

6.4. Вимушені електричні коливання

Вимушені коливання – це коливання, що виникають під дією вимушеної сили.

Для вимушених коливань в коливальний контур (рис. 6.1) вводять електрорушійну силу, що змінюється за гармонічним законом

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t, \quad (6.20)$$

де Ω – частота зовнішньої ЕРС.

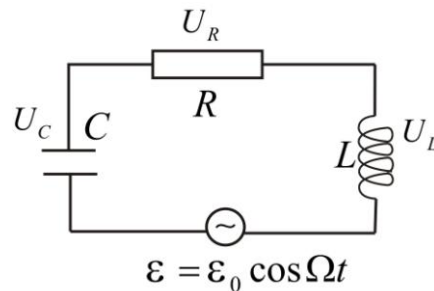


Рисунок 6.3

Тоді лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, яке описує вимушені електромагнітні коливання, буде мати вигляд

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \Omega t. \quad (6.21)$$

Його розв'язок шукаємо у вигляді

$$q = q_0 \cos(\Omega t - \psi), \quad (6.22)$$

тобто при усталених коливаннях заряд на конденсаторі змінюється за гармонічним законом з частотою зовнішньої ЕРС Ω .

q_0 – амплітуда заряду на конденсаторі; $\psi > 0$ – різниця фаз між коливаннями заряду і зовнішньою ЕРС (6.20), заряд завжди відстає по фазі від ЕРС.

Продиференціюємо (6.22) і знайдемо силу струму

$$I = \frac{dq}{dt} = -\Omega q_0 \sin(\Omega t - \psi) = I_0 \cos\left(\Omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos(\Omega t - \varphi), \quad (6.23)$$

де $I_0 = \Omega q_0$ – амплітудне значення сили струму;

$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ – зсув фаз між струмом і зовнішньою ЕРС.

Методом векторної діаграми можна одержати формули для амплітудного значення сили струму I_0 і величину зсуву фази φ між струмом і \mathcal{E} .

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}; \quad (6.24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} \quad (6.25)$$

Якщо $\varphi > 0$; $\Omega L > \frac{1}{\Omega C}$ – струм відстає по фазі від \mathcal{E} , при $\varphi < 0$; $\Omega L < \frac{1}{\Omega C}$ – струм випереджає по фазі ЕРС.

Резонанс

Явище різкого зростання амплітуди сили струму при вимушених коливаннях, за умови наближення частоти змінної ЕРС Ω до частоти $\Omega_{\text{рез}}$, називається електричним резонансом.

З (6.24) очевидно, що амплітудне значення сили струму максимальне, коли

$$\Omega L - \frac{1}{\Omega C} = 0,$$

тобто резонансна частота для сили струму збігається з власною частотою контуру

$$\Omega_{I_{\text{рез}}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.26)$$

Резонансні криві для сили струму показані на рис. 6.4. Максимум кривої тим більше, чим менше коефіцієнт згасання, (чим менше омичний

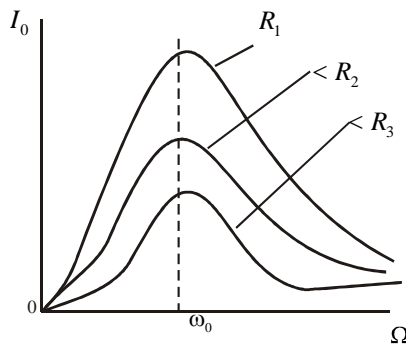


Рисунок 6.4

опір контуру).

Амплітуда сили струму при резонансі $I_0(\Omega_{\text{рез}}) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$, а зсув фаз між силою струму і ЕРС дорівнює нулю $\varphi(\Omega_{\text{рез}}) = 0$.

6.5. Змінний струм. Резонанс в колах змінного струму

Розглянуті вище усталені електромагнітні коливання в контурі з омичним опором, ємністю і індуктивністю можна вважати змінним струмом з частотою $\omega \equiv \Omega$.

Послідовне коло змінного струму

Послідовне коло змінного струму зображене на рис. 6.5.

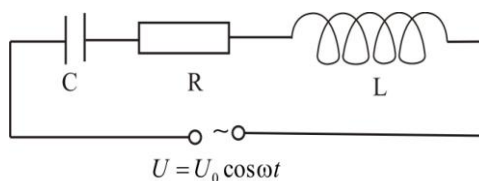


Рисунок 6.5

Зовнішня напруга змінюється за гармонічним законом

$$U = U_0 \cos \omega t ,$$

Сила струму в колі

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) ,$$

де амплітудне значення струму (див.(6.24))

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} , \quad (6.27)$$

Фазовий зсув між напругою і струмом (див. (6.25))

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} . \quad (6.28)$$

Вираз (6.27) можна розглядати як закон Ома для амплітудних значень струму і напруги. Тоді знаменник в цьому виразі відіграє роль **повного опору Z або імпедансу**:

$$Z = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} , \quad (6.29)$$

$$R = \frac{U_{R_0}}{I_0} \text{ – активний опір;}$$

$$X_L = \frac{U_{L_0}}{I_0} = \omega L \text{ – індуктивний опір;}$$

$$X_C = \frac{U_{C_0}}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \text{ – ємнісний опір,}$$

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \text{ - реактивний опір.}$$

Тоді формули (10.41) і (10.42) можна переписати так

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} ; \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (6.30)$$

**Резонанс
напруг**

Резонанс напруг спостерігається у послідовному колі.

Резонансна частота

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ,$$

В цьому випадку $X_L = X_C$ повний опір мінімальний і дорівнює активному опору $Z = R$, а амплітудне значення сили струму досягає максимуму (рис. 6.4).

$$I_0 = \frac{U_0}{R} .$$

Падіння напруги на активному опорі дорівнює **зовнішній ЕРС** (напрузі) $U_R = U_0$, а падіння **напруг на конденсаторі** U_C і котушці індуктивності U_L однакові за амплітудою і протилежні за фазою, тобто:

$$U_{C_0} = U_{L_0} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Явище різкого підвищення напруг на неактивних опорах при збіганні частоти ЕРС з резонансною називається резонансом напруг.

Резонанс струмів Розглянемо коло змінного струму з паралельно підключеними конденсатором C і ємністю L (рис. 6.6). Активний опір R будемо вважати малим і знехтуємо ним.

В цьому випадку обидві вітки кола знаходяться під однаковою напругою.

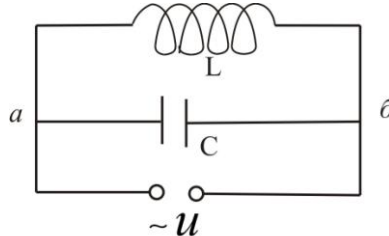


Рисунок 6.6

Аналіз, який ми не приводимо, показує що різниця фаз струмів в вітках $aCб$ і $aLб$ майже дорівнює π , тобто струми в цих вітках протилежні по фазі. Амплітуда сили струму в зовнішньому колі $aεб$ дорівнює

$$I_0 = |I_{C_0} - I_{L_0}| = U_0 \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|.$$

Якщо частота дорівнює резонансній частоті, $\omega = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то при малому опорі R $I_{C_0} \approx I_{L_0}$ і сила струму в зовнішньому колі I_0 буде майже дорівнювати нулю.

Явище різкого зменшення амплітуди сили струму в зовнішній частині паралельного кола при наближенні частоти зовнішньої ЕРС до резонансної частоти називається резонансом струмів (рис.6.7).

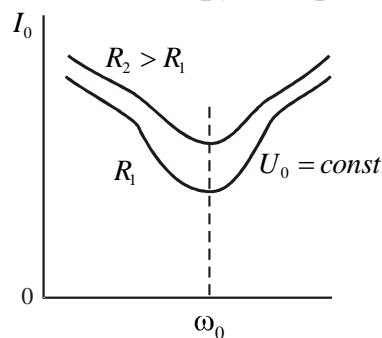


Рисунок 6.7

При цьому сили струмів I_{L_0} і I_{C_0} можуть бути значно більшими ніж струм I_0 .

Великий опір змінному струму такого кола при частоті близької до резонансної, дозволяє його застосовувати в резонансних підсилювачах для виділення певного сигналу з сигналу складної форми.

Резонанс – дуже впливове явище в радіотехніці. Воно застосовується для виділення з складного сигналу певної частоти, що досягається зміною C і L коливального контуру – що дозволяє настроїти контур, тобто добитись співпадіння його власної частоти з частотою випромінюваних електромагнітних хвиль.

**Добротність
при резонансі**

У випадку слабого згасання $\beta^2 \ll \omega_0^2$ досить простим є зв'язок добротності з формою резонансних кривих.

В цьому випадку $\Omega_{рез} \approx \omega_0$ і згідно (6.24)

$$U_{C_{0,рез}} = \frac{I_0}{\omega_0 C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 CR},$$

або

$$\frac{U_{C_{0,рез}}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx Q.$$

Тобто $\frac{U_{C_{0,рез}}}{\mathcal{E}_0} = Q$, іншими словами добротність контуру (при $\beta^2 \ll \omega_0^2$)

показує в скільки разів максимальне значення амплітуди напруги на конденсаторі перевищує амплітуду зовнішньої ЕРС.

Крім того добротність контура пов'язана також з шириною резонансної кривої $\Delta\Omega$ на висоті, що дорівнює 0,7 від максимальної. Цей зв'язок при $\beta^2 \ll \omega_0^2$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega},$$

де $\omega_0 = \Omega_{рез}$ – резонансна частота.

**Потужність в колі
змінного струму**

Миттєве значення потужності змінного струму дорівнює добутку миттєвих значень напруги і сили струму

$$P(t) = U(t)I(t),$$

$$\text{де } U(t) = U_0 \cos \omega t, \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

тоді

$$P(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi). \quad (6.31)$$

Візьмемо до уваги, що $\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi$, тоді (6.31) перетвориться на

$$P(t) = U_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \cdot \sin \varphi).$$

З практичної точки зору цікавою є не миттєве, а середнє значення потужності за період. В цьому випадку $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ і $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

Середнє значення потужності дорівнює

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (6.32)$$

Якщо враховується, що $U_0 \cos \varphi = RI_0$, то

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$

Таку ж потужність буде мати і постійний струм $I_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Величини} \quad I_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (6.33)$$

– називають діючим (*або ефективними значеннями струму і напруги*).

Всі амперметри і вольтметри градуйовані по діючим значенням струму і напруги.

З урахуванням (6.33) середня потужність за період буде мати вигляд

$$\langle P \rangle = U_0 I_0 \cos \varphi. \quad (6.34)$$

З (6.34) випливає, що середня потужність залежить не тільки від величини струму і напруги, а також від зсуву фаз між ними.

Якщо в колі реактивний опір дорівнює нулю, то $\cos \varphi = 1$ і $\langle P \rangle = U_0 I_0$.

У випадку, коли існує тільки реактивний опір, а $R = 0$, то $\cos \varphi = 0$ і $\langle P \rangle = 0$, незалежно від значення струму і напруги.

В цьому випадку вся енергія марно коливається між генератором і зовнішнім колом.

На практиці завжди намагаються збільшити $\cos \varphi$, найменше значення якого для промисловості припустимо $\approx 0,85$.

Контрольні запитання і завдання до розділу 6. Електромагнітні коливання та змінний струм:

1. Що таке коливальний контур? Реальний коливальний контур?
2. Закон Ома для змінного струму.
3. Чи може напруга на ділянці ланцюга перевищувати загальну напругу (ЕРС)?
4. Що таке електромагнітні коливання? Де вони спостерігаються?
5. Чим визначається зміщення по фазі між струмом і ЕРС?
6. Чи може струм в одній з галузей бути більше, ніж загальний струм?
7. Що таке електричні коливання? Де вони спостерігаються?
8. Чому дорівнює амплітуда струму в послідовному ланцюзі при резонансі?
9. Що таке власна частота коливального контуру? Чому вона дорівнює?
10. Що таке резонанс напруг? Як він проявляється?
11. Формула для повного опору послідовного ланцюга.
12. Запишіть рівняння коливань в ідеальному коливальному контурі.
13. Що таке резонанс струмів? Як він проявляється?
14. Чому дорівнює потужність змінного струму? Як на неї впливає «реактивність» ланцюга?
15. Запишіть рівняння коливань у реальному коливальному контурі.

16. Чи справедливі закони постійного струму для ланцюгів змінного струму (перелічити які)?
17. Чому дорівнює амплітудне значення напруги в міській електромережі?
18. Запишіть рівняння вимушених електричних коливань.
19. Що таке миттєве значення струму? Діюче (ефективне) значення?