с^2, $t = 2$ с, $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с,

$x_0 = 1$м, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ м.

Найти: $\upsilon,\ x,\ y,\ z.$

Анализ и решение

Предложенная задача – пример обратной задачи кинематики. Из определения вектора ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ находим $d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt.$

Интегрируя это выражение, получим

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)dt = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t\vec{k}.$$

Учитывая начальные условия $\vec{\upsilon}_0 = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, найдем

$$\vec{\upsilon} = \left(3 + t^2\right)\vec{i} + \left(2t^2 + 1\right)\vec{j} + \left(3t - 1\right)\vec{k}.$$

Модуль вектора $\vec{\upsilon}$ равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(3 + t^2\right)^2 + \left(2t^2 + 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2} = 12{,}5 \text{ м/с}.$$

Из определения проекций вектора $\vec{\upsilon}$ на оси координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

находим

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_x dt; \qquad \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \upsilon_y dt; \qquad \int_{z_0}^{z} dz = \int_0^t \upsilon_z dt,$$

$$x - x_0 = \int_0^t \left(3 + t^2\right)dt = 3t + \frac{t^3}{3};$$

$$y - y_0 = \int_0^t \left(2t^2 + 1\right)dt = \frac{2}{3}t^3 + t;$$

$$z - z_0 = \int_0^t \left(3t - 1\right)dt = \frac{3}{2}t^2 - t.$$

Подставив числовые данные, получим $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Ответ: $\upsilon = 12{,}5$ м/с, $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Задача 4. Маховик, вращающийся с постоянной частотой $n_0 = 10\,\text{с}^{-1}$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова стало равномерным, но уже с частотой $n = 6\,\text{с}^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность Δt торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Дано: $n_0 = 10\,\text{с}^{-1}$, $n = 6\,\text{с}^{-1}$, $N = 50$.

Найти: ε, Δt.

Анализ и решение

Если вращение происходит с постоянным угловым ускорением, то угловое ускорение ε маховика связано с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями соотношением

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \cdot \Delta\varphi;$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi};$$

но тогда

$$\Delta\varphi = 2\pi N, \ \omega = 2\pi n;$$

то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi} = \frac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Отрицательное угловое ускорение получили потому, что маховик вращался замедленно.

Для определения продолжительности торможения воспользуемся формулой, связывающей угол поворота φ со средней угловой скоростью $<\omega>$ вращения и временем t:

$$\Delta\varphi = <\omega> \cdot \Delta t, \ \Delta\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot \Delta t = \pi\left(n_0 + n\right) \cdot \Delta t,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\pi\left(n_0 + n\right)} = \frac{2N}{n_0 + n} = 6{,}25 \text{ с}.$$

Ответ: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2, $\Delta t = 6{,}25$ с.

1.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью $\upsilon_1 = 80$ км/ч, а вторую – со скоростью $\upsilon_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля?

Ответ: $<\upsilon> = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 53{,}3$ км/ч.

Задача 2. Зависимость пути, прошедшего телом, от времени задается уравнением $S = at^4 - bt^2$. Найти экстремальное значение скорости тела. Построить график зависимости скорости от времени за первые пять секунд движения, если $a = 0{,}25$ м/с^4, $b = 9$ м/с^2.

Ответ: $\upsilon_{min} = -29,3$ м/с.

Задача 3. Пароход идет по реке от пункта A до пункта B со скоростью $\upsilon_1 = 10$ км/ч, а обратно – со скоростью $\upsilon_2 = 16$ км/ч. Найти среднюю скорость парохода υ и скорость течения реки υ_p.

Ответ: 12,3 км/ч, 3 км/ч.

Задача 4. Подброшенный вертикально вверх камень находился на одной и той же высоте в моменты времени t_1=2,1 с и t_2=3,7 с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость υ_0, с которой был подброшен камень.

Ответ: $\upsilon_0 = g\dfrac{t_1 + t_2}{2} = 28,4$м/с.

Задача 5. Камень, брошенный с поверхности земли вертикально вверх, упал на землю через 3 с. Какова была начальная скорость камня? На какую высоту поднялся камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\upsilon_0 = 14,7$ м/с, $h = 11$ м.

Задача 6. Тело брошено с начальной скоростью $\upsilon_0 =$ 28 м/с под углом $\alpha = 42^o$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t =$ 1,2 с после начала движения тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения.

Ответ: $a_\tau = g\sin\beta = 3{,}12$ м/с^2, $a_n = g\cos\beta = 9{,}30$ м/с^2, где $\beta = arctg\dfrac{\upsilon_0\sin\alpha - gt}{\upsilon_0\cos\alpha}$.

Задача 7. Движение материальной точки задано уравнением: $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Определить момент времени, в который скорость точки $\upsilon = 0$. Найти координату и ускорение в этот момент. Построить графики зависимостей координаты, пути, скорости и ускорения от времени для этого движения.

Ответ: $t = 40$ с, $x = 80$ м, $a = -0{,}1$ м/с^2.

Задача 8. Зависимость пути S, который прошло тело, от времени t определяется уравнением $S = At - Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3. Найти: 1) зависимость скорости υ и ускорения a от времени t; 2) расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение через 2с после начала движения. Построить графики зависимостей пути, скорости и ускорения от времени для $0 \le t \le 3$ с через 0,5 с.

Ответ: 1) $\upsilon = \left(2 - 6t + 12t^2\right)$ м/с, $a = \left(-6 + 24t\right)$ м/с^2; 2) $s = 24$ м, $\upsilon = 38$ м/с, $a = 42$ м/с^2.

Задача 9. Зависимость пройденного телом пути s от времени t определяется уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, де $A = 6$ м, $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела в промежутке времени от 1 с до 4 сек. Построить графики зависимостей пути, скорости и ускорения от времени для $0 \le t \le 5$ с через 1 сек.

Ответ: $<\upsilon>= 7$ м/с, $<a>= 4$ м/с^2.

Задача 10. Зависимость пройденного телом пути s от времени t представлена уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0{,}14$ м/с^2, $D = 0{,}01$ м/с^3. Через какое время от начала движения ускорение тела будет равно 1 м/с^2? Чему равно среднее ускорение тела за этот промежуток времени?

Ответ: $t = 12$ с, $<a>= 0{,}64$ м/с^2.

Задача 11. Скорость камня, брошенного вертикально вверх, через промежуток времени $t = 2{,}2$ с уменьшилась в $n = 3{,}5$ раза. Определить начальную скорость υ_0 камня и высоту h его подъема.

Ответ: $\upsilon_0 = \dfrac{n}{n-1} gt = 30{,}2$ м/с, $h = \dfrac{n^2}{(n-1)^2}\dfrac{gt^2}{2} = 46{,}5$ м.

Задача 12. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$. Вычислить: s путь, который прошла частица за первые 10 с движения, модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ за то же время. Объяснить полученные результаты.

Ответ: $s = 500$ м, $|\Delta\vec{r}| = 500$ м.

Задача 13. Зависимость радиус-вектора частицы от времени описывается законом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$. Найти: скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы, модуль скорости υ в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $\vec{\upsilon} = (6t\vec{i} + 2\vec{j})$ м/с, $\vec{a} = 6\vec{i}$ м/с^2, $\upsilon = 6{,}3$ м/с.

Задача 14. Частица движется со скоростью $\vec{\upsilon} = (1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k})$ м/с. Найти: перемещение $\Delta\vec{r}$ частицы за первые 2 с ее движения; модуль скорости υ в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k})$ м, $\upsilon = 13$ м/с.

Задача 15. Камень брошен в горизонтальном направлении. Через 0,5 с после начала движения значение скорости камня стало в 1,5 раза больше его начальной скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти начальную скорость камня.

Ответ: $\upsilon_0 = 4{,}4$ м/с.

Задача 16. Диск радиусом $R = 0{,}6$ м вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость его углового ускорения от времени задается уравнением $\varepsilon = At$, где A = 3 рад/с^3. Определить угол $\Delta\varphi$ поворота диска за время $t = 2{,}2$ с после начала движения, линейную скорость точки υ на ободе диска и ее нормальное ускорение a_n для этого же момента времени.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{At^3}{6} = 5{,}32$ рад, $\upsilon = \dfrac{At^2}{2} R = 4{,}36$ м/с, $a_n = \dfrac{A^2t^4}{4} R = 31{,}6$ м/с^2.

Задача 17. Диск радиусом $R = 0{,}6$ м, вращаясь равноускоренно, за время $t = 2\ c$ достиг угловой скорости $\omega = 3{,}3$ рад/с. Определить для этого момента времени тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие ускорения.

Ответ: $a_\tau = \dfrac{\omega R}{t} = 0{,}99\ \text{м/с}^2$, $a_n = \omega^2 R = 6{,}53\ \text{м/с}^2$.

Задача 18. Три самолета выполняют разворот, двигаясь на расстоянии 60 м друг от друга. Средний самолет летит со скоростью 360 км/ч, двигаясь по дуге окружности радиусом 600 м. Определить ускорение каждого самолета.

Ответ: $a_1 = 18{,}5\text{м/с}^2$, $a_2 = 16{,}7\text{м/с}^2$, $a_3 = 15{,}15\ \text{м/с}^2$.

Задача 19. Тело проходит одинаковые участки пути с постоянными в пределах участка скоростями $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$. Определить среднюю скорость тела на всем пути.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\upsilon_i}}$.

Задача 20. Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ см. Зависимость пути от времени задана уравнением $x = Ct^3$, где $C = 0{,}1\ \text{см/с}^2$. Найти нормальное и тангенциальное ускорение в момент, когда линейная скорость точки равна $\upsilon = 0{,}3$ м/с

Ответ: $a_n = 4{,}5\ \text{м/с}^2$, $a_\tau = 0{,}06\ \text{м/с}^2$.

Задача 21. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2\ \text{рад/с}^2$. Через $t = 5{,}0$ с от начала движения полное ускорение колеса равно $a = 13{,}6\ \text{м/с}^2$. Найти радиус колеса.

Ответ: $R = 6{,}1$ м.

Задача 22. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени задается уравнением: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1\ \text{рад/с}^2$, $D = 1\ \text{рад/с}^3$. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2\ \text{м/с}^2$.

Ответ: $R = 1{,}2$ м.

Задача 23. Найти, во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента, когда вектор полного ускорения этой точки образует угол 30° с вектором ее линейной скорости.

Ответ: 1,7 .

Задача 24. Вентилятор вращается с частотой 900 оборотов за минуту. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до его полной остановки?

Ответ: $t = 10$ с.

Задача 25. Колесо, вращаясь равнозамедленно, во время торможения за одну минуту уменьшило свою скорость с 300 об/мин до 180 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время.

Ответ: $\varepsilon = -0,21$ рад/с^2, $N = 240$ об.

Задача 26. Наблюдатель, стоящий на платформе, увидел, что первый вагон электропоезда, приближающегося к станции, прошел мимо него за 4 с, а второй – за 5 с. После этого передний край поезда остановился на расстоянии 75 м от наблюдателя. Считая движение поезда равнозамедленным, определить его ускорение.

Ответ: $a = -0,25$ м/с^2.

Задача 27. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой начальной скоростью υ_0 с интервалом времени $\Delta t = 1,8$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить начальную скорость, если оба тела через промежуток времени $t = 5,5$ с после броска первого тела оказались на одной высоте *h*. Определить также эту высоту.

Ответ: $\upsilon_0 = \left(t - \dfrac{\Delta t}{2}\right) g = 45,1$ м/с, $h = \dfrac{gt(t - \Delta t)}{2} = 99,8$ м.

Задача 28. Тело брошено с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить расстояние *l* от места броска до точки, в которой тело окажется через первую половину времени своего движения.

Ответ: $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin\alpha}{2g}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = 12,9$м.

Задача 29. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени задается уравнением $\upsilon = A + Bt$, где $A = 0,6$ м/с; $B = 0,9$ м/с^2. Определить радиус *R* колеса, если угол α между векторами полного ускорения и линейной скорости через промежуток времени $t = 3$ с от начала движения равен 80°.

Ответ: $R = \dfrac{(A + Bt)^2}{Btg\alpha} = 2,13$ м.

Задача 30. Колесо радиусом $R = 42$ см вращается так, что зависимость угла поворота колеса от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $B = -1,6$ рад/с; $C = 0,8$ рад/с^2. Определить: момент времени t_1, когда полное ускорение $\vec{a}$ будет направлено под углом $\alpha = 75^{\circ}$ к скорости $\vec{\upsilon}$; момент времени t_2, при котором нормальная составляющая $\vec{a}_n$ ускорения точки на ободе совпадает по величине с тангенциальной составляющей $\vec{a}_\tau$ $\vec{a}_\tau$.

Ответ: $t_1 = \dfrac{\sqrt{2Ctg\alpha} - B}{2C} = 2,52$ с, $t_2 = \dfrac{\sqrt{2C} - B}{2C} = 1,79$ с.

2 ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1 Цель занятия

Усвоить методы классической механики и научиться решать задачи динамики поступательного движения материальной точки.

2.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Для достижения цели занятия необходимо изучить теорию данного раздела механики, изложенную в учебниках [1, разд. 2; 2, разд. 2; 5, §2] и в конспекте.

Основу динамики материальной точки составляют три закона Ньютона, которые справедливы только при выполнении следующих условий: движение тела рассматривается относительно инерциальной системы отсчета, тело должно быть материальной точкой постоянной массы, скорость тела должна быть значительно меньше скорости света в вакууме.

При решении задач по теме используется второй закон Ньютона, который имеет вид:

$\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ – равнодействующая всех сил, приложенных к данному телу.

В неинерциальной системе отсчета, которая движется поступательно с ускорением $\vec{a}_0$ относительно инерциальной системы, второй закон Ньютона имеет вид

$$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = m\vec{a},$$

где $\vec{F}_{ин} = m\vec{a}_0$ – сила инерции, $\vec{a}_0$ – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета.

Для решения задач с использованием второго закона Ньютона предложен метод, который включает последовательность действий:

1. Выяснить, используется ли этот закон в данной задаче, и нарисовать рисунок-схему взаимодействующих тел.

2. Найти и обозначить на схеме все силы, действующие на тела системы. Для каждого тела:

– записать основное уравнение динамики в векторной форме;

– выбрать соответствующую инерциальную систему отсчета;

– спроецировать силы на оси координат и записать второй закон Ньютона в виде системы скалярных уравнений: $\sum F_x = ma_x$; $\sum F_y = ma_y$; $\sum F_z = ma_z$,,

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на соответствующие оси.

3. Решить систему полученных уравнений относительно неизвестных величин.

Определение ускорения тел в задачах данного типа называют основной задачей динамики поступательного движения.

2.3 Основные законы и формулы

1. Импульс материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

где m – масса материальной точки; $\vec{\upsilon}$ – ее скорость.

2. Второй закон Ньютона (основной закон динамики материальной точки):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

3. Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}, \quad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

4. Ускорение, приобретаемое материальной точкой под действием сил,

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m},$$

где m – масса материальной точки; $\vec{F}_i$ – сила, действующая на тело (точку) со стороны i-го тела.

5. Третий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой.

6. Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормальной реакции опоры.

7. Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = const,$$

где n – количество материальных точек (или тел), входящих в систему; m_i – масса i-й материальной точки (тела); $\vec{\upsilon}_i$ – скорость i-й точки (тела).

8. Радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

9. Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

где m_i – масса i-й материальной точки; x_i, y_i, z_i – координаты i-й точки.

10. Закон движения центра масс

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

где $\vec{\upsilon}_C$ – скорость движения центра масс.

2.4 Контрольные вопросы и задания

1. Запишите понятие инертности.
2. Дайте определение массы.
3. Дайте определение силы.
4. Что такое инерциальная система отсчета?
5. Запишите первый закон Ньютона.
6. Запишите второй закон Ньютона.
7. Запишите третий закон Ньютона.
8. Что такое механический импульс тела?
9. Запишите закон сохранения импульса.
10. Что такое центр масс механической системы?
11. Что такое гравитационная сила и сила тяжести?
12. Дайте определение веса тела.
13. Дайте определение силы трения.
14. Запишите закон Гука.

2.5 Примеры решения задач

Задача 1. На наклонной плоскости находится груз массой $m_1 = 1$ кг, связанный нитью, перекинутой через блок, с другим грузом массой $m_2 = 3$ кг (рис. 2.1). Коэффициент трения между первым грузом и плоскостью $\mu = 0{,}2$, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити. Трением в блоке пренебречь.

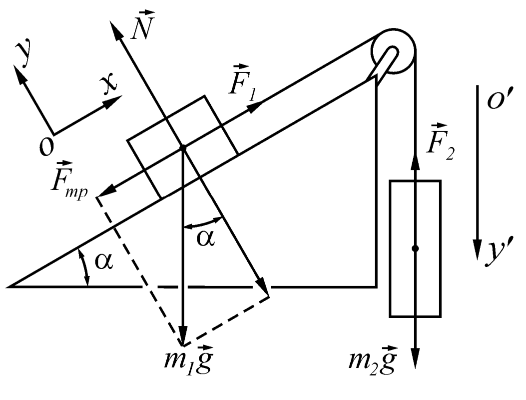

Рисунок 2.1

Дано: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 3$ кг, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0{,}1$.
Найти: $a,\ F$.

Анализ и решение

В задаче рассматриваются два тела, связанные нитью, движущиеся поступательно и равноускоренно. Таким образом, необходимо решить основную задачу динамики, для чего используется второй закон Ньютона. Так как нить нерастяжима (невесома и блок невесомый), ускорение этих тел и силы натяжения нитей равны по модулю:

$$\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \left|\overrightarrow{a_2}\right| = a,\ \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = F\ .$$

На груз массы m_1 действует сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Представим себе, что груз m_1 движется вверх по наклонной плоскости. Если это предположение неверное, тогда ускорение будет иметь отрицательное значение, т. е. движение грузов происходит в обратном направлении.

Для первого тела второй закон Ньютона в векторной форме имеет вид:

$$m_1\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m_1\vec{a}\ .$$

На груз m_2 действует только сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити:

$$m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a}\ .$$

Для каждого тела выберем свою инерциальную систему отсчета. Для первого груза свяжем ее с наклонной плоскостью, когда ось *Ox* направлена вверх по склону, а ось *Oy* перпендикулярно *Ox* вверх. Тогда второй закон Ньютона для первого тела в проекциях на оси *Ox* и *Oy* соответственно имеет вид:

$$-m_1 g\,sin\,\alpha - F_{тр} + F = m_1 a\ , \qquad (2.1)$$

$$-m_1 g\,cos\,\alpha + N = 0\ . \qquad (2.2)$$

Для второго тела инерциальную систему отсчета связываем с движением этого тела вниз, то есть ось $O'y'$ направлена вниз.

Тогда из уравнения движения для второго тела получим проекцию на ось $O'y'$:

$$-F + m_2 g = m_2 a\ . \qquad (2.3)$$

Сила трения равна

$$F_{тр} = \mu N\ . \qquad (2.4)$$

Если учитывать уравнения (2.2) и (2.4), то уравнения (2.1) и (2.3) превратятся в систему:

$$\begin{cases} -m_1 g\,sin\,\alpha - \mu m_1 g\,cos\,\alpha + F = m_1 a \\ F - m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем ускорение и силу натяжения нити

$$a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}60\ \text{м/с}^2,$$

$$F = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 12{,}3\ \text{Н}.$$

Ответ: $a = 7{,}60\ \text{м/с}^2$, $F = 12{,}3\ \text{Н}$.

Задача 2. Бак в тендере паровоза имеет длину $l = 4\ \text{м}$ (рис. 2.2). Какова разность Δl уровней воды у переднего и заднего концов бака при движении поезда с ускорением $a = 0{,}5\ \text{м/с}^2$.

Дано: $l = 4\ \text{м}$, $a = 0{,}5\ \text{м/с}^2$.
Найти: Δl.

Анализ и решение

В данном случае удобно выбрать неинерциальную систему отсчета (НСО), которая движется равноускоренно вместе с паровозом. В соответствии с принципом Даламбера для выполнения законов Ньютона НСО к воде следует дополнительно приложить силу инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$. В данном случае на воду действует со стороны бака сила реакции $\vec{N}$, перпендикулярная поверхности воды. Поскольку в НСО вода и бак неподвижны, то состояние воды может быть описано законами статики: равнодействующая всех сил равна нулю

$$\vec{P} + \vec{F}_{ин} + \vec{N} = 0.$$

Выбираем оси: Ox – горизонтальную и Oy – вертикальную. Записываем уравнения в проекциях на ось Ox:

$$ma - N\sin\varphi = 0,$$

на ось Oy:

$$N\cos\varphi - mg = 0.$$

Из полученных уравнений имеем:

$$tg\varphi = \frac{a}{g} = \frac{\Delta l}{l};\ \Delta l = l\frac{a}{g};\ \Delta l = 0{,}204\ \text{м}.$$

Ответ: $\Delta l = 0{,}204\ \text{м}$.

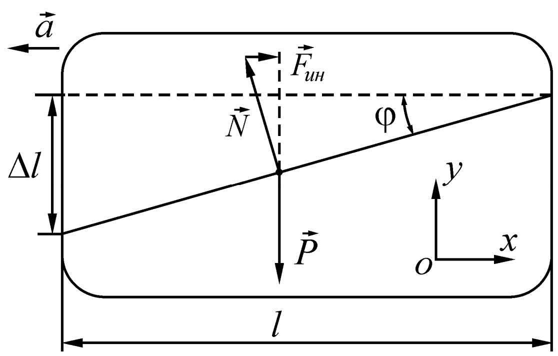

Рисунок 2.2

Задача 3. Тело массой 0,5 кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути S от времени t задается уравнением $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 5\ \text{м/с}^2$ и $D = 1\ \text{м/с}^3$. Найти силу, действующую в конце первой секунды движения.

Дано: $m = 0{,}5$ кг, $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, $C = 5$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3.

Найти: F.

Анализ и решение

Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma.$$

Известно, что

$$a = d\upsilon / dt.$$

В нашем случае

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2.$$

Таким образом,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 3C - 6Dt.$$

Тогда

$$F = ma = m(2C - 6Dt) = 2 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 2$Н.

Задача 4. Парашютист массой $m = 100$ кг выполняет затяжной прыжок с начальной скоростью $\upsilon_0 = 0$ (рис. 2.3). Найти закон изменения его скорости от времени до раскрытия парашюта и закон движения парашютиста. Принять во внимание, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения парашютиста: $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$, где $k = 20$кг/с.

Дано: $m = 100$ кг, $\upsilon_0 = 0$, $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$, $k = 20$ кг/с.

Найти: $\upsilon(t)$, $y(t)$.

Анализ и решение

В данной задаче следует найти один из кинематических параметров движения тела – его скорость как функцию времени. Это основная задача динамики, то есть можно применить второй закон Ньютона. Начало координат инерциальной системы отсчета расположено в точке O (рис. 2.3), с которой начинается движение парашютиста. Ось Oy направлена вертикально вниз.

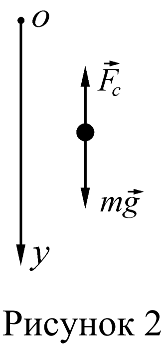

Рисунок 2.3

На парашютиста действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$. В этом случае второй закон имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_0 = m\vec{a}.$$

Его можно представить в виде дифференциального уравнения для неизвестной функции $\upsilon(t)$

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=mg-k\upsilon.$$

Разделив переменные, найдем:

$$-\frac{d\upsilon}{\frac{mg}{k}-\upsilon}=-\frac{k}{m}dt,$$

$$\frac{d\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)}{\frac{mg}{k}-\upsilon}=-\frac{k}{m}dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+C. \qquad (2.5)$$

Произвольную постоянную C определяем из начальных условий ($\upsilon=\upsilon_0=0$ при $t=0$):

$$C=\ln\frac{mg}{k}.$$

Подставив значение постоянной C в уравнение (2.5), находим закон изменения скорости парашютиста

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+\ln\frac{mg}{k},$$

$$\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Из этого уравнения следует, что при $t\to\infty$ скорость стремится к своему максимальному значению $\upsilon=\frac{mg}{k}$, которое равно 50 м/с.

Если закон изменения скорости известен, то решая обратную задачу кинематики, можно найти закон движения парашютиста:

$$dy=\upsilon(t)dt;$$

$$y(t)=\int_0^t\upsilon(t)dt;$$

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Ответ: $\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

Задача 5. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить с грузами одинаковой массы $M=1{,}4$ кг (рис. 2.4). На один из грузов положен дополнительный грузик массой $m = 0,2$ кг. Считая, что грузы сначала находились на одном уровне и пренебрегая трением, определить разность высот Δh, на которых будут находиться грузы через промежуток времени $t = 1$ с.

Дано: $M = 1,4$ кг, $m = 0,2$ кг, $t = 1$ с.

Найти: Δh.

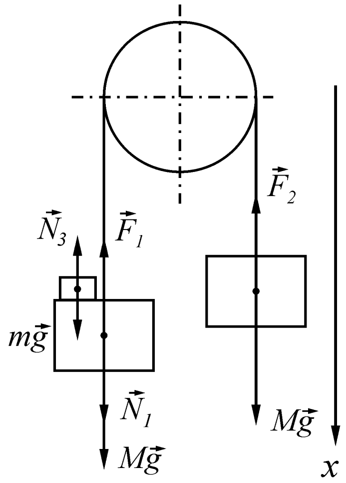

Рисунок 2.4

Анализ и решение

На каждый из грузов действуют: сила тяжести $M\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}$ (вследствие невесомости нити силы натяжения одинаковы), на второй груз действует также сила давления со стороны перегрузка $\vec{N}_1$. На дополнительный грузик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления $\vec{N}_3$ со стороны груза ($|\vec{N}_3| = |\vec{N}_1|$ в соответствии с третьим законом Ньютона). Поскольку нить нерастяжимая, ускорения обоих тел (и дополнительного грузика) одинаковые.

Второй закон Ньютона для каждого из тел в векторной форме:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1;$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_2;$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_3.$$

Эти уравнения в проекции на выбранную ось (рис. 2.4) приобретут вид:

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - F \\ -Ma = Mg - F \\ ma = mg - N \end{cases} \begin{cases} Ma = Mg + N - F \\ -Ma = Mg - F \\ ma = mg - N \end{cases},$$

(учли, что $F_1 = F_2 = F$ и $N_1 = N_3 = N$), откуда найдем ускорение

$$a = \frac{m}{2M + m} g. \qquad (2.6)$$

За время t каждый из грузов пройдет расстояние $h = \frac{at^2}{2}$, поэтому, учитывая выражение (2.6), искомая разность высот

$$\Delta h = 2h = \frac{m}{2M + m} g t^2 = 65,4 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta h = 65,4$ см.

2.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Под действием постоянной силы $F = 5$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t

описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$. Определить массу m тела, если $C = 2\ \text{м/с}^2$.

Ответ: $m = 1{,}25$ кг.

Задача 2. По выпуклому мосту радиусом $R = 72$ м движется автомобиль. Определите скорость υ автомобиля, если в верхней точке траектории сила его давления на мост в $n = 1{,}6$ раз меньше, чем при движении по горизонтальному участку пути.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{gR\dfrac{(n-1)}{n}} = 16{,}3\text{м/с}$.

Задача 3. Через блок, укрепленный на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 28^{\circ}$ и $\beta = 40^{\circ}$, переброшена нить, к которой прикреплены грузы с одинаковыми массами (рис. 2.5). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением, определите ускорение a грузов.

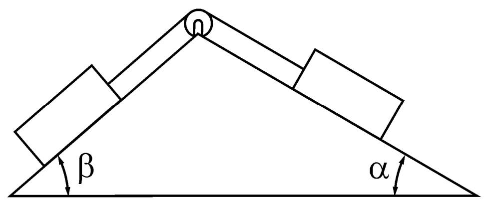

Рисунок 2.5

Ответ: $a = g\left(\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{2}\right) = 0{,}836\text{м/с}^2$.

Задача 4. Какой массы балласт необходимо сбросить с аэростата, который равномерно спускается, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом 1600 кг, подъемная сила аэростата $F = 12000\text{Н}$. Считать силу сопротивления воздуха одной и той же при подъеме и спуске.

Ответ: $m = 800\text{кг}$.

Задача 5. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4\text{кг}$. К бруску привязаны два шнура, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок, и силу натяжения T каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

Ответ: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m} = 1{,}40\ \text{м/с}^2$, $T_1 = m_1(g + a) = 11{,}2\ \text{Н}$, $T_2 = m_2(g - a) = 16{,}8\ \text{Н}$.

Задача 6. Наклонная плоскость, которая образует угол $\alpha = 25^{\circ}$ с плоскостью горизонта, имеет длину $l = 2м$. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время $t = 2c$. Определить коэффициент трения μ тела с плоскостью.

Ответ: $\mu = tg\alpha - \dfrac{2l}{gt^2\cos\alpha} = 0{,}35$.

Задача 7. Материальная точка массой $m = 2\text{кг}$ движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1\ \text{м/с}^2$,

$D = -0{,}2$ м/с^3. Найти значение этой силы в момент времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с. В какой момент времени сила равна нулю?

Ответ: $F_1 = -0{,}8$ Н, $F_2 = -8$ Н, $F = 0$ при $t = 1{,}67$ с.

Задача 8. Поезд массы $m = 500$ т после прекращения тяги паровоза останавливается под действием силы трения $F_{тр} = 0{,}1$МН за время $t = 1$мин. С какой скоростью υ ехал поезд до момента прекращения тяги паровоза?

Ответ: $\upsilon = \dfrac{t \cdot F_{тр}}{m} \approx 43$км/ч.

Задача 9. Стальная проволока выдерживает силу натяжения 4400Н. С каким максимальным ускорением можно поднимать груз массой 400 кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она при этом не разорвалась? Массой проволоки пренебречь.

Ответ: $a = 1{,}2$ м/с^2.

Задача 10. Масса лифта с пассажирами равна 800 кг. Найти, с каким ускорением и в каком направлении движется лифт, если известно, что натяжение троса, поддерживающего лифт, равно: 1) 12 кН ; 2) 6 кН.

Ответ: 1) $a_1 = 5{,}2$ м/с^2, вверх; 2) $a_2 = 2{,}3$ м/с^2, вниз.

Задача 11. Под действием постоянной силы $F = 10$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути s от времени дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$. Найти массу тела, если постоянная C=1 м/с^2.

Ответ: $m = 5$кг.

Задача 12. Тело массой $m = 100$кг равноускоренно поднимают на тросе вверх в течение $t = 3$ с на высоту $h = 10$м. Определите коэффициент упругости k троса, если его удлинение $\Delta x = 0{,}3$м.

Ответ: $k = \dfrac{m}{\Delta x}\left(g + \dfrac{2h}{t^2}\right) = 4$ кН/м.

Задача 13. Шарик массой m = 250 г, летящий со скоростью $\upsilon = 3{,}4$ м/с под углом $\alpha = 25°$ к горизонту, упруго ударяется о гладкую стену. Определите импульс p, полученный стеной вследствие удара.

Ответ: $p = 1{,}54$ Н$\cdot$с.

Задача 14. Тело массой $m = 1{,}2$ кг брошено с начальной скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 36°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите изменение импульса Δp тела за время его движения.

Ответ: $\Delta p = -16{,}9$ Н$\cdot$с.

Задача 15. Тело находится в равновесии на наклонной плоскости длиной $l = 16$ м с углом $\alpha = 28°$ к горизонту. Определите время, за которое тело соскользнет с плоскости, если угол наклона увеличить до $\beta = 40°$.

Ответ: $t=\sqrt{\dfrac{2l}{g\left(\sin\beta-\cos\beta tg\alpha\right)}}=3,26\text{ с}$.

Задача 16. Тело массой $m=5$кг брошено под углом $\alpha=30°$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0=20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти импульс силы $\vec{F}$, действующей на тело за время его полета; изменение Δp импульса за время полета.

Ответ: $F\Delta t=100$ Н·с; $\Delta p=100$ Н·с.

Задача 17. С какой силой F нужно действовать на тело массы $m=5$ кг, чтобы оно падало вертикально вниз с ускорением $a=15\text{м/с}^2$?

Ответ: $F=m(a-g)\approx 26$ Н.

Задача 18. Брусок массой $m_2=5$ кг может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. На нем находится другой брусок массой $m_1=1$ кг. Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей брусков $\mu=0,3$. Определить минимальное значение силы $F_{\min}$, приложенной к нижнему бруску, при которой начнется соскальзывание верхнего бруска.

Ответ: $F_{\min}=\mu(m_1+m_2)g=17,7$ Н.

Задача 19. Паровоз на горизонтальном участке пути, имеющем длину $s=600$ м, развивает силу тяги $F=147$ кН. Скорость поезда массой $m=1000$ т возрастает при этом от $\upsilon_0=36$ км/ч до $\upsilon=54$ км/ч. Найти силу сопротивления F_c движению поезда, считая ее постоянной.

Ответ: $F_c=F-ma=F-m(\upsilon^2-\upsilon_0^2)/2s\approx 4,3$ кН.

Задача 20. Двигатель тормозящей системы развивает силу тяги пропорциональную времени: $F=-kt$, где $k=500$ Н/с. Пренебрегая трением, определить, через какой промежуток времени t от включения двигателя тело массой $m=10^4$ кг, на котором установлен двигатель, остановится. В момент включения двигателя скорость тела была равна $\upsilon_0=10^3$ м/с.

Ответ: $t=200$ с.

Задача 21. Две гири массами $m_1=2$ кг и $m_2=1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение, с которым движутся гири и натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

Ответ: $a=\dfrac{g(m_1-m_2)}{m_1+m_2}=3,27\text{ м/с}^2$; $T_1=T_2=\dfrac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}=13,0$ Н.

Задача 22. Самолет летит в горизонтальном направлении с ускорением $a=20\text{ м/с}^2$. Какова перегрузка пассажира самолета (перегрузкой называется отношение силы F, действующей на пассажира, к силе тяжести P)?

Ответ: $F/P=2,27$.

Задача 23. На горизонтальной доске лежит груз. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует придать доске, чтобы груз соскользнул с нее? Коэффициент трения между грузом и доской $\mu=0,2$.

Ответ: $a > \mu g = 1{,}96$ м/с^2.

Задача 24. Начальная скорость υ_0 пули равна 800м/с. При движении в воздухе за время $t = 0{,}8$ с ее скорость уменьшилась до $\upsilon = 200$ м/с. Масса пули равна 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления k. Действием силы тяжести пренебречь.

Ответ: $k = \dfrac{m}{t} \cdot \dfrac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0 \upsilon} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ кг/м.

Задача 25. Найти ускорение a тела, что соскальзывает с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}3$.

Ответ: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 2{,}45$ м/с^2.

Задача 26. На тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени $F = kt$, где k – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти скорость тела в момент отрыва от плоскости; путь, пройденный телом к этому моменту.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $S = \dfrac{m^2g^3\,cos\,\alpha}{6k^2\,sin^3\,\alpha}$.

Задача 27. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от υ_0 до υ. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

Ответ: $t = \dfrac{h(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon_0\upsilon\ln(\upsilon_0 / \upsilon)}$.

Задача 28. Шар на нити подвешен к потолку вагона. Вагон тормозится, и его скорость за время t = 3 с равномерно уменьшается от $\upsilon_1 = 18$ км/ч до $\upsilon_2 = 6$ км/ч. На какой угол α отклонится при этом нить с шаром?

Ответ: $\alpha = 6°30'$.

Задача 29. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m_1 = 2$ кг. Коэффициент трения μ_1 бруска с поверхностью равен 0,2. На бруске находится другой брусок массой $m_2 = 8$ кг. Коэффициент трения μ_2 верхнего бруска с нижним равен 0,3. К верхнему бруску приложена сила F. Определить значение силы F_1, при которой начнется совместное скольжение брусков по поверхности; значение силы F_2, при которой верхний брусок начнет скользить относительно нижнего.

Ответ: $F_1 = \mu_1(m_1 + m_2)g = 19{,}6$ Н; $F_2 = (\mu_2 - \mu_1)\dfrac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)g = 39{,}2$ Н.

Задача 30. Тело сползает сначала с наклонной плоскости, которая составляет угол $\alpha = 8°$ с горизонтом, а затем движется по горизонтальной поверхности. Найти, чему равен коэффициент трения, если тело проходит по горизонтали такое же расстояние, как и по наклонной плоскости.

Ответ: $\mu = 0,07$.

3 РАБОТА, ЭНЕРГИЯ, МОЩНОСТЬ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

3.1 Цель занятия

Определение энергетических характеристик: работы консервативных и неконсервативных сил, механической энергии, мощности. Ознакомиться с законами сохранения импульса и энергии, научиться применять эти законы к решению задач.

3.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Пользуясь конспектом лекций и учебником [1, разд. 3; 2, разд. 3; 5, §2, 3], изучить законы сохранения. Проанализировав решения задач, приведенных как примеры, перейти к самостоятельной работе над рекомендованными задачами.

3.3 Основные законы и формулы

1. Элементарная работа постоянной силы $\vec{F}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha ds = F_s ds,$$

где $d\vec{r}$ – вектор элементарного перемещения; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$; $ds = |d\vec{r}|$ – элементарный путь; F_s – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

2. Работа переменной силы на пути S:

$$A = \int_s \vec{F}d\vec{r} = \int_s F_s ds = \int_s F\cos\alpha ds.$$

3. Работа переменной силы на пути от точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}.$$

4. Средняя мощность за промежуток времени Δt:

$$< N >= \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

5. Мощность (мгновенная мощность):

$$N = \frac{dA}{dt};\ N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha,$$

где $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости, с которой движется точка приложения силы $\vec{F}$; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{\upsilon}$.

6. Кинетическая энергия движущегося тела:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где m – масса тела; υ – его скорость.

7. Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией частицы:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U \text{, или } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

8. Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h,

$$U = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения.

9. Сила упругости:

$$F = -kx,$$

где x – абсолютная деформация; k – коэффициент жесткости.

10. Потенциальная энергия упруго деформированного тела:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости (в случае пружины k – коэффициент жестскости).

11. Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы):

$$T + U = E = const,$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgh = const \\ \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = const, \end{cases}$$

где T и U – соответственно кинетическая и потенциальная энергии тела.

12. Скорости двух тел массами m_1 и m_2 после прямого абсолютно упругого центрального удара:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \qquad \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Предполагается, что при прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2)$ и после $(\vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_2')$ удара лежат на прямой, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту прямую равны модулям скоростей.

13. Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара:

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

14. Изменение кинетической энергии тел при абсолютно неупругом центральном ударе (разница кинетической энергии тел до и после удара):

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_1\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

15. Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = const,$$

где n – число материальных точек (или тел), входящих в систему; m_i – масса i-й материальной точки (тела); υ_i – скорость i-й точки (тела).

3.4 Контрольные вопросы и задания

1. Что такое работа силы?
2. Что такое кинетическая энергия? Приведите примеры.
3. Что такое потенциальная энергия? Приведите примеры.
4. Как связана работа силы тяжести с потенциальной энергией?
5. Как потенциальная энергия связана с силой?
6. Докажите, что работа равнодействующей сил, приложенных к телу, равна приросту кинетической энергии.
7. Чему равна средняя мощность, мгновенная мощность?
8. Как мгновенная мощность связана с силой и скоростью движения?
9. Запишите закон сохранения импульса.
10. Запишите закон сохранения механической энергии.
11. Как работа связана с изменением кинетической энергии материальной точки?
12. Как работа связана с изменением потенциальной энергии материальной точки?
13. Какое взаимодействие тел называется абсолютно упругим ударом?
14. Какое взаимодействие тел называется неупругим ударом?
15. Какие законы сохранения выполняются и не выполняются при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударах?
16. Какие законы сохранения выполняются и не выполняются при частично упругом ударе?

3.5 Примеры решения задач

Задача 1. Материальная точка массой $m = 0{,}1$ кг движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с. В момент времени $t_0 = 0$ на нее начала действовать сила $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н. Эта сила действовала на протяжении $t_1 = 2$ с. Определить работу силы $\vec{F}$ и изменение кинетической энергии за 2 с.

Дано: $m = 0{,}1$кг, $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с, $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н, $t_0 = 0$; $t_1 = 2$ с.

Найти: A, ΔT.

Анализ и решение

Известно, что работа силы $\vec{F}$ равна изменению кинетической энергии:

$$A = \Delta T = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Скорость тела $\vec{\upsilon}_1$ в момент времени t_1 можно найти из основного уравнения динамики

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt};$$

$$d\vec{\upsilon} = \frac{1}{m}\vec{F}dt;$$

$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0 = \frac{1}{m}\int_0^{t_1}\vec{F}dt;$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{F}t_1}{m} + \vec{\upsilon}_0.$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j}}{0{,}1} + 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = 65\vec{i} + 44\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Тогда работа силы $\vec{F}$ и изменение кинетической энергии равны

$$A = \Delta T = \frac{m}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2) = \frac{0{,}1}{2}(65^2 + 44^2 + 3^2 - 5^2 - 4^2 - 3^2) = 306\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A = \Delta T = 306\ \text{Дж}$.

Задача 2. Пуля, двигаясь со скоростью $\upsilon_0 = 900$ м/с, пробивает стенку толщиной 50 см и вылетает из нее со скоростью $\upsilon = 350$ м/с. Найти время движения пули в стенке, считая сопротивление стенки пропорциональным кубу скорости движения пули.

Дано: $\upsilon_0 = 900$ м/с, $\upsilon = 350$ м/с, $d = 0{,}5$м, $F = -k\upsilon^3$.

Найти: t.

Анализ и решение

Во время движения пули в стенке на нее действует только сила сопротивления. Используя основной закон динамики поступательного движения, можем записать уравнение

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^3.$$

Разделив переменные в этом дифференциальном уравнении, получаем

$$\frac{md\upsilon}{\upsilon^3} = -kdt.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^3}=-k\int_0^t dt\,;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\upsilon_0^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\right)=-kt\,;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\upsilon_0^2-\upsilon^2}{\upsilon_0^2\upsilon^2}\right)=kt\,. \tag{3.1}$$

Работа силы сопротивления при перемещении пули на $d\vec{r}$ равна

$$dA=\vec{F}d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt=m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}\,.$$

Учитывая направление векторов, получаем уравнение

$$-k\upsilon^3dr=m\upsilon d\upsilon\,. \tag{3.2}$$

Разделив переменные в уравнении (3.2) и интегрируя, найдем

$$-k\int_0^d dr=m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}\,;\ -kd=m\left(-\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon_0}\right)\,; \tag{3.3}$$

$$m\frac{\upsilon_0-\upsilon}{\upsilon_0\upsilon}=kd\,.$$

Если разделить уравнение (3.1) на уравнение (3.3), найдем

$$t=\frac{(\upsilon_0+\upsilon)d}{2\upsilon_0\cdot\upsilon}=1{,}0\cdot10^{-3}\ \text{с}\,.$$

Ответ: $t=10^{-3}$ с.

Задача 3. Тело массой m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Найти среднюю мощность, которую развивает сила тяжести за все время движения тела; мгновенную мощность этой силы как функцию времени; мощность в верхней точке траектории; работу силы тяжести за t секунд движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: α, υ_0, m.

Найти: $<N>$, $N(t)$, N_b, $A(t)$.

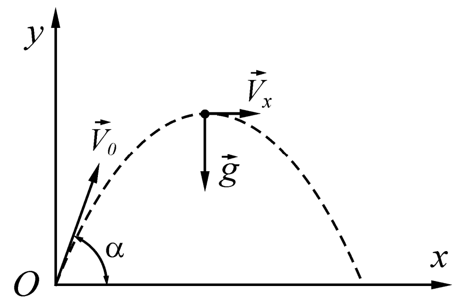

Рисунок 3.1

Анализ и решение

Найдем мгновенное значение мощности силы тяжести, используя формулу

$$N(t)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}\,.$$

Движение тела – равноускоренное, поэтому $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{g}t$. Учитывая направление векторов (рис. 3.1), найдем

$$N(t) = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon} = m\vec{g}(\vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t) = mg\upsilon_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + mg^2t =$$

$$= mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha).$$

В вершине траектории угол между векторами $\vec{g}$ и $\vec{\upsilon}$ равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$N_b = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon} = 0 .$$

Средняя мощность силы тяжести за все время движения равна

$$< N >= \frac{A}{t},$$

где A – работа силы тяжести; t – время движения.

Начальная и конечная точки траектории находятся на одинаковой высоте, поэтому $A = 0$, $< N >= 0$.

Из формулы $P = \frac{dA}{dt}$ находим работу силы тяжести за время t:

$$A(t) = \int_0^t Pdt = \int_0^t mg(gt - \upsilon_0 \sin\ \alpha)dt = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin\ \alpha\right).$$

Ответ: $< N >= 0$, $N_b = 0$, $N(t) = mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$,

$$A(t) = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin\ \alpha\right).$$

Задача 4. Шар массой m_1, который двигался горизонтально со скоростью υ_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, столкновение прямое . Какую долю *w* своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Дано: m_1, υ_1, m_2, $\upsilon_2 = 0$.

Найти*:* *w*.

Анализ и решение

Доля энергии, переданной первым шаром второму:

$$w = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2},$$

где T_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; T_2' – кинетическая энергия второго шара после удара; υ_1 – скорость первого шара до удара; u_2 – скорость второго шара после удара.

Для определения *w* следует найти u_2. Воспользуемся тем, что при абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Учитывая, что второй шар до столкновения был неподвижным, запишем эти законы:

$$m_1\upsilon_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

где u_1 – скорость первого шара после удара.

Решив уравнения, получим

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.4)$$

Подставив значение u_2 в уравнение для w, получим

$$w = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{2m_1\upsilon_1}{\upsilon_1\left(m_1 + m_2\right)}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}.$$

Ответ: $w = \dfrac{4m_1m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}$.

Задача 5. Ящик массой $m_1 = 20$ кг соскальзывает по идеально гладкому лотку длиной $l = 2$ м в неподвижную тележку с песком и застревает в нем. Тележка с песком массой $m_2 = 20$ кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость u тележки с ящиком, если лоток наклонен под углом $\alpha = 30°$ к рельсам.

Дано: $m_1 = 20$ кг, $l = 2$ м, $m_2 = 20$ кг, $\alpha = 30°$.

Найти: u.

Анализ и решение

Тележку и ящик можно рассматривать как систему двух взаимодействующих тел. Но эта система незамкнутая, потому что на нее действуют внешние силы: тяжести m_1g и m_2g и реакции опоры N_2 (рис. 3.2). Поэтому применить закон сохранения импульса к системе «ящик-тележка» нельзя. Так как проекции указанных сил на направление оси x, совпадающей с направлением рельсов, равны нулю, то проекцию импульса системы на это направление можно считать постоянной, то есть

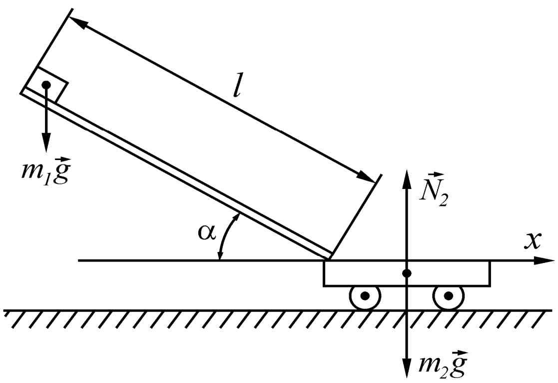

Рисунок 3.2

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \qquad (3.5)$$

где p_{1x} и p_{2x} – проекции импульса ящика и тележки с песком в момент падения ящика на тележку; p'_{1x} и p'_{2x} – те же величины после падения ящика.

Рассматривая тела системы как материальные точки, выразим в уравнении (3.5) импульсы тел через их массы и скорости, учитывая, что $p_{2x} = 0$ (тележка до взаимодействия с ящиком не двигалась), а также что после взаимодействия оба тела системы движутся с одной и той же скоростью u:

$$m_1\upsilon_{1x} = (m_1 + m_2)u,$$

или

$$m_1\upsilon_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2)u,$$

где υ_1 – модуль скорости ящика перед падением на тележку; $\upsilon_{1x} = \upsilon_1 \cos\alpha$ – проекция этой скорости на ось x.

Отсюда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (3.6)$$

Модуль скорости υ_1 определим из закона сохранения энергии:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2,$$

где $h = l\sin\alpha$, откуда $\upsilon_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}$.

Подставив выражение в формулу (3.6), получим:

$$u = \frac{m_1\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

После вычисления найдем:

$$u = \frac{20\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot \sin 30^\circ}}{20+80}\cos 30^\circ\ м/с = 0{,}767\ м/с.$$

Ответ: $u = 0{,}767\ м/с$.

Задача 6. Пуля, летящая горизонтально, попадает в тело, висящее на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы тела. Расстояние от точки подвеса стержня до центра 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с телом отклонился от удара пули на угол 10°.

Дано: $m_2 = 1000m_1$, $l = 1$ м; $\alpha = 10^\circ \approx 0{,}17$ рад.

Найти: υ.

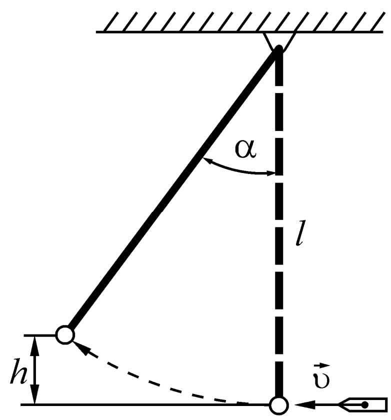

Рисунок 3.3

Анализ и решение

Запишем закон сохранения импульса для неупругого удара в проекции на ось x (рис. 3.3):

$$m_2\upsilon = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u. \tag{3.7}$$

Здесь υ – скорость пули до столкновения; u – скорость пули и тела после столкновения. В выражении (3.7), кроме υ, неизвестна еще скорость u, которую можно найти по закону сохранения энергии.

Пусть в результате столкновения с телом центр массы тела поднялся на высоту h, тогда, по закону сохранения энергии,

$$\left(m_1 + m_2\right)u^2 / 2 = \left(m_1 + m_2\right)gh,$$

откуда

$$u^2 = 2gh. \tag{3.8}$$

Из рис. 3.3 имеем $h = l - l\cos\alpha = l\left(1 - \cos\alpha\right)$. Подставим выражение для h в уравнение (3.8):

$$u^2 = 2gl\left(1 - \cos\alpha\right),$$

откуда

$$u = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)}.$$

Тогда уравнение (3.7) можно привести к виду

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)}. \tag{3.9}$$

Используя тригонометрическое уравнение $\sin\left(\alpha / 2\right) = \sqrt{\left(1 - \cos\alpha\right) / 2}$, преобразуем выражение (3.9):

$$\upsilon = 2\frac{m_1 + m_2}{m_1}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl} \approx 570 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon \approx 570$ м/с

3.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Шар массой $m_1 = 6$ кг налетел на другой шар $m_2 = 4$ кг, который находился в состоянии покоя. Импульс p_1 первого шара до удара составил 5 кг · м/с. Удар шаров прямой, неупругий. Определить изменение импульса первого шара.

Ответ: $\Delta p = 2$ кг · м/с.

Задача 2. В лодке массой $m_1 = 240$ кг стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Лодка плывет со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon = 4$ м/с (относительно лодки). Найти скорость лодки u после прыжка человека, рассмотрев два случая: человек прыгает вперед по движению лодки; в направлении, противоположном направлению движения лодки.

Ответ: $u_1 = 1$ м/с, $u_2 = 3$ м/с.

Задача 3. На железнодорожной платформе установлена пушка. Масса платформы с пушкой $M = 15$ т. Пушка стреляет вверх под углом $\varphi = 60°$ к горизонту в направлении движения. С какой скоростью υ_1 будет двигаться платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетел со скоростью $\upsilon_2 = 600$ м/с.

Ответ: $\upsilon_1 = 0,4$ м/с.

Задача 4. Пуля массой $m = 10$ г, летевшая со скоростью $\upsilon = 600$ м/с, попала в баллистический маятник массой $M = 5$ кг и застряла в нем. На какую высоту h после удара, поднялся маятник?

Ответ: $h = 7,34$ см.

Задача 5. Шар массой $m_1 = 6$ кг налетел на второй шар $m_2 = 4$ кг, который находился в состоянии покоя. Импульс p_1 первого шара до удара составил 5 кг·м/с. Удар шаров прямой, неупругий. Определить изменение ΔU внутренней энергии шаров.

Ответ: $\Delta U = 0,83$ Дж.

Задача 6. Конькобежец, разогнавшись до скорости $\upsilon = 21$ км/ч, въезжает на горку с уклоном $\alpha = 20°$ на высоту $h = 1,6$ м. Определите коэффициент трения μ коньков об лед.

Ответ: $\mu = 0,03$.

Задача 7. Санки, движущиеся по льду со скоростью $\upsilon = 11$ км/ч, въезжают на горку с уклоном $\alpha = 10°$ на высоту $h = 2,5$ м. Определите коеффициент трения μ санок об лед.

Ответ: μ= 0,14.

Задача 8. Мощность N двигателей самолета при отрыве от Земли равна 820 кВт. Масса самолета – $m = 5,2$ т. Разгоняясь равноускоренно, самолет достигает скорости $\upsilon = 32$ м/с. Считая, что коэффициент сопротивления $\mu = 0,04$ не зависит от скорости, определите длину пробега S самолета перед взлетом.

Ответ: $S = 113$ м.

Задача 9. Тело массой 0,5 кг скользит с горки, длина которой равна l=2 м, а высота h=1 м. После того, как тело съехало к подножию горки, выяснилось, что оно выполнило работу A = 4,4 Дж. Определить коэффициент трения между телом и поверхностью горки.

Ответ: μ = 0,06.

Задача 10. Шар массой $m_1 = 16$ г, движущийся горизонтально, столкнулся с шаром массой $m_2 = 0,8$ кг, который висит на прямом невесомом стержне длиной $l = 1,7$ м. Считая удар упругим, определите скорость шарика υ_1, если угол отклонения стержня после удара $\alpha = 20°$.

Ответ: $\upsilon_1 = 36,2$ м/с.

Задача 11. Шар, движущийся со скоростью υ_1, налетает на неподвижный шар, масса которого в $n = 1,5$ раза больше первого. Определите отношение скорости первого шара υ_1' и скорости второго шара υ_2' после удара. Удар считать упругим, центральным и прямым.

Ответ: $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'} = \frac{n-1}{2} = 0,25$.

Задача 12. Падающий вертикально шарик массой $m = 200$ г ударился об пол со скоростью $\upsilon = 5$ м/с и подпрыгнул на высоту $h = 46$ см. Найти изменение Δp импульса шарика при ударе.

Ответ: $\Delta p = m\left(\upsilon + \sqrt{2gh}\right) = 1,6$ кг $\cdot$ м/с **.**

Задача 13. Пушка, стоящая на гладкой горизонтальной площадке, стреляет под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Масса снаряда $m = 20$ кг, его начальная скорость $\upsilon = 200$ м/с. Какую скорость u приобретет пушка при выстреле, если ее масса $M = 500$ кг?

Ответ: $u = -\left(m\upsilon\cos\alpha\right) / M = -7$ м/с **.**

Задача 14. Снаряд массой $m = 20$ кг, летящий со скоростью $\upsilon = 800$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к вертикали, попадает в платформу с песком и застревает в ней. Найти скорость платформы u после попадания снаряда, если ее масса $M = 16$ т.

Ответ: $u = m\upsilon\sin\alpha / (m + M) \approx 0,5$ м/с.

Задача 15. Материальная точка массой $m = 1$ кг двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси *x*, согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0,2$ м/с^3. Определите мощность N, которая затрачивается на движение точки за время $t = 2$ с.

Ответ: $N = 2,16$ Вт.

Задача 16. Сила $F = 0,5$ Н действует на тело массой $m = 10$ кг в течение $t = 2$ с. Найти конечную кинетическую энергию тела *T*, если начальная кинетическая энергия равна нулю.

Ответ: $T = (Ft)^2 / 2m = 0,05$ Дж.

Задача 17. С башни высотой $h = 62$ м горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с бросили камень массой $m = 120$ г. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите кинетическую T и потенциальную U энергию камня через $t = 3\ c$ после броска.

Ответ: $T = \frac{m}{2}\left(\upsilon_0{}^2 + g^2t^2\right) = 60,6$ Дж; $U = mg\left(h - \frac{gt^2}{2}\right) = 21$Дж.

Задача 18. Определить работу, которая выполняется на пути $s = 12$ м силой, равномерно возрастающей от $F_1 = 10$ Н до $F_2 = 26$ Н.

Ответ: $A = 216$ Дж.

Задача 19. Какую работу выполнил мальчик, стоящий на гладком льду, толкнув санки со скоростью $\upsilon = 4$ м/с относительно льда, если масса санок $m = 4$ кг, а масса мальчика $M = 20$ кг?

Ответ: $A = \left(m + M\right)m\upsilon^2 / 2M = 38,4$ Дж.

Задача 20. Тяжелый шарик, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити длиной l отклоняют от вертикали на угол α и затем отпускают. Какую максимальную скорость υ получит шарик?

Ответ: $\upsilon = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)$.

Задача 21. Камень массой $m = 5$ кг упал с некоторой высоты. Найти кинетическую энергию T камня в средней точке его пути, если он падал в течение времени $t = 2$ с.

Ответ: $T = mg^2t^2/4 = 480$ Дж.

Задача 22. Определите работу A, которую необходимо выполнить, чтобы сжать пружину на $x = 15$ см, если известно, что сила пропорциональна деформации и под действием силы $F = 50$ Н пружина сжимается на $x_0 = 2,25$ см.

Ответ: $A = \dfrac{Fx^2}{2x_0} = 25$ Дж.

Задача 23. С какой скоростью υ вылетает из пружинного пистолета шарик массой $m = 10$ г, если пружина была сжата на $x = 5$ см? Жесткость пружины равна $k = 200$ Н/м.

Ответ: $\upsilon = 7,07$ м/с.

Задача 24. Стальной шарик массой $m = 50$г падает с высоты $h = 1,0$ м на горизонтальную поверхность массивной плиты. Найти суммарный импульс, который он передает плите вследствие многократных столкновений, если при каждом ударе скорость шарика изменяется в $\eta = 0,8$ раз.

Ответ: $p = \dfrac{m\sqrt{2gh}(1+\eta)}{1-\eta} = 2\,\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 25. Две одинаковые платформы двигаются друг за другом по инерции (без трения) с одинаковой скоростью υ_0. На задней платформе находится человек массой m. В какой-то момент человек прыгнул на переднюю платформу со скоростью u относительно своей платформы. Масса каждой платформы M. Найти скорости, с которыми будут двигаться обе платформы после этого.

Ответ: $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \dfrac{mM}{(m+M)^2}u$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 - \dfrac{m}{m+M}u$.

Задача 26. Какую кинетическую энергию T приобретает тело массой $m = 1$ кг во время падения без начальной скорости через промежуток времени $\Delta t = 5$ с после начала падения?

Ответ: $T = mg^2(\Delta t)^2/2 = 1,2$ кДж.

Задача 27. К шнуру подвешена гиря. Гирю отвели в сторону так, что шнур принял горизонтальное положение, и отпустили. Чему равна сила натяжения шнура в момент, когда гиря проходит положение равновесия? Какой угол с вертикалью φ составляет шнур в момент, когда сила натяжения шнура равна силе тяжести гири?

Ответ: $T = 3\ mg$, $\varphi = 70°$.

Задача 28. Потенциальная энергия частицы имеет вид: а) $U = \alpha/r$, б) $U = kr^2/2$, где r – модуль радиус-вектора частицы, α и k – константы. Найти силу, действующую на частицу, и работу, совершаемую при переходе частицы из точки В (1,2,3) в точку С (2,3,4).

Ответ: а) $\vec{F} = \dfrac{\alpha}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$, $A = 0{,}0822\alpha$; б) $\vec{F} = -k\vec{r}$, $A = -7{,}5k$.

Задача 29. Два тела массами m и $3m$ двигаются во взаимно перпендикулярных направлениях. После соударения тело массой m остановилось. Какую часть его энергии составляет тепло, выделившееся при ударе?

Ответ: $Q/W_{k1} = 2/3$.

Задача 30. Тело соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. В нижней точке тело ударяется о стенку, перпендикулярную плоскости. Определите коэффициент трения при движении тела, если после абсолютно упругого удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

Ответ: $\mu = tg\,\alpha/3$.

Задача 31. На платформе, вращающейся горизонтально, на расстоянии $R = 50$ см от оси вращения лежит груз. При какой частоте вращения платформы груз начнет соскальзывать? Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0{,}05$.

Ответ: $n > \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}} \approx 0{,}16$ об/с.

Задача 32. Тело массы $m = 200$ г равномерно вращается в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 0{,}5$ м с частотой $n_1 = 3$ об/с. Какую работу нужно выполнить, чтобы увеличить частоту вращения до $n_2 = 5$ об/с?

Ответ: $A = 2\pi^2 R^2 m(n_2^{\ 2} - n_1^{\ 2}) = 15{,}8$ Дж.

4 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1 Цель занятия

Усвоить методику решения задач динамики твердого тела: вращения вокруг неподвижной оси и сложного плоского движения.

4.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Повторите определения основных физических величин, характеризующих движение твердого тела, момента силы, момента импульса, момента инерции [1, разд. 4; 2, разд. 4; 5, §3]. Обратите внимание на то, что плоское движение твердого тела описывают векторные уравнения: уравнение движения центра масс и основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

4.3 Основные законы и формулы

1. Момент инерции материальной точки:

$$J = mr^2,$$

где m – масса точки; r – ее расстояние до оси вращения.

2. Момент инерции системы материальных точек, тела:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \; J = \int r^2 dm,$$

где r_i – расстояние i-й материальной точки массой m_i до оси вращения.

3. Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; m – масса тела)

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12} ml^2$
	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5} mR^2$

4. Теорема Штейнера:

$$J = J_C + ma^2,$$

где J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m – масса тела.

5. Кинетическая энергия вращения тела:

$$T_{вр} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – его угловая скорость.

6. Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

где m – масса тела; υ_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

7. Момент силы относительно неподвижной точки:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$.

8. Модуль вектора момента силы:

$$M = Fl,$$

где l – плечо силы.

9. Момент силы относительно неподвижной оси:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z.$$

10. Работа при вращении тела:

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела; M_z – момент силы относительно неподвижной оси z.

11. Момент импульса материальной точки *A* относительно неподвижной точки *O*:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right],$$

где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – импульс материальной точки.

12. Модуль вектора момента импульса

$$L = pr\sin\alpha = m\upsilon r\sin\alpha = pl,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$; – плечо вектора относительно точки *O*.

13. Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z \omega,$$

где r_i – расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i \upsilon_i$ – импульс этой частицы; J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела.

14. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси (уравнение моментов):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \; M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

15. Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы

$$\vec{L} = const, \; J_z \omega = const,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела.

4.4 Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен момент инерции материальной точки, системы материальных точек?
2. Чему равен момент инерции твердого тела?
3. Чему равен момент силы относительно неподвижной точки и оси?
4. Чему равен момент импульса частицы относительно неподвижной точки и оси?
5. Чему равен момент импульса твердого тела, которое вращается относительно неподвижной оси?
6. Запишите и проанализируйте уравнение моментов.
7. Сформулируйте и докажите теорему Штейнера.
8. Запишите выражение для кинетической энергии вращательного движения твердого тела.
9. Запишите выражение для кинетической энергии твердого тела в случае плоского движения.
10. Чему равна работа внешних сил при вращении твердого тела относительно неподвижной оси?

4.5 Примеры решения задач

Задача 1. Два груза массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение, с которым движутся грузы; силы натяжения F_1 и F_2 нитей, к которым прикреплены грузы. Блок считать однородным диском, трением пренебречь.

Дано: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m = 1$ кг.

Найти: a, F_1, F_2.

Анализ и решение

Грузы движутся поступательно, блок вращается, запишем основное уравнение динамики поступательного движения грузиков и вращательного движения блока:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F}_1 = m_1\vec{a} \\ m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a} \\ \vec{M}_1' + \vec{M}_2' = J\vec{\varepsilon}, \end{cases} \qquad (4.1)$$

где $J = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент инерции блока; $\vec{M}_1' = \left[\vec{r}, \vec{F}_1'\right]$, $\vec{M}_2' = \left[\vec{r}, \vec{F}_2'\right]$ – моменты сил натяжения, действующих на блок. Силы, действующие на грузы и блок, обозначены на рис. 4.1.

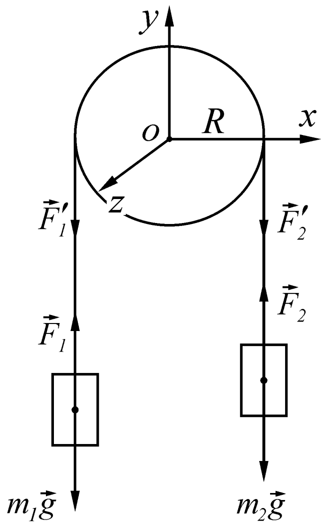

Рисунок 4.1

Спроецировав векторы уравнений (4.1) на координатные оси Oz и Oy, запишем ($F_1' = F_1$; $F_2' = F_2$):

$$\begin{cases} F_1 - m_1 g = -m_1 a \\ F_2 - m_2 g = m_2 a \\ (F_1 - F_2)R = J\varepsilon. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, учитываем, что угловое ускорение блока в зависимости от ускорения грузиков (в данном случае тангенциального ускоре-ния) описывается формулой $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, находим искомые параметры:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} = 2{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$F_1 = \frac{m_1\left(2m_2 + \dfrac{m}{2}\right)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g = 14 \text{ Н}.$$

$$F_2 = \frac{m_2\left(2m_1 + \dfrac{m}{2}\right)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g = 12{,}6 \text{ Н}.$$

Ответ: $a = 2{,}8$ м/с^2, $F_1 = 14$ Н, $F_2 = 12{,}6$ Н.

Задача 2. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 37°$ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной диск. Пренебрегая трением, определите скорость υ диска через $t = 4$ с после начала движения.

Дано: $\alpha = 37°$, $t = 4$ с.

Найти: υ.

Анализ и решение

Согласно закону сохранения механической энергии, при скатывании диска его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \tag{4.2}$$

где m – масса диска; J – момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс; υ – скорость центра масс диска; ω – угловая скорость относительно оси, проходящей через центр масс.

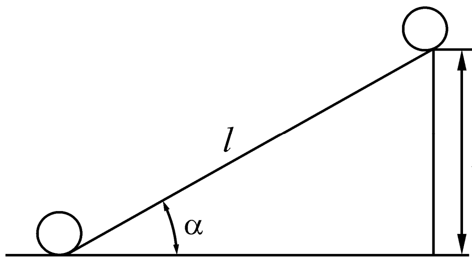

Рисунок 4.2

Учитывая то, что $h = l\sin\alpha$ (рис. 4.2), $\upsilon = \omega R$, а момент инерции сплошного диска $J = \frac{mR^2}{2}$ (R – радиус диска), выражение (4.2) запишется в виде

$$mgl\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{4} = \frac{3}{2}m\upsilon^2. \tag{4.3}$$

Поскольку $l = \frac{at^2}{2}$ и $a = \frac{\upsilon}{t}$ ($\upsilon_0 = 0$), из выражения (4.3) найдем искомую скорость

$$\upsilon = \frac{2}{3}gt\sin\alpha = 15{,}7 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 15{,}7$ м/с.

Задача 3. Маховик в виде однородного сплошного диска радиусом $R = 35$ см и массой m = 2,1 кг вращается с частотой $n = 360$ мин$^{-1}$. После приложения к диску постоянной касательной силы торможения он останавливается за время t=2 мин. Определите работу силы торможения; силу торможения F.

Дано: $R = 0{,}35$ м, m = 2,1 кг, $n = 6$ с$^{-1}$, $t = 120$ с.

Найти: A, F.

Анализ и решение

Вследствие торможения диск останавливается, поэтому работа силы торможения

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (4.4)$$

где $J = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска относительно оси вращения;

$\omega = 2\pi n$ – угловая скорость. Подставив эти выражения в формулу (4.4), найдем работу силы торможения

$$A = \pi^2 n^2 m r^2 = 91{,}3 \text{ Дж}.$$

Момент силы торможения

$$M = FR, \qquad (4.5)$$

где R – радиус диска (в нашем случае плечо силы). С другой стороны, согласно основному закону динамики вращательного движения,

$$M = J\varepsilon, \qquad (4.6)$$

где угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}.$$

Приравняв выражения (4.5) и (4.6), найдем искомую силу

$$F = \frac{\pi m n R}{t} = 0{,}115 \text{ Н}.$$

Ответ: $A = 91{,}3$ Дж; $F = 0{,}115$ Н.

Задача 4. Человек сидит в центре скамьи Жуковского, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 30$ мин$^{-1}$. В вытянутых в стороны руках он держит гантели массой $m = 5$ кг каждая. Расстояние от каждой гантели до оси вращения $l_1 = 60$ см. Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $J_0 = 2$ кг·м^2. Определите: 1) частоту n_2 вращения скамьи с человеком; 2) какую работу A выполнит человек, когда он прижмет гантели к себе так, что расстояние от каждой гантели до оси будет равно $l_2 = 20$ см?

Дано: $n_1 = 0{,}5$ с$^{-1}$, $m = 5$ кг, $l_1 = 0{,}6$м, $J_0 = 2$ кг·м^2, $l_2 = 0{,}2$ м.
Найти: n_2, A.

Анализ и решение

По условию задачи момент внешних сил относительно вертикальной оси равен нулю, поэтому момент импульса этой системы сохраняется, то есть

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (4.7)$$

где $J_1 = J_0 + 2ml_1^2$ и $J_2 = J_0 + 2ml_2^2$ – соответственно моменты инерции всей системы до и после сближения; m – масса каждой гири. Угловая скорость $\omega = 2\pi n$. Подставляя эти выражения в уравнение (4.7), получим искомую частоту вращения:

$$n_2 = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2} n_1 = 1{,}17\text{с}^{-1}.$$

Работа, выполненная человеком, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Выразив из уравнения (4.7) $\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_1}{J_2}$, получим:

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}\left(J_1 - J_2\right) = \frac{2J_1\pi^2 n_1^2}{J_2}\left(J_1 - J_2\right) = 36{,}8\ \text{Дж}.$$

Ответ: 1) $n_2 = 1{,}17\text{с}^{-1}$, 2) $A = 36{,}8\ \text{Дж}$.

Задача 5. Камень массой m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Найти зависимость от времени момента силы тяжести тела $\vec{M}(t)$ и его момента импульса $\vec{L}(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь. Оба момента найти относительно точки бросания.

Дано: υ_0, α **.**

Найти: $\vec{M}(t)$, $\vec{L}(t)$**.**

Анализ и решение

На камень действует сила тяжести. Момент этой силы по определению равен $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор силы тяжести. Начало системы координат совместим с точкой бросания, направление координатных осей указано на рис. 4.3. Траектория движения камня лежит в плоскости xOy, радиус-вектор его изменяется по закону $\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2}$.

Тогда относительно точки O момент силы тяжести равен

$$\vec{M}(t) = \left[\left(\vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right), m\vec{g}\right] = \left[\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}\right] + \left[\frac{\vec{g}t^2}{2}, m\vec{g}\right] = \left[\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}\right].$$

Вектор $\vec{M}(t)$ направлен перпендикулярно плоскости xOy, проекция этого вектора на ось z равна

$$M_z(t) = \upsilon_0 t \cdot mg \cdot \sin(90^0 + \alpha) = -\upsilon_0 t \cdot mg \cdot \cos(\alpha).$$

Используя уравнение моментов $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, найдем

$$d\vec{L} = \vec{M}dt\,;\ \int_0^L d\vec{L} = \int_0^t \vec{M}dt\,,$$

$$\vec{L}(t) = \int_0^t [\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}]dt = [\vec{\upsilon}_0, m\vec{g}]\int_0^t tdt = [\vec{\upsilon}_0, m\vec{g}]\frac{t^2}{2}\,.$$

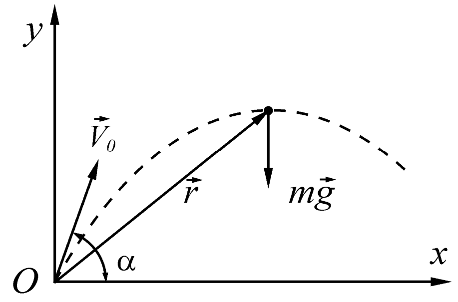

Рисунок 4.3

Вектор $\vec{L}$ направлен противоположно оси z, проекция его на эту ось:

$$L_Z(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2 \cos\alpha\,.$$

Зависимость $\vec{M}(t)$ и $\vec{L}(t)$ можно записать в виде

$$\vec{M}(t) = -\upsilon_0 \cdot mg \cdot t\cos\alpha \cdot \vec{k}\,,$$

$$\vec{L}(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2\cos\alpha \cdot \vec{k}\,,$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор вдоль оси z.

Ответ: $\vec{M}(t) = -\upsilon_0 \cdot mg \cdot t\cos\alpha \cdot \vec{k}$, $\vec{L}(t) = -\dfrac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2\cos\alpha \cdot \vec{k}$.

Задача 6. Стержень длиной $l = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через его верхний конец. В середину стержня попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0 = 500$ м/с и застревает в нем. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Дано: $l = 1{,}5$ м, $M = 10$ кг, $m = 10$ г, $\upsilon_0 = 500$ м/с.

Найти: φ.

Анализ и решение

Пуля, соударяясь со стержнем, за очень малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и придает ему кинетическую энергию $T = J\omega^2/2$, где J – момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на угол φ, при этом его центр масс поднимается на высоту $h = \dfrac{l}{2}(1-\cos\varphi)$ (рис. 4.4). В этом положении стержень имеет потенциальную энергию

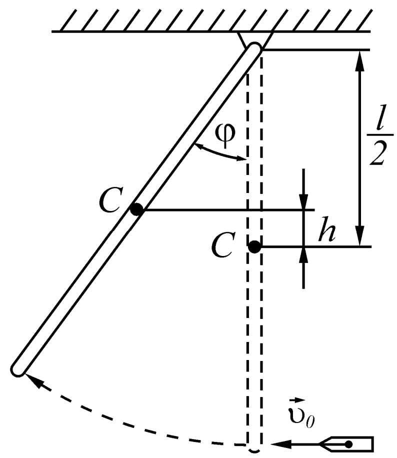

Рисунок 4.4

$$U = Mg\frac{l}{2}(1 - cos\varphi).$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

откуда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}. \tag{4.8}$$

Чтобы найти угол φ, надо в это уравнение подставить значения J и ω. Момент инерции стержня J относительно оси вращения, проходящей через его конец, равен $J = Ml^2/3$. Угловую скорость найдем по закону сохранения момента импульса

$$m\upsilon_0\tau = J\omega + mr^2\omega.$$

Учитывая, что $\upsilon_0 = \omega r$, а $\tau = \dfrac{l}{2}$, получим

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 l}{2\dfrac{ml^2}{3} + \dfrac{ml^2}{2}}.$$

Подставляя в уравнение (4.8) значение J, найдем $\cos\varphi = 0{,}987$, $\varphi = 9°20'$.

Ответ: $\varphi = 9°20'$.

4.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Найти момент инерции и момент импульса земного шара относительно оси вращения.

Ответ: $J = 10^{38}$ кг$\cdot$м^2, $L = 7\cdot10^{33}$ кг$\cdot$м^2/с.

Задача 2. Найти момент инерции тонкой плоской пластины со сторонами $a = 10$ см и $b = 20$ см относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно большей стороне. Масса пластины равномерно распределена по ее площади с поверхностной плотностью $\sigma = 1{,}2$ кг/м^2.

Ответ: $J = 2\cdot10^{-5}$ кг$\cdot$м^2.

Задача 3. Маховик, имеющий момент инерции $J = 63{,}6$ кг$\cdot$м^2, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 3{,}14$ рад/с. Найти тормозящий момент, действие которого приводит к остановке маховика через 20 с.

Ответ: $M = 10$ Н$\cdot$м.

Задача 4. Маховик, имеющий радиус $R = 0{,}2$ м и массу $m = 10$ кг, соединен с мотором при помощи ремня. Сила натяжения ремня является постоянной и равна $F = 14{,}7$ Н. Какое количество оборотов в секунду будет делать маховик через $t = 10$ с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

Ответ: $n = 23{,}4\ \text{с}^{-1}$.

Задача 5. Маховое колесо, имеющее момент инерции $245\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$, вращается с частотой $n_1 = 20\ \text{с}^{-1}$. Через минуту после того, как на колесо перестает действовать вращательный момент, оно остановилось. Найти момент сил трения.

Ответ: $M_{тр} = 513\ \text{Н} \cdot \text{м}$.

Задача 6. На барабан массой $m_1 = 6$ кг намотан шнур, к концу которого прикреплен груз массой $m_2 = 2$ кг. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Ответ: $a = 3{,}9\ \text{м/с}^2$.

Задача 7. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз $m = 10$ кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04\ \text{м/с}^2$.

Ответ: $J = 9{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Задача 8. Определите момент инерции J шара массой $m = 400$ г и радиусом $R = 7$ см относительно оси, касательной к его поверхности.

Ответ: $J = \dfrac{7}{5} mR^2 = 2{,}74 \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Задача 9. Диск массой 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 4 м/с. Найти кинетическую энергию диска.

Ответ: $T = 24$ Дж.

Задача 10. Обруч и диск имеют одинаковые массы и катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью υ. Кинетическая энергия обруча равна $T_1 = 40$ Дж. Найти кинетическую энергию T_2 диска.

Ответ: $T_2 = 30$ Дж.

Задача 11. Обруч массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности с линейной скоростью $\upsilon = 5$ м/с. Найти его кинетическую энергию.

Ответ: $T = 50$Дж.

Задача 12. Велосипедист, масса которого вместе с велосипедом $m_1 = 80$ кг, едет равномерно по дороге со скоростью 18 км/час. Масса каждого колеса велосипеда $m_2 = m_3 = 5$ кг. Колеса вращаются с угловой частотой $\omega = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$. Определить кинетическую энергию системы. Колеса считать тонкими кольцами с радиусом $R = 0{,}5$ м.

Ответ: $T = 10^3$ Дж.

Задача 13. Кинетическая энергия вращательного движения $T_{об}$ шара, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 20 Дж. Определите кинетическую энергию $T_п$ поступательного движения шара и его полную кинетическую энергию T.

Ответ: $T_п = 2{,}5T_{вр} = 50$ Дж, $T = 3{,}5T_{вр} = 70$ Дж.

Задача 14. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α стоит цилиндр радиусом R. Какой может быть самая высокая высота цилиндра, при которой он не опрокинется, если цилиндр изготовлен из однородного вещества?

Ответ: $h = 2Rctg\,\alpha$.

Задача 15. Биллиардный шар массой $m = 250$ г катится без скольжения, ударяется о борт и отскакивает от него. Скорость шара до удара $\upsilon = 0{,}8$ м/с, после удара $\upsilon' = 0{,}3$ м/с. Определить количество теплоты Q, которая выделилась во время удара.

Ответ: $Q = \dfrac{7}{10}m\left(\upsilon^2 - (\upsilon')^2\right) = 96{,}3$ мДж.

Задача 16. Вентилятор, момент инерции J которого равен 8 кг·м^2, вращается с частотой $n = 300$ мин$^{-1}$. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 30$ оборотов, остановился. Определите время t, за которое вентилятор остановился и момент M сил торможения.

Ответ: $t = \dfrac{2N}{n} = 12$ с, $M = \dfrac{J\pi n^2}{N} = 20{,}9$ Н·м.

Задача 17. Кинетическая энергия маховика, который вращается вокруг горизонтальной оси, равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав 80 оборотов, остановился. Определить момент M силы трения.

Ответ: $M = 1{,}99$ Н·м.

Задача 18. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и держит в руках стержень массой $m = 9$ кг за середину в горизонтальном положении. После поворота стержня в вертикальное положение скамья изменяет частоту вращения с $n_1 = 40$ хв$^{-1}$ до $n_2 = 50$ хв$^{-1}$. Определите длину l стержня, если суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 10$ кг·м^2.

Ответ: м.

Задача 19. Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен μ?

Ответ: $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$.

Задача 20. Круглая платформа в виде однородного сплошного диска, в центре которой стоит человек массой $m_1 = 72$ кг, вращается по инерции с частотой $n_1 = 25\ \text{хв}^{-1}$. При переходе человека на край платформы частота ее вращения стала равной $n_2 = 10\ \text{хв}^{-1}$. Определите массу m_2 платформы.

Ответ: $m_2 = 2m_1 \dfrac{n_2}{n_1 - n_2} = 96\ \text{кг}$.

Задача 21. Якорь двигателя вращается с частотой $n = 1500\,\text{хв}^{-1}$. Найти вращательный момент, если двигатель развивает мощность $N = 500\,\text{Вт}$.

Ответ: $M = 3{,}18\ \text{Н} \cdot \text{м}$.

Задача 22. Барабан сушильной машины, имеющий диаметр $D = 1{,}96\ \text{м}$, вращается с угловой скоростью $\omega = 20\ \text{рад/с}$. Во сколько раз сила F, прижимающая ткань к стенке, больше силы тяжести mg, действующей на ткань?

Ответ: $F / mg = \omega^2 D / 2g = 40$.

Задача 23. Два грузика разной массы соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого $J = 50\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$, а радиус – $R = 20\ \text{см}$. Блок вращается с трением и момент сил трения равен $M_{тр} = 98{,}1\ \text{Н} \cdot \text{м}$. Найти разность сил натяжения нитей $(F_1 - F_2)$ с обеих сторон блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2{,}36\ \text{рад/с}^2$.

Ответ: $F_1 - F_2 = 1{,}08 \cdot 10^3\,\text{Н}$.

Задача 24. С наклонной плоскости скатывается без скольжения однородный диск. Линейное ускорение центра масс диска $\alpha = 3{,}9\ \text{м/с}^2$. Сила трения равна $F = 1\ \text{Н}$. Найти угол наклона наклонной плоскости к горизонту и массу диска.

Ответ: $\alpha = 36°$, $m = 0{,}5\ \text{кг}$.

Задача 25. Маховик, момент инерции J которого равен $40\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$, начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы $M = 20\ \text{Н} \cdot \text{м}$. Вращение продолжалось $t = 10\,c$. Определить кинетическую энергию T маховика.

Ответ: $T = 500\ \text{Дж}$.

Задача 26. Однородный шар радиусом r начинает скатываться без проскальзывания с вершины сферы радиусом R. Найти угловую скорость шара ω после отрыва от поверхности сферы.

Ответ: $\omega = \sqrt{10g(R + r) / (17r^2)}$.

Задача 27. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородный диск радиусом r_0. На него осторожно опустили другой такой же диск, вращающийся с угловой скоростью ω_0. Через какое время оба диска будут вращаться с одинаковой угловой скоростью, если коэффициент трения между дисками равен μ?

Ответ: $t = \dfrac{3r_0\omega_0}{8\mu g}$.

Задача 28. Пуля массой $m = 10$ г летит со скоростью $\upsilon = 800$ м/с, вращаясь вокруг горизонтальной оси с частотой $n = 3000$ с$^{-1}$. Принимая пулю за цилиндрик диаметром $d = 8$ мм, определить полную кинетическую энергию T пули.

Ответ: $T = 3{,}21$ кДж.

Задача 29. Определить линейную скорость υ центра шара, который скатился без проскальзывания с наклонной плоскости высотой $h = 1$ м.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{10}{7} gh} = 3{,}74$ м/с.

Задача 30. Сколько времени t будет спускаться без проскальзывания обруч с наклонной плоскости длиной $l = 2$ м и высотой $h = 10$ см?

Ответ: $t = 4{,}04$ с.

Задача 31. Тонкий стержень длиной $l = 1$ м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $\varphi = 60°$ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость υ нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{3gl(1-\cos\varphi)} = 3{,}84$ м/с.

5 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

5.1 Цель занятия

Овладеть методами решения уравнений, описывающих колебания. Усвоить физический смысл величин, характеризующих механические колебания.

5.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Изучая теоретический материал [1, разд. 7; 2, разд. 6; 5, §6], обратите внимание на физический смысл таких понятий, как период колебаний, фаза, добротность, время релаксации, логарифмический декремент затухания.

5.3 Основные законы и формулы

1. Уравнение гармонических колебаний:

,

где x – отклонение колеблющейся системы от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота; $\nu = \dfrac{1}{T}$ – частота; T – период колебаний; φ – начальная фаза.

2. Скорость и ускорение точки, которая совершает гармонические колебания:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi),$$

где A – амплитуда колебаний; ω_0 – круговая частота; φ – начальная фаза.

3. Сила, действующая на материальную точку массой m,

$$F = -m\omega_0^2 x,$$

где ω_0 – круговая частота; x – отклонение точки от состояния равновесия.

4. Кинетическая энергия точки, которая совершает прямолинейные гармонические колебания:

,

где m – масса материальной точки; υ – ее скорость; A – амплитуда колебаний; ω_0 – круговая частота; φ – начальная фаза.

5. Потенциальная энергия точки, которая совершает гармонические колебания под действием силы упругости F:

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right],$$

где m – масса материальной точки; ω_0 – круговая частота; x – отклонение точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; φ – начальная фаза.

6. Механическая энергия колебаний:

$$E = E_n + E_к = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

7. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний пружинного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где m – масса тела; x – отклонение от состояния равновесия; k – жесткость пружины; ω_0 – циклическая частота.

8. Решение этого уравнения:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

где A – амплитуда колебаний; φ – начальная фаза.

9. Период колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m – масса пружинного маятника; k – жесткость пружины.

10. Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

11. Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = \frac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника; g – ускорение свободного падения.

12. Амплитуда результирующего колебания, которая получается при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$$

13. Начальная фаза результирующего колебания:

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды двух слагаемых колебаний; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний.

14. Период биений:

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

где $\Delta\omega$ – разность частот составляющих колебаний, $\Delta\omega << \omega$.

15. Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты (уравнение эллипса):

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi,$$

где A и B – амплитуды двух составляющих колебаний; φ – разность фаз колебаний.

16. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где x – отклонение колеблющегося тела от состояния равновесия;

$\beta = \frac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; – собственная частота той же колебательной системы.

17. Решение этого уравнения

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где $A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

18. Декремент затухания:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, отличающимся на период.

19. Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, отличающимся на период; β – коэффициент затухания; T – период затухающих колебаний; τ – время релаксации; N_e – количество колебаний, совершаемых за время релаксации.

20. Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta},$$

где λ – логарифмический декремент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; β – коэффициент затухания ($\beta<<\omega_o$).

21. Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

где x – отклонение колеблющегося тела от состояния равновесия; F_0 – амплитуда вынуждающей силы; m – масса тела.

22. Решение этого уравнения для установившихся колебаний

$$x=A\cos\left(\omega t-\varphi\right),$$

где $A=\dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$ – амплитуда; $\varphi=arctg\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ – начальная фаза; ω_0 – собственная частота той же колебательной системы; ω – частота колебаний внешней вынуждающей силы; β – коэффициент затухания.

23. Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\ ,\ ,$$

где ω_0 – собственная частота колебательной системы; β – коэффициент затухания; F_0 – амплитуда внешней вынуждающей силы; m – масса тела.

5.4 Контрольные вопросы и задания

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Запишите основные характеристики колебаний математического и физического маятников.
3. Запишите дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение.
4. Чему равна механическая энергия колебательного движения для собственных незатухающих колебаний?
5. Как возникают биения?
6. Что такое фигуры Лиссажу?
7. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.
8. Чему равна частота затухающих колебаний? Как изменяются энергия и амплитуда в зависимости от сопротивления среды?
9. Что такое логарифмический декремент затухания, добротность?
10. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.
11. От чего и как зависит амплитуда и фаза вынужденных колебаний?
12. Дайте определение явлению механического резонанса.

13. Чему равна резонансная частота и резонансная амплитуда?

5.5 Примеры решения задач

Задача 1. Энергия одномерного гармонического осциллятора равна , где m – масса, k – коэффициент пропорциональности между силой и смещением. Найти уравнение, определяющее зависимость движения от времени. Установить, как движется осциллятор. Найти амплитуду колебаний x_m и амплитуду скорости $\dot{x}_m$.

Дано: $E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$;

Найти: $x(t)$, x_m, $\dot{x}_m$.

Анализ и решение

Поскольку полная энергия осциллятора не зависит от времени, первая производная от полной энергии по времени равна нулю

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x}}{2} + 2k\frac{x\dot{x}}{2} = 0,$$

тогда получаем

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Полученное уравнение – это уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (5.1)$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ – циклическая частота колебаний.

Решением уравнения (5.1) будет

$$x(t) = x_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right), \qquad (5.2)$$

где x_m – амплитуда колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Найдем скорость осциллятора, то есть первую производную от (5.2)

$$\dot{x} = x_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \qquad (5.3)$$

Тогда полную энергию можно записать

$$E = \frac{m x_m^2 \omega_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)}{2} + \frac{k x_m^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)}{2};$$

$$2E = kx_m^2;\; x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}};\; \dot{x}_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Отсюда получим амплитуду колебаний

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Амплитуду скорости получим из уравнения (5.3)

$$\dot{x}_m = x_m \omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Ответ: $x(t) = x_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$, $x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, $\dot{x}_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

Задача 2. Найти уравнение движения тела, участвующего одновременно в двух одинаково направленных колебательных движениях с одинаковыми частотами $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, здесь φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний, A_1, A_2 – амплитуды колебаний. Проанализировать случаи, когда сдвиг фаз между колебаниями равен:

а) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$; б) $\varphi_2 - \varphi_1 = \left(2n+1\right)\pi$, $\left(n = 0,1,2...\right)$.

Дано: $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

а) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, $\left(n = 0,1,2...\right)$;

б) $\varphi_2 - \varphi_1 = \left(2n+1\right)\pi$, $\left(n = 0,1,2...\right)$

Найти: $x(t)$.

Анализ и решение

Если тело участвует в двух колебательных движениях, проходящих вдоль одной и той же прямой, его результирующее движение будет происходить также вдоль той же прямой. При этом удобно использовать метод векторных диаграмм. Результирующее смещение в любой момент времени равно векторной сумме независимых смещений, то есть $x = x_1 + x_2$ (рис. 5.1).

Поскольку векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковыми угловыми скоростями ω, сдвиг фаз между ними $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$ со временем не изменяется, и результирующий вектор $\vec{A}$ также будет вращаться с той же угловой скоростью ω. Тогда результирующее колебание также будет гармоническим и уравнение будет иметь вид:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где A – амплитуда результирующего колебания, φ – начальная фаза.

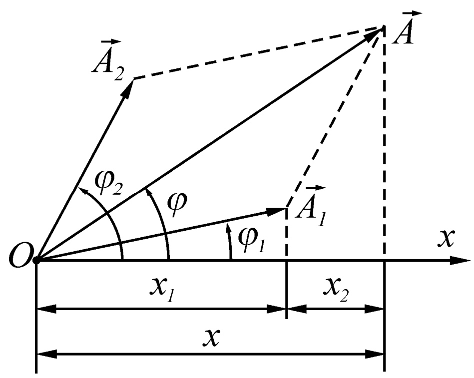

Рисунок 5.1

Пользуясь рис. 5.1, получаем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (5.4)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Из уравнения (5.4) видно, что амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз составляющих колебаний. Если $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, $(n = 0,1,2...)$ то $A = A_1 + A_2$. Когда $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, то есть составляющие колебания происходят в противоположных фазах, то амплитуда результирующего колебания $A = |A_2 - A_1|$, так как, по определению, амплитуда – величина положительная.

Ответ: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ где $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$; а) $A = A_1 + A_2$; б) $A = |A_2 - A_1|$.

Задача 3. Найти траекторию результирующего движения, если тело одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движениях, частоты которых одинаковы.

Дано: $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Найти: $y(x)$.

Анализ и решение

Относительно координатных осей *Ox* и *Oy*, которые расположены в направлениях колебательных движений, уравнение колебаний будет иметь вид

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Перепишем уравнение так:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_1 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_1;$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_2 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_2.$$

Умножим первое уравнение на $\cos\varphi_2$, а второе – на $\cos\varphi_1$ и найдем их разницу; затем умножим первое уравнение на $\sin\varphi_2$, а второе – на $\sin\varphi_1$ и также найдем разницу. Получим:

, (5.5)

$$\frac{x}{A_1}\cdot\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (5.6)$$

Уравнения (5.5) и (5.6) возведем в квадрат и почленно сложим. В результате получим

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1). \qquad (5.7)$$

Соотношение (5.7) является уравнением траектории результирующего движения тела, которое одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях. В общем случае это уравнение является уравнением эллипса. Ориентация эллипса относительно осей координат и его форма определяются значением амплитуд A_1 и A_2 и величиной разности фаз $\varphi_2-\varphi_1$ составляющих колебаний. Рассмотрим отдельные случаи.

1) Разность фаз равна нулю, то есть $\varphi_2-\varphi_1=0$.

В этом случае уравнение (5.7) приобретает вид

$$\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0.$$

Отсюда имеем

$$y=\frac{A_2}{A_1}x.$$

Траекторией результирующего движения является прямая линия, проходящая через начало координат с наклоном к оси Ox под углом $\operatorname{arctg}\frac{A_2}{A_1}$.

Разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi$. Траекторией движения тела будет прямая линия, уравнение которой $y=-\frac{A_2}{A_1}x$. Она образует с осью Ox угол $\operatorname{arctg}(-\frac{A_2}{A_1})$.

2) Разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=\pm\frac{\pi}{2}$.

Тогда уравнение (5.7) приобретает вид

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1.$$

Следовательно, траектория результирующего движения имеет вид эллипса, полуоси которого A_1 и A_2 ориентированы вдоль координатных осей Ox и Oy.

Ответ: $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$.

Задача 4. Установить закон потери энергии со временем для затухающих механических колебаний частицы, если m масса частицы, r– коэффициент сопротивления.

Дано: m, r.

Найти: $E(t)$.

Анализ и решение

Рассеивание энергии колебательной системой при затухающих колебаниях характеризуется действием сил сопротивления или трения. Для механических колебаний, когда скорость колебательного движения небольшая, сила сопротивления пропорциональна величине скорости и направлена всегда против движения, то есть

$$F_o = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt},$$

где r – коэффициент сопротивления.

Уравнение динамики имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}. \qquad (5.8)$$

Уравнение (5.8) называют дифференциальным уравнением затухающих колебаний. При малом затухании периодичность движения сохраняется. Уравнение движения тела при этом будет иметь вид:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi).$$

Установим зависимость изменения амплитуды затухающих колебаний от времени. Потери энергии колебательного движения телом при затухающих колебаниях определяются работой сил сопротивления. За время dt потери энергии

$$dE = F_o dx = -r\upsilon\upsilon dt = -r\upsilon^2 dt.$$

Перепишем это выражение так:

$$\frac{dE}{dt} = -r\upsilon^2 = -\frac{2r}{m}\cdot\frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (5.9)$$

Выражение (5.9) можно использовать для определения средних потерь энергии за время одного периода. Среднее значение кинетической энергии колебательного движения равно половине его полной энергии, т. е. $E_k = \frac{1}{2}E$, тогда соотношение (5.9) можно записать как

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{r}{m}E = -2\beta E, \qquad (5.10)$$

где $2\beta = \frac{r}{m}$, коэффициент β называют коэффициентом затухания. Из (5.10) видно, что скорость уменьшения энергии при затухающих колебаниях пропорциональна самой энергии. Перепишем выражение (5.10) в виде

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt.$$

Отсюда получим закон уменьшения энергии со временем

$$E = E_0 e^{-2\beta t},$$

где E_0 – значение энергии в момент времени $t = 0$.

Ответ: $E = E_0 e^{-2\beta t}$.

Задача 5. Сравнить значения амплитуды колебаний тела при резонансе, наблюдаемом при действии постоянной силы с амплитудным значением F_0, с амплитудой вынужденных колебаний под действием этой самой силы. Принять $\beta << \omega_0$.

Дано: F_0, $\beta << \omega_0$.

Найти: $\dfrac{A_{рез}}{A}$.

Анализ и решение

Частоту изменения вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения, называют резонансной частотой $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения, называют явлением резонанса. Резонансное значение амплитуды

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \qquad (5.11)$$

где β – коэффициент затухания; m – масса тела.

Если $\beta << \omega_0$, то из (5.11) получим, что величина амплитуды колебаний при резонансе

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (5.12)$$

где ω – частота вынужденных колебаний; F_0– амплитуда вынуждающей силы.

Когда на тело действует постоянная сила F_0, то $\omega = 0$ и из (5.12) имеем:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0}.$$

Найдем отношение

$$\frac{A_{рез}}{A} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Отсюда видно, что относительное увеличение амплитуды колебаний при резонансе определяется отношением частоты собственных колебаний к коэффициенту затухания. Для систем с малым затуханием амплитуда резонансных колебаний может значительно превышать величину смещения при действии постоянной силы.

Ответ: $\dfrac{A_{рез}}{A} = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$**.**

Задача 6. Тонкий обруч, подвешенный к вбитому в стену гвоздю, осуществляет гармонические колебания с периодом $T = 1{,}56$ с в плоскости, параллельной стене. Определить радиус обруча.

Дано: $T = 1{,}56$ с.

Найти: R**.**

Анализ и решение

Тонкий обруч под действием силы тяжести совершает колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку *O,* которая не совпадает с центром масс *C* обруча (рис. 5.2).

Это пример физического маятника. Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\,, \tag{5.13}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O; l – расстояние между точкой подвеса *O* и точкой центра масс *C* маятника; m – масса обруча; g – ускорение свободного падения.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции J обруча относительно оси, не проходящей через центр его масс,

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J_0– момент инерции обруча относительно оси, проходящей через центр масс обруча; a – расстояние между осями. Учитывая то, что $J_0 = mR^2$; $a = R$ последняя формула запишется в виде

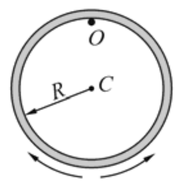

Рисунок 5.2

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2\,. \tag{5.14}$$

Подставив выражение (5.14) в формулу (5.13), учитывая, что $l = R$, найдем радиус обруча:

$$R = \frac{T^2 g}{8\pi^2} = 30{,}2\,\text{см}.$$

Ответ: $R = 30{,}2$ см.

Задача 7. Добротность Q колебательной системы равна 314. Определить, во сколько раз изменится амплитуда колебаний за время, в течение которого система совершает $N = 110$ полных колебаний.

Дано: $Q = 314$, $N = 110$.

Найти: $\dfrac{A_0}{A_N}$.

Анализ и решение

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A_N = A_0 e^{-\beta t}, \tag{5.15}$$

где A_0 – начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$); β – коэффициент затухания; t – время, за которое совершается N колебаний.

Коэффициент затухания найдем, используя логарифмический декремент затухания: $\lambda = \beta T$, откуда

$$\beta = \frac{\lambda}{T}, \tag{5.16}$$

где T – условный период затухания колебаний. Время, за которое совершится N колебаний,

$$t = NT. \tag{5.17}$$

Учитывая формулы (5.16) и (5.17), выражение (5.15) запишется в виде

$$A_N = A_0 e^{-\lambda N}. \tag{5.18}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda},$$

откуда логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \frac{\pi}{Q}.$$

Подставив это выражение в (5.18), получаем

$$A_N = A_0 e^{-\frac{\pi N}{Q}},$$

откуда

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{\frac{\pi N}{Q}} = 3.$$

Ответ: $\dfrac{A_0}{A_N} = 3$ – амплитуда уменьшится в 3 раза.

5.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Амплитуда гармонических колебаний равна 50 мм, период – 4 с, начальная фаза – $\frac{\pi}{4}$. Написать уравнение этого колебания. Найти отклонение частицы от равновесия при $t = 0$ и $t = 1{,}5$ с.

Ответ: $x = 0{,}05\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$ м, $x_1 = 0{,}0352$ м, $x_2 = 0$.

Задача 2. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение частицы равна 49,3 см/с^2. Период колебания 2 с, а отклонение частицы от равновесия при $t = 0$ равно 25 мм.

Ответ: $x = 5 \cdot 10^{-2}\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$ *м.*

Задача 3. Чему равно отношение кинетической энергии частицы при гармонических колебаниях к ее потенциальной энергии, при $t_1 = \frac{T}{12}c$, $t_2 = \frac{T}{8}$ с, $t_3 = \frac{T}{6}$ с, где T– период колебаний? Начальная фаза равна нулю.

Ответ: $\frac{E_к}{E_п} = 3$, $\frac{E_к}{E_п} = 1$, $\frac{E_к}{E_п} = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Частица участвует в двух колебаниях с одинаковым периодом, с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду результирующего колебания, если колебания совершаются в одном направлении; колебания взаимно перпендикулярны.

Ответ: $A = 7$ см, $A = 5$ см.

Задача 5. Определить потенциальную и кинетическую энергию математического маятника в зависимости от времени и угла отклонения от положения равновесия для малых амплитуд колебаний $(\varphi_m << 1)$. Масса маятника – m, длина – l.

Ответ: $E_к = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$, $E_п = \frac{mgl\varphi^2}{2}$, $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$.

Задача 6. Определить потенциальную и кинетическую энергию физического маятника в зависимости от времени t и угла отклонения φ от положения равновесия для малых амплитуд колебаний $(\varphi_m << 1)$. Масса маятника – m, момент инерции относительно оси вращения J_0, расстояние от оси вращения до центра тяжести – L.

Ответ: $E_к = \frac{J_0\dot{\varphi}^2}{2}$, $E_п = \frac{mgL\varphi^2}{2}$, $\ddot{\varphi} + \frac{mLg}{J_0}\varphi = 0$.

Задача 7. Уравнение затухающих колебаний имеет вид $x = 5e^{-0{,}25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ м. Найти скорости точек, которые выполняют колебания в момент времени $t = 0$; T; $2T$; $3T$; $4T$.

Ответ: $\upsilon_1 = 7{,}85$ м/с; $\upsilon_2 = 2{,}82$ м/с; $\upsilon_3 = 1{,}06$ м/с; $\upsilon_4 = 0{,}39$ м/с; $\upsilon_5 = 0{,}14$ м/с.

Задача 8. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 2 мин?

Ответ: в 4 раза.

Задача 9. За время 100 с система успевает выполнить 100 колебаний. За это время амплитуда уменьшается в 2,718 раза. Определить: коэффициент затухания колебаний β; логарифмический декремент затухания λ, добротность системы Q.

Ответ: $\beta = 10^{-2}$ с$^{-1}$, $\lambda = 10^{-2}$, $Q = 314$.

Задача 10. Добротность колебательной системы $Q = 2$, частота свободных колебаний $\omega = 100\ c^{-1}$. Найти собственную частоту колебаний системы ω_0.

Ответ: $\omega_0 = 103$ с$^{-1}$.

Задача 11. Колебательная система выполняет затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Найти частоту собственных колебаний ν_0, если резонансная частота $\nu_{рез} = 998$ Гц.

Ответ: $\nu_0 = 1002$ Гц.

Задача 12. Пружину с жесткостью $k = 10$ Н/м нагрузили грузом массой $m = 10\ г$. Система находится в жидкости, коэффициент силы сопротивления которой равен $r = 0{,}1$ кг/сек. Определить частоту ν_0 собственных колебаний и резонансную частоту $\nu_{рез}$.

Ответ: $\nu_0 = 5{,}03$ Гц, $\nu_{рез} = 4{,}91$ Гц.

Задача 13. Определить фазу колебания материальной точки через 2 с после начала колебаний, если точка совершает колебания с периодом $T = 0{,}8$ с.

Ответ: $\varphi = 5\pi$ рад.

Задача 14. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях и $y = -\cos 2\omega t$. Записать уравнение траектории движения точки.

Ответ: $y = -0{,}5x^2 + 1$.

Задача 15. Чему равен период колебаний математического маятника, подвешенного в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a?

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

Задача 16. Однородный диск радиусом R колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих боковой поверхности. Найти период колебаний.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$.

Задача 17. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период T этого самого маятника составляет 0,56 с. Определить резонансную частоту колебаний.

Ответ: $\nu_{рез} = 1,75$ Гц.

Задача 18. Найти число N полных колебаний, когда энергия системы уменьшилась в $n = 2$ раза. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,01$.

Ответ: $N = 35$.

Задача 19. Определить, на сколько резонансная частота отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы с коэффициентом затухания $\beta = 400$ с$^{-1}$.

Ответ: $\Delta\nu = \dfrac{\beta^2}{4\pi^2\nu_0} = 4,05$ Гц.

Задача 20. На каком расстоянии x от центра нужно подвесить тонкий стержень заданной длины l, чтобы получить физический маятник, колеблющийся с максимальной частотой. Чему равна эта частота?

Ответ: $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$; $\omega_{\max} = \sqrt{(g/l)\sqrt{3}}$.

Задача 21. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Луну?

Ответ: увеличится примерно в 2,4 раза.

Задача 22. Часы с секундным маятником с периодом колебаний $T_0 = 1$ с, на поверхности Земли идут точно. На сколько будут отставать эти часы за сутки, если их поднять на высоту $h = 200$ м над поверхностью Земли?

Ответ: $\Delta t = 2,7$ с.

Задача 23. Найти потенциальную энергию E_n математического маятника массой $m = 200$ г в положении, соответствующем углу отклонения нити от вертикали $\alpha = 10^{\circ}$, если частота колебаний $\nu = 0,5$ с$^{-1}$. Считать, что потенциальная энергия маятника в положении равновесия равна нулю.

Ответ: $E_n = \dfrac{mg^2(1-\cos\alpha)}{4\pi^2\nu^2} \approx 2,9 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Задача 24. С каким ускорением a и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы секундный маятник, находящийся в ней, за время $t = 2$ мин 30 сек осуществил $n = 100$ колебаний?

Ответ: $a = g\left(1 - \dfrac{n^2 T_0^2}{t^2}\right) \approx 5,45$ м / с^2.

Задача 25. Грузик массой $m = 250$ г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом $T = 1$ с. Определить жесткость k пружины.

Ответ: $k = 9,86$ Н/м.

Задача 26. К спиральной пружине подвесили грузик, в результате чего пружина растянулась на $x = 9$ см. Каким будет период T колебаний грузика, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

Ответ: $T = 0,6$ сек.

Задача 27. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 4$ см. Определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость k пружины равна 1кН/м.

Ответ: E = 0,8 Дж.

Задача 28. Тонкий обруч, подвешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус R обруча равен 30 см. Вычислить период T колебаний обруча.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 1{,}55$ с.

Задача 29. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\lambda = 0{,}15$. Определите, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника.

Ответ: $\dfrac{A_1}{A_2} = e^{\lambda} = 1{,}16$.

Задача 30. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 1$ мин уменьшилась в $n_1 = 3$ раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда этих колебаний уменьшится в $n_2 = 81$ раз?

Ответ: $t_2 = \dfrac{t_1 \ln n_2}{\ln n_1} = 4$ мин.

6 ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1 Цель занятия

Научиться пользоваться законами специальной теории относительности для количественного определения изменения длины, времени, энергии, импульса тел, движущихся со скоростями, близкими к скорости света.

6.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Изучить теоретический материал, используя конспект лекций и [1, разд. 5; 2, разд. 5; 5, §5]. Обратить внимание на то, что релятивистский закон сложения скоростей вытекает из преобразований Лоренца, а также на то, что несохранение массы покоя не означает нарушениt закона сохранения массы вообще. В теории относительности справедлив закон сохранения релятивистской массы, он взаимосвязан с законом сохранения энергии. Но из закона взаимосвязи энергии и массы отнюдь не следует возможность преобразования массы в энергию и наоборот. Превращение энергии системы из одной формы в другую сопровождается преобразованием массы. Например, в явлении рождения и уничтожения пары электрон-позитрон масса не переходит в энергию. Масса покоя частиц (электрона и позитрона) превращается в массу фотонов, то есть в массу электромагнитного поля.

6.3 Основные законы и формулы

1. Преобразования Лоренца при переходе от системы K к системе K'

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \end{cases}$$

где система отсчета K' движется со скоростью в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z и z' параллельны; c – скорость распространения света в вакууме.

2. Релятивистское замедление времени

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где τ – промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке. Время отсчитывается часами, движущимися вместе с телом; τ' – промежуток времени между теми же событиями, в неподвижной системе отсчета.

3. Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

где l_0 – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень не движется (собственная длина); l – длина стержня в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью υ.

4. Релятивистский закон сложения скоростей при переходе от системы K к системе K'

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x},$$

где система отсчета K' движется со скоростью υ в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z и z' параллельны.

5. Интервал между событиями

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2},$$

где $t_{12} = t_2 - t_1$ – промежуток времени между событиями 1 и 2; $l_{12} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2}$ – расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли.

6. Релятивистская масса частицы:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя частицы; υ – скорость частицы.

7. Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя частицы; υ – скорость частицы.

8. Основной закон релятивистской динамики

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\vec{p}$ – релятивистский импульс частицы.

9. Энергия покоя частицы

$$E_0 = m_0 c^2,$$

где m_0 – масса покоя частицы; c – скорость распространения света в вакууме.

10. Полная энергия релятивистской частицы

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя частицы; υ – скорость частицы.

11. Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

12. Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \; pc = \sqrt{T\left(T + 2m_0 c^2\right)},$$

где E – полная энергия; T – кинетическая энергия; p – релятивистский импульс.

6.4 Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается релятивистская частица от классической?
2. Запишите формулы связи координат и времени «неподвижной» и «движущейся» систем (преобразования Лоренца).
3. Запишите формулу связи промежутков времени, за которые происходит какое-либо событие в «неподвижной» и «движущейся» системах.
4. Запишите формулу релятивистского сложения скоростей.
5. Запишите формулу связи длины тела в «неподвижной» и «движущейся» системах.
6. Запишите формулу связи релятивистской массы с массой покоя.
7. Запишите релятивистскую формулу кинетической энергии тела.
8. Какой вид имеет связь между массой и энергией?
9. Что такое энергия покоя тела (частицы)?
10. Какой вид имеет связь между полной энергией тела (частицы), энергией покоя и импульсом?

6.5 Примеры решения задач

Задача 1. На сколько процентов изменится продольный размер протона и электрона после прохождения ими разности потенциалов $U = 10^6$ В?

Дано: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 10^6$ В.

Найти: η_e, η_p .

Анализ и решение

В обоих случаях кинетическая энергия частицы равна

$$T = A = eU = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ эВ}.$$

Поскольку

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = eU ,$$

где m_0 – масса покоя частицы (в данном случае m_e и m_p), $\beta^2 = \upsilon^2 / c^2$, то

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2}. \qquad (6.1)$$

Продольный размер частиц

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2} .$$

Относительное изменение продольных размеров частиц с учетом (6.1)

$$\eta = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{eU}{eU + m_0 c^2} .$$

Поскольку для электрона $m_e c^2 \approx 0{,}512$ МэВ, а для протона $m_p c^2 = 939$ МэВ, то $\eta_e = 66{,}1\,\%$, $\eta_p = 0{,}1\,\%$.

Ответ: $\eta_e = 66{,}1\,\%$, $\eta_p = 0{,}1\,\%$.

Задача 2. Протон и α-частица проходят одинаковую ускоряющую разность потенциалов U, после чего масса протона составила треть массы α-частицы. Определить разность потенциалов, а также скорости протона и α-частицы.

Дано: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{27}$ кг, $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: $U,\ \upsilon_p,\ \upsilon_\alpha$.

Анализ и решение

Поскольку полная энергия частицы пропорциональна ее массе, то

$$E_p = \frac{1}{3} E_\alpha , \qquad (6.2)$$

где E_p и E_α – полные энергии протона и α-частицы.

Но

$$E_p = eU + m_p c^2, \tag{6.3}$$

$$E_\alpha = eU + m_\alpha c^2. \tag{6.4}$$

Подставив (6.3) и (6.4) в (6.2), получим

$$eU + m_p c^2 = \frac{1}{3}(eU + m_\alpha c^2).$$

Отсюда

$$U = \frac{(m_\alpha - 3m_p)c^2}{2e}.$$

После вычислений по этой формуле получим $U = 461\,\text{МэВ}$. Скорость протона найдем из соотношения

$$eU = m_p c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_p c^2}{eU + m_p c^2} = 0,6709;$$

$$\beta = \frac{\upsilon_p}{c} = 0,7416; \ \upsilon_p = c\beta = 0,7416 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2,22 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_p = c\beta = 0,7416 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 2,22 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Для α-частицы

$$eU = m_\alpha c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right);$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_\alpha c^2}{eU + m_\alpha c^2} = 0,8902;$$

$$1-\beta^2 = 0,7925; \ \beta = 0,4555;$$

$$\upsilon_\alpha = c\beta = 0,4555 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 1,37 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $U = 461\,\text{МэВ}$, $\upsilon_p \approx 2,22 \cdot 10^8$ м/с, $\upsilon_\alpha \approx 1,37 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 3. Определите скорость нестабильной частицы, если ее время жизни по часам наблюдателя с Земли увеличился в $n = 1,8$ раз.

Дано: $n = \frac{\tau'}{\tau} = 1,8$.

Найти: υ.

Анализ и решение

Систему отсчета K свяжем с частицей, тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе равен ее собственному времени жизни τ. Поскольку система K движется вместе с частицей, то эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов.

Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы – τ'. Тогда

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = n, \tag{6.5}$$

(учли условие задачи). Из выражения (6.5) искомая скорость

$$\upsilon = c\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 0{,}831c\,.$$

Ответ: $\upsilon = 0{,}831\,c$.

Задача 4. Долетит ли до поверхности Земли нестабильная частица, возникшая на высоте $h = 4$ км, если она обладает собственным временем жизни $\tau = 4{,}5$ мкс и летит со скоростью $\upsilon = 0{,}95\,c$ в направлении Земли?

Дано: $h = 4\cdot 10^3$ м, $\upsilon = 0{,}95\,c$, $\tau = 4\cdot 10^{-6}$ с.

Найти: s.

Анализ и решение

Расстояние, которое пройдет частица в системе отсчета, связанной с Землей, определяется как

$$s = \upsilon\tau', \tag{6.6}$$

где τ' – время жизни частицы, измеренное по часам на Земле.

Промежуток времени τ' связан с собственным временем жизни частицы τ соотношением

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.7}$$

Подставив (6.7) в (6.6), получаем искомое расстояние

$$s = \frac{\upsilon\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Вычисляя, получаем: $s = 4{,}11\cdot 10^3$ м $> h$, то есть частица долетит до Земли.

Ответ: $s > h$, частичка до Земли долетит.

Задача 5. С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $\upsilon_1 = 0,6\,c$, по ходу движения корабля стартовала ракета со скоростью $\upsilon_2 = 0,5\,c$. С какой скоростью u ракета приближается к Земле?

Дано: $\upsilon_1 = 0,6\,c$, $\upsilon_2 = 0,5\,c$.

Найти: u.

Анализ и решение

Систему отсчета K свяжем с Землей систему отсчета K' – с космическим кораблем. Тогда скорость ракеты u в системе K и есть искомая скорость сближения. Согласно релятивистскому закону сложения скоростей,

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}, \tag{6.8}$$

где по условию задачи скорость движения космического корабля относительно Земли $\upsilon = \upsilon_1$, скорость ракеты относительно космического корабля $u' = \upsilon_2$.

Подставив эти значения в формулу (6.8), найдем искомую скорость:

$$u = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{1 + \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{c^2}} = 0,846c.$$

Ответ: $u = 0,846\,c$.

Задача 6. Определите релятивистский импульс частицы, если ее полная энергия $E = 1,5$ ГэВ, а скорость $\upsilon = 0,5\,c$.

Дано: $E = 1,5$ ГэВ $= 2,4 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\upsilon = 0,5\,c$.

Найти: p.

Анализ и решение

Релятивистский импульс частицы

$$p = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{6.9}$$

где m_0 – масса покоя частицы; υ – ее скорость.

Домножив числитель и знаменатель выражения (6.9) на c^2, получим искомый импульс:

$$p=\frac{m_0\upsilon c^2}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{E\upsilon}{c^2}=0,4\cdot10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{с},$$

(учли, что полная энергия $E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$).

Ответ: $p=0,4\cdot10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{с}$.

6.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Кинетическая энергия частицы в $n=2$ раза меньше ее энергии покоя. Определите скорость движения частицы.

Ответ: $\upsilon=0,745\,c$.

Задача 2. Метровая линейка движется мимо наблюдателя со скоростью, что составляет 60% скорости света. Какой покажется наблюдателю ее длина?

Ответ: $l=80$ см.

Задача 3. Определите кинетическую энергию протона, если его релятивистский импульс $p=2\cdot10^{18}\ \text{Н}\cdot\text{с}$. Масса протона $m_p=1,67\cdot10^{-27}$ кг.

Ответ: $T=4,82$ ГэВ.

Задача 4. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $\upsilon=0,6\,c$. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Ответ: $n=1,25$.

Задача 5. В системе K' находится в покое стержень, собственная длина l_0 которого равна 1м. Стержень размещен под углом $\varphi_0=45^0$ к оси x'. Определить длину l стержня и угол в системе K, если скорость υ_0 системы K' относительно K равна $0,8\,c$.

Ответ: $l=l_0\sqrt{1-(\upsilon_0/\text{c}^2)\cos^2\varphi}=0,825$ м; $\varphi=\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\varphi_0}{1-\upsilon^2/c^2}\right)=59°$.

Задача 6. С какой скоростью двигались часы в системе отсчета *K*, если за $t=15$ с (в этой системе), он отстал от часов этой системы на $\Delta t=0,5$ с?

Ответ: $\upsilon=7,8\cdot10^7$ м/с.

Задача 7. В лабораторной системе отсчета (*K*-система) мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l=75$ м. Скорость υ-мезона равна $0,995\,c$. Определить собственное время жизни τ_0 мезона.

Ответ: $\tau_0=\frac{1}{\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}=25$ нс.

Задача 8. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $\upsilon_1=0,6\,c$ и $\upsilon_2=0,9\,c$ вдоль одной прямой. Определить их относительную скорость u_{21}, если частицы движутся в противоположных направлениях; в одном направлении.

Ответ: $u''_{21} = 0{,}195\,c$; $u'_{21} = 0{,}974\,c$.

Задача 9. Два сверхзвуковых реактивных самолета идут на встречных курсах со скоростями 1500 и 3000 км/час относительно Земли. Какой будет скорость первого самолета, измеренная пассажиром второго самолета?

Ответ: $\upsilon = 4499{,}999999986$ км/час.

Задача 10. Для наблюдателя, неподвижного относительно системы K, одновременно в двух точках на расстоянии $l = 10^5$ км произошли два события. Определите промежуток времени τ' между этими событиями в системе K', движущейся относительно системы K со скоростью $\upsilon = 0{,}65\,c$.

Ответ: $$\tau' = \frac{\upsilon l}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 0{,}258\ \text{с}.$$

Задача 11. Определите скорость, с которой тело должно удаляться от наблюдателя, чтобы его линейные размеры уменьшились на 5%.

Ответ: $\upsilon = 0{,}31c$.

Задача 12. Ион, вылетевший из ускорителя, выпустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя, если скорость υ иона относительно ускорителя равна 0,8 c.

Ответ: $\upsilon = c$.

Задача 13. Ускоритель придал радиоактивному ядру скорость $\upsilon_1 = 0{,}4\,c$. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β-частицу со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$ относительно ускорителя. Найти скорость u_{21} частицы относительно ядра.

Ответ: $u_{21} = 0{,}5\,c$.

Задача 14. Частица движется со скоростью $\upsilon = 0{,}5\,c$. Во сколько раз релятивистская масса частицы больше массы покоя?

Ответ: $n = 1{,}15$.

Задача15. С какой скоростью υ движется частица, если ее релятивистская масса в три раза больше массы покоя?

Ответ: $\upsilon = 0{,}943\,c$.

Задача 16. На сколько процентов релятивистская масса частицы больше массы покоя при скорости $\upsilon = 30$ Мм/с?

Ответ: $\Delta\varepsilon = 0{,}5\%$.

Задача 17. Электрон движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8\,c$. Определить релятивистский импульс электрона.

Ответ: $p = 2{,}05 \cdot 10^{-22}$ Н·с.

Задача 18. Определите кинетическую энергию релятивистского протона, если его полная энергия в $n = 1{,}5$ раз больше его энергии покоя.

Ответ: $T=(n-1)mc^2=0,47$ ГэВ.

Задача 19. Полная энергия тела возросла на $\Delta E=1$ Дж. На сколько при этом изменится масса тела?

Ответ: $\Delta m=1,11\cdot 10^{-17}$ кг.

Задача 20. Определить, на сколько должна увеличиться полная энергия тела, чтобы его релятивистская масса возросла на $\Delta m=1$ г?

Ответ: ΔE=90 ТДж.

Задача 21. Кинетическая энергия электрона и протона равна 10 МэВ. Во сколько раз их релятивистские массы больше масс покоя?

Ответ: $n_1=20,6$; $n_2=1,01$.

Задача 22. Кинетическая энергия частицы оказалась равной ее энергии покоя. Какова скорость частицы?

Ответ: $\upsilon=0,866\,c$.

Задача 23. Определите разность потенциалов U, ускоряющих электрон до скорости $\upsilon=0,7\,c$.

Ответ: $U=\dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right)=0,205$ МэВ.

Задача 24. Кинетическая энергия частицы оказалась равной ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в 4 раза?

Ответ: $n=2,82$.

Задача 25. Определите релятивистский импульс электрона, если его скорость $\upsilon=0,45\,c$, а кинетическая энергия $T=0,3$ МэВ.

Ответ: $p=m\upsilon\left(1+\dfrac{T}{mc^2}\right)=1,95\cdot 10^{-23}$ Н·с.

Задача 26. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость υ_0 спутника составляет 7,9 км/ч. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя за время $\tau_0=0,5$ года?

Ответ: $\tau=\dfrac{1}{2}\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}\tau_0=0,57\,c$.

Задача 27. Импульс p релятивистской частицы равен m_0c. Под действием внешней силы импульс частицы увеличился в два раза. Во сколько раз возрастут при этом кинетическая и полная энергии частицы?

Ответ: $n_1=2,98$; $n_2=1,58$.

Задача 28. Определите увеличение релятивистского импульса частицы по отношению к классическому импульсу, если ее скорость $\upsilon=0,75\,c$.

Ответ: в 1,5 раза.

Задача 29. Определите релятивистский импульс p электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 0,97\, c$.

Ответ: $p = 1,09 \cdot 10^{-21}$ Н · с.

Задача 30. Определите релятивистский импульс электрона, если его скорость $\upsilon = 0,45\, c$, а кинетическая энергия $T = 0,3$ МэВ.

Ответ: $p = m\upsilon\left(1 + \dfrac{T}{mc^2}\right) = 1,95 \cdot 10^{-23}$ Н · с.

7 МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ТЕРМОДИНАМИКА

7.1 Цель занятия

Усвоить основные законы молекулярно-кинетической теории газов, научиться их применять при решении задач, овладеть элементарным расчетом термодинамических процессов.

7.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

При подготовке к практическому занятию изучить теоретический материал по конспектам лекций и учебникам [1, разд. 8, 9, 10; 2, разд. 7, 8, 9; 5, глава 2]. Обратить внимание на основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов, функции распределения, выяснить суть первого и второго законов термодинамики. После изучения теории ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенные в примерах.

7.3 Основные законы и формулы

1. Количество вещества

$$\nu = \frac{N}{N_A} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{m}{M},$$

где N – количество атомов или молекул вещества; $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; m – масса вещества; M – его молярная масса.

2. Концентрация молекул – число молекул в единице объема

$$n = \frac{N}{V}.$$

3. Молярная масса вещества численно равна массе 1 моля вещества в

$$M = m_0 N_A,$$

где m_0 – масса одного атома (молекулы).

4. Молярная масса смеси газов:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\nu_i},$$

где m_i – маса i-го компонента смеси; $\nu_i = \dfrac{m_i}{M_i}$ – количество молей i-й компоненты смеси.

5. Закон Авогадро: при одинаковых давлении и температуре в равных объемах содержится одно и то же число молекул любых газов.

Как следствие: один моль любого газа при нормальных условиях занимает объем V_0= 22,4 л/моль = 22,4 10^{-3} м^3/моль.

6. Закон Дальтона: давление невзаимодействующей смеси газов p равно сумме парциальных давлений газов p_i

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i .$$

7. Уравнение Менделеева-Клапейрона

$$pV = \nu RT \quad \text{или} \quad pV = \frac{m}{M} RT ,$$

где p, V, T – давление, объем, температура идеального газа $R = 8{,}31 \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ – универсальная газовая постоянная.

8. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle ,$$

где n – концентрация молекул; $\langle E \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

9. Средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол}$ – количество степеней свободы молекулы ($i_{пост}$ – при поступательном движении, $i_{вр}$ – при вращательном движении, $i_{кол}$ – при колебательном движении); $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура газа.

10. Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT .$$

11. Скорости молекул:

– средняя квадратичная (тепловая) скорость молекул

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} ;$$

– средняя скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} ;$$

– наиболее вероятная скорость молекул

$$\upsilon_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} .$$

12. Распределение Максвелла по модулям скорости

$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right).$$

13. Барометрическая формула (распределение давления в поле силы тяжести)

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}},$$

где p_0 и p – давление газа соответственно на нулевой высоте и на высоте h; m_0 – масса частицы; M – молярная масса; g – ускорение свободного падения; R – универсальная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана.

14. Распределение Больцмана для частиц во внешнем потенциальному поле

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}},$$

где n – концентрация частиц с потенциальной энергией E_n; n_0 – концентрация частиц в точках, где $E_n = 0$.

15. Вероятность того, что физическая величина *x*, которая характеризует молекулы газа, лежит в интервале значений от x до $x + dx$, равна

$$dw(x) = f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности, функция распределения молекул по значениям данной величины.

16. Среднее значение физической величины $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

17. Количество молекул, для которых физическая величина *x*, характеризующая молекулу, имеет значение в интервале от *x* до $x + dx$

$$dN = Ndw(x) = Nf(x)dx.$$

18. Первый закон термодинамики:

– в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где δQ – количество теплоты, которое получила система; dU – изменение внутренней энергии системы; δA – работа, которую выполняет система над внешними телами;

– в интегральной форме

$$Q = \Delta U + A.$$

19. Теплоемкость:

– теплоемкость тела

$$C = \frac{\delta Q}{dT};$$

– удельная теплоемкость тела

$$c = \frac{\delta Q}{mdT};$$

– молярная теплоемкость вещества

$$C_M = M \cdot c = \frac{M}{m}\frac{\delta Q}{dT},$$

где M – молярная масса вещества;

– молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = Mc_V = \frac{M}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{M}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V,$$

$$C_V = \frac{i}{2}R,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; i – количество степеней свободы молекулы; R – универсальная газовая постоянная;

– молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_p = Mc_p = \frac{M}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{M}{m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right];$$

$$C_p = \frac{i+2}{R};$$

– удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и постоянном давлении c_p.

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

20. Уравнение Майера

$$C_p - C_V = R.$$

21. Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

22. Уравнение Пуассона – уравнение газового состояния при адиабатическом процессе

$$pV^{\gamma} = const; \quad TV^{\gamma-1} = const; \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const.$$

23. Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N\langle E\rangle = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_VT = \nu C_VT,$$

где N – число молекул газа; $\langle E\rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы; ν – количество вещества.

24. Работа газа при изменении объема газа от начального объема V_1 до конечного V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

25. Работа газа

– при изобарическом процессе ($p = const$)

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right);$$

– при изотермическом процессе ($T = const$)

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2};$$

– при изохорническом процессе ($V = const$)

$$A = 0;$$

– при адиабатическом процессе

$$A = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R\left(T_1 - T_2\right);$$

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right].$$

26. Первый закон термодинамики

– при изобарическом процессе

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T;$$

– при изотермическом процессе ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

– при изохорическом процессе ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T;$$

– при адиабатическом процессе ($Q = 0$)

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right).$$

27. Термический коэффициент полезного действия (КПД) для кругового процесса

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом (рабочим телом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное газом холодильнику.

28. Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура охладителя.

29. Изменение (прирост) энтропии вследствие обратимого процесса

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + pdV}{T}; \quad \Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

30. Формула Больцмана

$$S = k \ln \Omega,$$

где k – постоянная Больцмана; Ω – термодинамическая вероятность, то есть количество микроскопических состояний, которыми может реализоваться макроскопическое состояние.

7.4 Контрольные вопросы и задания

1. Какой газ называется идеальным?
2. Запишите и проанализируйте основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов.
3. Чему равна средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа?
4. Чему равна средняя кинетическая энергия молекул идеального газа? Как эта величина зависит от числа степеней свободы?
5. Запишите и проанализируйте уравнение Менделеева – Клапейрона.
6. Сформулируйте закон равнораспределения энергии по степеням свободы.
7. Сформулируйте закон Дальтона. Какое давление называется парциальным?
8. Сформулируйте закон Авогадро.
9. Какую величину называют молярной массой? Как рассчитать молярную массу смеси газов?
10. Запишите функцию распределения Максвелла молекул газа по модулям их скоростей. Каков физический смысл функции распределения? Запишите условие нормировки функции распределения.
11. Как определить среднюю, среднеквадратичную и наиболее вероятную скорости молекул идеального газа?
12. Как найти среднее значение физической величины, если известна функция распределения?
13. Запишите барометрическую формулу.
14. Запишите функцию распределения Больцмана для частиц во внешнем потенциальном поле.
15. Что такое теплоемкость тела? Молярная теплоемкость? Удельная теплоемкость?

16. Какая величина называется внутренней энергией? От каких величин зависит внутренняя энергия идеального газа?

17. Как определяется работа при изменении объема тела?

18. Сформулируйте первый закон термодинамики.

19. Какой процесс называется адиабатическим? Запишите уравнение адиабаты.

20. Как определяется коэффициент полезного действия тепловой машины?

21. Что такое цикл Карно? От каких величин зависит КПД тепловой машины, совершающей цикл Карно?

22. Сформулируйте второй закон термодинамики.

23. Приведите формулу, по которой находят изменение энтропии в обратимых процессах.

24. Какая величина называется термодинамической вероятностью состояния системы?

25. Запишите формулу Больцмана.

7.5 Примеры решения задач

Задача 1. Газ состоит из смеси трех газов: $\nu_1 = 2$ моль азота, $\nu_2 = 4$ моль кислорода, $\nu_3 = 5$ моль водорода. Определить плотность и молярную массу смеси при температуре $T = 320\text{К}$ и давлении $p = 1{,}7 \cdot 10^5$ Па.

Дано: $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 5$; $T = 320$ К, $p = 1{,}7 \cdot 10^5$ Па.

Найти: ρ, M.

Анализ и решение

Согласно закону Дальтона, давление смеси газов равно сумме парциальных давлений компонент смеси

$$p = p_1 + p_2 + p_3 . \tag{7.1}$$

Для каждой компоненты можно записать уравнение Менделеева-Клапейрона

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT ; \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT ; \quad p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT .$$

Сложим эти уравнения и получим

$$\left(p_1 + p_2 + p_3\right) V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3}\right) RT . \tag{7.2}$$

Приняв во внимание (7.1) и то, что $\frac{m}{M} = \nu$ – количество вещества, из (7.2) получим

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT,$$

откуда

$$V = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)\frac{RT}{p}.$$

Тогда плотность смеси равна

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3)p}{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT} = 1{,}13 \text{ кг/м}^3.$$

Молярная масса смеси равна

$$M = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 17{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Ответ: $\rho = 1{,}13$ кг/м^3, $M = 17{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 2. Температура окиси азота *(NO)* $T = 300$ К. Определить долю молекул, скорости которых лежат в интервале от υ_1 = 820 м/с до υ_2 = 830 м/с. Газ находится под атмосферным давлением.

Дано: $T = 300$ К, $\upsilon_1 = 820$ м/с, $\upsilon_2 = 830$ м/с.

Найти: $\Delta N / N$.

Анализ и решение

При нормальных условиях (атмосферное давление и комнатная температура) окись азота является идеальным газом, молекулы которого описываются законом распределения Максвелла. Тогда число молекул, скорости которых лежат в интервале скоростей υ до $\upsilon + d\upsilon$, равна

$$dN = NF(\upsilon)d\upsilon, \tag{7.3}$$

где $F(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \upsilon^2 \exp(-m\upsilon^2 / 2kT)$ – функция распределения Максвелла по модулям скоростей. Выражение (7.3) справедливо, если интервал скоростей так мал, что функцию Максвелла в этом интервале можно считать постоянной.

По условию задачи нужно найти долю молекул, скорости которых меняются от υ_1 до υ_2. Для этого необходимо проинтегрировать выражение (7.3) в указанном интервале скоростей:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon. \tag{7.4}$$

Но расчет по формуле (7.4) сложный, потому что нельзя найти интеграл в явном виде и нужно использовать методы численного интегрирования. Если же интервал изменения скорости $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ мал, то функция распределения

Максвелла остается почти постоянной $F(\upsilon_1,T) \approx F(\upsilon_2,T)$. Тогда $\Delta N / N$ можно найти по приближенной формуле

$$\frac{\Delta N}{N} = F(\upsilon_1,T)\Delta\upsilon. \qquad (7.5)$$

Определим погрешность, которую мы допускаем, заменив точное соотношение (7.4) приближенным (7.5). Найдем значение функции Максвелла на концах интервала:

$$F(\upsilon_1,T) = 4{,}03\cdot10^{-4}\ \text{с/м};\ F(\upsilon_2,T) = 3{,}75\cdot10^{-4}\ \text{с/м}.$$

Тогда относительная погрешность при замене функции ее значением на одном из концов интервала равна:

$$\varepsilon = [1 - F(\upsilon_2,T)/F(\upsilon_1,T)]\cdot100\% \approx 7\%.$$

Таким образом, с погрешностью $\varepsilon = 7\%$ находим из формулы (7.5) долю молекул, скорости которых лежат в интервале

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = 10\ \text{м/с},$$

$$\Delta N / N = 4{,}03\cdot10^{-4}\ \text{с/м}\cdot10\ \text{м/с} = 4\cdot10^{-3}.$$

Ответ: $\Delta N / N = 4\cdot10^{-3}$.

Задача 3. В сосуде объемом $V = 30$ л находится кислород массой $m = 100$ г под давлением $p = 3\cdot10^5$ Па. Найти наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул кислорода.

Дано: $V = 3\cdot10^{-2}$ м^3, $m = 0{,}1$ кг, $p = 3\cdot10^5$ Па, $M = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $E_к^{вер}$.

Анализ и решение

Наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул соответствует максимуму функции распределения молекул по кинетическим энергиям. Исходя из функции распределения Максвелла по модулям скорости, получим функцию распределения молекул по кинетическими энергиями:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2};\ \upsilon = \sqrt{2E_к / m};$$

$$dN/N = F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}\upsilon^2 exp(-m\upsilon^2/2kT)d\upsilon;$$

$$dE_к = m\upsilon d\upsilon;\ d\upsilon = dE_к / \sqrt{2mE_k};$$

$$\frac{dN}{N} = F(E_к)dE_к = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\frac{2E_к}{m}\exp\left(-\frac{E_к}{kT}\right)\frac{dE_к}{\sqrt{2mE_к}},$$

$$F(E_к) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}E_к^{1/2}\exp(-E_к / kT). \qquad (7.6)$$

Наиболее вероятная кинетическая энергия соответствует максимуму функции (7.6). Определив производную функции, приравниваем ее к нулю:

$$F'(E_к) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}[(-1/kT)E_к^{1/2} + E_к^{-1/2}/2]\exp(-E_к / kT);$$

$$2\pi(\pi kT)^{-3/2}\exp(-E_к / kT)\left[\frac{1}{2E_к^{1/2}}-\frac{E_к^{1/2}}{kT}\right]=0 .$$

Отсюда находим $E_к^{вер} = kT / 2$.

Температуру находим из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT; \quad T = \frac{pVM}{mR} .$$

Тогда наиболее вероятная кинетическая энергия

$$E_к^{вер} = \frac{pVMk}{2mR} = 2,4\cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Отметим, что наиболее вероятная кинетическая энергия в пять раз меньше средней кинетической энергии поступательного движения двухатомных молекул кислорода $< E >=\frac{5}{2}kT$.

Ответ: $E_к^{вер} = 2,4\cdot 10^{-21}$ Дж.

Задача 4. Найти среднюю потенциальную энергию молекул воздуха в поле тяготения Земли. На какой высоте от поверхности Земли потенциальная энергия молекулы равна ее средней потенциальной энергии? Температуру воздуха считать постоянной и равной 0°С.

Дано: $T = 232\text{К}$, $M = 29\cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$, $\text{k}=1,38\cdot 10^{-23}\text{Дж/К}$, $R = 8,31\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$.

Найти: h.

Анализ и решение

Воздух в поле тяготения Земли (если воздух находится при постоянной температуре) можно описать распределением Больцмана

$$f(E_n) = A\exp(-E_n/kT), \tag{7.7}$$

где $E_n = mgh$ – потенциальная энергия молекулы; A – постоянная величина.

Если известна функция распределения Больцмана (7.7), то можно найти среднее значение потенциальной энергии $< E_n >$:

$$< E_n >=\frac{\int_0^\infty f(E_n)E_n dE_n}{\int_0^\infty f(E_n)dE_n}=\frac{A\int_0^\infty E_n\exp(-E_n / kT)dE_n}{A\int_0^\infty \exp(-E_n / kT)dE_n}. \tag{7.8}$$

Сделаем замену переменной при интегрировании: $x = -E_n/kT$, тогда, $dE_n = -kTdx$

$$\int_0^\infty \exp(-E_n / kT)dE_n = -kT\int_0^\infty e^x dx = kT ,$$

$$\int_0^\infty E_n \exp(-E_n / kT)dE_n = k^2T^2\int_0^\infty xe^x dx = k^2T^2 .$$

Используя (7.6), получим:

$\langle E_n \rangle = kT = 1{,}38{\cdot}10^{-23}{\cdot}273 = 3{,}8{\cdot}10^{-21}$ Дж.

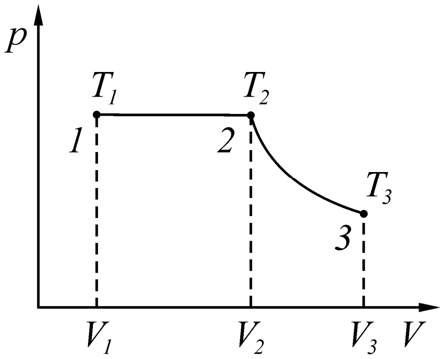

Рисунок 7.1

Определим высоту, на которой средняя потенциальная энергия равна потенциальной энергии молекулы

$$\langle E_n \rangle = kT,\ E_n = mgh ;$$

$$kT = mgh;$$

$$h = \frac{kT}{mg} = \frac{RT}{Mg} = 8\cdot 10^3 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 8\cdot 10^3$ м.

Задача 5. Два грамма азота при температуре T_1 = 280 К изобарно расширяются, при этом его температура повышается до T_2 = 560 К. Далее газ адиабатно расширяется до объема в $n = 5$ раз больше, чем начальный $V_3 = nV_1$. Рассчитайте количество теплоты, полученное газом; работу, которую он выполнил и изменение его внутренней энергии.

Дано: T_1 =280 К, T_2 = 560 К, n =5.

Найти: Q, A, ΔU .

Анализ и решение

Рассмотренный процесс изображен на рис. 7.1, где 2-1 – изобара, а 2-3 – адиабата. Количество теплоты Q, полученное газом, равно количеству теплоты Q_{12}, полученной газом в изобарном процессе, ибо при адиабатном процессе $Q_{23} = 0$.

Учитывая, что газ двухатомный, количество степеней свободы $i = 5$,

$$C_p = \frac{i+2}{2}R = \frac{7}{2}R ,$$

имеем

$$Q = Q_{12} = \frac{m}{M}C_p\left(T_2 - T_1\right) = \frac{m}{M}\frac{i+2}{2}R\left(T_2 - T_1\right) = 580 \text{ Дж.}$$

Работа, выполненная газом при расширении

$$A = A_{12} + A_{23} .$$

Работа расширения газа при изобарном процессе с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона равна

$$A_{12} = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right).$$

При адиабатном процессе

$$A_{23} = \frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_3\right),$$

где $C_V = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} R$.

Температуру T_3 можно рассчитать из уравнения адиабатного процесса

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}, \; T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$, $V_3 = nV_1$.

Объем газа в конце изобарного расширения V_2 найдем из уравнения изобарного процесса

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Тогда

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_1}{V_3} \frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = T_2 \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1},$$

откуда

$$A_{23} = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT_2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Полная работа равна

$$A = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right) + \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT_2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right] = 420 \text{ Дж}.$$

Изменение внутренней энергии найдем, учитывая, что внутренняя энергия – функция состояния и не зависит от термодинамических процессов.

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \left(T_3 - T_1\right) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R\left[T_2 \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1} - T_1\right] = 160 \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = 580$ Дж, A=420 Дж, ΔU =160 Дж.

Задача 6. Идеальный двухатомный газ выполняет цикл Карно, график которого изображен на рис. 7.2. Объем газа в состояниях 2 и 3 соответственно V_1 = 12 л и V_2 = 16 л. Найти термический КПД цикла.

Дано: V_1 = 12 л, V_2 = 16 л.

Найти: η.

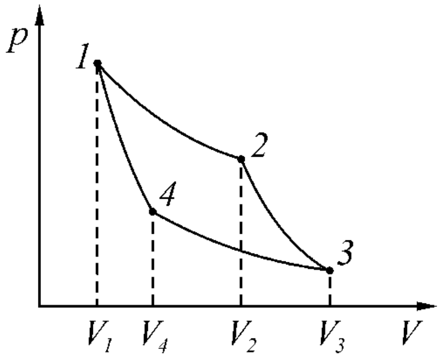

Рисунок 7.2

Анализ и решение

Цикл Карно состоит из двух изотерм: 1-2, 3-4 и двух адиабат 2-3, 4-1 (рис. 7.2). Термический КПД любого обратимого цикла определяется формулой:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \tag{7.9}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученной газом от нагревателя в течение цикла; Q_2 – количество теплоты, отданное газом в течение цикла холодильнику.

Разность Q_1–Q_2 равна работе, выполненной газом в течение цикла. Эта работа на диаграмме *p, V* равна площади, ограниченной замкнутым циклом (рис. 7.2).

Газ получает количество теплоты Q_1 на участке 1-2 при изотермическом расширении и отдает количество теплоты Q_2 на участке 3-4 при изотермическом сжатии. На участках цикла 2-3 и 4-1 обмена теплом с внешней средой не происходит.

При изотермическом процессе внутренняя энергия остается неизменной $\Delta U = 0$, поэтому в соответствии с первым законом термодинамики

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{7.10}$$

На участке 3-4 при изотермическом сжатии газ отдает количество теплоты

$$Q_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}. \tag{7.11}$$

Используя формулы (7.9–7.11), для КПД получим:

$$\eta = \frac{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}.$$

Соотношение между параметрами состояния в точках 1-4 диаграммы цикла найдем, исходя из уравнений адиабаты:

$$T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1};$$

$$T_2V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}.$$

Перемножая эти уравнения, получим

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1},$$

откуда

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}.$$

Для КПД получим формулу

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 0{,}109.$$

Ответ: $\eta = 0{,}109$.

Задача 7. Водород массой m был изобарно нагрет так, что его объем увеличился в n раз, а потом изохорно охлажден так, что его давление уменьшилось в n раз. Найти изменение энтропии.

Дано: $m =$ 2кг, $M =$ $2\cdot10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$, n = 5.

Найти: ΔS.

Анализ и решение

График процесса состоит из изобары 1-2 и изохоры 2-3 (рис. 7.3). Поскольку энтропия – величина аддитивная, полное изменение энтропии

$\Delta S = \Delta S' + \Delta S''$,

где $\Delta S'$, $\Delta S''$ – изменение энтропии соответственно на участках 1-2, 2-3. Изменение энтропии в обратимых термодинамических процессах определяется общей формулой

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{dT}.$$

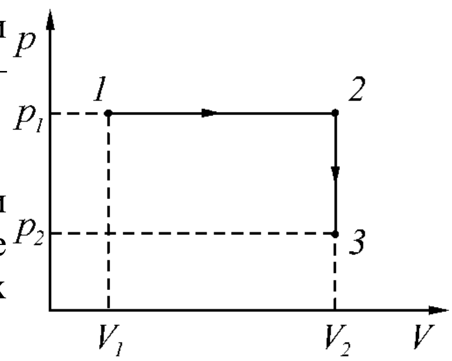

Рисунок 7.3

При изобарном процессе $dQ = \frac{m}{M}C_p dT$. Таким образом,

$$\Delta S' = \frac{m}{M}C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M}C_p \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

При изохорном процессе

$$dQ = \frac{m}{M}C_V dT$$

и соответствующее изменение энтропии

$$\Delta S'' = \frac{m}{M} C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Выразим теперь отношение T_2/T_1 и T_3/T_2 через данные задачи. Проанализируем процесс перехода системы из состояния 1 в состояние 3. Переключение 1-2 происходит при p_1=const, поэтому

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = n.$$

Переход 2-3 происходит при V_2=const. Таким образом, $p_1/T_2=p_3/T_3$ или $p_1/p_3=T_2/T_3=n$.

Изменение энтропии при переходе из состояния 1 в состояние 3

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \cdot \ln n - \frac{m}{M} C_V \cdot \ln n = \frac{m}{M} R \cdot \ln n = 9{,}13 \cdot 10^3.$$

Ответ: $\Delta S = 9{,}13 \cdot 10^3$.

7.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Масса $m = 12$ г газа находится в объеме $V = 4$ л при температуре $t_1 = 7$°C. После нагревания при постоянном давлении плотность газа равна $\rho = 0{,}6$ кг/м^3. До какой температуры T_2 нагрели газ?

Ответ: T_2=1400 К.

Задача 2. Средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного идеального газа равна $< E >= 6{,}00 \cdot 10^{-21}$ Дж. Давление газа $p = 2{,}00 \cdot 10^5$ Па. Найти количество молекул газа в единице объема при этих условиях.

Ответ: $n = 5{,}00 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 3. Найти плотность смеси газов, состоящей из водорода и кислорода. Массовые доли их соответственно 1/9 и 8/9. Давление смеси $p = 100$ кПа, температура T=300 К.

Ответ: $\rho = 0{,}48$кг/м^3.

Задача 4. В закрытом сосуде объемом $V = 20$ л находятся водород массой $m_1 = 6$ г и гелий массой $m_2 = 12$ г. Определите давление и молярную массу смеси в сосуде при температуре $T = 300$K.

Ответ: $p =$ 0,75 МПа, $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 5. При какой температуре воздуха средние скорости молекул азота (N_2) и кислорода (O_2) отличаются на 20 м/с?

Ответ: $T = 126$K.

Задача 6. Газовый термометр состоит из шара с припаянной к нему горизонтальной стеклянной трубкой. Капелька ртути, помещенная в трубку, отделяет объем шара от внешнего пространства. Площадь S поперечного сечения трубки равна 0,1 см^2. При температуре T_1 =273 К капелька находилась на расстоянии l_1=30 см от поверхности шара, при температуре T_2 = 278 К – на расстоянии l_2=50 см. Найти объем шара.

Ответ: $V = 106$ см^3.

Задача 7. В сосуде объемом 10 л содержится идеальный газ при температуре 10^o С. Найти массу выпущенного газа, если давление в сосуде уменьшилось при постоянной температуре на $\Delta p = 0{,}5$ атмосферы, а плотность газа при нормальных условиях $\rho = 1{,}25$ кг/м^3.

Ответ: $\Delta m = 6$ г.

Задача 8. Определить долю молекул, энергия которых находится в интервале от $E_1 = 0$ до $E_2 = 0{,}01kT$.

Ответ: $\Delta N / N = 7{,}53 \cdot 10^{-4}$.

Задача 9. Барометр в кабине вертолета показывает давление $p = 90$ кПа. На какой высоте летит вертолет, если на поверхности Земли барометр показывал $p_0 = 100$ кПа? Считать температуру T = 290 К неизменной.

Ответ: $h = 885$ м.

Задача 10. На сколько уменьшится атмосферное давление $p = 100$ кПа, если наблюдатель поднимается над поверхностью Земли на высоту $h = 100$ м? Температуру воздуха считать постоянной T = 290 К.

Ответ: $\Delta p = 1{,}18$ кПа.

Задача 11. Найти силу, действующую на частицу, которая находится в однородном поле силы тяжести, если отношение n_1 / n_2 концентраций частиц на двух уровнях, расстояние между которыми $\Delta z = 1$ м, равно e . Температуру T = 300 К считать постоянной.

Ответ: $F = 4{,}14 \cdot 10^{-21}$ Н.

Задача 12. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p газов: 1) гелия; 2) водорода; 3) двуокиси углерода.

Ответ: 1) 3,12 кДж/кг·К; 5,19 кДж/кг·К; 2) 10,4 кДж/кг·К; 14,6 кДж/кг·К; 3) 567 Дж/кг·К; 756 Дж/кг·К.

Задача 13. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V$ некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/кг·К. Найти молярную массу M газа и его удельные теплоемкости c_V и c_p.

Ответ: $M = 0{,}032$ кг/моль; $c_V = 650$ Дж/кг·К; $c_p = 910$ Дж/кг·К.

Задача 14. Определить удельную теплоемкость c_V смеси газов, содержащей $V_1 = 5$ л водорода и $V_2 = 3$ л гелия. Газы находятся в одинаковых условиях.

Ответ: $c_V = 6{,}37$ кДж/кг·К.

Задача 15. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 10$ г и водород массой $m_2 = 4$ г.

Ответ: $\gamma = 1{,}51$.

Задача 16. Некоторое количество азота, находящегося при температуре 27°С и давлении в 1 атм, сжимается адиабатически до объема в 5 раз меньшего, чем первоначальный. Чему равны после сжатия давление и температура азота? Сравнить давление с тем, которое создается при изотермическом сжатии.

Ответ: 9,5 атм; 298°С; при адиабатическом сжатии давление в 1,9 раза больше, чем при изотермическом.

Задача 17. При изохорном нагревании кислорода объемом $V = 50$ л давление газа изменилось на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Найти количество теплоты Q, поглощаемой газом.

Ответ: $Q = 62{,}5$ кДж.

Задача 18. 10 л азота под давлением $p_1 = 1$ атм, сжимаются до давления $p_2 = 100$ атм. Определить работу A сжатия для двух случаев: 1) сжатие осуществляется изотермически; 2) сжатие осуществляется адиабатически.

Ответ: 1) $A = -4{,}6$ кДж; 2) $A = -6{,}8$ кДж.

Задача 19. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было передано количество теплоты $Q = 21$ кДж. Определить работу A, совершенную газом, и изменение ΔU его внутренней энергии.

Ответ $A = 6$ кДж; $\Delta U = 15$ кДж.

Задача 20. Газ, занимавший объем $V = 12$ л под давлением $p = 100$ кПа, был изобарно нагрет от T_1 = 300 К до T_2 = 400 К. Определить работу A расширения газа.

Ответ: A = 400 Дж.

Задача 21. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02$ кг при температуре T_1 = 300 К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и полную работу A, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Ответ: $T_2 = 157$ К; A=8,8 кДж.

Задача 22. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 4$ кДж. Определить работу газа A при протекании цикла, если его термический КПД η=0,1.

Ответ: A = 400 Дж.

Задача 23. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя равна T_1 = 470 К, температура охладителя – T_2 = 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу A = 100 Дж. Определить термический КПД η цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

Ответ: $\eta = 0{,}404$; $Q_2 = 59{,}6$ Дж.

Задача 24. В результате кругового процесса газ совершил работу: A=1 Дж и передал охладителю количество теплоты $Q_2 = 4{,}2$ Дж. Определить термический КПД η цикла.

Ответ: $\eta =$ 0,193**.**

Задача 25. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой $m = 4$ г от объема V_1 = 5 л до объема $V_2 = 9$ л.

Ответ: $\Delta S = 2{,}43$ Дж/К.

Задача 26. Зная функцию распределения Максвелла по скоростям $F(\upsilon)$, найти формулу для наиболее вероятной скорости $\upsilon_{вер}$.

Ответ: $\upsilon_{вер} = \sqrt{2kT/\pi m}$**.**

Задача 27. Зная функцию распределения Максвелла $F(\upsilon)$, получить формулу для средней скорости $< \upsilon >$.

Ответ: $< \upsilon >= \sqrt{8kT / \pi m}$

Задача 28. Зная функцию распределения Максвелла $F(\upsilon)$, получить формулу для среднеквадратичной скорости.

Ответ: $< \upsilon_{кв} >= \sqrt{3kT / m}$.

Задача 29. При нагревании двухатомного идеального газа (ν = 2 моль) его термодинамическая температура увеличилась в $n = 2$ раза. Определите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно, 2) изобарно.

Ответ: $\Delta S_1 = 28{,}8$ Дж/К, $\Delta S_2 =$ 40,3 Дж/К.

Задача 30. Во сколько раз необходимо увеличить объем (ν = 5 моль) идеального газа при изотермическом расширении, если его энтропия увеличилась на $\Delta S = 57{,}4$ Дж/К.

Ответ: $n = 4$.

8 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

8.1 Цель занятия

Научиться рассчитывать напряженность электрического поля, созданного системой точечных электрических зарядов и объемными заряженными телами, приобрести практические навыки расчета потенциала и разности потенциалов электростатических полей, созданных зарядами, заряженными проводниками.

8.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к занятию ознакомиться с контрольными вопросами и задачами. Изучить соответствующий теоретический материал по конспекту и [3, разд. 1; 4, разд. 1; 5, §13...16]. Особое внимание следует обратить на понятие точечного заряда, пробного заряда, на границы применимости закона Кулона, позволяющего определить силу взаимодействия двух точечных зарядов.

8.3 Основные законы и формулы

1. Закон сохранения заряда в замкнутой системе:

$$\sum_i q_i = const.$$

2. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \text{ (в вакууме)},$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\varepsilon \cdot r^2} \text{ (в среде)},$$

где F – сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2; r – расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды.

3. Напряженность электростатического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

где F – сила, действующая на точечный положительный заряд q_0, помещенный в данную точку поля.

4. Напряженность электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

5. Поток вектора напряженности электростатического поля:

$d\Phi_E = \vec{E} d\vec{S} = E_n dS$ (через элементарную площадку dS),

$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = \oint\limits_S E_n dS$ (через замкнутую поверхность S),

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с внешней нормалью $\vec{n}$ к поверхности; E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$.

6. Принцип суперпозиции электростатических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i ,$$

где $\vec{E}_i$ – напряженность поля, созданного зарядом q.

7. Плотность зарядов (линейная, поверхностная, объемная):

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \ \sigma = \frac{dq}{dS}, \ \rho = \frac{dq}{dV}.$$

8. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:

в случае дискретного распределения зарядов:

$$\oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = \oint\limits_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i ;$$

в случае непрерывного распределения зарядов:

$$\oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = \oint\limits_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_V \rho dV ,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности S; N – количество зарядов; ρ – объемная плотность зарядов.

9. Напряженность поля, созданного равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

10. Напряженность поля, созданного двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

11. Напряженность поля, созданного равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

$$E = 0 \qquad \text{при } r < R \text{ (внутри сферы)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (вне сферы)}.$$

12. Напряженность поля, созданного объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом q на расстоянии r от центра шара:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} r \quad \text{при} \quad r \le R \ \text{(внутри шара)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \text{при} \ r \ge R \ \text{(вне шара)}.$$

13. Напряженность поля, созданного равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра:

$E = 0$ при $r < R$ (внутри цилиндра),

$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}$ при $r \ge R$ (вне цилиндра),

где τ – линейная плотность заряда.

14. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0,$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$. Интегрирование проводится по замкнутому контуру L.

15. Потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q на расстоянии r от него:

$$W_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r}.$$

16. Потенциал электростатического поля :

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0}, \ \varphi = \frac{A_\infty}{q_0},$$

где q_0 – точечный положительный заряд, помещенный в данную точку поля; W_n – потенциальная энергия заряда q_0; A_∞ – работа перемещения заряда q_0 из данной точки поля за его пределы.

17. Потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}.$$

18. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} \right),$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей *x, y, z*. Знак «–» определяется тем, что вектор $\vec{E}$ поля направлен в сторону уменьшения потенциала.

19. В случае поля с центральной или осевой симметрией:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

20. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad A_{12} = q_0\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = q_0\int_1^2 E_l dl,$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

21. Разность потенциалов между двумя точками 1 и 2 в электростатическом поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

где A_{12} – работа, осуществляемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2; E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$; интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

22. Разность потенциалов между точками, находящимися на расстоянии x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1),$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

23. Разность потенциалов между бесконечными разноименно заряженными плоскостями, расстояние между которыми равно d:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1).$$

24. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра равномерно заряженной сферической поверхности (объемно заряженного шара) радиусом R с общим зарядом q при $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

25. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра объемно заряженного шара радиусом R с общим зарядом q, при условии $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

26. Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного с линейной плотностью τ бесконечного цилиндра радиусом R, при условии $r_1 < R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

8.4 Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте закон Кулона.
2. Для каких зарядов можно применить закон Кулона?
3. Какой заряд называется точечным, пробным?
4. Физический смысл напряженности электростатического поля.
5. Какие свойства имеет электростатическое поле?
6. Как определяется напряженность электростатического поля точечного заряда?
7. Дайте определение линий напряженности электрического поля.
8. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.
9. Что такое циркуляция вектора напряженности электростатического поля и чему она равна?
10. Чему равна потенциальная энергия взаимодействия двух точечных электрических зарядов?
11. Что такое потенциал электрического поля?
12. Что такое разность потенциалов?
13. Чему равна работа сил электрического поля по перемещению заряда из точки 1 в точку 2?
14. Как связаны разность потенциалов с вектором напряженности электрического поля?
15. Как связаны вектор напряженности электрического поля с потенциалом?
16. Чему равен потенциал поля точечного заряда?

8.5 Примеры решения задач

Задача 1. Три точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 =$ 1нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_4 следует поместить в центре треугольника, чтобы эта система зарядов была в равновесии?

Дано: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл.

Найти: q_4.

Анализ и решение

Все три заряда, расположенные в вершинах треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы любой из трех зарядов, например q_1, находился в равновесии. Заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю (рис. 8.1), то есть заряд q_4 должен быть отрицательным.

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (8.1)$$

где $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ – силы, действующие, соответственно, на заряд q_1 со стороны зарядов q_2, q_3, q_4; $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.

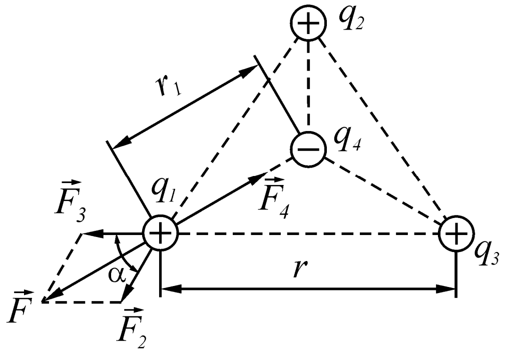

Рисунок 8.1

Принимая во внимание, что $\vec{F}$ и $\vec{F}_4$ направлены по одной прямой в противоположные стороны, векторное уравнение (8.1) можно заменить скалярным $F - F_4 = 0$, откуда $F_4 = F$. Учитывая, что $F_3 = F_2$, имеем:

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3$, получаем:

$$\frac{q_1 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Откуда:

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Принимая во внимание, что треугольник $q_1\, q_2\, q_3$ равносторонний, имеем:

$$r_1 = \frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}; \ \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}; \ q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5{,}77\cdot 10^{-7} \text{ Кл} = 577 \text{ нКл}.$$

Ответ: q_4 = 577 нКл. Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Задача 2. Кольцо радиусом R из тонкой проволоки имеет заряд q, равномерно распределенный по кольцу. Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца в точке A как функцию f расстояния до его центра. Исследовать полученную зависимость при $f >> R$.

Дано: $R,\ q,\ f,\ f >> R$.

Найти: $E(f)$.

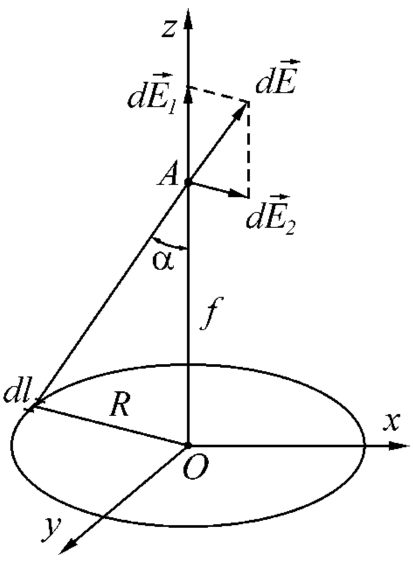

Рисунок 8.2

Анализ и решение

Совместим координатную плоскость xOy с плоскостью кольца, а ось Oz – с осью кольца (рис. 8.2). На кольце выделим малый элемент длиной dl. Заряд этого элемента $dq = \tau dl = \frac{q}{2\pi R}dl$ можно считать точечным, тогда $d\vec{E}$ напряженность электрического поля, созданного этим зарядом, может быть записана в виде:

$$d\vec{E} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2\varepsilon_0 R r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2\varepsilon_0 R(R^2 + f^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

$$r = \sqrt{R^2 + f^2},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента dl до точки A.

Разложим вектор $d\vec{E}$ на две составляющие: $d\vec{E}_1$, перпендикулярную плоскости кольца, (направленную так же, как и ось Oz), и $d\vec{E}_2$, параллельную плоскости кольца (плоскости xOy), то есть:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напряженность $\vec{E}$ электрического поля в точке A найдем интегрированием:

$$\vec{E} = \oint_L d\vec{E}_1 + \oint_L d\vec{E}_2,$$

где интегрирование ведется по длине кольца $L = 2\pi R$. Учтем, что для каждой пары зарядов dq и dq' ($dq = dq'$), расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы $d\vec{E}_2$ и $d\vec{E}_2'$ в точке A одинаковы по модулю и противоположны по направлению, то есть $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}_2'$. Поэтому векторная сумма (интеграл):

$$\oint_L d\vec{E}_2 = 0.$$

Составляющие $d\vec{E}_1$ для всех элементов кольца направлены вдоль оси Oz (вдоль единичного вектора $\vec{k}$), то есть $d\vec{E} = \vec{k}dE_1$. Тогда $\vec{E} = \vec{k}\int_L dE_1$. Учитывая то, что

$$dE_1 = dE\cos\alpha, \quad dE = \frac{qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R(R^2 + f^2)} \text{ и } \cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{R^2 + f^2}},$$

имеем:

$$dE_1 = \frac{fqdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R(R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом:

$$\vec{E}(f)=\vec{k}\cdot\oint_L \frac{fqdl}{8\pi^2\varepsilon R\left(R^2+f^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\vec{k}\frac{fq}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+f^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

При $f>>R$: $E(f)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 f^2}$ – как для точечного заряда.

Ответ: $\vec{E}(f)=\vec{k}\dfrac{fq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+f^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 3. Тонкий стержень длиной $l=10$ см равномерно заряжен зарядом $q = 10^{-7}$ Кл. Найти силу, которая действует на точечный заряд q_0 = 6 нКл, расположенный на продолжении стержня на расстоянии a = 20 см от него. Найти напряженность поля как функцию расстояния до стержня a.

Дано: $q = 10^{-7}$ Кл, q_0 = 6 нКл = $6\cdot 10^{-9}$ Кл, a = 20 см = 0,2 м.

Найти: F, $E(a)$.

Анализ и решение

Непосредственно применить закон Кулона невозможно, потому что стержень – это не точечный заряд. Но можно применить метод дифференцирования и интегрирования. Выделим на стержне очень малый элемент длиной dx, заряд которого $dq=\dfrac{q}{l}dx$ можно считать точечным (рис. 8.3).

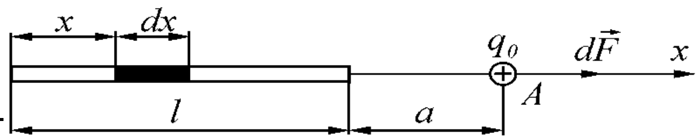

Рисунок 8.3

Сила взаимодействия dF точечного заряда q_0 и элементарного точечного заряда dq по закону Кулона:

$$dF=\frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)^2},$$

где $(l+a-x)$ – расстояние от элемента dx до точечного заряда q_0, x – расстояние от начала координат до элемента dx (рис. 8.3). Интегрируя выражение для dF по длине стержня, получим результирующую силу:

$$F=\int dF=\int_0^l \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\int_0^l\frac{dx}{(l+a-x)^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=90 \text{ мкН}.$$

Напряженность поля в точке A равна:

$$E=\frac{F}{q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right).$$

По направлению напряженность $\vec{E}$ совпадает с $\vec{F}$. Для любой точки на продолжении стержня:

$$E(a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right),$$

где a – расстояние от конца стержня до точки, где определяется напряженность поля.

Ответ: $F=90$ мкН, $E(a)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+l}\right)$.

Задача 4. Электрическое поле создано тонким прямым проводником, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau=0{,}2$ мкКл/м. Определить потенциал φ поля в точке *C*, которая находится от концов проводника на расстояниях, равных длине проводника *l*. Какую работу совершит электрическое поле по перемещению заряда $q=10^{-5}$ Кл из точки *C* на бесконечно большое расстояние?

Дано: $\tau=0{,}2$ мкКл/м, $r_{\max}=l$, $q=10^{-5}$ Кл.

Найти: φ_C, A.

Анализ и решение

Заряд, находящийся на проводнике, нельзя считать точечным, поэтому необходимо разделить проводник на элементарные отрезки (рис. 8.4). В этом случае заряд $dq=\tau dl$, находящийся на каждом из них, можно рассматривать как точечный. Потенциал, образованный в точке *C* зарядом dq:

$$d\varphi=\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{8.2}$$

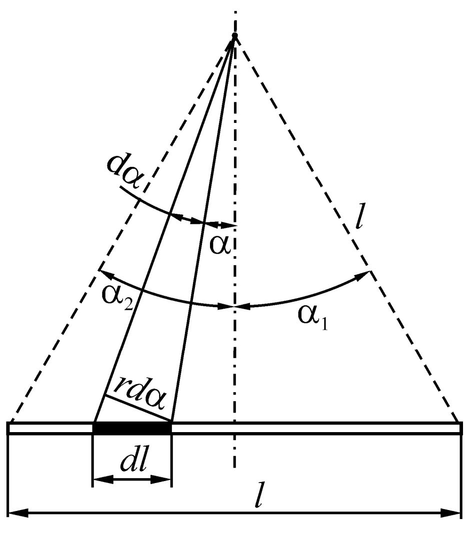

Рисунок 8.4

где r – расстояние от точки, в которой определяется потенциал, до элемента проводника. Из рис. 8.4 можно видеть, что $dl=\dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$. Тогда из формулы (8.2):

$$d\varphi=\frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cos\alpha}.$$

Интегрируя полученное выражение от α_1 до α_2, найдем потенциал в точке *C*:

$$\varphi_C = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Вследствие симметрии расположения точки C относительно концов проводника имеем: $\alpha_1 = \alpha_2$, поэтому:

$$\varphi_C = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln tg\frac{\pi}{3} - \ln tg\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\frac{\pi}{3}.$$

Работа перемещения заряда q из точки C в бесконечность:

$$A = q(\varphi_C - \varphi_\infty) = q\varphi_c,$$

где потенциал поля на бесконечности $\varphi_C = 0$. Рассчитаем:

$$\varphi_C = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}55}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}98 \cdot 10^3$$ В; $A = 10^{-5} \cdot 1978 \approx 0{,}02$ Дж.

Ответ: $\varphi_C = 1{,}98 \cdot 10^3$ В, $A = 0{,}02$ Дж.

Задача 5. Электрическое поле создается точечным диполем, электрический момент которого $p_e = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м. Найти работу A_{12} сил поля по перемещению заряда $q = +0{,}1$ Кл из точки 1 (рис. 8.5), расположенной на оси диполя на расстоянии $r_1 = 0{,}1$ м от его центра со стороны положительного заряда, в точку 2, которая расположена на оси диполя на расстоянии $r_2 = 0{,}2$ м от его центра.

Данно: $p_e = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м, $q = +0{,}1$ Кл, $r_1 = 0{,}1$ м, $r_2 = 0{,}2$ м.

Найти: A_{12}.

Анализ и решение

Для определения работы сил поля воспользуемся соотношением

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (8.3)$$

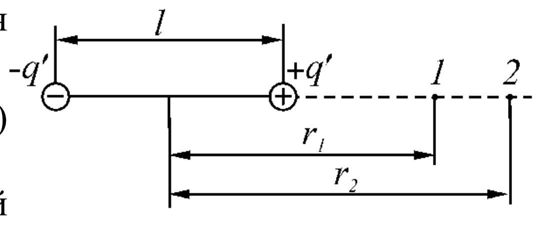

Рисунок 8.5

Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциал любой точки электрического поля диполя:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}. \qquad (8.4)$$

Учитывая, что для точечного диполя $l << r$, можно пренебречь значением $\frac{l^2}{4}$ в знаменателе, из формул (8.3) и (8.4) получим:

$$A_{12} = \frac{qp_e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right);$$

$$A_{12} = \frac{0{,}1 \cdot 2 \cdot 10^{-14}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right) = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{12} = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 6. Тонкий диск радиусом R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал и напряженность поля в точке A, лежащей на оси диска на расстоянии *a* от него.

Дано: R, σ, a.

Найти: φ, $\vec{E}$.

Анализ и решение

Для определения потенциала в точке *A* применим принцип суперпозиции полей. Разобьем диск на элементарные кольца шириной dx (рис. 8.6). Площадь кольца радиусом *x* равна $2\pi x \cdot dx$, заряд кольца $dq = 2\pi\sigma x \cdot dx$. Потенциал поля кольца в точке *A* равен алгебраической сумме потенциалов, созданных всеми его точечными элементами, равноотдаленными от точки *A*.

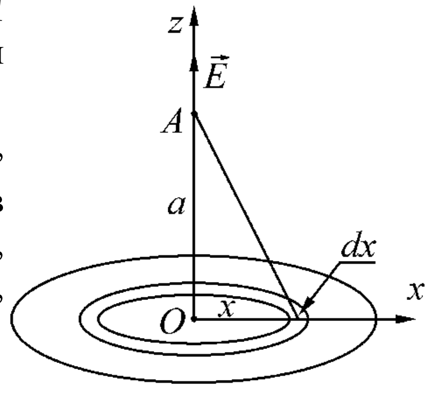

Рисунок 8.6

Потенциал кольца в точке *A*:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi\sigma x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \tag{8.5}$$

Потенциал диска определим интегрированием (8.5):

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right).$$

Учитывая симметрию, заметим, что вектор напряженности электрического поля в точке A направлен вдоль оси диска, поэтому, рассматривая *a* как переменную, получим $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{da}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k},$$

где $\vec{k}$ – орт, направленный вдоль оси z.

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+R^2}-a\right)$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)\vec{k}$.

8.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Расстояние l между свободными зарядами $q_1 = 180$ нКл и $q_2 = 720$ нКл равно 60 см. Какой отрицательной заряд q_3 нужно расположить между указанными зарядами, чтобы система зарядов находилась в равновесии? Определить его расстояние от заряда q_1.

Ответ: $q_3 = -8\cdot 10^{-8}$ Кл, $l_1 = 20$ см от заряда q_1.

Задача 2. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды q = 0,33 нКл. Какой заряд q_1 необходимо поместить в центре квадрата, чтобы система была в равновесии?

Ответ: $q_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)q = -0{,}316$ нКл.

Задача 3. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см равномерно заряжен. Линейная плотность τ заряда равна 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от ближнего его конца находится точечный заряд $q = 100$ нКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

Ответ: $F = \frac{q\tau l}{4\pi\varepsilon_0(l+a)a} = 1{,}5$ мН.

Задача 4. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд $q = 20$ нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

Ответ: $F = \frac{q\cdot\tau}{2\pi\varepsilon_0 R} = 3{,}6$ мН.

Задача 5. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = -20$ нКл, расположенными на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить напряженность поля E в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 30$ см и от второго – на $r_2 = 50$ см.

Ответ: $E = 280$ В/м.

Задача 6. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

Ответ: $E = 23{,}4\cdot 10^3$ В/м.

Задача 7. Два шарика массой $m = 1$ г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены. Длина каждой нити $l = 10$ см. Какие одинаковые заряды следует передать шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$?

Ответ: $q = 2l\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 mg}{\sqrt{3}}} = 79{,}3$ нКл.

Задача 8. Длинная прямая тонкая проволока равномерно заряжена. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность поля на расстоянии $r = 0{,}5$ м от проволоки напротив его середины $E = 2$ В/см.

Ответ: $\tau = 2\pi\varepsilon_0 rE = 5{,}65$ мКл/м.

Задача 9. Тонкое проволочное кольцо радиусом r имеет электрический заряд q. Каким будет приращение силы, растягивающей проволоку, если в центре кольца поместить точечный заряд q_0?

Ответ: $\Delta F = \dfrac{q_0 q}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$.

Задача 10. Четыре положительные точечные заряды, по $q = 7$ нКл каждый, расположены в вершинах квадрата. Сила, которая действует со стороны трех зарядов на четвертый, равна 20 мкН. Найти длину стороны квадрата.

Ответ: $a = \sqrt{\dfrac{1{,}9}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 F}} = 0{,}2$ м.

Задача 11. Очень длинная прямая равномерно заряженная нить имеет заряд τ на единицу длины. Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля в точке, которая отстоит от нити на расстояние y и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через один из ее концов.

Ответ: $E = \dfrac{\sqrt{2}\tau}{4\pi\varepsilon_0 y}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 12. Отрезок тонкого прямого проводника равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Вычислить потенциал φ, созданный зарядом в точке, расположенной на оси проводника и отстоящей от ближнего конца проводника на расстояние, равное длине этого отрезка.

Ответ: $\varphi = 62{,}4$ В.

Задача 13. Тонкий стержень длиной $l = 0{,}1$м имеет равномерно распределенный заряд $q = 1$нКл. Найти потенциал φ электрического поля в точке, находящейся на оси стержня на расстоянии $a = 0{,}2$ м от ближайшего конца.

Ответ: $\varphi = 36{,}5$В.

Задача 14. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$нКл/м. Определить φ потенциал в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии $a = 5$ см от его центра.

Ответ: $\varphi = 505$ В.

Задача 15. Тонкие стержни образуют квадрат со стороной $a = 0{,}1$ м. Стержни заряжены с линейной плотностью $\tau = 1{,}33$ нКл/м. Найти потенциал φ в центре квадрата.

Ответ: $\varphi = 84{,}2$ В.

Задача 16. Два точечных заряда $q_1 = 6$ нКл и $q_2 = 3$ нКл расположены на расстоянии $d = 0{,}6$ м друг от друга. Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?

Ответ: $A = 2{,}7 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 17. Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\tau = 0{,}4$ мкКл/м. Определить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится в $\eta = 2$ два раза дальше от нити, чем точка 1.

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 5$ кВ.

Задача 18. Тонкий стержень, согнутый кольцом радиусом $R = 0{,}1$ м, заряжен с линейной плотностью $\tau = 600$ нКл/м. Какую работу A нужно выполнить, чтобы перенести заряд $q = 5$ нКл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии $l = 0{,}2$ м от его центра?

Ответ: $A = 94$ мкДж.

Задача 19. Найти напряженность электрического поля E, потенциал которого зависит от координат по закону $\varphi = a(2x - xy)$, где $a = 4$ В/м, в точке $A(4{,}2)$.

Ответ: $E = 16$ В/м.

Задача 20. Найти потенциальную энергию W_n системы трех точечных зарядов $q_1 = 10$ нКл, $q_2 = 20$ нКл и $q_3 = -30$ нКл, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 0{,}1$ м.

Ответ: $W_n = -63$ мкДж.

Задача 21. Чему равна потенциальная энергия W_n системы четырех одинаковых точечных зарядов q = 10 нКл, расположенных в углах квадрата со стороной $a = 0{,}1$ м?

Ответ: $W_n = 48{,}8$ мкДж.

Задача 22. Разность потенциалов между точками однородного электрического поля, лежащими на одной силовой линии на расстоянии 12 см одна от другой, равен 24 В. Какова напряженность электрического поля?

Ответ: $E = 200$ В/м.

Задача 23. Напряженность однородного электрического поля в некоторой точке равна 120 В/м. Определить разность потенциалов между этой точкой и другой, лежащей на этой силовой линии на расстоянии $\Delta r = 1$ мм от первой.

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}12$ В.

Задача 24. В центре куба находится точечный заряд q. Определить поток вектора напряженности $\varPhi_E$ сквозь: а) полную поверхность куба; б) одну из граней куба.

Ответ: а) $\varPhi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ независимо от положения заряда в кубе;

б) $\varPhi_E = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$, если заряд расположен в центре куба.

Задача 25. По бесконечной плоскости равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ мкКл/м^2. На некотором расстоянии от плоскости расположен круг радиусом $r = 10$ см. Найти поток вектора напряженности $\varPhi_E$ поля через круг, если угол между плоскостью круга и бесконечной плоскостью $\alpha = 30^0$.

Ответ: $\varPhi_E = 1.53 \cdot 10^3$ В·м.

Задача 26. Металлическая сфера имеет заряд $q = 1$ нКл. Радиус сферы $R = 15$ см. Определить напряженность поля $\vec{E}$: а) в центре сферы; б) на поверхности сферы; в) вне сферы на расстоянии $r = 10$ см от ее поверхности.

Ответ: а) 0; б) 0,4 кВ/м; в) 144 В/м.

Задача 27. Заряд $q = 0,4$ мкКл равномерно распределен по объему шара радиусом $R = 3$ см. Найти напряженность поля E на расстоянии $r_1 = 2$ см и $r_2 = 4$ см от центра шара. Относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 5$.

Ответ: $E_1 = 533$ кВ/м, $E_2 = 2,26$ кВ/м.

Задача 28. Бесконечная тонкая прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью τ. Пользуясь теоремой Гаусса, найти зависимость модуля напряженности поля E от расстояния r между нитью и точкой наблюдения.

Ответ: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Задача 29. Три одинаковых точечных заряда по 20 нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. На каждый заряд действует сила $F = 10$ мН. Найти длину a стороны треугольника.

Ответ: $a = q\sqrt{\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 F}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 30. Два одинаковых шарика весом $m = 9$ г находятся друг от друга на расстоянии r, значительно превышающем их размеры. Какие одинаковые заряды необходимо поместить на шариках, чтобы сила их кулоновского взаимодействия уравновешивала силу гравитационного притяжения?

Ответ: $q = m\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} = 7,74 \cdot 10^{-13}$ Кл.

9 ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

9.1 Цель занятия

Научиться рассчитывать электрические поля в диэлектриках, определять поверхностные и объемные плотности свободных и связанных зарядов, поляризованность и диэлектрическую проницаемость диэлектриков.

9.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию изучить теоретический материал по конспекту лекций и учебникам [3, разд. 2; 4, разд. 2; 5, §13...16], ответить на контрольные вопросы, проанализировать решения задач, приведенных в качестве примера.

При изучении теоретического материала особое внимание необходимо обратить на то, что под воздействием внешнего поля диэлектрики, независимо от типа молекул, приобретают дипольный момент, то есть поляризуются. Поляризованный диэлектрик становится источником электрического поля, которое накладывается на поле свободных зарядов, а сами молекулы испытывают действие этого суммарного поля. Для решения задач необходимо иметь представление о свободных и связанных зарядах, усвоить смысл теоремы Гаусса и таких физических величин, как вектор поляризации диэлектрика, вектор электрического смещения.

9.3 Основные законы и формулы

1. Вектор поляризации (поляризованность) диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{\vec{p}_V}{\Delta V},$$

где $\vec{p}_i$ – электрический дипольный момент i-й молекулы, N – число молекул в объеме ΔV, $\vec{p}_V$ – дипольный момент объема ΔV.

2. Связь поляризованности $\vec{P}$ с вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

3. Теорема Гаусса для поляризованности

– в интегральной форме

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -\sum q',$$

где $\oint\limits_S \vec{P}d\vec{S}$ – поток вектора поляризации через замкнутую поверхность, $\sum q'$ – алгебраическая сумма связанных зарядов внутри поверхности S;

– в дифференциальной форме

$$\mathrm{div}\vec{P} = -\rho',$$

где ρ' – объемная плотность связанных зарядов.

4. Вектор электрического смещения (электрической индукции)

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

5. Теорема Гаусса для вектора электрической индукции

– в интегральной форме

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q,$$

где $\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S}$ – поток вектора электрической индукции, $\sum q$ – алгебраическая сумма сторонних (свободных) зарядов, охватываемых поверхностью S;

– в дифференциальной форме

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho,$$

где ρ – объемная плотность свободных зарядов.

6. Связь вектора электрического смещения с вектором напряженности электрического поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\chi + 1)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$$

где $\varepsilon = \chi + 1$ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

7. Напряженность поля внутри диэлектрика

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где E_0 – внешнее электрическое поле.

8. Условия на границе раздела двух диэлектриков

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}\ ;\quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1};\quad D_{1n} = D_{2n};$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma;$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

где E_τ, E_n – тангенциальная и нормальная составляющие вектора напряженности, D_τ, D_n – тангенциальная и нормальная составляющие вектора электрического смещения, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – диэлектрические проницаемости двух диэлектриков, σ, σ' – поверхностные плотности свободных и связанных зарядов на границе диэлектриков.

9. Связь вектора поляризованности с поверхностной плотностью связанных зарядов

$$P_n = \sigma' .$$

10. Связь вектора электрического смещения с поверхностной плотностью свободных зарядов

$$D_n = \sigma .$$

9.4 Контрольные вопросы и задания

1. В чем отличие диэлектриков от проводников?
2. Что называется поляризацией?
3. Какие виды поляризации диэлектриков вы знаете?
4. Какие заряды называются связанными, свободными?
5. Дайте определение поляризованности.
6. Как поляризованность связана с напряженностью электрического поля?
7. Как связана поляризованность диэлектрика с поверхностной и объемной плотностями связанных зарядов?
8. Сформулируйте теорему Гаусса для поляризованности в интегральной и дифференциальной формах.
9. Каков физический смысл диэлектрической проницаемости?
10. Что называется вектором электрического смещения?
11. Как вектор электрического смещения связан с напряженностью электрического поля?
12. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора электрического смещения в интегральной и дифференциальной формах.
13. Какие вещества называются сегнетоелектриками?
14. По каким признакам можно отличить сегнетоэлектрики от обычных диэлектриков?
15. Что называется коэрцитивной силой?
16. Что называется остаточной поляризацией?
17. Какие условия для напряженности и вектора электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков?

9.5 Примеры решения задач

Задача 1. Металлический шар радиусом R=5 см окружен слоем фарфора толщиной d = 2 см (рис. 9.1). Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд шара Q = 10 нКл.

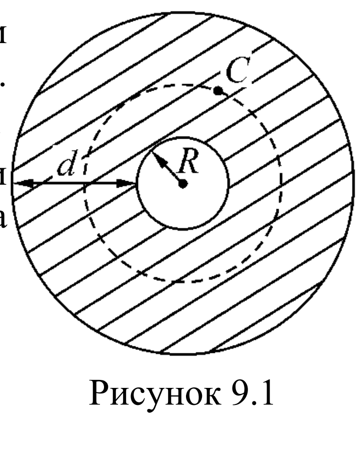

Рисунок 9.1

Дано: Q = 10 нКл, = 6, R=5 см, d = 2 см.

Найти: σ'_1, σ'_2.

Анализ и решение

Наличие слоя диэлектрика, окружающего металлический шар, вследствие поляризации приведет к изменению напряженности поля. Чтобы найти напряженность поля внутри диэлектрика, воспользуемся теоремой Гаусса для вектора смещения $\vec{D}$.

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q_i \quad (9.1)$$

Линии вектора $\vec{D}$, как и силовые линии поля $\vec{E}$ будут направлены радиально. Выберем внутри диэлектрического слоя точку C и проведем через нее вспомогательную сферическую поверхность S_C. Тогда

$$\oint\limits_{S_C} \vec{D}d\vec{S} = \oint\limits_{S_C} DdS = D\oint\limits_{S_C} dS = D4\pi r_C^2 \quad (9.2)$$

Вспомогательная поверхность охватывает свободные заряды, находящиеся на внутреннем металлическом шаре, то есть

$$\sum q_i = Q \quad (9.3)$$

Подставив (9.2) и (9.3) в (9.1), получим:

$$D4\pi r_C^2 = Q;$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r_C^2} \quad (9.4)$$

Поскольку

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \quad (9.5)$$

то из (9.4) и (9.5) находим:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_C^2}.$$

В диэлектрической среде, для $R_1 > r > R$, $R_1 = R + d$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \quad (9.6)$$

В вакууме, для $r > R_1$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (9.7)$$

Из (9.6) и (9.7) следует, что на границе ($r = R_1$) диэлектрик-вакуум вектор напряженности $\vec{E}$ терпит разрыв и величина скачка

$$|\Delta E| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0},$$

где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов на границе диэлектрик-вакуум. Найдем поверхностную плотность связанных зарядов, появившихся на внешней и внутренней поверхностях диэлектрического слоя.

При $r = R_1$

$$\sigma_2' = \varepsilon_0 \left| \Delta E \right|. \tag{9.8}$$

Скачек ΔE найдем из уравнений (9.7) и (9.6)

$$\left| \Delta E \right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right). \tag{9.9}$$

Тогда поверхностную плотность связанных зарядов на внешней поверхности диэлектрика получим, подставив (9.9) в (9.8) и учтя, что $R_1 = R + d$

$$\sigma_2' = \frac{Q}{4\pi\left(R + d\right)^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) = \frac{10^{-8}}{4\pi\left(7 \cdot 10^{-2}\right)^2} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}13 \text{ мкКл/м}^2.$$

Чтобы найти поверхностную плотность связанных зарядов на внутренней поверхности диэлектрического слоя ($r = R$), необходимо обратить внимание, что на этой поверхности, граничащей с поверхностью металлического шара, кроме связанных зарядов, возникших вследствие поляризации, есть и свободные заряды с поверхностной плотностью σ.

Таким образом

$$\sigma + \sigma_1' = \varepsilon_0 \left| \Delta E \right|,$$

где $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

$$\left| \Delta E \right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R^2} - E_{внутр},$$

где $E_{внутр}$ – поле в металлическом шаре.

Но $E_{внутр} = 0$, поэтому

$$\left| \Delta E \right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R^2}.$$

Тогда

$$\sigma_1' = \varepsilon_0 \left| \Delta E \right| - \sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} - \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right) = -0{,}255 \text{ мкКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma_1' = -0{,}255$ мкКл/м^2, $\sigma_2' = 0{,}13$ мкКл/м^2.

Задача 2. Бесконечная пластина с проницаемостью ε заряжена однородно с объемной плотностью ρ. Толщина пластины равна $2a$. Вне пластины $\varepsilon_1 = 1$. Ось x перпендикулярна к пластине, а начало координат совпадает с серединой пластины (рис. 9.2). Найти потенциал φ и поле

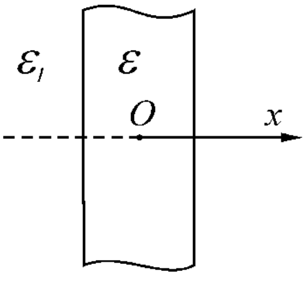

Рисунок 9.2

E_x внутри пластины как функцию x (потенциал в точке A пластины положить равным нулю).

Дано: ε, ρ, $d = 2a$, $\varepsilon_1 = 1$;

Найти: φ, E_x.

Анализ и решение

Вектор смещения $\vec{D}$ и объемная плотность свободных зарядов связаны, как известно, теоремой Гаусса в дифференциальной форме

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho.$$

Этот самый вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$$

где $\vec{E}$ – напряженность поля в пластине.

Или для проекции $\vec{D}$ на ось x имеем:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \rho. \tag{9.10}$$

И аналогично

$$D_x = \varepsilon_0\varepsilon E_x. \tag{9.11}$$

Из уравнения (9.10) имеем:

$$D_x = \rho x. \tag{9.12}$$

Из уравнения (9.11) с учетом (9.12) получим для $|x| \le a$:

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0\varepsilon}. \tag{9.13}$$

Для того, чтобы определить потенциал φ внутри диэлектрической пластины, воспользуемся тем, что вектор напряженности поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi,$$

или для проекции вектора $\vec{E}$ на ось x имеем:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Откуда с учетом (9.13)

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Ответ: $\varphi(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Задача 3. Стеклянная пластинка с проницаемостью $\varepsilon_2 = 6$ внесена в однородное электрическое поле с напряженностью $E_1 = 10$ В/м и расположена так, что

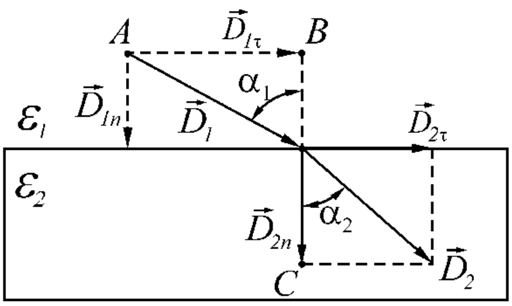

Рисунок 9.3

угол α_1 между нормалью к пластинке и направлением внешнего поля равен 30° (рис. 9.3). Найти: 1) напряженность E_2 поля в пластинке; 2) угол α_2, который это поле образует с нормалью к пластинке; 3) плотность σ' связанных зарядов, возникших на поверхностях пластинки. Считать диэлектрическую проницаемость среды вне пластинки $\varepsilon_1 = 1$.

Дано: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 6$, $E_1 = 10$ В/м, $\alpha_1 =$ 30°.

Найти: E_2, α_2, σ'.

Анализ и решение

1. Из граничных условий, которым удовлетворяют векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух однородных и изотропных диэлектрических сред, следует, что нормальная составляющая вектора смещения $\vec{D}$ в обоих диэлектриках одна и та же, то есть

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Так как $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, то

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n},$$

откуда

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{9.14}$$

Таким образом, нормальные составляющие вектора $\vec{E}$ на границе раздела испытывают разрыв.

Для тангенциальных составляющих граничные условия, как известно, имеют следующий вид:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \tag{9.15}$$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Из рис. 9.3 следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}} = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}. \tag{9.16}$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}. \tag{9.17}$$

Разделим (9.16) на (9.17):

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{E_{1\tau} E_{2n}}{E_{1n} E_{2\tau}}.$$

С учетом (9.14) и (9.15) получим:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \qquad (9.18)$$

откуда

$$\mathrm{tg}\alpha_2=\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\alpha_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot\mathrm{tg}\alpha_1\right)=\mathrm{arctg}\left(6\cdot\mathrm{tg}30^\circ\right)=74^\circ.$$

2. Чтобы найти напряженность поля E_2 в пластинке, воспользуемся рис. 9.3. Из прямоугольного треугольника OCD_2

$$D_2=\sqrt{D_{2n}^2+D_{2\tau}^2}=D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}\right)^2}=D_{2n}\sqrt{1+tg^2\alpha_2}.$$

Поскольку из (9.18) $\mathrm{tg}\alpha_2=\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, а $D_{1n}=D_{2n}$, то

$$D_2=D_{2n}\sqrt{1+\left(\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}=D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}}=$$
$$=\frac{D_{2n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1}=\frac{D_{1n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1}. \qquad (9.19)$$

Из прямоугольного треугольника ABO

$$D_{1n}=D_1\cos\alpha_1. \qquad (9.20)$$

Учитывая, что $D_1=\varepsilon_0\varepsilon_1E_1$, $D_2=\varepsilon_0\varepsilon_2E_2$ и подставляя эти выражения, а также выражение (9.20) в формулу (9.19), получим

$$E_2=\frac{E_1}{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1}=5{,}2 \text{ В/м}.$$

3. Под действием электрического поля E_1 стеклянная пластинка поляризуется и на поверхностях пластины появляются связанные заряды с плотностью σ', которая определяется нормальной составляющей вектора поляризации $\vec{P}$, то есть

$$\sigma'=P_n.$$

Поскольку

$$P_n=\varepsilon_0\left(\varepsilon_2-1\right)E_{2n}, \text{ а } E_{2n}=E_{1n}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

то

$$\sigma'=\left(\varepsilon_2-1\right)\varepsilon_0\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n},$$

то есть

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \cos\alpha_1 = 64$$

нКл/м².

Ответ: $E_2 = 5{,}2$ В/м, $\alpha_2 = 74^\circ$, $\sigma' = 64$ нКл/м^2.

9.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. В однородном электростатическом поле напряженностью 700 В/м перпендикулярно полю размещена бесконечная плоскопараллельная стеклянная пластина (ε =7). Определить: 1) напряженность электростатического поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

Ответ: $E = 100$ В/м, $D = 6{,}19$ нКл/м^2, $P = 5{,}31$ нКл/м^2, $\sigma' = 5{,}31$ нКл/м^2.

Задача 2. Между пластинами плоского конденсатора находятся два слоя диэлектрика – слюдяная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной 1 мм и парафин ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной 0,5 мм. Определить: 1) напряженность электростатического поля в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, если разность потенциалов между пластинами конденсатора 500 В.

Ответ: $E_1 = 182$ кВ/м, $E_2 = 637$ кВ/м, $D = 11{,}3$ мкКл/м^2.

Задача 3. Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет 1 см, разность потенциалов 200 В. Определить поверхностную плотность связанных зарядов эбонитовой пластинки, размещенной на нижней обложке конденсатора. Толщина пластины 8 мм.

Ответ: $\sigma' = 253$ нКл/м^2.

Задача 4. Свободные заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho = 5$ нКл/м^3 по шару радиусом 10 см из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 5$. Определите напряженность электростатического поля на расстояниях 5 см и 15 см от центра шара.

Ответ: $E_1 = 1{,}88$ В/м, $E_2 = 8{,}37$ В/м.

Задача 5. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Расстояние между пластинами $d = 8{,}85$ мм. Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составила $\sigma = 0{,}1$ нКл/см^2?

Ответ: $U = 1$ кВ.

Задача 6. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов U = 1,8 кВ. Диэлектрик – стекло (ε =7). Определить диэлектрическую восприимчивость стекла и поверхностную плотность σ' поляризационных (связанных) зарядов на поверхности стекла.

Ответ: $\chi = 6$, $\sigma' = 47{,}7$ мкКл/м^2.

Задача 7. Эбонитовая плоскопаралельна пластина расположена в однородном электрическом поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Плоскость пластины перпендикулярна линиям напряженности. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на поверхностях пластины.

Ответ: $\sigma' = \pm$ 11,8 мкКл/м^2.

Задача 8. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ε электрическое смещение имеет значение $\vec{D}$. Чему равна поляризованность $\vec{P}$ в этой точке?

Ответ: $\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\vec{D}$.

Задача 9. Поляризованность бесконечной плоскопараллельной пластины из парафина (ε=2), расположенной перпендикулярно к направлению электрического поля, равна 0,44 нКл/м^2. Определить напряженность поля E_0.

Ответ: E_0=100 В/м.

Задача 10. Две бесконечные параллельные плоскости заряжены с плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Сначала они находятся в вакууме. Затем промежуток между плоскостями заполняется однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ε. Что происходит при этом в промежутке между плоскостями с напряженностью поля $\vec{E}$, смещением $\vec{D}$, разностью потенциалов U между плоскостями?

Ответ: а) $\vec{E}$ уменьшается в ε раз; б) $\vec{D}$ остается неизменным;

в) U уменьшается в ε раз.

Задача 11. Найти напряженность $\vec{E}$ и электрическое смещение $\vec{D}$ внутри бесконечной плоскопараллельной пластины из фарфора (ε=5), размещенной перпендикулярно направлению поля напряженностью E_0=200 В/м.

Ответ: E = 40 В/м, D =1,77 нКл/м^2.

Задача 12. Определить, при какой напряженности E среднего макроскопического поля в диэлектрике (ε=3) поляризованность P достигает значения, равного 200 мкКл/м^2.

Ответ: $E = 11{,}3$ МВ/м.

Задача 13. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью E_0=20 кВ/м. Чему равна поляризованность P диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?

Ответ: P =141,6 нКл/м^2.

Задача 14. В середине шара из однородного изотропного диэлектрика с ε=5 создано однородное электрическое поле с напряженностью E = 100 В/м. Найти максимальную поверхностную плотность $\sigma'_{\max}$ связанных зарядов и среднее значение σ' зарядов одного знака.

Ответ: $\sigma'_{\max} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3{,}5$ нКл/м^2, $\langle\sigma'\rangle = \frac{\sigma'_{\max}}{2} = 1{,}75$ нКл/м^2.

Задача 15. Напряженность электрического поля у поверхности Земли $E_0 = -130$ В/м (знак минус показывает, что вектор напряженности направлен к центру Земли). На высоте h = 0,5 км напряженность $E_1 = -50$ В/м. Вычислить объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, считая, что она до высоты h является постоянной. Радиус Земли $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Ответ: $\rho = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м^3.

Задача 16. В промежуток между разноименно заряженными плоскостями ввели пластину из диэлектрика, не имеющую сторонних зарядов (рис. 9.4). Штриховой линией на рисунке показана воображаемая замкнутая поверхность, которая частично проходит внутри диэлектрика, частично вне его. Чему равен поток вектора D через эту поверхность?

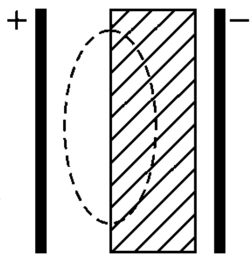

Рисунок 9.4

Ответ: $\Phi_D = 0$.

Задача17. Внутри диэлектрика известны его поляризованность $\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$ и напряженность поля $\vec{E} = \dfrac{a}{\varepsilon_0}(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$, где a – постоянная. Определить плотности связанных и сторонних зарядов внутри диэлектрика. Чему равна диэлектрическая проницаемость материала?

Ответ: $\rho' = -12a$, $\rho = 18a$, $\varepsilon = 3$.

Задача 18. Промежуток между пластинами плоского конденсатора заполнен диэлектриком. Толщина промежутка $d = 1$ мм, напряжение на пластинах конденсатора $U = 1000$ В, а поверхностная плотность индуцированного на диэлектрике заряда равна 11,5 мкКл/м^2. Вычислить диэлектрическую проницаемость материала, заполняющего промежуток между пластинами.

Ответ: $\varepsilon = 2{,}3$.

Задача 19. Поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрическом слое, размещенном между пластинами плоского конденсатора, равна $\sigma' = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. Пластины конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н. Площадь пластин равна $S = 100$ см^2. Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрического слоя.

Ответ: $\varepsilon = 7$.

Задача 20. Однородный диэлектрик имеет вид сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны a и b. Нарисуйте и объясните графики зависимости напряженности E и потенциала φ электрического поля от расстояния r до центра системы, если на диэлектрик поместить положительный сторонний заряд, распределенный равномерно: 1) по внутренней поверхности слоя; 2) по объему слоя.

Задача 21. Сферический слой с радиусами $R_1 = 3$ см и $R_2 = 5$ см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 3$ мкКл/м^3. Диэлектрическая проницаемость слоя $\varepsilon_1 = 5$, диэлектрическая проницаемость среды снаружи слоя ($r > R_2$) $\varepsilon_2 = 2{,}5$. Найти индукцию и напряженность электрического поля в центре шара; между поверхностями слоя на расстоянии 4 см от центра; вне слоя на расстоянии 4 см от наружной поверхности. Чему равна разность потенциалов между поверхностями слоя?

Ответ: 1) $D = E = 0$; 2) $D = 23$ нКл /м^2, $E = 523$ В/м;

3) $D = 12{,}1$ нКл /м^2, $E = 550$ В/м; 4) $\Delta\varphi = 9{,}94$ В.

Задача 22. Система из двух однородных и изотропных диэлектриков, разделенных плоской границей, находится в электрическом поле. Напряженность поля в первом диэлектрике образует с нормалью к границе раздела угол $\alpha_1 = 20^\circ$. Во втором диэлектрике ($\varepsilon_2 = 3$) угол α_2 между нормалью к границе раздела и направлением поля в нем составляет $28^\circ 36'$. Определить проницаемость ε_1 первого диэлектрика.

Ответ: $\varepsilon_1 = 2$.

Задача 23. У поверхности фарфора ($\varepsilon = 6$) напряженность поля в воздухе равна $E = 2 \cdot 10^4$ В/м. Направление поля образует с нормалью к поверхности угол $\alpha = 40°$. Определить: 1) угол β между направлением поля и нормалью в фарфоре; 2) напряженность поля в фарфоре; 3) поверхностную плотность связанных зарядов в фарфоре.

Ответ: $\beta = 78^\circ 46'$; $E = 1{,}31 \cdot 10^4$ В/м; $\sigma' = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2.

Задача 24. Вблизи границы раздела стекло-вакуум напряженность электрического поля в вакууме $E_0 = 10$ В/м, угол между вектором напряженности и нормалью к границе $\alpha_0 = 30^\circ$. Найти напряженность поля в стекле, угол между вектором напряженности и нормалью к границе раздела в стекле, а также поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела.

Ответ: $tg\alpha = \varepsilon tg\alpha_0, E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2\alpha_0}$, $\sigma' = \varepsilon_0 (1 - 1/\varepsilon) E_0 \cos\alpha_0$.

Задача 25. При некоторых условиях поляризованость бесконечной незаряженной пластины имеет вид $\vec{P} = \vec{P}_0 (1 - x^2/d^2)$, где P_0 – вектор, перпендикулярный к пластине, x – расстояние от середины пластины, d – ее полутолщина. Найти напряженность электрического поля внутри пластины и разность потенциалов между ее поверхностями.

Ответ: $\vec{E} = -\vec{P}_0 (1 - x^2/d^2) / \varepsilon_0$, $U = \dfrac{4P_0 d}{3\varepsilon_0}$.

Задача 26. Точечный заряд q находится в центре шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти поляризованность $\vec{P}$ как функцию радиус-вектора $\vec{r}$ относительно центра сферы, а также связанный заряд внутри шара.

Ответ: $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$, $q' = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot q$.

Задача 27. Бесконечная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε заряжена однородно с объемной плотностью ρ. Толщина пластины 2*a*. Вне пластины $\varepsilon = 1$. Найти: а) поляризованность диэлектрика как функцию *x*;

б) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на левой ($x = -a$) и правой ($x = +a$) границах пластины; в) объемную плотность ρ' связанных зарядов.

Ответ: а) $\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\rho x\vec{i}$; б) на обеих поверхностях $\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\rho a$;

в) $\rho' = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\rho$.

Задача 28. Бесконечная пластина из изотропного диэлектрика помещена в перпендикулярное к ней однородное внешнее электрическое поле напряженностью E_0. Толщина пластины *a*, проницаемость изменяется линейно от значения ε_1 на левой грани до ε_2 на правой. Вне пластины $\varepsilon = 1$ (рис. 9.5). Найти: а) $\nabla\vec{E}$ внутри пластины как функцию *x*; б) поток вектора $\vec{E}$ сквозь воображаемую цилиндрическую поверхность, с образующими, параллельными оси *x*; основания цилиндра размещены в точках $x_1 = -a/2$, $x_2 = a/2$; площадь каждого основания равна *S*; в) объемную плотность ρ' связанных зарядов как функцию *x*.

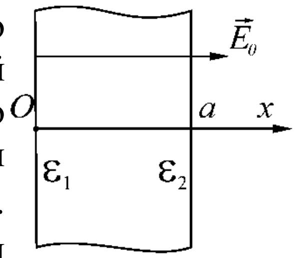

Рисунок 9.5

Ответ: а) $\nabla\vec{E} = \frac{E_0 k}{(\varepsilon_1 + kx)^2}$, где $k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}$; б) $\Phi_E = SE_0\left[\frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - 1\right]$;

в) $\rho' = -\frac{\varepsilon_0 E_0 k}{(\varepsilon_1 + kx)^2}$.

Задача 29. Найти ρ' внутри пластины из задачи 18, если $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, *a*=1см, E_0=3кВ/м.

Ответ: $\rho' = -\frac{(4\varepsilon_0 E_0/a)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^2} = -0{,}59$ мкКл/м^2.

Задача 30. Бесконечная диэлектрическая пластина толщиной *a* размещена во внешнем, перпендикулярном к пластине, однородном электрическом поле с напряженностью E_0. Проницаемость пластины изменяется по некоторому закону $\varepsilon(x)$, причем $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ где *x*=0 находится на одной грани, а ось *x* направлена перпендикулярно к пластине от этой грани к другой. Какой вид должна иметь функция $\varepsilon(x)$, чтобы плотность объемных связанных зарядов изменялась по закону $\rho' = \rho_1'/(1 + \alpha x)$, где ρ_1' и α постоянные? Вне пластины $\varepsilon = 1$.

Ответ: $\varepsilon(x) = \alpha\varepsilon_1\varepsilon_0 E_0\left[\varepsilon_1\rho_1' \ln(1 + \alpha x) + \alpha\varepsilon_0 E_0\right]$.

10 ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ, ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

10.1 Цель занятия

Ознакомиться с поведением проводников в электрическом поле. Выяснить, как размещаются электрические заряды на поверхности заряженного проводника, какое явление носит название электростатической индукции, а также какое значение принимает напряженность электростатического поля внутри проводника. Выяснить, что такое электроемкость и научиться рассчитывать емкости простых систем и энергию электрического поля.

10.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Изучить соответствующий теоретический материал по конспекту и [3, разд. 3; 4, разд. 3; 5, §17,18]. Если металлический проводник находится в электрическом поле, то на хаотическое движение электронов накладывается упорядоченное движение в направлении, противоположном направлению напряженности поля. Явление перераспределения зарядов внутри проводника под действием внешнего электрического поля называется электростатической индукцией. Заряды, возникающие на поверхности проводника, имеют название наведенных или индуцированных. В результате такого перераспределения зарядов поле внутри проводника равно нулю, а поверхность проводника становится эквипотенциальной.

10.3 Основные законы и формулы

1. Напряженность электростатического поля у поверхности проводника:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

где σ − поверхностная плотность зарядов; ε − диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

2. Электрическая емкость (емкость) уединенного проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где q − заряд проводника; φ − потенциал проводника.

3. Электрическая емкость шара радиусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

4. Электрическая емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где q – заряд, накопленный в конденсаторе; $(\varphi_1 - \varphi_2)$– разность потенциалов между его пластинами.

5. Электрическая емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами.

6. Электрическая емкость сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 – радиусы концентрических сфер.

7. Электрическая емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}},$$

где l – длина конденсатора; r_1 и r_2– радиусы полых коаксиальных цилиндров.

8. Емкость при последовательном соединении *n* конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

9. Емкость при параллельном соединении *n* конденсаторов:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i .$$

10. Энергия уединенного заряженного проводника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где C, q, φ – емкость, заряд и потенциал проводника соответственно.

11. Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где q – заряд конденсатора; C – его электроемкость; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между пластинами.

12. Энергия электростатического поля плоского конденсатора:

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V,$$

где S – площадь одной пластины; U – разность потенциалов между пластинами; $V = S \cdot d$ – объем конденсатора.

13. Объемная плотность энергии электростатического поля:

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где E − напряженность электростатического поля; D − электрическое смещение.

10.4 Контрольные вопросы и задания

1. Как распределяются электрические заряды на заряженном проводнике?
2. Чему равны напряженность и потенциал электростатического поля внутри и на поверхности проводника?
3. Как возникают индуцированные заряды?
4. Что такое электроемкость уединенного проводника, от чего она зависит?
5. Чему равна электроемкость конденсатора, емкость плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов?
6. Как рассчитать электроемкость батареи при параллельном и последовательном соединениях конденсаторов?
7. Чему равна энергия уединенного проводника и энергия заряженного конденсатора?
8. Как определить электрическую энергию системы заряженных тел (проводников и непроводников)? Где локализована эта энергия?
9. Выведите формулу для объемной плотности энергии электрического поля.
10. Почему уменьшается сила взаимного притяжения пластин заряженного плоского конденсатора при погружении его в жидкий диэлектрик?

10.5 Примеры решения задач

Задача 1. Бесконечную металлическую плоскость, толщина которой *a,* зарядили так, что плотность заряда на каждой поверхности плоскости равна σ. Далее эту плоскость разместили в однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E} = E_0 \vec{i}$ перпендикулярно плоскости, как показано на рис. 10.1. Определить: 1) напряженность поля $\vec{E}'$ внутри плоскости, а также поле вне плоскости; 2) поверхностную плотность зарядов σ_1 и σ_2, возникающих на правой и левой стороне плоскости.

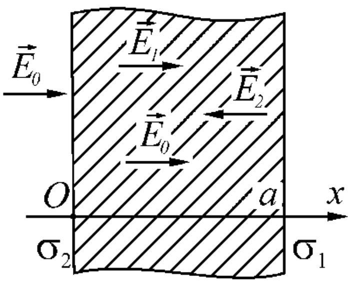

Рисунок 10.1

Дано: a, σ, $\vec{E} = E_0 \vec{i}$.

Найти: $\vec{E}'$, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$.

Анализ и решение

После внесения заряженной плоскости в поле заряды на поверхности плоскости будут перераспределяться до тех пор, пока напряженность поля внутри металлической поверхности не станет равна нулю ($\vec{E}'=0$). Предположим, что в таком случае поверхностная плотность заряда на левой стороне плоскости равна σ_2, а на правой – σ_1. Электростатическое поле внутри металла является суперпозицией трех полей: внешнего поля $\vec{E}_0$; поля, обусловленного зарядами на правой стороне плоскости $\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$; поля, обусловленного зарядами на левой стороне плоскости $\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Согласно рис.10.1,

$$E_0+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0.$$

Суммарный заряд пластины не уменьшится, поэтому:

$$\sigma_1+\sigma_2=2\sigma,$$

откуда имеем:

$$\sigma_1=\sigma-\varepsilon_0E_0;\ \sigma_2=\sigma+\varepsilon_0E_0.$$

Тогда слева от плоскости:

$$E_1=E_0-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

справа:

$$E_2=E_0+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Ответ: $\vec{E}'=0$, $E_1=E_0-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_2=E_0+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $\sigma_1=\sigma-\varepsilon_0E_0$, $\sigma_2=\sigma+\varepsilon_0E_0$.

Задача 2. Емкость плоского воздушного конденсатора $C=10^{-9}$ Ф, расстояние между пластинами $d=4$ мм. На заряд $q=4{,}9\cdot10^{-9}$ Кл, помещенный между пластинами конденсатора, действует сила $F=9{,}8\cdot10^{-5}H$ H. Площадь пластины конденсатора S=100 см^2. Определить: 1) напряженность электрического поля и разность потенциалов между пластинами; 2) энергию и плотность энергии электрического поля конденсатора.

Дано: $F = 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н, $q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл, $C = 10^{-9}$ Ф, $S = 10^{-2}$ м^2, $d = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Найти: E, U, W, w.

Анализ и решение

Поле между пластинами конденсатора считаем однородным. Напряженность поля E можно определить как

$$E = \frac{F}{q} = 2 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Разность потенциалов между пластинами найдем из соотношения

$$U = E \cdot d = 80 \text{ В.}$$

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = 7{,}04 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.}$$

Учитывая, что $V = S \cdot d$ – объем конденсатора, плотность энергии:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = 1{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}^3.$$

Ответ: $E = 2 \cdot 10^4$ В/м, $U = 80$ В, $W = 7{,}04 \cdot 10^{-8}$ Дж, $w = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^3.

Задача 3. Установить, как изменяются емкость и энергия плоского воздушного конденсатора, если параллельно его обкладкам (рис. 10.2) поместить металлическую пластину толщиной $d_0 = 1$ мм. Площадь обкладок конденсатора и пластины 150 см^2, расстояние между обкладками $d = 6$ мм. Конденсатор заряжен до напряжения 400 В и отключен от батареи.

Дано: $\varepsilon = 1$, $d_0 = 1$ мм $= 10^{-3}$ м, $S = 150$ см^2 $=$ $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2, $d = 6$ мм $= 6 \cdot 10^{-3}$ м, $U = 400$ В.

Найти: ΔC, ΔW.

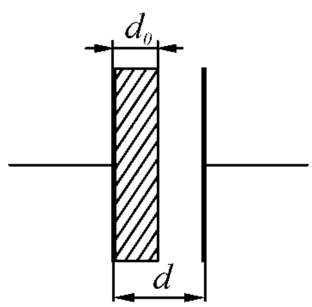

Рисунок 10.2

Анализ и решение

Емкость и энергия конденсатора при внесении в него металлической пластины изменятся. Это вызвано уменьшением расстояния между пластинами от d до $(d - d_0)$. Использовав формулу электроемкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

получим:

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S d_0}{d(d - d_0)} = 4{,}42 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф}.$$

При внесении металлической пластины параллельно обкладкам объем электрического поля уменьшился на $\Delta V = S(d - d_0) - Sd = -Sd_0$.

Объемная плотность энергии электрического поля конденсатора

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2},$$

тогда

$$\Delta W = w \cdot \Delta V = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 S d_0}{2}.$$

Напряженность E поля связана с напряжением на обкладках:

$$E = \frac{U}{d},$$

следовательно

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 U^2 S d_0}{2d^2} = -2{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\Delta C = 4{,}42 \cdot 10^{-12}$ Ф, $\Delta W = -2{,}95 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 4. Найти емкость системы из двух одинаковых металлических шариков с радиусами a, расстояние между центрами которых b, к тому же $b >> a$.

Дано: a, b, $b >> a$.

Найти: C.

Анализ и решение

По определению емкость системы $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$. Пусть левый шарик имеет заряд $+q$, а правый – $-q$ (рис. 10.3).

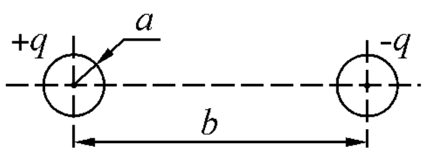

Рисунок 10.3

Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a}\right),\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{a} + \frac{q}{b-a}\right).$$

Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a} + \frac{q}{a} - \frac{q}{b-a}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b-2a}{a(b-a)}.$$

Учитывая, что $b >> a$, получим :

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Тогда

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 2\pi\varepsilon_0 a.$$

Ответ: $C = 2\pi\varepsilon_0 a$.

Задача 5. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл равномерно распределен по поверхности сферы радиусом $R = 1$ см. Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей сферу, $\varepsilon = 1$. Определить энергию поля, связанную со сферой.

Дано: $q = 10^{-10}$ Кл, $R = 1$ см $= 10^{-2}$, $\varepsilon = 1$.

Найти: W.

Анализ и решение

Энергию поля *W*, связанную со сферой, определим по формуле:

$$W = \int\limits_V^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV = \int\limits_R^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

где $4\pi r^2 dr$ – сферический слой радиусом *r* и толщиной dr, а объемная плотность энергии $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$.

Значение напряженности поля вне сферы можно определить с помощью теоремы Гаусса. Получим: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Тогда:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2R} = 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ Дж.}$$

Ответ: $W = 4,5$ нДж.

10.5 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Расстояние между вертикальными пластинами в плоском воздушном конденсаторе равно *d*=6 мм. Его погружают до половины в масло ($\varepsilon = 7$). Как изменится емкость конденсатора?

Ответ: увеличится в четыре раза.

Задача 2. Пластины плоского воздушного конденсатора площадью S=150 см^2 раздвигают так, что расстояние между ними увеличивается от 5 до 14 мм. Какую работу A необходимо при этом выполнить, если напряжение между пластинами конденсатора постоянное (то есть конденсатор не отключен от источника) и равно 380 В?

Ответ: $A = 1,2 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 3. Между обкладками плоского конденсатора площадью S=100 см^2 каждая расположена слюда. Обложки притягиваются друг к другу с силой F= 0,03 Н. Определить напряженность поля конденсатора (для слюды $\varepsilon = 6$).

Ответ: $E = 3,3 \cdot 10^5$ В/м.

Задача 4. На пластинах плоского вакуумного конденсатора равномерно распределен заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Площадь обкладок S= 100 см^2, а расстояние между обкладками d= 3 мм. Заряженный конденсатор отключен от батареи. Какую необходимо выполнить работу, чтобы раздвинуть пластины до 8 мм ?

Ответ: A=$0,706 \cdot 10^{-4}$ Дж .

Задача 5. В батарею соединили последовательно 10 одинаковых конденсаторов. Емкость каждого равна C_i= 100 пф. Определить емкость батареи C.

Ответ: C = 10 пф.

Задача 6. Как следует соединить конденсаторы $C_1 = 2$ пф, $C_2 = 4$ пф и $C_3 = 6$ пф, чтобы общая емкость была равна 3 пф ?

Ответ: $(C_1 \,||\, C_2) + C_3$.

Задача 7. Площадь обкладки конденсатора S. Пространство между обкладками заполнено двухслойным диэлектриком. Диэлектрическая проницаемость и толщина первого слоя равна ε_1 и d_1, второго – ε_2 и d_2. Найти емкость конденсатора C.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$.

Задача 8. Плоский конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Чему равно сопротивление конденсатора, если его емкость C ?

Ответ: $R = \dfrac{\rho \varepsilon \varepsilon_0}{C}$.

Задача 9. Какой заряд q' пройдет по проводникам, соединяющим пластины воздушного конденсатора и источник тока с напряжением U, при погружении конденсатора в керосин (диэлектрическая проницаемость ε). Площадь пластины конденсатора S, расстояние между пластинами d .

Ответ: $q' = \dfrac{\varepsilon_0 S U}{d}(\varepsilon - 1)$.

Задача 10 Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов U_0. Далее конденсатор отключили от источника тока. Какой стала разность потенциалов между пластинами, если расстояние между ними увеличить от d_0 до d, а пространство между пластинами заполнить слюдой с диэлектрической проницаемостью ε?

Ответ: $U = \dfrac{d \cdot U_0}{\varepsilon \cdot d_0}$.

Задача 11. Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными плоскостями с поверхностными плотностями зарядов σ_1 и σ_2. Определить напряженности электрического поля, созданного этими плоскостями между ними E_2 и вне пластин слева E_1, справа E_3.

Ответ: $E_1 = -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}$, $E_3 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Задача 12. Два конденсатора зарядили до напряжения U_1 и U_2, после чего их соединили параллельно. Разность потенциалов между обкладками конденсаторов стала равной U. Найти отношение величин емкостей конденсаторов.

Ответ: $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{U - U_2}{U_1 - U}$.

Задача 13. На пластинах плоского воздушного конденсатора с площадью пластин $S = 150$ см^2 размещен заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Чему равна сила F взаимного притяжения между пластинами конденсатора?

Ответ: $F = 0{,}94 \cdot 10^{-2}$ Н.

Задача 14. На пластинах плоского воздушного конденсатора с площадью пластин $S = 150$см^2 размещен заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Чему равна объемная плотность w энергии электрического поля конденсатора?

Ответ: $w = 0{,}628$ Дж/м^3.

Задача 15. Два одинаковых плоских конденсатора соединили параллельно и зарядили до разности потенциалов U_0. Найти разность потенциалов U между пластинами конденсаторов, если после отключения конденсаторов от источника тока в одном из них уменьшили расстояние между пластинами вдвое.

Ответ: $U = \dfrac{2}{3} U_0$.

Задача 16. Два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 зарядили до разности потенциалов U_1 и U_2. Найти разность потенциалов U после соединения конденсаторов одноименными полюсами.

Ответ: $U = \dfrac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}$.

Задача 17. Точечный заряд q находится в среде с диэлектрической проницаемостью ε. Определить энергию электрического поля в слое, радиусы которого a и b. Заряд находится в центре слоя.

Ответ: $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$.

Задача 18. Плоский конденсатор имеет емкость $C = 5$ пФ. Какой заряд находится на каждой из его пластин, если разность потенциалов между ними $U = 1000$ В?

Ответ: $q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Задача 19. Найти заряд, который нужно передать двум параллельно соединенным конденсаторам с емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 1$ мкФ, чтобы зарядить их до разности потенциалов $U = 0,2$ В.

Ответ: $q = 6 \cdot 10^{-7}$ Кл.

Задача 20. Два конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ зарядили до разностей потенциалов $U_1 = 20$ В и $U_2 = 50$ В. Найти разность потенциалов U после соединения конденсаторов одноименными полюсами.

Ответ: $U = \dfrac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 40$ В.

Задача 21. Два последовательно соединенных конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ подключены к источнику тока с напряжением $U = 220$ В. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

Ответ: $U_1 = \dfrac{C_2U}{C_1 + C_2} = 165$ В, $U_2 = \dfrac{C_1U}{C_1 + C_2} = 55$ В.

Задача 22. Два последовательно соединенных конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ подключены к источнику тока с напряжением $U = 900$ В. Возможна ли работа такой схемы, если напряжение пробоя конденсаторов $U_{пр} = 500$ В?

Ответ: $U_1 = 600$ В, $U_2 = 300$ В. Невозможна, так как $U_1 > U_{пр}$.

Задача 23. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов $U_0 = 50$ В и отключен от источника тока. После этого в конденсатор параллельно обкладкам вносится металлическая пластинка толщиной $d_n = 1$ мм. Расстояние между обкладками $d = 5$ мм, площади обкладок и пластинки одинаковы. Найти разность потенциалов U между обкладками конденсатора с металлической пластиной.

Ответ: $U = \dfrac{(d - d_n)U_0}{d} = 40$ В.

Задача 24. Найти общую емкость конденсаторов, подключенных по схеме, изображенной на рис. 10.4. Емкости конденсаторов $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ, $C_4 = 5$ мкФ.

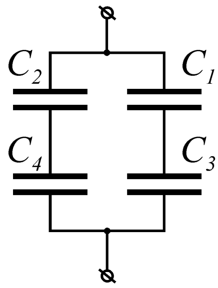

Рисунок 10.4

Ответ: $C = \dfrac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + \dfrac{C_2C_4}{C_2 + C_4} = 4,5 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Задача 25. Конденсатору емкостью $C = 2$ мкФ передано заряд $q = 1$ мКл. Обкладки конденсатора соединили проводником. Найти количество теплоты Q, выделившейся в проводнике при разрядке конденсатора, и разность потенциалов между обкладками конденсатора до разрядки.

Ответ: $Q = 0,25$ Дж, $U = 500$ В.

Задача 26. Конденсатору, электроемкость C которого равна 10 пФ**,** передан заряд $q = 1$ нКл. Определить энергию W конденсатора.

Ответ: $W = 5 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Задача 27. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние между пластинами $d = 1$ мм, диэлектрик – слюда ($\varepsilon = 7$) и площадь S каждой пластины равна 300 см^2?

Ответ: $W =$ 0,209 Дж.

Задача 28. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2. Найти плотность энергии W поля конденсатора.

Ответ: $W =$ 2,5 Дж/м^3.

Задача 29. Конденсаторы электромкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 3$ мкФ, включенные в цепь с напряжением $U = 1,1$ кВ. Определить энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения.

Ответ: 1) 0,18 Дж, 0,09 Дж, 0,06 Дж; 2) 0,605 Дж, 1,21 Дж, 1,815 Дж.

Задача 30. Электроемкость C плоского конденсатора равна 111 пФ. Диэлектрик – фарфор ($\varepsilon = 5$). Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 600$ В и отключили от источника напряжения. Какую работу A нужно выполнить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора? Трением пренебречь.

Ответ: $A = 8 \cdot 10^{-5}$ Дж.

11 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

11.1 Цель занятия

Усвоить основные законы теории постоянного электрического тока: обобщенный закон Ома, правила Кирхгофа и закон Джоуля-Ленца, а также научиться рассчитывать электрические цепи, то есть, имея произвольную электрическую цепь и любые его параметры (электродвижущую силу (ЕРС), сопротивление и др.), уметь определить другие неизвестные величины (силу тока, работу, мощность, количество теплоты и т. п).

11.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Теоретический материал данной темы следует изучить по [3, разд. 4; 4, разд. 4; 5, глава 4] и конспекту лекций, ответить на контрольные вопросы, проанализировать решения задач, приведенных как примеры.

11.3 Основные законы и формулы

1. Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

2. Плотность тока в проводнике

$$j = \frac{I}{S},\ \vec{j} = ne\langle\vec{\upsilon}\rangle,$$

где S – площадь поперечного сечения проводника; $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n – концентрация зарядов.

3. Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q_0},$$

где A_{cm} – работа сторонних сил; q_0 – единичный положительный заряд,

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} \text{ (замкнутая цепь)},$$

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \text{ (участок цепи 1-2)},$$

где $\vec{E}_{cm}$ – напряженность поля сторонних сил.

4. Разность потенциалов между двумя точками цепи

$$\varphi_1 - \varphi_2 == \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} == \int_1^2 E_l dl,$$

где $\vec{E}$ – напряженность электростатического поля; E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

5. Напряжение на участке 1-2 цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon,$$

де $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между точками цепи; ε – ЭДС, действующая на участке 1-2 цепи.

6. Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электропроводность σ вещества проводника:

$$R = \rho\frac{l}{S},\ G = \frac{1}{R},\ \sigma = \frac{1}{\rho},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление; S – площадь поперечного сечения проводника; l – его длина.

7. Сопротивление при последовательном соединении *n* проводников:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i .$$

8. Сопротивление при параллельном соединении *n* проводников:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} .$$

9. Закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \text{ (для однородного участка цепи)},$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R} \text{ (для неоднородного участка цепи)},$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \text{ (для замкнутой цепи)},$$

где U – напряжение на участке цепи; R – сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12} – ЭДС источников тока участка цепи; ε – ЭДС всех источников тока цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

10. Зависимость удельного сопротивления ρ и сопротивления R от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),\ R = R_0(1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0, R и R_0 – соответственно удельное сопротивление и сопротивление проводника при произвольной t и $t = 0^\circ C$; α – температурный коэффициент сопротивления.

11. Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma\vec{E},$$

где $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{E}$ – напряженность электростатического поля; σ – удельная электропроводность проводника.

12. Работа тока

$$dA = Udq = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt,$$

где U – напряжение, приложенное к концам однородного проводника; I – сила тока в проводнике; R – сопротивление проводника; dq – заряд, который переносится через поперечное сечение проводника за период времени dt.

13. Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R},$$

где U – напряжение, приложенное к концам проводника; I – сила тока в проводнике; R – его сопротивление.

14. Закон Джоуля-Ленца:

$$dQ = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt.$$

15. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \sigma E^2,$$

где w – удельная тепловая мощность тока; j – плотность тока; E – напряженность электростатического поля; σ – удельная электропроводность вещества.

16. Первое правило Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0, \tag{11.1}$$

где I_k – ток, входящий в узел / выходящий из узла; k – количество токов в узле.

17. Второе правило Кирхгофа

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k, \tag{11.2}$$

где $I_i R_i$ – падение напряжения на i-м элементе цепи; i – количество элементов в цепи; ε_k – k-я ЭДС, действующая в цепи; k – количество ЭДС, действующих в цепи.

Порядок решения задач с использованием правил Кирхгофа:

1. Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление определяется при решении задачи: если искомый ток получается положительным, то его направление выбрано правильно, отрицательным – его верное направление противоположно выбранному.

2. Подсчитать число m узлов в цепи и записать уравнение (11.1) для $(m-1)$ узлов.

3. Выделить в разветвленной цепи замкнутые контуры, определить направление обхода каждого и записать систему уравнений (11.2) для каждого из них. Контуры следует выбирать так, чтобы каждый новый контур имел хотя бы один участок цепи, который бы не входил в предыдущие контуры. Произведение $I \cdot R$ положительно, если ток на данном участке совпадает с

направлением обхода, и наоборот; ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными.

4. Решить полученную систему уравнений и найти искомые токи.

11.4 Контрольные вопросы и задания

1. Что такое электрический ток, сила и плотность тока?
2. Что такое электросопротивление проводника, от чего оно зависит?
3. Чему равно электросопротивление при параллельном и последовательном соединении проводников?
4. Какой вид имеет зависимость электросопротивления от температуры?
5. Что понимают под сторонними силами и какова их роль в цепи постоянного тока?
6. Поясните физический смысл электродвижущей силы, напряжения и разности потенциалов на участке электрической цепи.
7. Запишите закон Ома для однородного участка цепи в интегральном виде.
8. Запишите закон Ома в дифференциальной форме.
9. Запишите закон Ома для неоднородного участка цепи.
10. Сформулируйте правила знаков для силы тока и ЭДС в обобщенном законе Ома для участка цепи.
11. Запишите правила Кирхгофа и их обоснование.
12. Чему равна работа и мощность электрического тока?
13. Запишите закон Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

11.5 Примеры решения задач

Задача 1. Какой заряд переносится в следующих случаях: а) ток равномерно увеличивается от нуля до 3А за 10 с; б) ток уменьшается от 18А до нуля, к тому же за каждые 0,01 с он уменьшается вдвое: в) сила тока уменьшалась от 10А до 5А в течение 10 с, причем сопротивление проводника равномерно возрастало, а разность потенциалов на концах проводника оставалась постоянной?

Дано:

а) , $I_1 = 3\text{А}$, $\tau = 10\text{ с}$; б) $I_0 = 18\text{А}$, $I_1 = 0$, $\tau = 0{,}01\text{ с}$, $\dfrac{I(t)}{I(t+\tau)} = 2$;

в) , $I = 5\text{А}$, $\tau = 10\text{ с}$.

Найти: q.

Анализ и решение

а) Известно, что $I=\dfrac{dq}{dt}$, откуда $dq=Idt$ и $q=\int\limits_0^\tau Idt$. Но по условию $I=kt$, где $k=\dfrac{I_1}{\tau}$, тогда $q=\int\limits_0^\tau ktdt=\dfrac{k\tau^2}{2}=\dfrac{I_1\tau}{2}=15$ Кл.

б) Найдем закон изменения тока со временем. По условиям задачи

$$\frac{I(t)}{I(t+\tau)}=2\text{, тобто } I(\tau)=\frac{I_0}{2};\; I(2\tau)=\frac{l_0}{2^2};\; I(3\tau)=\frac{I_0}{2^3}.$$

Получим зависимость тока от времени:

$$I(t)=\frac{I_0}{2^{\frac{t}{\tau}}}=I_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Теперь рассчитаем q

$$q=\int\limits_0^\infty I(t)dt=\int\limits_0^\infty I_0 2^{-\frac{t}{\tau}}dt=-\left.\frac{I_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\tau}{\ln 2}\right|_0^\infty=\frac{I_0\tau}{\ln 2}=0,26\,\text{Кл}.$$

в) Из условий задачи следует, что величина сопротивления является линейной функцией времени, то есть

$$R=R_0+kt\,, \tag{11.3}$$

где R_0 и R – соответственно начальное и конечное сопротивление проводника; k – постоянная величина, которая соответствует скорости изменения сопротивления:

$$k=\frac{R-R_0}{\tau}.$$

По закону Ома для однородного участка цепи можно записать:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}.$$

Очевидно, что сила тока не является линейной функцией времени. Зная зависимость $I(t)$, можно определить заряд по формуле:

$$q=\int\limits_0^\tau Idt=\int\limits_0^\tau\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}dt=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\cdot\int\limits_0^\tau\frac{d(R_0+kt)}{R_0+kt}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\cdot\ln\frac{R_0+kt}{R_0}.$$

Имея в виду (11.3) и соотношения ; $R_0=(\varphi_1-\varphi_2)/I_0$, получим:

$$q=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)\tau}{R-R_0}\ln\frac{R}{R_0}=\frac{I_0I_\tau}{I_0-I}\ln\frac{I_0}{I}=69,3\,\text{Кл}.$$

Ответ: а) $q=15\,\text{Кл}$, б) $q=0,26\,\text{Кл}$, в) $q=69,3\,\text{Кл}$.

Задача 2. Источник тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 12\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r_1 = 0,2\ \text{Ом}$ заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС $\varepsilon_2 = 10\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r_2 = 0,6\ \text{Ом}$. Параллельно к батарее подключена лампа накаливания сопротивлением $R = 3\ \text{Ом}$ (рис. 11.1). Определить величину токов в батарее аккумуляторов I_2 и через лампу I.

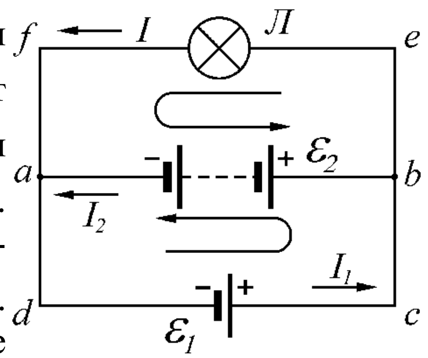

Рисунок 11.1

Дано: , $r_1 = 0,2\ \text{Ом}$, $\varepsilon_2 = 10\,\text{В}$, $r_2 = 0,6\ \text{Ом}$, $R = 3\ \text{Ом}$.

Найти: I_2, I.

Анализ и решение

В процессе зарядки аккумулятора его полюса соединяются с одноименными полюсами генератора. Выбираем направления токов, указанные на рисунке, тогда по первому закону Кирхгофа (11.1) для узла *a* имеем:

$$I_1 = I + I_2. \tag{11.4}$$

В обоих замкнутых контурах *abef* и *abcd* направление обхода берем против направления движения часовой стрелки. Тогда по второму закону Кирхгофа (11.2) получим:

$$IR - I_2 r_2 = \varepsilon_2;$$

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Вместе с уравнением (11.4) имеем систему уравнений, после решения которой получим:

$$I_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R - \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} = 1,6\ \text{А};$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} = 3,6\,\text{А}.$$

Ответ: $I = 3,6\,\text{А}$, $I_2 = 1,6\,\text{А}$.

Задача 3. Величина тока в цепи изменяется со временем по закону $I = I_0 e^{-at}$, где $I_0 = 5\,\text{А}$. Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением $R = 20\ \text{Ом}$ за время, в течение которого ток уменьшится в e раз. Коэффициент *a* равен $2 \cdot 10^{-2}\ \text{с}^{-1}$.

Дано: $I = I_0 e^{-at}$, $I_0 = 5\,\text{А}$, $R = 20\ \text{Ом}$, $a = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{с}^{-1}$.

Найти: Q.

Анализ и решение

По закону Джоуля-Ленца имеем:

$$Q = \int_0^t I^2 R dt,$$

подставим закон тока $I = I_0 e^{-at}$ и получим:

$$Q = I_0^2 R \int_0^{\tau} e^{-2at} dt = I_0^2 R \left(-\frac{1}{2a} e^{-at} \right) \Bigg|_0^{\tau} = \frac{I_0^2 R}{2a} \left(1 - e^{2a\tau} \right).$$

Рассчитаем время τ, в течение которого ток уменьшится в *e* раз.

$$I = \frac{I_0}{e};\ \frac{I_0}{e} = I_0 e^{-a\tau};\ e^{-1} = e^{-a\tau};\ \tau = \frac{1}{a} = 50\, c.$$

Вычисление дает результат:

$$Q = \frac{I_0^2}{2a} \cdot \left(1 - e^{-2a\tau} \right) \approx 1{,}1 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q \approx 11 \text{кДж}$.

Задача 4. Определите внутреннее сопротивление источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4\,\text{А}$ развивается мощность $P_1 = 10\,\text{Вт}$, а при силе тока $I_2 = 6\,\text{А}$ – мощность $P_2 = 12\,\text{Вт}$.

Дано: $I_1 = 4\,\text{А}$, $P_1 = 10\,\text{Вт}$, $I_2 = 6\,\text{А}$, $P_2 = 12\,\text{Вт}$.

Найти: r.

Анализ и решение

Мощность, развиваемая током,

$$P_1 = I_1^2 R_1 \text{ и } P_2 = I_2^2 R_2, \tag{11.5}$$

где R_1 и R_2 – сопротивление внешней цепи.

Согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r},\quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r},$$

где – ЭДС источника. Решив эти два уравнения относительно r, получаем

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \tag{11.6}$$

Выразив I_1R_1 и I_2R_2 из уравнения (11.5) и подставив в выражение (11.6), найдем внутреннее сопротивление источника тока:

$$r = \frac{P_1 / I_1 - P_2 / I_2}{I_2 - I_1} = 0,25 \text{ Ом.}$$

Ответ: $r = 0,25$ Ом.

Задача 5. По проводнику с сопротивлением $R = 10$ Ом течет ток, сила тока растет при этом линейно. Количество теплоты Q, выделившейся в проводнике за время $\tau = 10$ с, равно 300 Дж. Определите заряд q, прошедший за это время по проводнику, если в начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.

Дано: $R = 10$ Ом, $\tau = 10$ с, $Q = 300$ Дж, $I_0 = 0$.
Найти: q.

Анализ и решение

Из условия равномерного возрастания силы тока (при $I_0 = 0$) следует, что $I = kt$, где k – коэффициент пропорциональности. Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$, можем записать:

$$dq = Idt = ktdt. \tag{11.7}$$

Интегрируя выражение (11.7), получим:

$$q = \int_0^\tau ktdt = \frac{k\tau^2}{2}. \tag{11.8}$$

Для нахождения коэффициента k запишем закон Джоуля-Ленца для бесконечно малого промежутка времени dt:

$$dQ = I^2Rdt.$$

Интегрируя это выражение от 0 до τ, получим количество теплоты Q, заданное в условии задачи:

$$Q = \int_0^\tau I^2Rdt = \int_0^\tau k^2t^2Rdt = \frac{1}{3}k^2R\tau^3,$$

откуда найдем k:

$$k = \sqrt{\frac{3Q}{\tau^3R}}. \tag{11.9}$$

Подставив формулу (11.7) в выражение (11.8), определим искомый заряд

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q}{R}} = 15 \text{ Кл.}$$

Ответ: $q=15$ Кл.

11.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Величина тока в проводнике равномерно увеличивается от $I_0=2$ А до $I=8$ А за 10 с. Найти величину прошедшего заряда.

Ответ: $q=50$ Кл.

Задача 2. Определить плотность тока в железном проводнике, длина которого 10 м, если проводник находится под напряжением $U=6$ В.

Ответ: $j=6{,}1$ МА/м^2.

Задача 3. Внутреннее сопротивление гальванометра $r=680$ Ом. Как и какое сопротивление $R_ш$ нужно подключить к нему, чтобы с его помощью можно было бы измерения ваты ток 2,5А ? Шкала гальванометра рассчитана на 300 мкА.

Ответ: $R_ш=0{,}0816$ Ом.

Задача 4. Внутреннее сопротивление гальванометра $r_a=720$ Ом, шкала рассчитана 300 мкА. Как и какое сопротивление $R_д$ нужно добавить к нему, чтобы с его помощью можно было бы измерять напряжение $U=300$ В?

Ответ: $R_д \approx 10^6$ Ом.

Задача 5. Два одинаковых источника тока с $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1{,}2$ В, внутреннее сопротивление которых $r=0{,}4$ Ом, соединены, как показано на рис. 11.2. Определить величину тока в цепи и разность потенциалов между точками a и b первом и втором случаях.

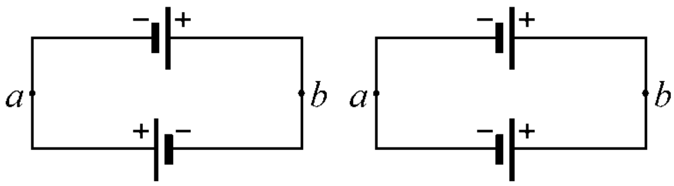

Рисунок 11.2

Ответ: а) $I=3$ А; $U=0$; б) $I=0$; $U=1{,}2$ В.

Задача 6. Два элемента $\varepsilon_1=1{,}2$ В с внутренним сопротивлением $r_1=0{,}10$ Ом и $\varepsilon_2=0{,}9$ В с внутренним сопротивлением $r_2=0{,}3$ Ом соединены одноименными полюсами. Сопротивление R соединяющих проводниковых равно $0{,}2$ Ом. Определить величину тока в цепи.

Ответ: $I=0{,}5$ А.

Задача 7. На рис. 11.3 В, $\varepsilon_2=220$ В, $R_1=R_2=100$ Ом, $R_3=500$ Ом. Какую величину тока покажет амперметр? Сопротивлением батарей и амперметра пренебречь.

Ответ: $I=0{,}3$ А.

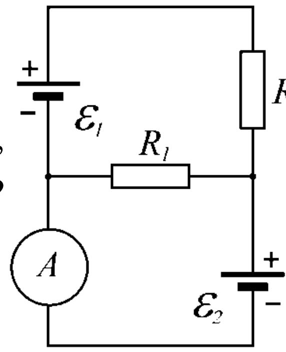

Рисунок 11.3

Задача 8. Какую величину тока показывает амперметр (рис. 11.4), если В, $\varepsilon_2 = 1$ В, $R_1 = 10^3$ Ом, $R_2 = 500$ Ом, $R_3 = 200$ Ом. Сопротивление амперметра $R_A = 200$ Ом. Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

Ответ: $4{,}55 \cdot 10^{-4}$ А.

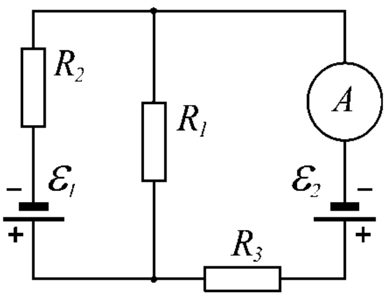

Рисунок 11.4

Задача 9. На схеме (рис. 11.5) , $R_2 = 2R_1$. Во сколько раз ток, текущий через вольтметр, больше тока, текущего через R_2? Сопротивлением батарей пренебречь.

Ответ: в 3 раза.

Задача 10. На схеме (рис. 11.5) , $R_1 = R_2 = 200$ Ом, сопротивление вольтметра 1000 Ом. Найти напряжение, которое показывает вольтметр. Сопротивлением батареи пренебречь.

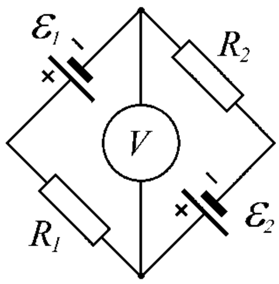

Рисунок 11.5

Ответ: $U = 100$ В.

Задача 11. Две батареи аккумуляторов В, $r_1 = 1$ Ом, $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом) и реостат ($R = 6$ Ом) соединены так, как показано на рис.11.6. Определить величину тока в батареях и реостате.

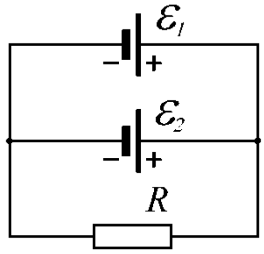

Рисунок 11.6

Ответ: 1,6А, 0,2А, 1,4А.

Задача 12. Определить величину тока в резисторе (рис. 11.7), с сопротивлением $R_3 = 3$ Ом, и напряжение на его концах, если В, $\varepsilon_2 = 3$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

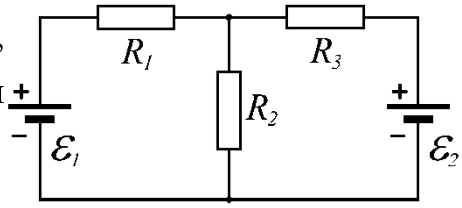

Рисунок 11.7

Ответ: $I_3 = 0$, $U_3 = 0$.

Задача 13. Три источника тока В, $\varepsilon_2 = 4$ В и $\varepsilon_3 = 6$ В соединены, как показано на рис. 11.8. Определить величину тока в резисторах, если $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 2$ Ом. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

Ответ: А, $I_2 = 0{,}3$ А, $I_3 = 0{,}5$ А.

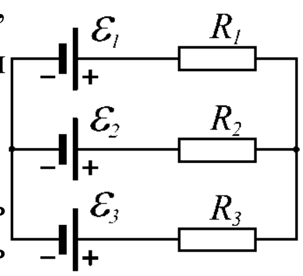

Рисунок 11.8

Задача 14. От батареи $\varepsilon = 500$ В требуется передать энергию на расстояние 2,5 км. Потребляемая мощность равна 1кВт. Определить минимальные потери мощности $\Delta P_{\min}$ в сети, если диаметр медных проводников 1,5 см.

Ответ: $\Delta P_{\min} = 198$ Вт.

Задача 15. От генератора $\varepsilon = 110$ В следует передать энергию на расстояние 250 м. Потребляемая мощность равна 1 кВт. Найти минимальную площадь сечения медного проводника, если потери мощности в сети не должны превышать 1%.

Ответ: $S = 85$ мм^2.

Задача 16. Для нагрева 4,5 л воды от 23°C до кипения нагреватель потребляет 0,5 кВт·час. Чему равен коэффициент полезного действия η нагревателя?

Ответ: $\eta = 80\%$.

Задача 17. Величина тока в проводнике, имеющем сопротивление Ом, равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ в течение 10 секунд. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

Ответ: $R = 12$ кДж.

Задача 18. Электродвижущая сила батареи аккумуляторов $\varepsilon = 12$ В. Величина тока короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую $P_{\max}$ мощность можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Ответ: $P_{\max} = 15$ Вт.

Задача 19. Величина тока в проводнике с сопротивлением $R = 100$ Ом равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10$ А в течение $\tau = 30$ сек. Найти количество теплоты Q, выделяющейся за это время в проводнике.

Ответ: $Q = 100$ кДж.

Задача 20. Амперметр с сопротивлением $R_1 = 2$ Ом, подключенный к источнику тока, показывает ток $I_1 = 5$ А. Вольтметр с сопротивлением $R_1 = 150$ Ом, подключенный к такому же источнику тока, показывает напряжение $U = 12$ В. Найти ток $I_к$ короткого замыкания источника.

Ответ: $I_к = \dfrac{I_1 U (R_2 - R_1)}{R_2 (U - I_1 R_1)} = 29{,}6$ А.

Задача 21. Два параллельно соединенные резистора с сопротивлением $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 10$ Ом подключены к источнику тока с ЭДС $\varepsilon = 10$ В. Ток в цепи $I = 1$ А. Найти внутреннее сопротивление источника и ток короткого замыкания $I_к$.

Ответ: $r = \dfrac{\varepsilon (R_1 + R_2) - I R_1 R_2}{I (R_1 + R_2)} = 2$ Ом, $I_к = \dfrac{\varepsilon}{r} = 5$ А.

Задача 22. При подключении внешней цепи напряжение на зажимах источника тока с ЭДС $\varepsilon = 30$ В оказалась равной $U = 18$ В. Внешнее сопротивление цепи $R = 6$ Ом. Найти внутреннее сопротивление источника r.

Ответ: $r = \dfrac{R(\varepsilon - U)}{U} = 4$ Ом.

Задача 23. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 15$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом замкнут на резистор с сопротивлением $R = 10$ Ом. К зажимам источника подключен конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Найти заряд на конденсаторе q.

Ответ: $q = \dfrac{C\varepsilon R}{R + r} = 10^{-5}$ Кл.

Задача 24. В цепи источника тока с ЭДС $\varepsilon = 30$ проходит ток $I = 3$ А. Напряжение на зажимах источника $U = 18$. Найти внешнее сопротивление R цепи и внутреннее сопротивление источника r.

Ответ: $R = \dfrac{U}{I} = 6$ Ом**,** $r = \dfrac{\varepsilon - U}{I} = 4$ Ом.

Задача 25. Лампа подключена медными проводами к источнику тока с ЭДС $\varepsilon = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}04$ Ом. Длина проводов $l = 4$ м, их диаметр $D = 0{,}8$ мм, удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м, напряжение на зажимах источника $U = 1{,}98$ В. Найти сопротивление лампы *R*.

Ответ: $R = \dfrac{Ur}{\varepsilon - U} - \dfrac{4\rho l}{\pi D^2} = 3{,}82$ Ом.

Задача 26. Общее сопротивление двух последовательно соединенных проводников $R = 5$ Ом, а параллельно соединенных $R_0 = 1{,}2$ Ом. Найти сопротивление каждого проводника.

Ответ: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 2$ Ом.

Задача 27. При подключении в электрическую цепь проводника, имееющего диаметр $D = 0{,}5$ мм и длину $l = 47$ мм, напряжение на нем $U = 1{,}2$ В при токе в цепи $I = 1$ А. Найти удельное сопротивление ρ материала проводника.

Ответ: $\rho = \dfrac{U\pi D^2}{4Il} = 5 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

Задача 28. Какое необходимо взять сопротивление R, чтобы можно было подключить в сеть с напряжением $U = 220$ В лампу, рассчитанную на напряжение $U = 120$ В и ток $I_0 = 4$ А?

Ответ: $R = \dfrac{U - U_0}{I_0} = 25$ Ом.

Задача 29. Найти напряжение на проводнике с сопротивлением $R = 10$ Ом, если за время $t = 5$ минут, протекает заряд $q = 120$ Кл.

Ответ: $U = \dfrac{qR}{t} = 4$ В.

Задача 30. Найти ток в цепи источника тока, замкнутого на проводник с сопротивлением $R = 1000$ Ом Ом, если при последовательном соединении с миллиамперметром с сопротивлением $R_0 = 100$ Ом он показал ток $I_0 = 25$ мА.

Ответ: $I = \dfrac{I_0(R + R_0)}{R} = 27{,}5$ мА.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Краткий курс физики: учеб. пособие / И.Н. Кибец, Е.Н. Коваленко, А.И. Рыбалка, В.А. Стороженко. – Харьков: Компания СМИТ, 2015. – 328 с.
2. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник/ Упоряд.: Ткаченко Т.Б. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2004. – 108 с.
3. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина I. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник / В.О. Стороженко, І.М. Кібець, А.І. Рибалка, Т.Б. Ткаченко. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 320 с.
4. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: навч. посібник / Упоряд.: Українець М.І. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 164 с.
5. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина II. Електрика та магнетизм: навч. посібник / І.М. Кібець, А.І. Рибалка, В.О. Стороженко. – Харків: Компанія СМІТ, 2009. – 424 с.
6. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. – М.: 1981. – 496 с.
7. Савельев И.В. Курс общей физике: в 3 т. – М.: 1982. – Т.1. – 432 с.
8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: 1988. – 416 с.
9. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: 1982. – 420 с.
10. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – М.: Высш. шк. 1999. – 591 с.

Наукове видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ ФІЗИКИ

Частина 1

для студентів-іноземців усіх напрямків
бакалаврата денної форми навчання

Упорядники: РИБАЛКА Антоніна Іванівна
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна
СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович
ОРЕЛ Роман Петрович
КОЗАР Анатолій Іванович
МЄШКОВ Сергій Миколайович
КАЛІНІН Віталій Веніамінович
ОНИЩЕНКО Андрій Анатолійович
МЯГКИЙ Олександр Валерійович
КРАВЧЕНКО Сергій Геннадійович

Відповідальний випусковий А.І. Рибалка

Редактор О.Г. Троценко

Комп'ютерна верстка Г.М. Голоднікова

План 2018 (друге півріччя), поз.87.

Підп. до друку 29.06.18.	Формат 60×84 1/16.	Спосіб друку – ризографія.
Умов. друк. арк. 8,7.	Облік.-вид. арк. 7,8.	Тираж 100 прим.
Зам. № 1 –87.	Ціна договірна.	

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14