1. Класична механіка

1.1. Кінематика

1.1.1. Основні поняття та визначення в механіці.

Механіка

- ***Механіка*** *- розділ фізики, що вивчає механічний рух.* **Механічний рух** – *зміна положення тіла у просторі відносно інших тіл з перебігом часу.* З цього витікає, що механічний рух поняття відносне.

Матеріальна точка

Найпростішою моделлю є ***матеріальна точка*** – *тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати*. Поняття матеріальної точки абстрактне, але його введення полегшує розв'язання практичних задач. Наприклад, вивчаючи рух планет по орбітам навколо Сонця, можна вважати їх матеріальними точками.

Довільне макроскопічне тіло або систему тіл можна уявити як суму великої кількості дрібних частинок (матеріальних точок), що взаємодіють між собою. В такому разі вивчення руху довільної системи тіл можна звести до вивчення системи матеріальних точок.

Абсолютно тверде тіло

В процесі взаємодії тіл одне з одним вони можуть деформуватися, тобто змінювати свою форму та розміри. Фізичною моделлю тіла є ***абсолютно тверде тіло*** – *тіло, деформаціями якого в умовах даної задачі можна знехтувати*.

Поступальний та обертальний рух

Будь-який рух твердого тіла можна уявити собі як накладання двох видів руху –, поступального та обертального. ***Поступальний рух*** – *це рух, при якому будь-яка пряма пов'язана з тілом, що рухається, залишається паралельною самій собі (рис. 1.1а).* ***Обертальний рух*** – *це рух, при якому всі точки тіла описують концентричні кола в площині, перпендикулярній осі обертання.* Вісь обертання може знаходитися як усередині тіла, так і за його межами (рис. 1.1б).

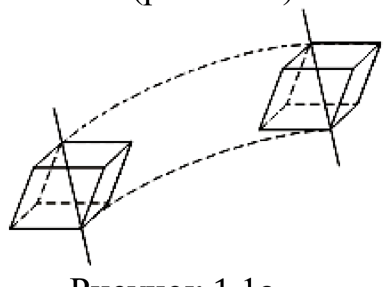

Рисунок 1.1а

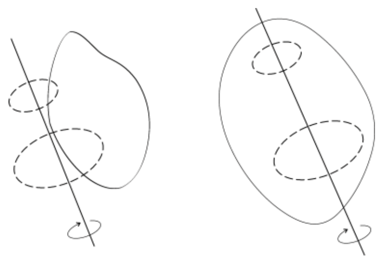

Рисунок 1.1б

Тіло відліку Система

відліку

Положення тіла (матеріальної точки) в просторі можна визначити тільки по відношенню до інших тіл, тобто положення тіла відносне. *Тіло, по відношенню до якого розглядається положення даного тіла, називається **тілом відліку**. Тіло відліку, зв’язана з ним система координат та прилади для вимірювання відстані й часу (лінійка та годинник) складають **систему відліку.*** У фізиці використовується декілька систем координат: прямокутна (ортогональна), декартова, полярна та сферична. У переважній більшості задач найбільш зручнішою є прямокутна декартова (найчастіше права) система координат. В цій системі положення будь-якої точки М (рис. 1.2) визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, який з’єднує початок координат з точкою М.

Траєкторія

Положення матеріальної точки, що рухається, визначається положенням її в просторі та моментом часу перебування її в цій точці.

У процесі руху матеріальна точка описує в просторі ***траєкторію*** – *уявну лінію, уздовж якої рухається матеріальна точка.* В загальному випадку траєкторія матеріальної точки являє собою лінію у просторі, взагалі кажучи, криву.

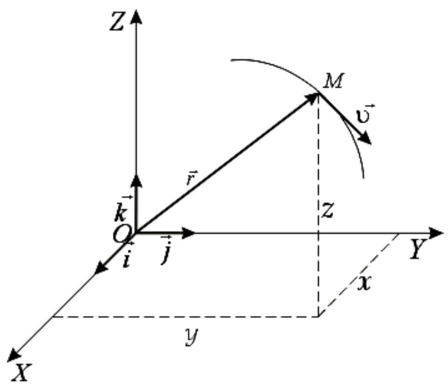

Рисунок 1.2

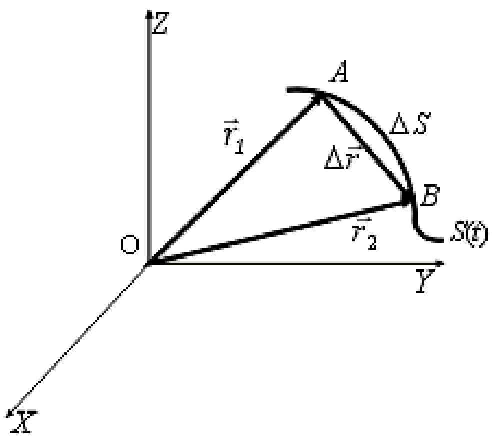

Рисунок 1.3

1.1.2. Кінематика поступального руху

Кінематика

Кінематика – *розділ механіки, що вивчає рух не враховуючи його причин.* Кінематика розподіляється на кінематику поступального руху і обертального. Об'єктом розглядання кінематики поступального руху є не тіло, а матеріальна точка, тому що при поступальному русі усі точки тіла рухаються по однаковим траєкторіям.

Засоби завдання положення матеріальної точки

Рух матеріальної точки можна задати одним з двох способів: векторним та координатним. Перший спосіб означає, що заданий радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 1.2), який характеризується модулем r та двома кутами: $\angle\alpha$ з площиною *XY* та $\angle\beta$ між проекцією на цю площину і віссю *X*.

Другий спосіб – координатний, означає, що положення точки, яка рухається, у будь-який момент часу визначається трьома змінними x, y, z (рис. 1.2).

Обидва способи пов'язані між собою очевидними співвідношеннями:

$r_x=x;$

$r_y=y;$

$r_z=z$

Кінематичні характеристики поступального руху

*Ознакою присутності руху є вектор **лінійного переміщення*** $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.3):

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1. \tag{1.1}$$

Аналогом переміщення може бути ***шлях s*** *– довжина траєкторії.* Одиницею вимірювання є : [Δr]=[s]=1 м.

Другою кінематичною характеристикою є вектор лінійної миттєвої швидкості:

$$\vec{\upsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}\,, \tag{1.2}$$

що *описує, як швидко з часом здійснюється переміщення.*

Інколи використовується середня швидкість:

$$\vec{\upsilon}_{сер}=<\vec{\upsilon}_{сер}>=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Напрямок вектора $\vec{\upsilon}_{сер}$ збігається з напрямком вектора переміщення матеріальної точки $\Delta\vec{r}$.

Одиницею вимірювання є: $[\upsilon]=1м/c=1м\cdot c^{-1}$.

Третьою характеристикою є ***вектор лінійного миттєвого прискорення:***

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\dot{\vec{\upsilon}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}} \tag{1.3}$$

що *описує зміну швидкості з часом.*

Іноді використовується ***середнє прискорення:***

$$\vec{a}_{сер}=\frac{\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Прискорення при криволінійному русі

У загальному випадку траєкторія руху є кривою лінією, при цьому швидкість змінює не тільки свою величину, а й напрямок (рис. 1.4).

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

З урахуванням того, що швидкість направлена по дотичній $\vec{\tau}$ (одиничний вектор), представимо $\vec{\upsilon}$ у вигляді:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{\tau}.$$

Тоді, підставив цей вираз у формулу прискорення, отримаємо:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\upsilon\ \vec{\tau}) = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\upsilon_t = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Перший доданок

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} \tag{1.4}$$

– дотичне, *або* ***тангенціальне прискорення*** *спрямоване по дотичній до вектора швидкості і відповідає за зміну швидкості за величиною.*

Другий доданок $\vec{a}_n = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\upsilon$ *– доцентрове, або* ***нормальне прискорення****, визначає зміну швидкості за напрямком.*

Можна казати, що нормальне прискорення визначається формулою:

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}. \tag{1.5}$$

Повне прискорення в загальному випадку криволінійного руху (рис.1.5):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}, \tag{1.6}$$

а його модуль:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

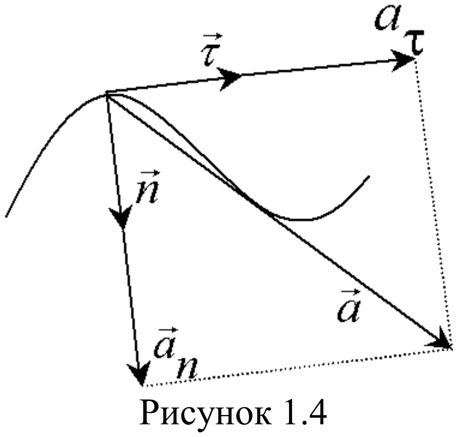

Рисунок 1.4

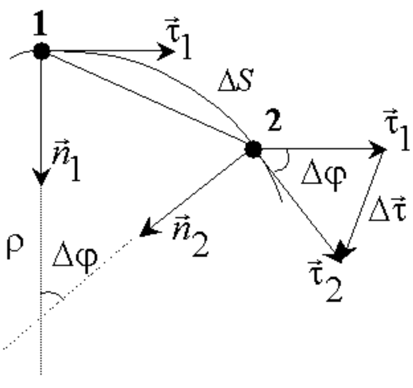

Рисунок 1.5

Основне рівняння кінематики поступального руху

Основною задачею кінематики є *визначення положення матеріальної точки (або тіла), що рухається, у будь який момент часу.* Цю задачу вирішує основне рівняння кінематики поступального руху:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1.7)$$

де $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ - початкові значення радіус-вектора та швидкості матеріальної точки.

1.1.3.Кінематика обертального руху твердого тіла

Рух абсолютно твердого тіла, при якому одна із його точок лишається нерухомою, називається обертанням навколо нерухомої точки (центра). Рух у процесі якого лишаються нерухомими дві його точки, називається обертанням навколо прямої осі, що проходить через ці точки. Обертання навколо центра (точки), можна уявити як обертання навколо миттєвої осі. При обертальному русі навколо осі всі точки абсолютно твердого тіла рухаються по колам, центри яких лежать на осі обертання.

Положення точки, що рухається по колу радіуса R, визначається значенням кута повороту $d\varphi$ (рис. 1.6).

Кутове переміщення

Кутове переміщення $d\vec{\varphi}$ – вектор, довжина якого дорівнює величині кута повороту $d\varphi$, а напрямок збігається з віссю обертання й визначається за правилом правого гвинта (рис. 1.6).

Вектори, напрямки яких пов’язують з напрямком обертання називають *псевдовекторами* або *аксіанальними векторами.* Ці вектори не мають визначених точок прикладання: вони можуть відкладатися від будь-якої точки осі обертання. Найчастіше за точку прикладання псевдовектора вибирають початок координат системи відліку. Кутове переміщення $d\vec{\varphi}$ – псевдовектор.

Кутова швидкість

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ (рис. 1.7) – вектор чисельно рівний зміні кута за одиницю часу і який збігається за напрямком з вектором кутового переміщення.

Середня кутова швидкість:

$$\vec{\omega}_{сер} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}, \text{ де } \qquad \Delta\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1. \qquad (1.8)$$

Миттєва кутова швидкість:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}. \qquad (1.9)$$

Кутова швидкість характеризує обертання тіла навколо осі. Вектор $\vec{\omega}$- псевдовектор, спрямований уздовж осі обертання тіла.

Якщо $\vec{\omega} = const$ – обертання рівномірне, а якщо $\vec{\omega} \neq const$ – обертання нерівномірне. $[\omega] = 1 рад/с = 1 рад \cdot с^{-1}$.

Період обертання Частота обертання

Якщо обертання рівномірне, то його можна охарактеризувати періодом обертання.

Період обертання T- час, за який тіло здійснює один повний оборот (обертається на кут 2π):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота обертання ν- число обертів, яке тіло здійснює за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

$[T] = 1c, \quad [\nu] = 1/c = 1c^{-1}$.

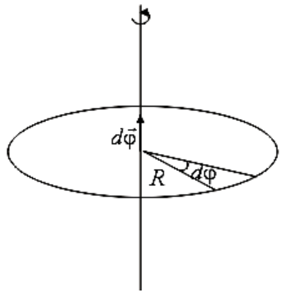

Рисунок 1.6

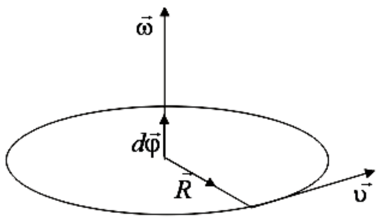

Рисунок 1.7

Кутове прискорення

Середнє кутове прискорення:

$$\vec{\beta}_{сер} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Миттєве кутове прискорення (рис. 1.8):

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}. \qquad (1.10)$$

Кутове прискорення характеризує швидкість зміни кутової швидкості обертання. Вектор $\vec{\beta}$- псевдовектор, спрямований уздовж осі обертання. Якщо рух прискорений, напрямки $\vec{\omega}$ та $\vec{\beta}$ збігаються (рис. 1.8а), якщо рух уповільнений, то напрямки $\vec{\omega}$ та $\vec{\beta}$ спрямовані по осі обертання назустріч один одному (рис. 1.8б).

$$[\beta] = 1 рад/c^2 = 1 рад \cdot c^{-2}.$$

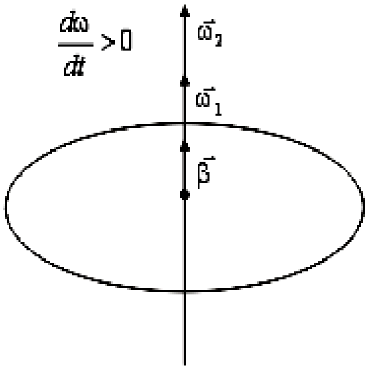

Рисунок 1.8а

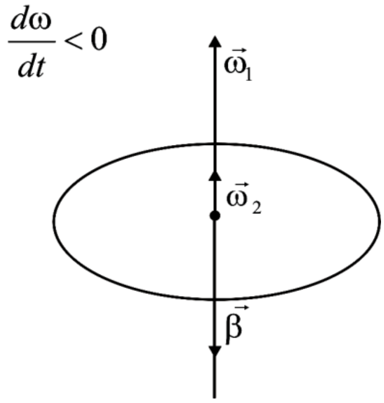

Рисунок 1.8б

Зв'язок між кутовими та лінійними кінематичними характеристиками

Положення точки М, що рухається по колу (рис. 1.9) визначається радіусом – вектором $\vec{r}$, проведеним із початку координат O, що міститься на осі початку обертання, в точку М.

У випадку, коли точки 1 та 2 нескінченно близькі одна до одної вектор лінійного переміщення:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \tag{1.11}$$

Модуль переміщення:

$$|d\vec{r}| = |d\vec{\varphi}| R,$$

де $d\varphi$- модуль кутового переміщення (кут повороту); R- модуль вектора $\vec{R}$, ортогональний до осі обертання й проведений від неї до точки М:

$$R = r\sin\alpha.$$

Тоді

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}] = [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Лінійна швидкість точки М (рис. 1.9):

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \tag{1.12}$$

Модуль лінійної швидкості:

$$|\vec{\upsilon}| = \omega r \sin\alpha = \omega R.$$

Лінійне прискорення будь-якої точки М тіла, що обертається:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] = [\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

При обертанні від $\vec{\beta}$ до $\vec{r}$ (доцентрове) прискорення $\vec{a}_\tau$ спрямоване по дотичній (рис. 1.10); нормальне (доцентрове) прискорення спрямоване по R до центра (рис. 1.11).

Модуль тангенціального прискорення:

$$|\vec{a}_\tau| = |[\vec{\beta} \times \vec{r}]| = \beta r \sin\alpha = \beta R. \tag{1.13}$$

Модуль нормального прискорення:

$$|\vec{a}_n| = |[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]| = \omega\upsilon \sin\alpha = \omega\vec{\upsilon}\sin 90^o = \omega\upsilon = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{1.14}$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

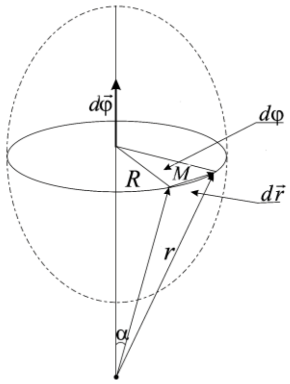

Рисунок 1.9

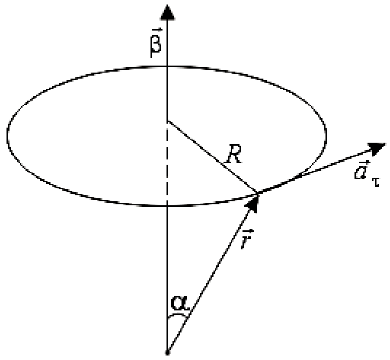

Рисунок 1.10

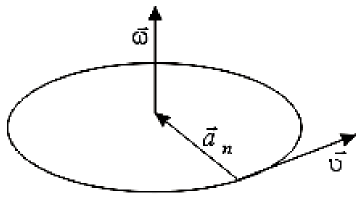

Рисунок 1.11

Основне рівняння кінематики обертального руху

Як і при поступальному русі, основною задачею кінематики є визначення положення тіла, що рухається, у будь який момент часу. Цю задачу вирішує рівняння:

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\beta} t^2}{2}, \qquad (1.15)$$

Де $\vec{\varphi}_0, \vec{\omega}_0$ - начальні значення кута повороту та кутової швидкості відповідно.

Контрольні запитання і завдання до підрозділу 1.1. Кінематика

1. Дати визначення механічної системи.
2. Дати визначення нормальному прискоренню.
3. Дати визначення поступальному руху.
4. Запишіть кінематичне рівняння поступального руху.
5. Дати визначення обертального руху.
6. Що називається лінійним переміщенням?
7. Дати визначення кутовому переміщенню. Його зв'язок з лінійним переміщенням.
8. Чим задається положення матеріальної точки?
9. Дати визначення лінійної швидкості (миттєвої й середньої).
10. Дати визначення кутовому прискоренню.
11. Дати визначення лінійному прискоренню (миттєвому й середньому).
12. Запишіть кінематичне рівняння обертального руху.
13. Дати визначення тангенціальному прискоренню.
14. Як повне прискорення пов'язане з нормальним і тангенціальним?