

1.3. Закони збереження

1.3.1. Закони збереження імпульсу та моменту імпульсу.

Закон збереження
імпульсу

Розглянемо основний закон динаміки поступального руху (1.26) з позицій відповіді на питання: при якій умові результуючий імпульс буде постійним (не змінюватися з часом)?

Із формули закону $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ очевидно: якщо $\vec{p} = const$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, тобто

$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{зовн}$ - рівнодіюча зовнішніх сил повинна дорівнювати 0.

Механічна система, на яку не діють зовнішні сили, або дія яких скомпенсована, є замкненою системою.

Тоді вираз $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = const$ (1.31)

є співвідношенням для закону збереження імпульсу.

Це твердження складає зміст закону збереження імпульсу - **імпульс замкненої системи матеріальних точок (тіл) у процесі руху не змінюється.** Він може лише перерозподілятися.

Закон збереження імпульсу є наслідком *однорідності простору*. Вона проявляється в тім, що фізичні властивості замкненої системи та закону її руху не залежать від вибору положення початку координат системи відліку.

Цей закон є фундаментальним законом природи і має неогранічені межі застосування.

Закон збереження
моменту імпульсу

Аналогічно з основного закону динаміки обертального руху (1.27) можна отримати закон збереження моменту імпульсу - **якщо результуючий момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O дорівнює нулю, то момент імпульсу системи матеріальних точок відносно тієї ж точки залишається сталим з часом.**

$$\vec{M}_{зовн} = 0; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = const. \quad (1.32)$$

Момент імпульсу системи не змінюється внаслідок дії моментів внутрішніх сил, які можуть викликати тільки зміну моментів імпульсу окремих тіл, але повний момент імпульсу системи залишається незмінним.

Закон збереження моменту імпульсу пов'язаний з ізотропністю простору і також є фундаментальним законом природи і не має меж застосування.

Окремий випадок застосування закону збереження моменту імпульсу – для твердого тіла (1.25):

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const} \quad (1.33)$$

Враховуючи, що $J = \text{const}$ за означенням, з (1.33) отримуємо:

$$\vec{\omega} = \text{const} \quad (1.34)$$

Тобто якщо діючі на тіло моменти сил скомпенсовані, то воно буде зберігати кутову швидкість обертання постійною як за модулем, так і за напрямком.

Це явище використовується у спеціальних приладах – *гіроскопах*. Простіший механічний гіроскоп уявляє собою масивне тіло, вісь обертання якого має три ступені свободи. При будь-якій зміні положення основи конструкції напрямок обертання вісі зберігається. Це можна використовувати як компас, або для стабілізації ствола гармати у процесі руху.

1.3.2. Енергія і робота. Кінетична енергія.

Енергія

Рух – невід'ємний стан матерії. У фізиці вводять поняття **енергії** (E) – скалярної фізичної величини, яка є кількісною характеристикою різних форм руху матерії і відповідних їй взаємодій. Енергія являється одним з фундаментальних понять.

З різними формами руху матерії пов'язані різні види енергії – механічна, тепла, енергія магнітного поля, хімічна, ядерна та ін.

Властивості поняття енергії:

1. Належить усім матеріальним об'єктам – і речовині, і полю.
2. Є інтегральною характеристикою, тобто для системи тіл складається

$$E = \sum_{i=1}^n E_i.$$

3. Зберігається (підпорядковується закону збереження).
4. $[E]=1$ Дж.

Види енергії в механіці

В механіці розрізняють два види енергії – кінетичну (T) та потенціальну (W). Повна механічна енергія

складається з їх суми:

$$E = T + W. \quad (1.35)$$

**Робота
сили**

Робота (A) – скалярна фізична величина, що є мірою зміни енергії тіла в процесі взаємодії з іншими тілами. Елементарна робота сили \vec{F} (на елементарному переміщенні $d\vec{r}$) визначається формулою

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = Fdr \cos \alpha = F_r dr, \quad (1.36)$$

де α - кут між векторами $d\vec{r}$ і \vec{F} , F_r - проекція вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$ (рис.1.16).

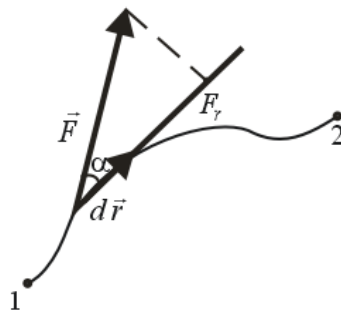


Рисунок 1.16

Робота на ділянці траєкторії 1-2 дорівнює інтегралу:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha dr = \int_1^2 F_r dr \quad (1.37)$$

Властивості поняття роботи:

1. Величина δA – алгебраїчна (скалярна); якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ δA – додатна величина; при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ елементарна робота від’ємна; (робота сил опору), коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta A = 0$ (в цьому випадку $\vec{F} \perp d\vec{r}$), (випадок, коли сила відіграє роль доцентрової сили).

2. Сумарна робота декількох сил дорівнює роботі їх рівнодіючої сили $dA = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}) = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$.

3. $[A] = 1 \text{ Дж}$.

**Робота при
обертанні
твердого тіла**

Елементарна робота, яку виконує сила \vec{F} , що прикладена до тіла, дорівнює:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_\tau dr = RF_\tau d\varphi = M_z d\varphi = \vec{M}d\vec{\varphi}. \quad (1.38)$$

Робота при повороті на кут $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ дорівнює:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

(1.39)

Потужність

Для характеристики швидкості, з якою виконується робота, застосовується фізична величина *потужність*, це величина роботи, виконаної за одиницю часу

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Якщо потужність з часом змінюється, то інтенсивність виконання роботи характеризується *миттєвою потужністю*:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Тобто миттєва потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор миттєвої швидкості, з якою рухається частинка. Як і робота, потужність – величина алгебраїчна. Знаючи потужність сили, можна знайти роботу, яку здійснює сила за проміжок часу t :

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int P dt.$$

Одиницею потужності в СІ є *Ват (Вт)*. Потужність в один ват – це така величина потужності, коли сила F за 1 секунду виконує роботу в один джоуль:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ с}.$$

Практично часто користуються такими одиницями як гектоват, кіловат, мегават. Зв'язок між наведеними одиницями такий: $1 \text{ гВт} = 10^2 \text{ Вт}$, $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$, $1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт}$.

Поняття кінетичної енергії

Кінетична енергія – це енергія тіла, що рухається, яка чисельно дорівнює роботі, що потрібно здійснити для зупинки тіла:

$$T = \left(\frac{mv^2}{2} \right). \quad (1.40)$$

Властивості поняття кінетичної енергії:

1. Згідно з (1.40) T завжди позитивна.
2. T – величина відносна, оскільки згідно принципу відносності руху v залежить від обрання системи відліку.
3. $[T] = 1$ Дж.

Кінетична енергія при обертальному русі

Використовуючи аналогію між динамічними характеристиками поступального та обертального рухів, з формули (1.40) можна одержати вираз для **кінетичної енергії при обертальному русі**:

$$T = \left(\frac{J\omega^2}{2} \right). \quad (1.41)$$

Якщо рух складний, тобто його можна уявити як накладання двох видів руху – поступального та обертального, то згідно інтегральності поняття енергії, кінетичну енергію можна уявити як суму енергій поступального і обертального рухів:

$$T = \left(\frac{mv^2}{2} \right) + \left(\frac{J\omega^2}{2} \right) \quad (1.42)$$

де v – швидкість поступального руху центра обертання.

1.3.3. Консервативні сили. Потенціальна енергія.

Стаціонарне силове поле

Якщо на частинку в кожній точці простору діє сила, яка змінюється у просторі за деяким законом, то це означає, що частинка перебуває у полі сили, наприклад, в полі сили тяжіння Землі або в полі сил опору в потоці рідини(газу). В умовах, коли *сила в кожній точці силового поля не залежить від часу, це поле називають стаціонарним*. В цьому випадку сила залежить тільки від положення частинки. Очевидно, що силове поле, стаціонарне в одній системі відліку, в іншій може виявитись нестаціонарним.

Потенціальне консервативні та неконсервативні сили

Робота, яку виконують сили поля при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2, в загальному випадку залежить від шляху. Але серед стаціонарних силових полів є такі, в яких робота не залежить від шляху, а залежить лише від положення цих точок. Такі поля називають *потенціальними*, а сили – *консервативними*.

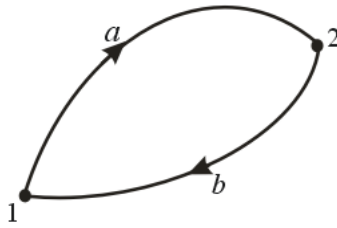


Рисунок 1.17

В потенціальному полі роботу консервативних сил по замкнутому шляху можна поділити на дві довільні частини (рис.1.17) $1a2$ і $2b1$.

Зважаючи на те, що поле потенціальне, $A_{1a2}=A_{1b2}$. З іншого боку - $A_{1a2}=A_{2b1}$, звідки $A_{1a2}+A_{2b1}=A_{1a2}-A_{1b2}=0$. Якщо робота сил поля по замкнутому шляху дорівнює нулю, то робота цих сил на шляху між довільними точками 1 і 2 не залежить від форми шляху – поле потенціальне. Таким чином, для консервативних сил можна навести два визначення: як сил, робота яких не залежить від форми траєкторії частинки, а залежить лише від початкового і кінцевого її положення; як сил, робота яких по замкнутому шляху дорівнює нулю, тобто умова консервативності сили:

$$\oint \vec{F}d\vec{l} = 0. \quad (1.43)$$

Не важко переконатися, що із трьох сил в механіці консервативними є сили пружності та тяжіння, а сила тертя – неконсервативна.

<p>Потенціал ьна енергія</p>

Потенціальна енергія (W) – це енергія тіла (системи тіл), яка обумовлена його взаємодією із зовнішніми тілами. Математичним визначенням W є

формула:

$$W = -A_{к.с.} \quad (1.44)$$

де $A_{к.с.}$ – робота консервативних сил по переведенню тіла (системи) із початкового (нульового) положення в дане.

Під початковим (нульовим) положенням розуміється стан, у якому $W = 0$.

Отже, **потенціальна енергія** – це енергія, нерухомого тіла (системи тіл), обумовлена його взаємодією з іншими тілами.

Властивості поняття потенційної енергії:

1. W величина відносна, бо значення потенційної енергії залежить від вибору початкового положення системи. При заміні одного

початку відліку на інший потенціальна енергія змінюється на сталу величину, тобто вона визначається не однозначно, а з точністю до довільної сталої.

2. Потенційна енергія визначає умови стійкого стану тіла (системи тіл) див.нижче.

3. $[W]=1$ Дж.

Види потенційної енергії механіці	в
--	----------

В механіці розглядають три види потенційної енергії:

- потенціальна енергія частинки m_1 в гравітаційному полі, створеному частинкою m_2 :

$$W_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r};$$

де G – гравітаційна стала, r – відстань між частинками;

- потенціальна енергія частинки в полі пружних сил:

$$W_p(x) = \frac{kx^2}{2};$$

де k – коефіцієнт пружності, x – деформація;

- потенціальна енергія частинки в полі тяжіння $W_p = mgh$, де h – висота підйому тіла над поверхнею Землі, енергія відраховується від поверхні Землі, де $W_p = 0$.

Зв'язок сили потенційною енергією	з
--	----------

Консервативна сила пов'язана з потенційною енергією градієнтним зв'язком:

$$\vec{F} = -\text{grad}W. \quad (1.45)$$

Часто цю формулу записують у вигляді:

$$\vec{F} = -\nabla W_p, \quad (1.46)$$

$$\nabla = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k} \right), \quad \text{де } \nabla - \text{оператор Гамільтона (він же є}$$

градієнтом).

Отже, сила, яка діє на частинку в потенціальному полі, дорівнює взятому зі знаком мінус градієнту потенціальної енергії цієї частинки в даній точці поля.

Знак мінус вказує на те, що напрямки сили і градієнта потенціальної енергії протилежні. Вектор сили напрямлений у бік максимального зменшення потенціальної енергії (рис.1.18).

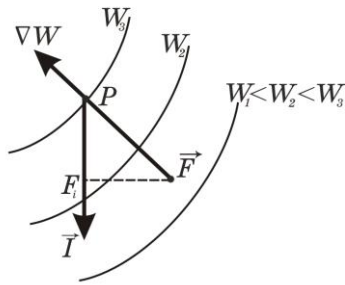


Рисунок 1.18

Принцип стійкості системи

Система тіл (або тіло) знаходиться у стійкому стані, якщо її потенційна енергія має найменше значення із можливих. Наприклад, куля у ямці має найбільш стає положення (у порівнянні з кулею на горі або площині) завдяки меншому значенню потенційної енергії $W=mgh$.

Принцип справедливий не тільки у механіці, але й для любых систем.

1.3.4. Загальний закон збереження енергії. Закон збереження механічної енергії.

Загальний закон збереження енергії

В ізолюваній системі тіл енергія передається від одного тіла до другого, перетворюється з одного виду у інший, але її загальна кількість залишається незмінною.

Під ізолюваною системою розуміється система тіл, яка не обмінюється енергією із зовнішніми тілами.

Закон збереження і перетворення енергії є одним з основних законів природи і носить *характер заборони*: неможливі процеси, під час яких порушується цей закон, неможливе створення вічного двигуна першого роду, який постійно виконував би роботу без споживання енергії ззовні.

Закон збереження механічної енергії

Повна механічна енергія консервативної системи тіл залишається сталою – закон збереження механічної енергії.

$$E=T+W=const.$$

Під консервативною розуміється система, на тіла якої діють тільки консервативні сили. Як було показано вище неконсервативною силою у механіці є сила тертя. Таким чином механічна енергія буде зберігатися, якщо у системі відсутнє тертя, чого, як видно, не може бути.

На практиці цим законом можна користуватися при умові

$$F_{\text{тертя}} \rightarrow 0,$$

тобто коли тертям можна знехтувати.

Контрольні запитання і завдання до підрозділу 1.3. Закони збереження:

1. Що таке енергія? Яким об'єктам вона властива?
2. Що таке потенційна енергія?
3. Що таке робота? Властивості цієї величини.
4. Що таке 1 Джоуль?
5. Що таке повна механічна енергія?
6. У якому випадку робота сили негативна?
7. Умова стану стійкої рівноваги системи.
8. Що таке кінетична енергія? Властивості цієї величини.
9. У якому випадку робота сили на кінцевому шляху дорівнює нулю?
10. Які сили називаються консервативними? Приклади таких сил.
11. Загальний закон збереження енергії.
12. Закон збереження енергії в механіці.
13. Закон збереження імпульсу. Навести приклади.
14. Закон збереження моменту імпульсу. Навести приклади.