Лекція № 15 **Тема: Електромагнітні коливання і змінний струм**

6. Електромагнітні коливання і змінний струм

6.1. Загальні відомості про коливальні процеси

Коливання та їх класифікація

Коливальний процес (коливання) *– будь-який процес, параметри якого періодично приймають одні й тіж значення,* тобто

$$x(t) = x(t+T),$$

де x - параметр процесу, T – період.

Коливання можна класифікувати за декількома ознаками.

За фізичною природою коливання можуть бути механічними, електричними, електромагнітними, температурними і т.і.

За видом періодичного закону коливання бувають гармонічними (за законом синуса або косинуса) та негармонічними.

За залежністю амплітуди коливань від часу – незагасаючі (амплітуда незмінна), або загасаючі (амплітуда зменшується).

За наявністю вимушеної сили – вільні (сила відсутня) або вимушені.

Рівняння гармонічних коливань

У загальному вигляді рівняння **гармонічних (незагасаючих) коливань** має вигляд

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$x(t)$ – параметр, що характеризує фізичну природу коливань;
x_0 - амплітуда: максимальне значення параметру, що коливається;
$(\omega t+\varphi_0)$ – фаза коливань: кутова міра часу;
ω – циклічна частота:кількість коливань за час 2π секунд;
φ_0 – початкова фаза коливань.

Крім перелічених вище характеристик, для опису коливань використовують:

- *період T: тривалість одного коливання;*
- *гармонічну частоту ν: кількість коливань за 1 секунду, які пов'язані між собою формулами*

$$T = \frac{1}{\nu}; \; \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

6.2. Вільні незагасаючі електромагнітні коливання у коливальному контурі

Коливальний контур

Електромагнітні коливання (ЕМК) *– це взаємозв'язані коливання електричного та магнітного полів.*

ЕМК здійснюються у **коливальному контурі** – ланцюзі, що складається з конденсатора C та котушки індуктивності L (рис.6.1,а).

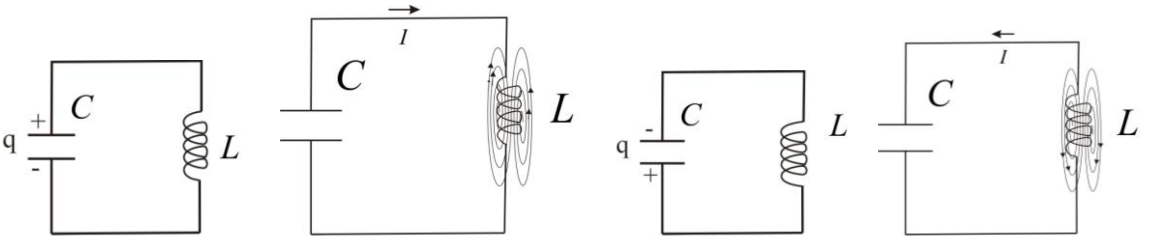

Рисунок 6.1а	Рисунок 6.1б	Рисунок 6.1в	Рисунок 6.1г
$t = 0,(T)$	$t = \frac{T}{4}$	$t = \frac{T}{2}$	$t = \frac{3}{4}T$
$W_e = \frac{q^2}{2C}$	$W_M = \frac{LI^2}{2}$	$W_e = \frac{q^2}{2C}$	$W_M = \frac{LI^2}{2}$

Електричні коливання

Для збудження коливань у контурі конденсатор повинен бути заряджений зарядом q. Тоді в початковий момент часу енергія електричного поля зарядженого конденсатора максимальна і дорівнює $W_e = \frac{q^2}{2C}$ (рис. 6.1, а). Далі конденсатор починає розряджатись через котушку з індуктивністю L. Заряд конденсатора зменшується – зменшується його енергія, а згідно з законом збереження енергії $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const$, енергія коливального контуру стала величина, тобто збільшується енергія магнітного поля котушки. В момент часу $t = \frac{T}{4}$, коли конденсатор повністю розрядився, його енергія дорівнює нулю, а енергія магнітного поля котушки, (а також струму) досягає максимуму (рис. 6.1, б). Далі струм в котушці починає зменшуватись, зменшується і величина магнітного поля. Це приводить до появи індукційного струму, який за правилом Лоренца має той же напрямок, що і струм розрядки конденсатора.

Конденсатор почне перезаряджатись. Коли струм в контурі зменшиться до нуля в момент часу $t = \frac{T}{2}$ заряд на конденсаторі досягне максимального значення, але з протилежними знаками на обкладках (рис. 6.1, в). Далі процес розрядки і зарядки конденсатора буде циклічно повторюватись, тобто в контурі будуть зберігатись періодичні незатухаючі вільні коливання. **Електромагнітні коливання** – *це періодична зміна заряду q, напруги U_C на конденсаторі і сили струму I в котушці індуктивності*. Ці коливання будуть супроводжуватись перетворюваннями енергії електричного і магнітного полів.

З другого правила Кірхгофа можна отримати диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду в контурі

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (6.1)$$

Розв'язком цього рівняння є

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (6.2)$$

де q_0 – амплітудне значення заряду на обкладках конденсатора; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – ***власна частота*** коливань контура, φ_0 – початкова фаза.

Період власних коливань

Формула Томсона

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \tag{6.3}$$

носить назву ***формули Томсона***, тому що вперше цей вираз був одержаний У. Томсоном.

Сила струму в коливальному контурі

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = q_0\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

де $I_0 = q_0\omega_0$ – ***амплітудне значення струму.***

Напруга на обкладках конденсатора дорівнює

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \tag{6.5}$$

де $U_0 = \frac{q_0}{C}$ – ***амплітудне значення напруги.***

Порівнявши (6.2), (6.4) і (6.5) можна зробити висновок, що коливання напруги і заряду відбуваються з однаковою фазою, в той час як коливання струму випереджають коливання заряду і напруги по фазі на $\frac{\pi}{2}$(чверть періоду), тобто коли заряд (і напруга) на конденсаторі досягає максимуму, сила струму в контурі дорівнює нулю і навпаки.

Електромагнітні коливання

Завдяки коливанням напруги на конденсаторі (6.5) та сили струму у катушці (6.4) у контурі виникають електромагнітні коливання, тобто коливання напруженості електричного поля $\vec{E}$ і магнітного поля $\vec{H}$. Дійсно, як відомо з електростатики напруженість електричного поля у конденсаторі пов'язана з напругою співвідношенням $E = \frac{U}{d}$, де d – відстань між обкладками.

Підставляємо (6.5), отримаємо

$$E = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{6.6}$$

де $E_0 = \frac{q_0}{Cd}$.

Використовуючи зв'язок напруженості магнітного поля $\vec{H}$ у соленоїді (котушці індуктивності)

$$H = \mu_0\mu nI,$$

отримуємо рівняння коливань магнітного поля

$$H = H_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \tag{6.7}$$

де $H_0 = \mu_0 \mu n I_0$.

З отриманих рівнянь (6.6) і (6.7) можна побачити, що коливання E і H відбуваються зі зсувом по фазі на $\frac{\pi}{2}$. Це підтверджує висловлену вище думку, що енергія у коливальному контурі перетворюється з електричної в магнітну і навпаки, але її загальна кількість залишається незмінною. Тому розглянуті коливання є незагасаючими.

6.3. Загасаючі електричні коливання

В будь-якому реальному контурі є завжди активний опір R – який відіграє роль сили тертя при механічних коливаннях. Наявність опору приводить до зменшення амплітуди коливань внаслідок втрат енергії на нагрівання, тобто вільні коливання будуть **згасаючими**, *тобто коливаннями, амплітуда яких зменшується з часом.*

Диференціальне рівняння вільних затухаючих коливань має вигляд

Рівняння згасаючих коливань

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \tag{6.8}$$

або

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – частота власних незатухаючих коливань.

Розв'язок рівняння (6.8) являє собою ***рівняння згасаючих коливань.***

Частота і період згасаючих коливань

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_1\right), \tag{6.9}$$

Де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{6.10}$$

частота згасаючих коливань, φ_1 – початкова фаза, а період згасаючих коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} \tag{6.11}$$

З (6.10) і (6.11) очевидно, що частота згасаючих коливань ω завжди менше частоти незгасаючих коливань $\omega < \omega_0$, а період T більше періоду вільних незгасаючих коливань $T > T_0$.

Треба зауважити, що згасання порушує періодичність коливань, тому згасаючі коливання, строго кажучи, не є періодичними і до них повинно бути непридатне поняття періоду і частоти. Але якщо згасання мале, то можна умовно використовувати поняття періоду як проміжку часу між двома послідовними максимумами (рис. 6.2).

Амплітуда згасаючих коливань

Амплітуда згасаючих коливань зменшується за експоненціальним законом

$$q_m = q_0 e^{-\beta t}. \tag{6.12}$$

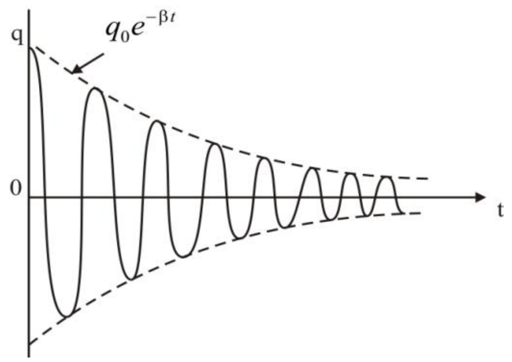

Рисунок 6.2

Сила струму в контурі

Сила струму в контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t}\left[-\beta\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)-\omega\sin\left(\omega t+\varphi_1\right)\right]. \qquad (6.13)$$

Вираз в квадратних дужках помножимо і поділимо на ω_0 і введемо кут γ

$$-\frac{\beta}{\omega_0} = \cos\gamma; \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \sin\gamma. \qquad (6.14)$$

Тоді сила струму (6.13) перетвориться на величину

$$I = \omega q_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t+\varphi_1+\gamma\right).$$

З (6.14) випливає, що кут $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$, тобто лежить в другій чверті. Це означає, що струм в контурі випереджає за фазою заряд на конденсаторі (6.9) більше ніж на $\frac{\pi}{2}$.

Графіки $U_C(t)$ і $I(t)$ мають вид, аналогічний залежності $q(t)$ (рис. 6.2).

Час релаксації

Час τ, ***протягом якого амплітуда коливань зменшується в*** e ***разів, називається часом релаксації.***

Коефіцієнт згасання β – величина, зворотна часу релаксації

$$\beta = \frac{1}{\tau}; \quad [\beta] = 1\,\text{c}^{-1}. \qquad (6.15)$$

Логарифмічний декремент згасання

Логарифмічний декремент згасання λ ***– логарифм відношення двох послідовних значень амплітуд*** (A_m – амплітуда відповідної величини – q, U, I).

$$\lambda = \ln\frac{A_m(t)}{A_m(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T;$$

$$\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}; \qquad (6.16)$$

де N_e – кількість коливань за час τ, тобто за той час, протягом якого амплітуда зменшиться в e разів.

Логарифмічний декремент згасання – постійна величина для даної коливальної системи.

Якщо згасання мале $\beta^2 \langle\langle \omega_0^2$, то $\omega \approx \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ і в цьому випадку логарифмічний декремент згасання дорівнює

$$\lambda = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} . \qquad (6.17)$$

Добротність

Добротність коливального контуру Q

$$Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W} ,$$

де W – енергія, яку має контур, δW – зменшення енергії за період коливань T.

Зважаючи на те, що енергія пропорційна квадрату амплітуди заряду і за умови малого згасання, маємо

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} . \qquad (6.18)$$

2) У випадку коли $\beta^2 \geq \omega_0^2$ замість коливань буде аперіодичний розряд конденсатора. Опір контуру, при якому почнеться аперіодичний процес, називають ***критичним опором***.

Значення критичного опору визначається умовно $\beta^2 = \omega_0^2$; тоді

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} . \qquad (6.19)$$