Лекція № 17 **Тема: Електромагнітні хвилі**

7. Електромагнітні хвилі

7.1. Загальні відомості про хвильові процеси

Види хвиль

Хвильовий процес (хвиля) *– процес розповсюдження коливань у просторі.*

Хвилі класифікуються за наступними ознаками:

- *фізична природа* – пружні (механічні), електромагнітні, світлові, температурні та ін.;
- *закон коливань* – гармонійні (закон синусу або косинусу); негармонійні;
- *напрямок розповсюдження* – повздовжні; поперечні;
- *форма хвильового фронту* – пласкі; сферичні та інші.

Поздовжньою хвилею *називається такий процес, при якому напрямок коливань* $\vec{u}$ *збігається з напрямком розповсюдження хвилі зі швидкістю* $\vec{\upsilon}$ (рис.7.1а).

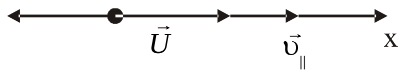

Рисунок 7.1а

У ***поперечній хвилі*** *напрямок коливань перпендикулярний напрямку розповсюдження хвилі* (рис. 7.1б)

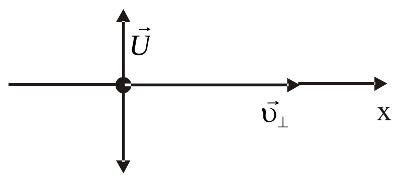

Рисунок 7.1б

Існують ще хвилі третього типу, які називаються ***поверхневими***. Вони розповсюджуються на межі розділу двох середовищ. Хвилі на воді – один з прикладів поверхневих хвиль. Кожна окрема крапля води в хвилі рухається по еліпсу, переміщуючись як вгору і вниз, так вперед і назад.

Під час землетрусів в земній корі також збуджуються поверхневі хвилі, дією яких і обумовлені значні руйнування.

Фронт хвилі *– геометричне місце точок, до яких дійшло коливання до моменту часу* t. Хвильовий фронт відділяє частину простору, в якому проходить хвильовий процес, від області, де коливання ще не виникли.

Геометричне місце точок, що коливаються з однаковою фазою, має назву ***хвильової поверхні***. Хвильова поверхня може проходити через будь-яку точку простору, в якому розповсюджується хвиля. Хвильових поверхонь може бути нескінченно багато, а хвильовий фронт в кожну мить тільки один.

Хвильові поверхні можуть мати будь-яку форму, найпростішими з яких є плоска і сферична хвилі.

Рівняння і графік хвилі

Рівняння хвилі (пласкої, гармонійної):

$$u(x,t)=u_0\cos\left[\omega(t-\tau)+\varphi_0\right]=u_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right] \qquad (7.1)$$

В рівнянні (7.1) u – фізична величина, що коливається; u_0 – ***амплітудна хвилі,*** ω ***– циклічна частота хвилі,*** φ_0 ***– початкова фаза коливань, х –*** координата, уздовж якої

$$\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right] \text{ – фаза плоскої хвилі,} \qquad (7.2)$$

поширюється хвиля; υ - швидкість хвилі (фазова).

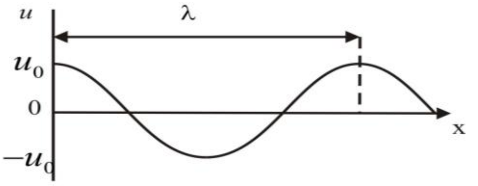

Рисунок 7.2а

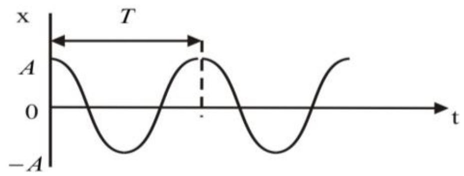

Рисунок 7.2б

Графік хвилі наведено на рис. 7.2. На ньому показано розподіл величини u по закону косинусу уздовж координати x у певний момент часу. З часом косинусоїда буде рухатись зі швидкістю хвилі υ.

Характеристики хвилі

Довжина хвилі λ *– дорівнює найменшій відстані між частинками, що коливаються з однаковою фазою.*

Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку розповсюджується визначена фаза коливань за період (рис. 7.2)

$$\lambda=\upsilon T. \qquad (7.3)$$

Частота коливань $\nu=\dfrac{1}{T}$, тоді швидкість коливань

$$\upsilon=\lambda\nu. \qquad (7.4)$$

В хвилі принципово відрізняються один від одного два типи швидкостей розповсюдження: ***фазова швидкість*** υ ***і групова швидкість*** $\upsilon_{гр}$**.**

Фазова швидкість υ описує швидкість розповсюдження фази гармонічної (синусоїдальної або косинусоїдальної) хвилі.

Групова швидкість $\upsilon_{гр}$ визначає швидкість розповсюдження ***хвильового пакета*** і відповідає швидкості, з якою хвилею переноситься енергія або передається сигнал. Верхньою межею групової швидкості є швидкість світла в вакуумі *c:*

$$\upsilon_{гр}\le c.$$

Якщо для будь-якої хвилі фазова швидкість υ відрізняється від групової швидкості $\upsilon_{гр}$, то в середовищі спостерігається явище ***дисперсії***.

Фазову та групову швидкості та їх зв'язок докладніше буде розглянуто далі.

Хвильове число

Для характеристики хвиль використовують ***хвильове число***

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{7.5}$$

що визначає кількість хвиль, що розміщуються на відстані 2π *метрів.*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}. \tag{7.6}$$

З урахуванням (7.6) рівняння хвилі приймає вигляд:

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{7.7}$$

7.2. Рівняння електромагнітної хвилі (ЕМХ). Хвильове рівняння

Рівняння ЕМХ

Електромагнітна хвиля *– це процес розповсюдження електромагнітних коливань у просторі.*

Оскільки електромагнітні коливання це коливання напруженості електричного E та магнітного H полів, то в узагальненому рівнянні хвилі (7.7) у якості функції $u(x,t)$ виступають саме E і H:

$$E = E_0 cos(\omega t - kx + \alpha_1) \tag{7.8}$$

$$H = H_0 cos(\omega t - kx + \alpha_2) \tag{7.9}$$

де ω – частота хвилі; $k = \dfrac{\omega}{\upsilon}$ – хвильове число, α_1 і α_2 початкові фази коливань при $x = 0$.

Таким чином рівняння електромагнітної хвилі складається з двох співвідношень: перше – це електрична складова хвилі, друге – магнітна.

Властивості електромагнітної хвилі:

1. Електрична і магнітна складові коливаються в однаковій фазі.
2. Коливання векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ відбуваються у взаємоперпендикулярних напрямках, а сама ЕМХ є поперечною.
3. Амплітуди електричної та магнітної складових пов'язані між собою співвідношенням

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0\sqrt{\mu_0 \mu} \tag{7.10}$$

Наслідком другої властивості є те, що вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ і $\vec{\upsilon}$ (де $\vec{\upsilon}$ - швидкість ЕМВ) утворюють «трійку» взаємоперпендикулярних векторів.

З третьої властивості витікає висновок, що для опису ЕМХ достатньо одного з двох рівнянь (7.8 і 7.9).

Графік ЕМХ

На рис. 7.3 показаний вигляд плоскої електромагнітної хвилі. Вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ створюють з напрямком розповсюдження хвилі (напрямком її швидкості) правогвинтову систему.

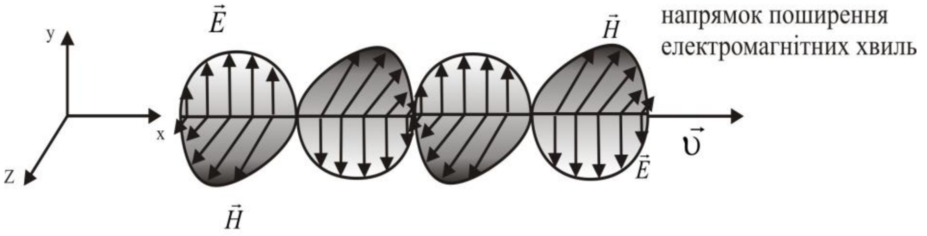

Рисунок 7.3

Хвильове рівняння

Хвильове рівняння – це диференційне рівняння, рішенням якого і є рівняння хвилі. Воно виводиться із рівнянь Максвелла, записаних у диференційній формі і у загальному випадку має вид:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (7.11)$$

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (7.12)$$

Як і рівняння хвилі, хвильове рівняння також має дві складові – електричну та магнітну.

Оператор Δ (Лапласиан) є векторним оператором, що дорівнює додатку часткових похідних другого порядку по координатам x, y, z.

В одномірному наближенні (хвиля розповсюджується тільки по x), рівняння (7.11) спрощується:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \qquad (7.13)$$

Аналогічне рівняння можна одержати з (7.12) для H:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \qquad (7.14)$$

Рівняння (7.13) та (7.14) – диференціальні хвильові рівняння для векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ плоскої хвилі, що розповсюджується у напрямку осі x.

Швидкість ЕМХ

Саме співвідношення (7.8) та (7.9) і є розв’язком цих рівнянь.

З рівнянь Максвелла витікає і вираз для швидкості υ, що входить в хвильове рівняння (7.13) – (7.14):

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}, \qquad (7.15)$$

де ε_0, μ_0 - електрична та магнітна сталі; ε, μ - діелектрична та магнітна проникність середовища, де розповсюджується хвиля.

Якщо ввести позначення $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, де c – електродинамічна стала, c = $3\cdot10^8$ м/с, то формула (7.15) прийме вид

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (7.16)$$

Аналізуючи отримане співвідношення (7.16), можна прийти до наступних висновків:

1. Електродинамічна стала являє собою швидкість ЕМХ у вакуумі, оскільки у вакуумі ε, μ = 1, звідкіля $\upsilon = c = 3\cdot10^8$ м/с.
2. У речовині швидкість ЕМХ завжди менша ніж у вакуумі, тому що $\sqrt{\varepsilon\mu} > 1$.

7.3. Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість

Лінійне середовище

Середовище має назву лінійного, якщо між величинами, які характеризують зовнішній вплив на нього і зміною стану, що супроводжує цей вплив, існує прямопропорційний зв'язок.

Наприклад, за електричними властивостями середовище лінійне, коли його діелектрична проникність ε не залежить від величини напруженості електричного поля $\vec{E}$, лінійність середовища за магнітними властивостями буде за умови, якщо його магнітна проникність μ не залежить від величини магнітної індукції $\vec{B}$.

Принцип суперпозиції хвиль

В лінійному середовищі швидкість хвилі не залежить від її інтенсивності, тому в цьому випадку хвилі розповсюджуються незалежно одна від одної, так що виконується ***принцип суперпозиції хвиль***:

результуюче збурення в будь-якій точці лінійного середовища при одночасному розповсюдженні в ній декількох хвиль, дорівнює сумі збурень, що відповідають кожній з цих хвиль поодинці.

$$\vec{E}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_{0_i} \cos(\omega_i t - k_i x) \qquad (7.17)$$

Візьмемо до уваги, що за допомогою строго монохроматичної хвилі неможливо передати ніякої інформації. Для передачі сигналу треба якось змінити хвилю, наприклад, її обірвати на деякий час. Найпростіше передати сигнал за допомогою імпульсу, який складається з хвиль з частотами в деякому інтервалі $\Delta\omega$. Цю ситуацію ми і розглянемо.

Виходячи з принципу суперпозиції хвиль будь-яку несинусоїдальну хвилю в лінійному **середовищі можна замінити системою синусоїдальних хвиль –** ***групи хвиль, хвильового пакету.***

Сукупність значень частот цих синусоїдальних хвиль має назву ***спектра частот*** цієї несинусоїдальної хвилі.

Розглянемо групу хвиль, що складається з двох плоских хвиль, що розповсюджуються в одному напрямку, мають однакові амплітуди та близькі частоти і хвильові числа (початкові фази дорівнює нулю):

$$E_1(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx);$$

$$E_2(x,t) = E_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x];$$

Тут $k=\dfrac{\omega}{\upsilon_1}$, $\quad (k+dk)=\dfrac{\omega+d\omega}{\upsilon_2}$, $\quad d\omega\langle\langle\omega$, $\quad dk\langle\langle k$.

Після додавання коливань одержимо:

$$E(x,t)=E_1(x,t)+E_2(x,t)=E_0\cos(\omega t-kx)+E_0\cos[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x]=$$
$$=\left[2E_0\cos\frac{td\omega-xdk}{2}\right]\cos(\omega t-kx) \qquad (7.18)$$

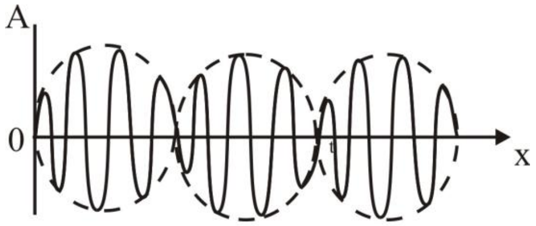

Рисунок 7.4

Множник в квадратних дужках змінюється з координатою і часом набагато повільніше, ніж другий множник. Тому вираз (7.18) можна розглядати як рівняння плоскої хвилі, амплітуда якої A змінюється за законом (рис.7.4)

$$A=2u_0\cos\left(\frac{td\omega-xdk}{2}\right). \qquad (7.19)$$

Групова швидкість

Швидкість розповсюдження хвилі (7.18) – це швидкість переміщення будь-якої точки з фіксованим значенням амплітуди, тобто

$$td\omega-xdk=const,$$

звідки $\upsilon_{гр}=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d\omega}{dk}$ – ***групова швидкість***. (7.20)

Ця ***швидкість дорівнює швидкості переносу енергії (передачі сигналу)*** квазісинусоїдальною хвилею.

Зв'язок між груповою і фазовою швидкостями

Знайдемо зв'язок між груповою і фазовою швидкостями хвиль.

За умови, що $\omega=\upsilon k$, $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$, $dk=-\dfrac{2\pi d\lambda}{\lambda^2}$, маємо

$$\upsilon_{гр}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(\upsilon k)}{dk}=\upsilon+k\frac{d\upsilon}{dk}=\upsilon-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{d\upsilon\cdot\lambda^2}{2\pi d\lambda};$$

$$\upsilon_{гр}=\upsilon-\lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}. \qquad (7.21)$$

З формули (7.21) очевидно, що в залежності від знаку $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda}$ групова швидкість $\upsilon_{гр}$ може бути як менше, так і більше фазової швидкості υ.

У відсутності дисперсії $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda}=0$ групова швидкість збігається з фазовою $\upsilon_{гр}=\upsilon$.