

1.2. Динаміка

1.2.1 Основні динамічні характеристики поступального руху

Динаміка - розділ механіки, що вивчає рух, як результат взаємодії.

Мірою взаємодії є сила.

Сила

Сила – векторна величина, яка характеризує міру взаємодії між тілами або тілом і полем.

Різні типи взаємодії у природі описуються різними видами сил у механіці:

1. Електромагнітна взаємодія → 1. Сила тертя
2. Сила пружності
2. Гравітаційна взаємодія → 3. Сила тяжіння

Таким чином у механіці розглядаються три види сил: тертя, пружності та тяжіння.

**Властивості
поняття сили**

1. Сила породжується *двома* об'єктами: двома тілами, або тілом та полем.

2. Сила повністю визначена, якщо задані її модуль (величина), напрямок дії в просторі та точка прикладання. Пряма, вздовж якої спрямована сила називається лінією дії сили.

3. Одночасно дія на матеріальну точку (тіло) декількох сил еквівалентна діє однієї сили, яка є геометричною сумою всіх сил і називається *рівнодіючою силою*:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.16)$$

4. $[F]=1$ Н (Ньютон) .

Маса тіла

Як показують досліди, швидкість тіла не можна змінити миттєво. Тіло протидіє спробі змінити стан його руху. Ця властивість тіл називається *інерцією* – властивість тіл зберігати свій стан спокою або руху.

Маса – міра інерції, міра гравітаційних властивостей тіла.

Визначити масу тіла можна методом порівняння з еталоном маси при взаємодії тіл. У механіці Ньютона маса має наступні *властивості*:

- додатна ($m>0$),
- адитивна ($m=\sum m_i$),
- стала ($m=const$ – закон збереження мас)
- $[m]=1$ кг.

Імпульс

Третьою динамічною характеристикою поступального руху є імпульс.

Стан руху матеріальної точки в інерціальній системі відліку характеризується двома фізичними величинами: швидкістю (\vec{v}) та здатністю зберігати цю швидкість – інерцією, мірою якої є маса (m). Але зручніше кількісно характеризувати рух однією більш універсальною величиною – кількістю руху, що називається **імпульсом**:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i, \quad (1.17)$$

де m_i – маса матеріальної точки, \vec{v}_i – її швидкість.

Властивості імпульсу:

1. Імпульс системи, яка складається із n матеріальних точок, дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх матеріальних точок, що входять до системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (1.18)$$

і називається **результуючим імпульсом системи**.

2. Імпульс зберігається (підпорядковується закону збереження).
3. $[p]=1 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$

Центр мас системи

При розгляданні поступального руху система матеріальних точок (або тіло) замінюється матеріальною точкою, яка називається центром мас.

Центр мас (центр інерції) системи матеріальних точок (рис.1.12) – це точка, положення якої задається радіусом-вектором \vec{r} і визначається за формулою:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (1.19)$$

Де m_i , r_i , M – маси, радіуси-вектори матеріальних точок та маса всієї системи відповідно.

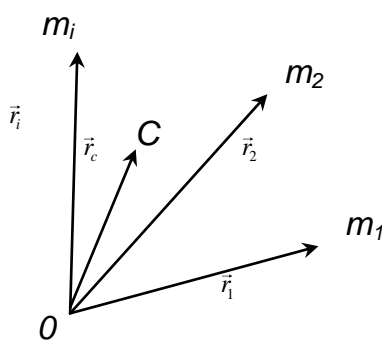


Рисунок 1.12

Координати центра мас:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Фізичний зміст центру мас – це точка, де зосереджена уся маса системи (тіла), до якої прикладені сили та результуючий імпульс.

1.2.2. Основні динамічні характеристики обертального руху

З простіших експериментів неважко переконатися, що динамічні характеристики поступального руху (сила, маса, імпульс) не придатні для опису обертального руху. Наприклад, при відкритті двері важливу роль грає не тільки сила, а й точка її прикладання.

Момент сили

При обертальному русі *мірою взаємодії є момент сили*.

Якщо на матеріальну точку масою m діє сила \vec{F} (рис.1.13), то *моментом сили \vec{F} відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} , що проведений з початку O до точки, в якій розташована частинка масою m (тобто до точки прикладання сили \vec{F}) на саму цю силу:*

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]; \quad (1.20)$$

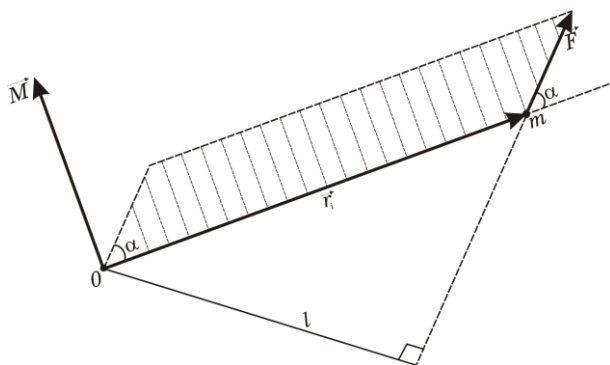


Рисунок 1.13

Вектор \vec{M} напрямлений перпендикулярно площині векторів \vec{r} і \vec{F} за правилом правого гвинта. Модуль моменту сили:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl;$$

де α - кут між векторами \vec{r} і \vec{F} , $l = r \sin \alpha$ - *плече сили* дорівнює довжині перпендикуляра, що опущений з точки O на лінію дії сили.

Властивості моменту сили:

1. Величина відносна, оскільки залежить від вибору осі обертання.
2. Сумується векторно, тобто, якщо на частинку діє кілька сил, то *результуючий момент* усіх сил відносно точки O дорівнює *геометричній сумі моментів складових сил* відносно тієї ж точки:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i .$$

3. $[M]=1 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Момент інерції матеріальної точки відносно осі

Друга динамічна характеристика обертального руху – **момент інерції** є мірою інерції тіла (або матеріальної точки) при обертальному русі.

Величина J_i , що дорівнює добутку маси матеріальної точки m_i на квадрат найкоротшої відстані цієї точки до осі, називається моментом інерції матеріальної точки відносно осі:

$$J_i = m_i R_i^2 . \tag{1.21}$$

Момент інерції системи матеріальних точок

Момент інерції – величина адитивна , тому момент інерції матеріальних точок відносно осі дорівнює сумі добутків їх мас на квадрат їх відстані до осі:

$$J = \sum_i J_i = \sum_i m_i R_i^2 . \tag{1.22}$$

Момент інерції твердого тіла відносно осі

Якщо тверде тіло уявити як систему елементарних матеріальних точок масою dm , то момент інерції буде дорівнювати:

$$J = \int r^2 dm ,$$

де r - довжина перпендикуляру, проведеного від точки з елементарною масою dm до осі обертання, $dm = \rho dV$, де ρ – густина матеріалу тіла, dV – елементарний об'єм, тоді

$$J = \int_V \rho r^2 dV .$$

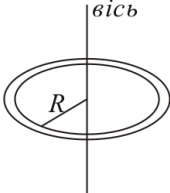
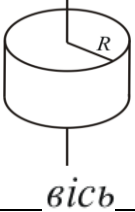
Властивості поняття момент інерції:

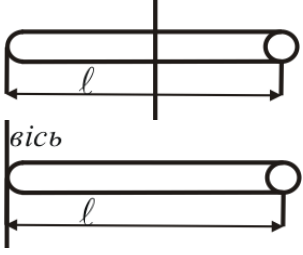
1. Величина відносна (залежить від вибору осі обертання).
2. Адитивність.
3. $[J] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Момент інерції тіл обертання

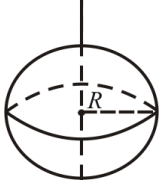
Для тіл правильної форми (тіл обертання) момент інерції відносно осі симетрії можна розрахувати. Опускаючи процедуру розрахунку, наведемо результати для найбільш поширених у механіці тіл:

Таблиця 1.1

Тіло		Момент інерції
1. Тонке кільце радіусом R		mR^2
2. Суцільний циліндр(диск) радіусом R		$\frac{1}{2} mR^2$

3. Тонкий стержень довжиною l		$\frac{1}{12} ml^2$ $\frac{1}{3} ml^2$
---------------------------------	---	--

Продовження Таблиці 1.1

4. Тверда куля радіусом R		$\frac{2}{5} mR^2$
-----------------------------	---	--------------------

Теорема Штейнера

Часто буває, що треба розрахувати момент інерції тіла відносно осі, що не проходить через центр мас. В цьому випадку зручно застосувати *теорему про паралельний перенос осі обертання- теорему Штейнера*:

Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі: моменту інерції J_c тіла відносно осі паралельній даній, що проходить через центр мас, і добутку маси тіла на квадрат відстані a між осями.

$$J = J_c + ma^2. \tag{1.23}$$

Ілюстрацією може служити випадок, показаний вище у таблиці (п.3): якщо вісь обертання для стержня змістити відносно осі симетрії на $l/2$, то по теоремі Штейнера отримаємо:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Третьою характеристикою динаміки обертального руху, що є мірою кількості руху використовується **момент імпульсу**.

Момент імпульсу частинки

Моментом імпульсу частинки відносно точки O (рис. 1.14) називається вектор \vec{L}_i , що дорівнює векторному добутку векторів \vec{r}_i і \vec{p}_i

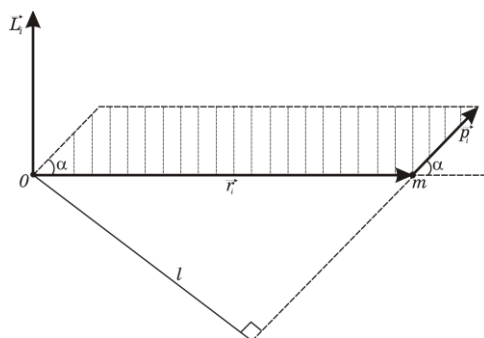


Рисунок 1.14

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] \quad (1.24)$$

Модуль цієї величини:

$$L_i = r_i p_i \sin \alpha = l_i p_i;$$

де α - кут між векторами \vec{r}_i і \vec{p}_i (вектори повинні виходити з однієї точки; їх можна переносити тільки вздовж лінії їх дії).

$l_i = r_i \sin \alpha$ - довжина перпендикуляра, спущеного з точки O на лінію подовження напрямку імпульсу \vec{p} .

Модуль моменту імпульсу чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{r}_i і \vec{p}_i як на сторонах.

Момент імпульсу твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω , дорівнює:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (1.25)$$

Властивості поняття момент імпульсу:

1. Для системи матеріальних частинок (або тіл) **результуючий момент імпульсу** визначається *векторною сумою моментів імпульсів окремих частинок*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i.$$

2. \vec{L} - відносна величина, бо залежить від вибору осі обертання.
3. Зберігається (підпорядковується закону збереження).
4. $[L]=1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$.
- 5.

1.2.3. Основний закон динаміки поступального та обертального рухів. Закони Ньютона.

Механічна система

Сукупність матеріальних точок (тіл), що розглядається як єдине ціле, має назву *механічної системи*. Сили, що є наслідком взаємодії матеріальних точок механічної системи – *внутрішні*. Сили, з якими зовнішні тіла діють на матеріальні точки механічної системи – *зовнішні*.

Основний закон динаміки поступального руху

Цей закон формулюється наступним чином: *швидкість зміни результуючого імпульсу системи тіл дорівнює рівнодіючій зовнішніх сил, що діють на систему.*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.26)$$

де

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}}.$$

**Основний закон
динаміки
обертального
руху**

Замінюючи величини поступального руху на їх аналогії з обертального руху, одержимо *основний закон динаміки обертального руху*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (1.27)$$

Швидкість зміни результуючого моменту імпульсу системи тіл дорівнює результуючому моменту зовнішніх сил, що діють на систему.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{зовн}}.$$

Окремими випадками основного закону динаміки є закони Ньютона.

**Перший закон
Ньютона**

Будь-яке тіло (частинка) зберігає свій стан спокою або прямолінійного рівномірного руху доти, якщо на нього не діють інші матеріальні об'єкти, або їх дія скомпенсована.

Цей закон стверджує, що для підтримання спокою або рівномірного й прямолінійного руху тіло не потребує жодних зовнішніх впливів, що стан спокою й рівномірного прямолінійного руху – динамічно еквівалентні.

**Другий закон
Ньютона**

Розглянемо рух матеріальної точки під впливом зовнішніх сил

ку з тим, що маса не залежить від швидкості й від часу, основний закон динаміки поступального руху можна записати так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Відповідне формулювання другого закону Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \quad (1.28)$$

прискорення матеріальної точки (\vec{a}) пропорційне рівнодіючій зовнішніх сил \vec{F} та обернено пропорційне масі її m .

Аналогічним чином можна з основного закону динаміки обертального руху отримати другий закон Ньютона для обертального руху

$$J\vec{\beta} = \vec{M}_{\text{зовн}} \quad (1.29)$$

**Третій закон
Ньютона**

Сили, з якими діють одне на одне тіла, що взаємодіють, дорівнюють одна одній за величиною, протилежні за напрямком та діють уздовж прямої, яка з'єднує ці тіла: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, тобто всякій дії є протидія.

Третій закон Ньютона стверджує, що сили виникають парами і є силами однієї природи. Вони прикладені до різних матеріальних точок (тіл), тому не урівноважують одна одну (рис 1.15):

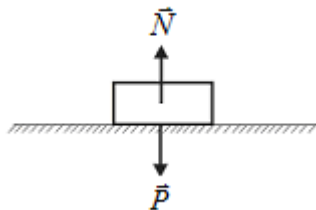


Рисунок 1.15

$$|\vec{P}| = |\vec{N}|,$$

де \vec{P} – вага тіла (або сила нормального тиску $\vec{F}_{н.т.}$) прикладена до опори; \vec{N} – сила нормальної реакції опори.

Із третього закону Ньютона випливає, що в будь-якій механічній системі геометрична сума всіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = 0. \quad (1.30)$$

<p>Межі застосування законів Ньютона</p>

Окрім всесвітніх законів збереження (імпульсу, моменту імпульсу, енергії) усі інші закони мають певні межі застосування. Межею застосування законів Ньютона є **інерціальні системи відліку (ІСВ)** – система відліку, що *покоїться, або рухається прямолінійно та рівномірно відносно головної ІСВ, тілом відліку якої є Сонце (геліоцентрична)*. На практиці у якості головної ІСВ використовують систему відліку, пов'язану із Землею (геоцентричну). Відносно її можна нарахувати коло нас безліч ІСВ, пов'язаних з тілами, що або покояться, або рухаються рівномірно та прямолінійно відносно поверхні Землі.

Контрольні запитання і завдання до підрозділу 1.2. Динаміка

1. Що таке інерціальна система відліку? Навести приклад.
2. Що таке імпульс?
3. Що таке маса? Властивості цього поняття.
4. Основний закон динаміки поступального руху. Приклад його застосування.
5. Що таке центр мас? Для чого використовується це поняття?
6. Перший закон Ньютона. Приклад його застосування.
7. Що таке сила? Властивості цього поняття.
8. Другий закон Ньютона. Приклад його застосування.
9. Третій закон Ньютона. Приклад його застосування.
10. Що таке момент сили? Пояснити малюнком.
11. Що таке момент інерції матеріальної точки? Тіла?
12. Що таке момент імпульсу матеріальної точки? Тіла?
13. Другий закон Ньютона для обертального руху.
14. Основний закон динаміки обертального руху.