Лекція № 5 **Тема: ЕП у вакуумі**
ЕП у діелектриках

2.1.3. Теорема Гауса. Циркуляція вектора $\vec{E}$

Потік вектора напруженості

Розглянемо поле вектора напруженості. Оскільки густина ліній напруженості дорівнює модулю вектора $\vec{E}$, то число ліній, що пронизують елементарну площадку dS, нормаль $\vec{n}$ якої утворює з вектором $\vec{E}$ кут α., буде дорівнювати $EdS\cos\alpha = E_n dS$, де E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок вектора $\vec{n}$ (рис2.3).

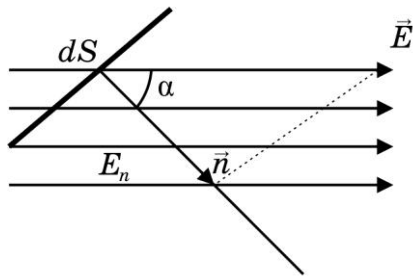


Рисунок 2.3

Елементарним потоком вектора напруженості електростатичного поля *є кількість силових ліній* крізь ділянку поверхні, площа якої $d\vec{S}$

$d\Phi = \vec{E}d\vec{S}$.

Визначимо вектор $d\vec{S}$, модуль якого дорівнює величині площі dS, а напрямок збігається з напрямком нормалі до площини $\vec{n}$.

$d\vec{S} = dS\vec{n}$

Тоді $$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos\alpha \qquad (2.6)$$

Потік вектора напруженості Φ ***через поверхню S*** дорівнює алгебраїчній сумі потоків крізь елементарні поверхні dS, які складають всю поверхню S:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S EdS\cos\alpha \qquad (2.7)$$

Всі одиничні вектори $\vec{n}$ повинні бути напрямлені в один бік відносно поверхні S.

Властивості потоку вектора $\vec{E}$:

1. Потік вектора напруженості Φ_E – *алгебраїчна величина*, тому він залежить не тільки від конфігурації поля $\vec{E}$, а й від вибору напрямку нормалі $\vec{n}$. Для замкнених поверхонь за позитивний напрямок нормалі вибрано саме зовнішню нормаль, тобто нормаль, що напрямлена від поверхні зовні.
2. [Φ]= 1 В·м.

Теорема Гаусса

Для системи точкових зарядів і для довільної поверхні:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i\ . \qquad (2.8)$$

Ця формула виражає ***теорему Гаусса*** для електростатичного поля: ***потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що містяться всередині області поля, обмеженій цією поверхнею, поділеній на електричну сталу*** ε_0**.**

Коли електричний заряд, розподілений у просторі з деякою об`ємною густиною $\rho = \frac{dq}{dV}$, тоді сумарний заряд, який знаходиться всередині гауссової поверхні $S$, що охоплює деякий об`єм V дорівнює:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV\ .$$

Тоді для розподіленого заряда (а це більш загальний випадок) теорема Гаусса запишеться так:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad (2.9)$$

Позитивному заряду відповідає додатній потік напруженості, негативному – від'ємній. Виходячи з цього вважається, що позитивні заряди – *джерела поля*, негативні – *стоки*.

Циркуляція вектора напруженості. Теорема про циркуляцію

Циркуляцією вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ вздовж замкненого контуру L називається лінійний (контурний) інтеграл виду:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L Edl\cos\alpha = \oint_L E_n dl\ ,$$

де $\vec{E}$ - напруженість електростатичного поля в точках елементарної ділянки контуру dl, $d\vec{l}$ – вектор, проведений у напрямку обходу контуру по дотичній до нього, E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок $d\vec{l}$.

Враховуючи визначення напруженості $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ циркуляція вектора $\vec{E}$ – це робота сил поля по переміщенню одиничного заряду q_0 вздовж замкненого контуру.

Теорема про циркуляцію: *циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж будь-якого замкненого контуру дорівнює нулю*:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \qquad (2.10)$$

Силове поле, що має такі властивості – *потенціальне.* Тобто ця теорема також виражає потенціальний характер електростатичного поля.

Із того, що циркуляція вектора $\vec{E}$ обертається в нуль випливає, що лінії напруженості електростатичного поля не можуть бути замкненими, вони починаються й закінчуються на зарядах або ж уходять у нескінченність.

2.1.4. Потенціал електростатичного поля. Зв'язок напруженості з потенціалом

Потенціальна енергія електростатичного поля

Згідно наданому у механіці визначенню потенціальної енергії кожне заряджене тіло, що знаходиться у електростатичному полі (тобто взаємодіє з іншими зарядами), повинно володіти цією енергією.

Щоб отримати формулу для неї, використаємо зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією (1.45):

$$\vec{F}_{к.с.} = -gradW$$

Підставимо замість $\vec{F}$ силу Кулона (2.1), а оператор градієнта для радіально симетричного поля (точкового заряду) представимо у вигляді:

$$gradW = \frac{dW}{dr}.$$

Тоді отримаємо вираз для ***потенційної енергії двох точкових зарядів***:

$$W = -\int F \cdot dr = -\int \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r} \qquad (2.11)$$

Властивості потенційної енергії електростатичного поля:

1. Є взаємною величиною, тобто одночасно належить двом зарядам.
2. Є алгебраїчною величиною, тобто може бути позитивна і негативна (коли один з зарядів від'ємний).

Потенціал електростатичного поля

Якщо у виразі (2.11) заряд q_1 розглядати як джерело поля, а заряд q_2 як пробний q_0, то можна помітити, що відношення $\frac{W}{q_0}$ не залежить від q_0, тому його можна прийняти за *енергетичну характеристику електростатичного поля.* Воно має назву ***потенціалу.***

Потенціал у будь-якій точці електростатичного поля – *фізична скалярна величина, яка дорівнює відношенню потенціальної енергії W_n пробного точкового електричного заряду q_0, який помістили в цю точку, до величини q_0 цього заряду:*

$$\varphi = \frac{W}{q_0} \qquad (2.12)$$

Підставивши в (2.12) значення потенціальної енергії (2.11), одержимо для потенціалу електростатичного поля, створеного точковим зарядом q у вакуумі, наступний вираз:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (2.13)$$

де r – відстань від точки поля, потенціал в якій φ, до заряду q.

Властивості поняття потенціалу:

1. Потенціал , як і потенціальна енергія, визначається з точністю до константи, значення якої залежить від вибору початку відліку. Якщо припустити, що $\varphi \to 0$, коли $r \to \infty$, то константа дорівнює нулю.

2. Потенціал поля у різних його точках різний, тобто $\varphi = f(x, y, z)$.

3. Є алгебраїчною величиною – якщо у (2.13) заряд від'ємний, то потенціал негативний.

4. [φ]= 1 В (Вольт).

Принцип суперпозиції для потенціала

При накладенні електростатичних полів, створених різними джерелами, їх потенціали складаються алгебраїчно, тобто:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}.$$

Якщо заряди розподілені в просторі безперервно, то за умови, що $\varphi(\infty)$=0:

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

де $dq = \tau dl$, $dq = \sigma dS$ або $dq = \rho dV$ у випадку лінійного, поверхневого чи об`ємного розподілу зарядів відповідно, r – відстань від елементарного заряду, що розглядається, до точки поля, в якій визначається потенціал φ.

Зв'язок між напруженістю та потенціалом електростатичного поля

Напруженість і потенціал є дві характеристики електростатичного поля. Напруженість – силова характеристика, потенціал – енергетична характеристика поля.

Знайдемо взаємозв'язок між цими величинами, використавши зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією (1.45):

$$\vec{F} = -gradW.$$

Підставляємо $\vec{F}$ із виразу (2.3) а U sp (2.12)

$$q\vec{E} = -grad(q \cdot \varphi),$$

Виносимо q із під градієнта, як константу, та скорочуючи на q, отримаємо кінцеву формулу:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -grad\varphi. \qquad (2.14)$$

Вектор напруженості електростатичного поля за модулем дорівнює градієнту потенціалу та напрямлений у бік його зменшення.

Для довільного напрямку

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l},$$

тобто проекція вектора напруженості електростатичного поля на довільний напрямок чисельно дорівнює швидкості зменшення потенціалу поля на одиницю довжини в цьому напрямку.

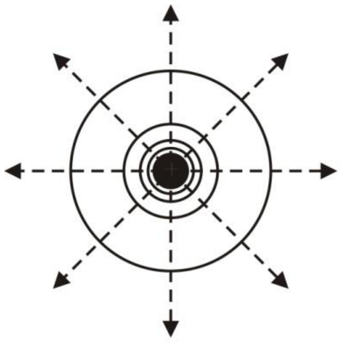
Для однорідного поля

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}, \qquad (2.15)$$

де U – напруга між точками 1 та 2.

Еквіпотенціальні поверхні

Графічно розподіл потенціалу електростатичного поля зображують за допомогою *еквіпотенціальних поверхонь* – поверхонь, в усіх точках яких потенціал має однакове значення.



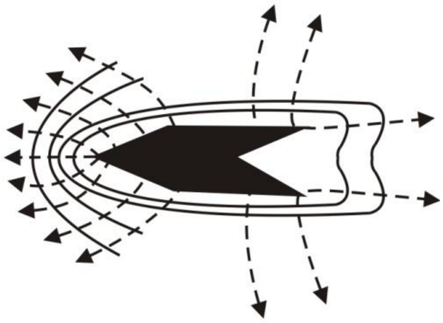


Рисунок 2.4а Рисунок 2.4б

Робота, яку здійснюють сили електростатичного поля при переміщені заряду по еквіпотенціальній поверхні, дорівнює нулю тому, що $\Delta\varphi = 0$ і електростатичні сили, що діють на заряд завжди напрямлені по нормалі до еквіпотенціальної поверхні. Звідки випливає, що вектор $\vec{E}$ завжди перпендикулярний до еквіпотенціальної поверхні, тому й лінії напруженості вектора $\vec{E}$ ортогональні до цих поверхонь. На рис. 2.4 показано вид ліній напруженості (штрихові лінії) та еквіпотенціальних поверхонь (суцільні лінії) полів позитивного точкового заряду (а) та зарядженого металічного циліндра, у якого на одному кінці виступ, а на іншому – впадина (б).

Контрольні запитання і завдання до підрозділу 2.1. Електричне поле у вакуумі:

1. Що таке заряд? Елементарний заряд?
2. Що таке заряджене тіло? Незаряджене?
3. Зобразити електричне поле двох однойменних зарядів.
4. Сформулюйте й запишіть теорему Гауса.
5. Межі застосування закону Кулона.
6. Як застосувати закон Кулона до протяжних заряджених тіл?
7. Що таке потенціал? Запишіть формулу для потенціалу точкового заряду.
8. Виведіть із закону Кулона формулу для напруженості поля точкового заряду.
9. Зв'язок напруженості з потенціалом.
10. Що таке напруженість електричного поля? Силові лінії?
11. Що таке еквіпотенциальні поверхні? Як вони зображуються?
12. Що таке електричне поле?
13. Потенціал поля описується функцією: $\varphi = a \cdot r^2$. Одержати функцію для напруженості.
14. Напруженість поля описується функцією: E=q/4$\pi\varepsilon_0 r\cdot$. Одержати функцію для потенціалу.