1 КІНЕМАТИКА

1.1 Мета заняття

Засвоїти основні методи розв'язування прямої та оберненої задач кінематики, використовуючи закони кінематики поступального та обертального руху.

1.2 Вказівки до організації самостійної роботи студентів

Перш ніж розв'язувати задачі з кінематики, потрібно засвоїти основні поняття та означення фізичних величин, які використовуються в цьому розділі. Зверніть особливу увагу на векторні та псевдовекторні величини (швидкість, прискорення, кутова швидкість, кутове прискорення), а також на формули зв'язку між векторними величинами [1, розд. 1; 2, розд. 1; 5, §1]. Повторіть означення вектора, модуля вектора, проекції вектора на вісь та дії над векторами.

Задачі кінематики поділяють на прямі та зворотні. У першому випадку знаходять швидкість, прискорення тіл та інші величини за відомими кінематичними рівняннями руху. Розв'язуючи зворотну задачу за відомими залежностями від часу швидкості чи прискорення та початковими умовами, знаходять кінематичні рівняння руху.

1.3 Основні закони та формули

1. Кінематичне рівняння руху матеріальної точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки.

2. Середня й миттєва швидкості матеріальної точки:

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення точки за проміжок часу Δt.

3. Модуль миттєвої швидкості:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad \upsilon = \frac{ds}{dt}, \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2},$$

де Δs – шлях, що пройшла точка за проміжок часу Δt.

4. Середня путьова швидкість:

$$<\upsilon> = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

5. Середнє і миттєве прискорення матеріальної точки:

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

6. Модуль вектора миттєвого прискорення:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

7. Тангенціальна і нормальна складові прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},\ a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

8. Повне прискорення при криволінійному русі:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

9. Шлях і швидкість для рівноприскореного/рівноуповільненого руху:

$$\Delta s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2},\ \upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

де υ_0 – початкова швидкість.

10. Довжина шляху, що пройшла матеріальна точка за проміжок часу від t_1 до t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,dt\ .$$

11. Кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

де $d\vec{\varphi}$ – елементарний кут повороту.

12. Кутова швидкість рівномірного обертального руху

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

де $\Delta\varphi$– кут повороту довільного радіуса від початкового положення; Δt – проміжок часу, за який відбувся даний поворот; T – період обертання; n – частота обертання.

13. Кутове прискорення:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

14. Кут повороту і кутова швидкість для рівноприскореного / рівноуповільненого обертального руху:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

15. Зв'язок між лінійними (довжина шляху ds, що пройшла точка по дузі окружності радіусом R, лінійна швидкість υ, тангенціальна складова прискорення a_τ, нормальна складова прискорення a_n) і кутовими ($d\varphi$ – кут повороту, ω – кутова швидкість, ε – кутове прискорення) величинами:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}],\ ds = |d\vec{r}| = R \cdot d\varphi,$$

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}],\ \upsilon = R\omega,$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}],\ a_\tau = \varepsilon R,$$
$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}],\ a_n = \omega^2 R.$$

1.4 Контрольні запитання

1. Що таке система відліку?
2. Що таке траєкторія, переміщення, довжина шляху?
3. Який вигляд має кінематичний закон руху для координатного способу визначення руху матеріальної точки?
4. Який вигляд має кінематичний закон руху для векторного способу визначення руху матеріальної точки?
5. Який вигляд має кінематичний закон руху для природного способу визначення руху матеріальної точки?
6. Який рух називається поступальним і обертальним?
7. Яку формулу можна використовувати для знаходження шляху, що пройшла точка при нерівномірному русі?
8. Що таке середня швидкість, миттєва швидкість?
9. Як знайти вектор швидкості для різних способів визначення руху?
10. Що таке середнє прискорення, миттєве прискорення?
11. Як знайти вектор прискорення для різних способів визначення руху?
12. Що характеризують тангенціальне і нормальне складові прискорення?
13. Що таке кутове переміщення, кутова швидкість і кутове прискорення?
14. Як пов’язані лінійна та кутова швидкості?
15. Як пов’язана нормальна складова лінійного прискорення з кутовими параметрами?
16. Як пов’язана тангенціальна складова лінійного прискорення з кутовими параметрами?

1.5 Приклади розв’язування задач

Задача 1. Рівняння руху точки по прямій має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3.

Знайти положення точки в моменти часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с; середню швидкість за час, що минув між цими моментами; миттєві швидкості в указані моменти часу, середнє прискорення за вказаний проміжок часу, миттєві прискорення в ці моменти часу.

Дані: $x = A + Bt + Ct^3$, $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3, $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с.

Знайти: x_1, x_2, $<\upsilon>$, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, $<a>$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Аналіз та розв’язання.

Запропонована задача є прикладом прямої задачі кінематики. Кінематичне рівняння руху надано в координатному вигляді $x = A + Bt + Ct^3$. Якщо ми маємо це рівняння, то можемо знайти різні фізичні величини, які характеризують рух матеріальної точки.

Положення точки, що рухається прямолінійно, у деякий момент часу визначається відстанню x точки від початку відліку. Щоб знайти цю відстань, треба у рівняння руху підставити замість часу t задане значення часу

$$x_1 = \left(4 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^3\right) \text{м} = 9{,}6 \text{ м};$$

$$x_2 = \left(4 + 2 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 5^3\right) \text{м} = 39 \text{ м}.$$

Середня путьова швидкість за означенням дорівнює $< \upsilon >= \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, де Δx – зміна відстані x за проміжок часу Δt.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \left(39 - 9{,}6\right) \, м = 29{,}4 \text{ м};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left(5 - 2\right) \text{с} = 3 \text{ с};$$

$$< \upsilon >= \frac{29{,}4}{3} \text{ м/с} = 9{,}8 \text{ м/с}.$$

Загальний вираз вектора миттєвої швидкості знайдемо, коли продиференціюємо за часом рівняння руху

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \left(B + 3Ct^2\right)\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення сталих *B* та *C*, а також значення часу, матимемо:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 2^2\right) \text{м/с} = 4{,}4\vec{i} \text{ м/с};$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2\right) \text{м/с} = 17\vec{i} \text{ м/с}.$$

Модуль середнього прискорення за означенням дорівнює

$$< a >= \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t},$$

де $\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ – зміна швидкості υ за час Δt.

$$\Delta \upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \left|17 - 4{,}4\right| \text{м/с} = 12{,}6 \text{ м/с},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left|5 - 2\right| \text{с} = 3 \text{ с},$$

$$< a >= \frac{12{,}6}{3} \text{ м/с}^2 = 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Загальний вираз для вектора миттєвого прискорення матимемо, якщо продиференціюємо за часом вираз швидкості.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 6Ct\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення C та задані значення часу, матимемо

$$\vec{a}_1 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 2\vec{i} \text{ м/с}^2 = 2{,}4\vec{i} \text{ м/с}^2,$$
$$\vec{a}_2 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 5\vec{i} \text{ м/с}^2 = 6\vec{i} \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $x_1 = 9{,}6$ м, $x_2 = 39$ м, $<\upsilon>= 9{,}8$ м/с, $\vec{\upsilon}_1 = 4{,}4\vec{i}$ м/с, $\vec{\upsilon}_2 = 17\vec{i}$ м/с, $<a>= 4{,}2$ м/с^2, $\vec{a}_1 = 2{,}4\vec{i}$ м/с^2, $\vec{a}_2 = 6\vec{i}$ м/с^2.

Задача 2. Автомобіль рухається по заокругленню шосе, що має радіус кривини $R = 50$ м. Рівняння руху автомобіля – $S = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Знайти швидкість автомобіля, його тангенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Дані: $S(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2, $R = 50$ м, $t = 5$ с.

Знайти: $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$.

Аналіз та розв'язання

В даній задачі відома залежність шляху s від часу, тобто відомо кінематичне рівняння руху $s(t)$. Використовується природний спосіб визначення руху.

Перш за все знаходимо загальний вираз для швидкості автомобіля. Відомо що

$$\vec{\upsilon} = \vec{\tau}\upsilon = \vec{\tau}\frac{ds}{dt},$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, напрямлений по дотичній до траєкторії руху.

Взявши похідну за часом від заданого рівняння шляху s, матимемо

$$\upsilon = B + 2Ct.$$

Підставивши сюди значення сталих B і C, а також задане значення часу, знайдемо модуль швидкості

$$\upsilon = |10 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 5| \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

Вектор швидкості, спрямований по дотичній до траєкторії, в даний момент часу

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = 5\vec{\tau} \text{ м/с}.$$

Тепер знаходимо загальний вираз для тангенціального прискорення. З теорії відомо, що

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}.$$

Взявши похідну за часом від загального виразу швидкості і підставивши значення сталої C та часу, матимемо:

$$\vec{a}_\tau = 2C\vec{\tau} = -\vec{\tau} \text{ м/с}^2.$$

Отриманий вираз для тангенціального прискорення не містить часу, це означає, що тангенціальне прискорення стале за величиною; вектор $\vec{a}_\tau$ –

протилежний напрямку вектора швидкості, модуль цього вектора дорівнює $a_\tau = 1$ м/с^2.

Модуль нормального прискорення знайдемо, підставивши в загальне рівняння його відомі значення швидкості та радіуси кривини траєкторії

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{5^2}{50}\text{ м/с}^2 = 0{,}5\text{ м/с}^2 .$$

Повне прискорення буде геометричною сумою взаємно перпендикулярних тангенціального і нормального прискорень

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0{,}25}\text{ м/с}^2 = 1{,}12\text{ м/с}^2 .$$

Напрямок вектора повного прискорення можна визначити, якщо знайти кут, утворений повним прискоренням з напрямком радіуса або з напрямком нормального прискорення

$$cos(\vec{a},\vec{a}_n) = \frac{a_n}{a} = \frac{0{,}5}{1{,}12} = 0{,}446 ,$$

$$(\vec{a},\vec{a}_n) = 63^o30' .$$

Відповідь: $\vec{\upsilon} = 5\vec{\tau}$ м/с, $\vec{a}_\tau = -\vec{\tau}$ м/с^2, $a_n = 0{,}5$ м/с^2, $a = 1{,}12$ м/с^2, $(\vec{a},\vec{a}_n) = 63^o30'$.

Задача 3. Матеріальна частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = (2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k})$ ì /с^2. Визначити модуль швидкості частинки та її координати в момент часу $t = 2$ с, якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ її швидкість була $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ ì /с, а початкові координати точки дорівнювали $x_0 = 1$м; $y_0 = 0$; $z_0 = 2$ м.

Дані: $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ м/с^2, $t = 2$ с, $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с,

$x_0 = 1$м, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ м.

Знайти: $\upsilon,\ x,\ y,\ z$.

Аналіз та розв’язання

Запропонована задача – приклад оберненої задачі кінематики. З означення вектора прискорення $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ знаходимо $d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt$.

Інтегруючи цей вираз, одержимо

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)dt = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t\vec{k} .$$

Враховуючи початкові умови $\vec{\upsilon}_0 = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, знайдемо

$$\vec{\upsilon} = \left(3 + t^2\right)\vec{i} + \left(2t^2 + 1\right)\vec{j} + \left(3t - 1\right)\vec{k} .$$

Модуль вектора $\vec{\upsilon}$ дорівнює

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(3 + t^2\right)^2 + \left(2t^2 + 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2} = 12{,}5\ \text{м/с}.$$

З означення проекцій вектора $\vec{\upsilon}$ на осі координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

знаходимо

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_x dt;$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \upsilon_y dt;$$

$$\int_{z_0}^{z} dz = \int_0^t \upsilon_z dt,$$

$$x - x_0 = \int_0^t \left(3 + t^2\right) dt = 3t + \frac{t^3}{3},$$

$$y - y_0 = \int_0^t \left(2t^2 + 1\right) dt = \frac{2}{3}t^3 + t,$$

$$z - z_0 = \int_0^t \left(3t - 1\right) dt = \frac{3}{2}t^2 - t$$

Підставивши числові дані, одержимо $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Відповідь: $\upsilon = 12{,}5$ м/с, $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Задача 4. Маховик, що обертається з постійною частотою $n_0 = 10\ \text{с}^{-1}$, при гальмуванні почав обертатися рівносповільнено. Коли гальмування припинилося, обертання маховика знову стало рівномірним, але вже з частотою $n = 6\ \text{с}^{-1}$. Визначити кутове прискорення ε маховика і тривалість Δt гальмування, якщо за час рівно сповільненого руху маховик зробив $N = 50$ обертів.

Дані: $n_0 = 10\ \text{с}^{-1}$, $n = 6\ \text{с}^{-1}$, $N = 50$.

Знайти: ε, Δt.

Аналіз та розв’язання

Якщо обертання відбувається із сталим кутовим прискоренням, то кутове прискорення ε маховика пов'язане з початковою ω_0 та кінцевою ω кутовими швидкостями співвідношенням

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \cdot \Delta\varphi,$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi},$$

але тоді

$$\Delta\varphi = 2\pi N, \; \omega = 2\pi n,$$

то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi} = \frac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Від′ємне кутове прискорення одержали тому, що маховик обертався сповільнено.

Для визначення тривалості гальмування скористаємося формулою, яка зв'язує кут повороту φ з середньою кутовою швидкістю $<\omega>$ обертання і часом t:

$$\Delta\varphi = <\omega> \cdot \Delta t, \; \Delta\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot \Delta t = \pi\left(n_0 + n\right) \cdot \Delta t,$$

звідки

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\pi\left(n_0 + n\right)} = \frac{2N}{n_0 + n} = 6{,}25 \text{ с}.$$

Відповідь: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2, $\Delta t = 6{,}25$ с.

1.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 80$ км/год, а другу – зі швидкістю $\upsilon_2 = 40$ км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

Відповідь: $<\upsilon> = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 53{,}3$ км/год.

Задача 2. Залежність шляху, який пройшло тіло, від часу визначається рівнянням $S = at^4 - bt^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла. Побудувати графік залежності швидкості від часу за перші п'ять секунд руху, якщо $a = 0{,}25$ м/с^4, $b = 9$ м/с^2.

Відповідь: $\upsilon_{min} = -29{,}3$ м/с.

Задача 3. Пароплав іде по річці від пункту A до пункту B зі швидкістю $\upsilon_1 = 10$ км/год, а назад – зі швидкістю $\upsilon_2 = 16$ км/год. Знайти середню швидкість пароплава υ і швидкість течії ріки υ_p.

Відповідь: $\upsilon = 12{,}3$ км/год, $\upsilon_p = 3$ км/год.

Задача 4. Кинутий вертикально вгору камінь перебував на одній і тій же висоті в моменти часу t_1=2,1 с и t_2=3,7 с. Нехтуючи опором повітря, визначити швидкість υ_0, з якої був кинутий камінь.

Відповідь: $\upsilon_0 = g\dfrac{t_1 - t_2}{2} = 28{,}4$ м/с.

Задача 5. Камінь, що кинули з поверхні землі вертикально вгору, упав на землю через 3 с. Яка була початкова швидкість каменю? На яку висоту піднявся камінь? Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $\upsilon_0 = 14{,}7$ м/с, $h = 11$ м.

Задача 6. Тіло кинуте з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 28$ м/с під кутом $\alpha = 42°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначити для моменту часу $t = 1{,}2$ с після початку руху тангенціальну a_τ й нормальну a_n складові прискорення.

Відповідь: $a_\tau = g\sin\beta = 3{,}12$ м/с^2, $a_n = g\cos\beta = 9{,}30$ м/с^2, де

$$\beta = arctg\,\frac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}$$

Задача 7. Рух матеріальної точки задано рівнянням: $x = At + Bt^2$, де $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Визначити момент часу, в який швидкість точки $\upsilon = 0$. Знайти координату та прискорення в цей момент. Побудувати графіки залежностей координати, шляху, швидкості та прискорення від часу для цього руху.

Відповідь: $t = 40$ с, $x = 80$ м, $a = -0{,}1$ м/с^2.

Задача 8. Залежність шляху *s*, який пройшло тіло, від часу *t* визначається рівнянням $S = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3. Знайти: 1) залежність швидкості υ і прискорення a від часу t; 2) відстань, пройдену тілом, швидкість і прискорення через 2 с після початку руху. Побудувати графіки залежностей шляху, швидкості і прискорення від часу для $0 \le t \le 3$ с через 0,5 с.

Відповідь: 1) $\upsilon = \left(2 - 6t + 12t^2\right)$ м/с, $a = \left(-6 + 24t\right)$ м/с^2;

2) $s = 24$ м, $\upsilon = 38$ м/с, $a = 42$ м/с^2.

Задача 9. Залежність пройденого тілом шляху *s* від часу *t* визначається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2$, де $A = 6$ м, $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2. Знайти середню швидкість і середнє прискорення тіла в проміжку часу від 1 с до 4 с. Побудувати графіки залежностей шляху, швидкості та прискорення від часу для $0 \le t \le 5$ с через 1 с.

Відповідь: $<\upsilon>= 7$ м/с, $<a>= 4$ м/с^2.

Задача 10. Залежність пройденого тілом шляху *s* від часу *t* подано рівнянням $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0{,}14$ м/с^2, $D = 0{,}01$ м/с^3. Через який час від початку руху прискорення тіла дорівнюватиме 1 м/с^2? Чому дорівнює середнє прискорення тіла за цей проміжок часу?

Відповідь: $t = 12$ с, $< a >= 0{,}64$ м/с^2.

Задача 11. Швидкість каменю, що кинули вертикально угору, через проміжок часу $t = 12$ с зменшилася в $n = 3{,}5$ рази. Визначити початкову швидкість υ_0 каменю і висоту *h* його підйому.

Відповідь: $\upsilon_0 = \dfrac{n}{n-1} gt = 30{,}2$ м/с, $h = \dfrac{n^2}{(n-1)^2} \dfrac{gt^2}{2} = 46{,}5$ м.

Задача 12. Радіус-вектор частинки визначається виразом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$. Обчислити: шлях s, який пройшла частинка за перші 10 с руху, модуль переміщення $|\Delta\vec{r}|$ за той же час. Пояснити одержані результати.

Відповідь: $s = 500$ м, $|\Delta\vec{r}| = 500$ м.

Задача 13. Залежність радіус-вектора частинки від часу описується законом $\vec{r} = (3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k})$ м. Знайти: швидкість $\vec{\upsilon}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки, модуль швидкості υ в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $\vec{\upsilon} = (6t\vec{i} + 2\vec{j})$ м/с, $\vec{a} = 6\vec{i}$ м/с^2, $\upsilon = 6{,}3$ м/с.

Задача 14. Частинка рухається із швидкістю $\vec{\upsilon} = (1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k})$ м/с. Знайти: переміщення $\Delta\vec{r}$ частинки за перші 2 с її руху; модуль швидкості υ в момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k})$ м, $\upsilon = 13$ м/с.

Задача 15. Камінь кинутий у горизонтальному напрямку. Через 0,5 с після початку руху значення швидкості каменю стало в 1,5 рази більше його початкової швидкості. Нехтуючи опором повітря, знайти початкову швидкість каменю.

Відповідь: $\upsilon_0 = 4{,}4$ м/с.

Задача 16. Диск радіусом $R = 0{,}6$ м обертається навколо нерухомої осі так, що залежність його кутового прискорення від часу задається рівнянням $\varepsilon = At$, де A = 3 рад/с^3. Визначити кут $\Delta\varphi$ повороту диска за час $t = 2{,}2$ с після початку руху, лінійну швидкість точки υ на ободі диска і її нормальне прискорення a_n для цього ж моменту часу.

Відповідь: $\Delta\varphi = \dfrac{At^2}{6} = 5{,}32$ рад, $\upsilon = \dfrac{At^2}{2} R = 4{,}36$ м/с, $a_n = \dfrac{A^2t^4}{4} R = 31{,}6$ м/с^2.

Задача 17. Диск радіусом $R = 0{,}6$ м, обертаючись рівноприскорено, за час $t = 2\,c$ набув кутову швидкість $\omega = 3{,}3$ рад/с. Визначите для цього моменту часу тангенціальну a_τ і нормальну a_n складові прискорення.

Відповідь: $a_\tau = \dfrac{\omega R}{t} = 0{,}99$ м/с^2, $a_n = \omega^2 R = 6{,}53$ м/с^2.

Задача 18. Три літака виконують розворот, рухаючись на відстані 60 м один від одного. Середній літак летить із швидкістю 360 км/год, рухаючись по дузі кола радіусом 600 м. Визначити прискорення кожного літака.

Відповідь: $a_1 = 18{,}3$м/с^2, $a_2 = 16{,}7$м/с^2, $a_3 = 15{,}0$ м/с^2.

Задача 19. Тіло проходить однакові ділянки шляху з постійними у межах ділянки швидкостями $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$. Визначити середню швидкість тіла на всьому шляху.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\upsilon_i}}$.

Задача 20. Точка рухається по колу радіусом $R = 2$ см. Залежність шляху від часу задано рівнянням $x = Ct^3$, де $C = 0{,}1$ см/с^2. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення в момент, коли лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 0{,}3$ м/с.

Відповідь: $a_n = 4{,}5$ м/с^2, $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2.

Задача 21. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Через $t = 5{,}0$ с від початку руху повне прискорення колеса дорівнює $a = 13{,}6$ см/с^2. Знайти радіус колеса.

Відповідь: $R = 6{,}1$ м.

Задача 22. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3. Знайти радіус колеса, якщо відомо, що на кінець другої секунди руху нормальне прискорення точок, які лежать на ободі колеса, дорівнювало $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

Відповідь: $R = 1{,}2$ м.

Задача 23. Знайти у скільки разів тангенціальне прискорення точки, що лежить на ободі колеса, яке обертається, більше її нормального прискорення для того моменту, коли вектор повного прискорення цієї точки утворює кут $30°$ з вектором її лінійної швидкості.

Відповідь: $1{,}7$.

Задача 24. Вентилятор обертається з частотою 90 обертів за хвилину. Після вимкнення вентилятор, обертаючись рівносповільнено, зробив до зупинки 75 обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимкнення вентилятора до його повної зупинки?

Відповідь: $t = 10$ с.

Задача 25. Колесо, обертаючись рівносповільнено, під час гальмування зменшило свою швидкість з 300 об/хв до 180 об/хв. Знайти кутове прискорення колеса і кількість обертів, зроблених ним за цей час.

Відповідь: $\varepsilon = -0{,}21$ рад/с^2, $N = 240$ об.

Задача 26. Спостерігач, що стоїть на платформі, побачив, що перший вагон електропоїзда, який наближається до станції, пройшов повз нього за 4 с, а другий – за 5 с. Після цього передній край поїзда зупинився на відстані 75 м від спостерігача. Вважати рух поїзда рівносповільненим, визначити його прискорення.

Відповідь: $a = -0{,}25 \text{м/с}^2$.

Задача 27. Два тіла кинуті вертикально вгору з однієї й тої ж точки з однаковою початковою швидкістю υ_0 з інтервалом часу $\Delta t = 1{,}8\,\text{с}$. Нехтуючи опором повітря, визначити початкову швидкість, якщо обидва тіла через проміжок часу $t = 5{,}5\,\text{с}$ після кидка першого тіла виявилися на одній висоті *h*. Визначити також цю висоту.

Відповідь: $\upsilon_0 = \left(t - \dfrac{\Delta t}{2}\right) g = 45{,}1\,\text{м/с}$, $h = \dfrac{gt\left(t - \Delta t\right)}{2} = 99{,}8\,\text{м}$.

Задача 28. Тіло кинуто з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 15\,\text{м/с}$ під кутом $\alpha = 45°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначити відстань *l* від місця кидка до точки, у якій тіло виявиться через першу половину часу свого руху.

Відповідь: $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin\alpha}{2g}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = 20{,}2\,\text{м}$.

Задача 29. Диск обертається навколо нерухомої осі так, що залежність лінійної швидкості точок, що лежать на ободі колеса, від часу задається рівнянням $\upsilon = A + Bt$, де $A = 0{,}6\,\text{м/с}$; $B = 0{,}9\,\text{м/с}^2$. Визначити радіус *R* колеса, якщо кут α між векторами повного прискорення й лінійної швидкості через проміжок часу $t = 3\,\text{с}$ від початку руху дорівнює $80°$.

Відповідь: $R = \dfrac{\left(A + Bt\right)^2}{Btg\alpha} = 2{,}13\,\text{м}$.

Задача 30. Колесо радіусом $R = 42\,\text{см}$ обертається так, що залежність кута повороту колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $B = -1{,}6\,\text{рад/с}$; $C = 0{,}8\,\text{рад/с}^2$. Визначити: момент часу t_1, коли повне прискорення $\vec{a}$ буде спрямовано під кутом $\alpha = 75°$ до швидкості $\vec{\upsilon}$; момент часу t_2, при якому нормальна складова $\vec{a}_n$ прискорення точки на ободі збігається по величині з тангенціальної складової $\vec{a}_\tau$.

Відповідь: $t_1 = \dfrac{\sqrt{2Ctg\alpha} - B}{2C} = 2{,}52\,\text{с}$, $t_2 = \dfrac{\sqrt{2C} - B}{2C} = 1{,}79\,\text{с}$.