2 ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

2.1 Мета заняття

Засвоїти методи класичної механіки і навчитися розв'язувати задачі динаміки матеріальної точки, динаміки поступального руху.

2.2 Вказівки до організації самостійної роботи студентів

Для досягнення мети заняття необхідно вивчити теорію даного розділу механіки, викладену в підручниках [1, розд. 2; 2, розд. 2; 5, §2] та у конспекті.

Основу динаміки матеріальної точки складають три закони Ньютона, які справедливі тільки при виконанні таких умов: рух тіла розглядається по відношенню до інерціальної системи відліку, тіло повинно бути матеріальною точкою сталої маси, швидкість тіла повинна бути значно меншою за швидкість світла в вакуумі.

При розв'язанні задач за темою використовується другий закон Ньютон, який має вигляд:

$\vec{F} = m\vec{a}$, де $\vec{F} = \sum \vec{F_i}$ – рівнодійна усіх сил, прикладених до даного тіла.

В неінерціальній системі відліку, яка рухається поступально з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно інерціальної системи, другий закон Ньютона має вигляд

$$\vec{F} + \vec{F}_{ін} = m\vec{a},$$

де $\vec{F}_{ін} = m\vec{a}_0$ – сила інерції, $\vec{a}_0$ – прискорення тіла в неінерціальній системі відліку.

Для розв'язання задач з використанням другого закону Ньютона запропоновано метод, який включає послідовність дій:

1. Знайти, чи використовується цей закон у даній задачі, і накреслити рисунок-схему взаємодіючих тіл.
2. Знайти і позначити на схемі всі сили, що діють на тіла системи. Для кожного тіла:
   - записати головне рівняння динаміки у векторній формі;
   - вибрати відповідну інерціальну систему відліку;
   - спроектувати сили на осі координат і записати другий закон Ньютона у вигляді системи скалярних рівнянь: $\sum F_x = ma_x$; $\sum F_y = ma_y$; $\sum F_z = ma_z$, де a_x, a_y, a_z - проекції вектора прискорення на відповідні осі.
3. Розв'язати систему одержаних рівнянь відносно невідомих величин.

Визначення прискорення тіл в задачах даного типу називають головною задачею динаміки поступального руху.

2.3 Основні закони та формули

1. Імпульс матеріальної точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

де m – маса матеріальної точки; $\vec{\upsilon}$ – її швидкість.

2. Другий закон Ньютона (основний закон динаміки матеріальної точки):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

3. Це ж рівняння в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії точки:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}, \quad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

4. Прискорення, що здобувається матеріальною точкою під дією сил,

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m},$$

де m – маса матеріальної точки; $\vec{F}_i$ – сила, що діє на тіло (точку) з боку i-го тіла.

5. Третій закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, що діє на першу матеріальну точку з боку другої; $\vec{F}_{21}$ – сила, що діє на другу матеріальну точку з боку першої.

6. Сила тертя ковзання

$$F_{тер} = \mu N$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила нормальної реакції опори.

7. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i-ої матеріальної точки (тіла); $\vec{\upsilon}_i$ – швидкість i-ої точки (тіла).

8. Радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}$$

де m_i і $\vec{r}_i$ – відповідно маса й радіус-вектор i-ої матеріальної точки; n – число матеріальних точок у системі; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - маса системи.

9. Координати центра мас системи матеріальних точок:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

де m_i - маса i-ої матеріальної точки; x_i, y_i, z_i – координати i-ої точки.

10. Закон руху центра мас

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \, .$$

де $\vec{\upsilon}_C$ – швидкість руху центра мас.

2.4 Контрольні запитання

1. Запишіть поняття інертності.
2. Дайте визначення маси.
3. Дайте визначення сили.
4. Що таке інерціальна система відліку?
5. Запишіть перший закон Ньютона.
6. Запишіть другий закон Ньютона.
7. Запишіть третій закон Ньютона.
8. Що таке механічний імпульс тіла?
9. Запишіть закон збереження імпульсу
10. Що таке центр мас механічної системи?
11. Що таке гравітаційна сила та сила тяжіння?
12. Дайте визначення ваги тіла.
13. Дайте визначення сили тертя.
14. Запишіть закон Гука.

2.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. На похилій площині розташований вантаж масою $m_1 = 1\,\text{кг}$, зв’язаний ниткою, перекинутою через блок, з іншим вантажем масою $m_2 = 3\,\text{кг}$ (рис.2.1). Коефіцієнт тертя між першим вантажем та площиною $\mu = 0{,}2$, кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30^{\circ}$. Знайти прискорення вантажів та силу натягу нитки. Тертям в блоці знехтувати.

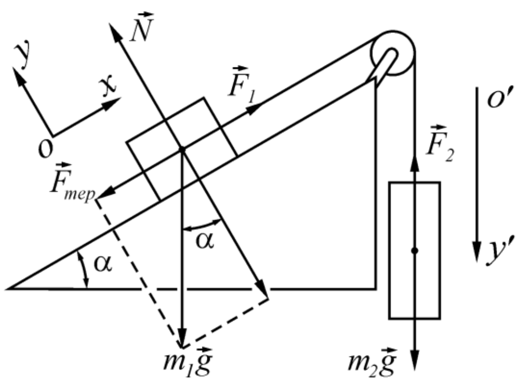

Рис.2.1

Дані: $m_1 = 1\,\text{кг}$, $m_2 = 3\,\text{кг}$, $\alpha = 30^{\circ}$, $\mu = 0{,}1$.

Знайти: $a, \; F$.

Аналіз та розв’язання

У задачі розглядаються два тіла, зв’язані ниткою, які рухаються поступально та рівноприскорено. Таким чином, необхідно розв’язати головну задачу динаміки; для цього використовується другий закон Ньютона. Зважаючи на те, що нитка нерозтяжна (невагома і блок невагомий), прискорення цих тіл та сили натягу ниток рівні за модулем:

$$\left|\vec{a_1}\right| = \left|\vec{a_2}\right| = a,\ \left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = F\,.$$

На вантаж маси m_1 діє сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила нормальної реакції опори $\vec{N}$, сила натягу нитки $\vec{F}$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$. Уявимо собі, що вантаж m_1 рухається догори по похилій площині. Якщо це припущення невірне, тоді прискорення буде мати від'ємне значення, тобто рух вантажів відбувається у зворотному напрямку.

Для першого тіла другий закон Ньютона у векторній формі має вигляд:

$$m_1\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m_1\vec{a}\,.$$

На вантаж m_2 діє тільки сила тяжіння $m_2\vec{g}$ та сила натягу нитки:

$$m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a}$$

Для кожного тіла виберемо свою інерціальну систему відліку. Для першого вантажу пов'яжемо її з похилою площиною, коли вісь *Ox* спрямована догори по схилу, а вісь *Oy* перпендикулярно *Ox* вгору. Тоді другий закон Ньютона для першого тіла у проекціях на осі *Ox* та *Oy* відповідно має вигляд:

$$-m_1 g \sin\alpha - F_{тер} + F = m_1 a\,, \tag{2.1}$$

$$-m_1 g \cos\alpha + N = 0\,. \tag{2.2}$$

Для другого тіла інерціальну систему відліку пов'язуємо з рухом цього тіла донизу, тобто вісь $O'y'$ спрямована донизу.

Тоді з рівняння (2.2) одержимо проекцію на вісь $O'y'$:

$$-F + m_2 g = m_2 a\,. \tag{2.3}$$

Сила тертя дорівнює

$$F_{тер} = \mu N\,. \tag{2.4}$$

Якщо враховувати рівняння (2.2) та (2.4), то рівняння (2.1) та (2.3) перетворяться на систему:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + F = m_1 a \\ F - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо прискорення та силу натягу нитки.

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}60\ \text{м/с}^2\,,$$

$$F = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 12{,}3\ \text{Н}\,.$$

Відповідь: $a = 7{,}60\ \text{м/с}^2$, $F = 12{,}3\ \text{Н}$.

Задача 2. Бак в тендері паровоза має довжину $l = 4$ м (рис.2.2). Яка різниця Δl рівнів води біля переднього і заднього кінців бака при русі поїзда з прискоренням $a = 0{,}5$ м/с^2.

Дані: $l = 4$ м, $a = 0{,}5$ м/с^2.
Знайти: Δl.

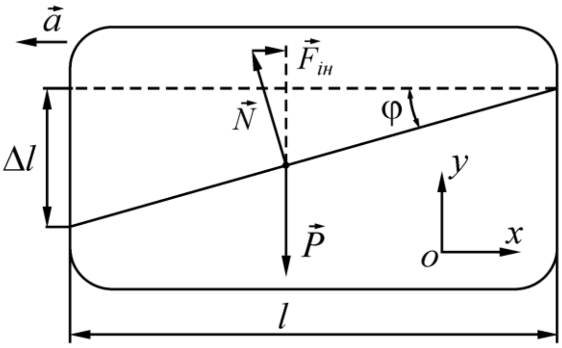

Рис.2.2

Аналіз та розв'язання

В даному випадку зручно вибрати неінерціальну систему відліку (НСВ), яка рухається равноприскорено разом з паровозом. У відповідності з принципом Даламбера для виконання законів Ньютона в НСВ до води слід додатково прикласти силу інерції $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}$. В даному випадку на воду буде діяти зі сторони бака сила реакції $\vec{N}$, перпендикулярна поверхні води. Оскільки в НСВ вода і бак нерухомі, то в ній стан води може бути описаний законами статики: рівнодійна всіх сил дорівнює нулю

$$\vec{P} + \vec{F}_{ін} + \vec{N} = 0.$$

Вибираємо осі: Ox – горизонтальну і Oy – вертикальну. Записуємо рівняння в проекціях на вісь Ox:

$$ma - N\sin\varphi = 0,$$

на вісь Oy:

$$N\cos\varphi - mg = 0.$$

Із отриманих рівнянь маємо:

$$tg\varphi = \frac{a}{g} = \frac{\Delta l}{l};\ \Delta l = l\frac{a}{g};\ \Delta l = 0{,}204 \text{ м}.$$

Відповідь: $\Delta l = 0{,}204$ м.

Задача 3. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху S від часу t задається рівнянням $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C = 5$ м/с^2 і $D = 1$ м/с^3. Знайти силу, діючу в кінці першої секунди руху.

Дані: $m = 0{,}5$ кг, $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, $C = 5$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3.
Знайти: F.

Аналіз та розв'язання

Згідно з другим законом Ньютона

$$F = ma.$$

Відомо, що

$$a = d\upsilon / dt.$$

В нашому випадку

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2 .$$

Таким чином,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 3C - 6Dt .$$

Тоді

$$F = ma = m(2C - 6Dt) = 2\ \text{Н}.$$

Відповідь: $F = 2$ Н.

Задача 4. Парашутист масою $m = 100$ кг виконує затяжний стрибок з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 0$ (рис.2.3). Знайти закон зміни його швидкості від часу до розкриття парашута та закон руху парашутиста. Взяти до уваги, що сила опору повітря пропорційна швидкості руху парашутиста: $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$, де $k = 20$ кг/с.

Дані: $m = 100$ кг, $\upsilon_0 = 0$, $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$, $k = 20$ кг/с.

Знайти: $\upsilon(t)$, $y(t)$.

Аналіз та розв'язання

В даній задачі треба знайти один з кінематичних параметрів руху тіла – його швидкість як функцію часу. Це основна задача динаміки, яка означає, що можна застосувати другий закон Ньютона. Початок координат інерціальної системи відліку розташовано у точці O (рис.2.3), з якої починається рух парашутиста. Вісь Oy спрямовано вертикально вниз.

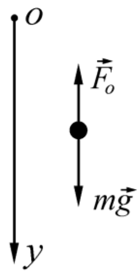

Рис.2.3

На парашутиста діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$. Тоді другий закон в цьому випадку має вигляд

$$m\vec{g} + \vec{F}_0 = m\vec{a} .$$

Його можливо представити у вигляді диференціального рівняння для невідомої функції $\upsilon(t)$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon .$$

Розділивши змінні, знайдемо:

$$-\frac{d\upsilon}{\frac{mg}{k} - \upsilon} = -\frac{k}{m}dt ,$$

$$\frac{d\left(\frac{mg}{k} - \upsilon\right)}{\frac{mg}{k} - \upsilon} = -\frac{k}{m}dt .$$

Після інтегрування одержуємо:

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+C. \qquad (2.5)$$

Довільну сталу C визначаємо з початкових умов ($\upsilon=\upsilon_0=0$ при $t=0$):

$$C=\ln\frac{mg}{k}.$$

Підставляючи значення сталої C в рівняння (2.5), знаходимо закон зміни швидкості парашутиста

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+\ln\frac{mg}{k},$$

$$\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

З цього рівняння виходить, що при $t\to\infty$ швидкість прагне до свого максимального значення $\upsilon=\frac{mg}{k}$, яке дорівнює 50 м/с.

Якщо закон зміни швидкості відомий, то розв'язуючи зворотну задачу кінематики, можна знайти закон руху парашутиста:

$$dy=\upsilon(t)\,dt;$$

$$y(t)=\int_0^t\upsilon(t)dt;$$

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Відповідь: $\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

Задача 5. Через невагомий блок перекинута невагома нерозтяжна нитка з вантажами однакової маси $M=1{,}4$ кг (рис.2.4). На один з вантажів покладений додатковий тягарець масою $m=0{,}2$ кг. Вважаючи, що вантажі спочатку перебували на одному рівні та нехтуючи тертям, визначити різницю висот Δh, на яких будуть перебувати вантажі через проміжок часу $t=1$ с.

Дані: $M=1{,}4$ кг, $m=0{,}2$ кг, $t=1$ с.

Знайти: Δh.

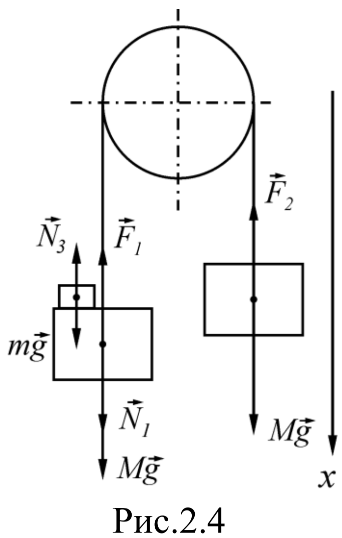

Рис.2.4

Аналіз та розв'язання

На кожний з вантажів діють: сила тяжіння $M\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}$ (внаслідок невагомості нитки сили натягу однакові), на другий вантаж діє також сила тиску з боку перевантаження $\vec{N}_1$. На додатковий тягарець діє сила тяжіння mg і сила тиску $\vec{N}_3$ з боку вантажу ($\left|\vec{N}_3\right| = \left|\vec{N}_1\right|$ згідно третьому закону Ньютона). Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення обох тіл (і додаткового тягарця) однакові.

Другий закон Ньютона для кожного з тіл у векторній формі:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1,$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_2,$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_3.$$

Ці рівняння в проекції на обрану вісь (рис.2.4) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - F \\ -Ma = Mg - F \\ ma = mg - N \end{cases},$$

(урахували, що $F_1 = F_2 = F$ та $N_1 = N_3 = N$), звідки знайдемо прискорення

$$a = \frac{m}{2M + m} g. \qquad (2.6)$$

За час t кожний з вантажів пройде відстань $h = \frac{at^2}{2}$, тому, з огляду на вираз (2.6), шукана різниця висот

$$\Delta h = 2h = \frac{m}{2M + m} gt^2 = 65,4\,\text{см}.$$

Відповідь: $\Delta h = 65,4\,\text{см}$.

2.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Під дією сталої сили $F = 5\,\text{Н}$ тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t описується рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$. Визначите масу m тіла, якщо $C = 2\ \text{м/с}^2$.

Відповідь: $m = 2,5\,\text{кг}$.

Задача 2. По опуклому мосту радіусом $R = 72\ \text{м}$ рухається автомобіль. Визначте швидкість υ автомобіля, якщо у верхній точці траєкторії сила його тиску на міст у $n = 1,6$ разу менше, ніж при русі по горизонтальній ділянці шляху.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{gR(n-1)} = 20,6\ \text{м/с}$.

Задача 3. Через блок, укріплений на вершині двох похилих площин, що становлять із обрієм кути $\alpha = 28°$ та $\beta = 40°$, перекинута нитка, до якої прикріплені вантажі з однаковими масами (рис.2.5). Вважаючи нитку і блок невагомими та нехтуючи тертям, визначте прискорення a вантажів.

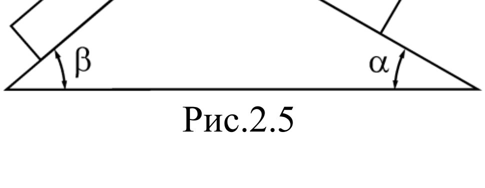

Рис.2.5

Відповідь: $a = g\left(\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{2}\right) = 0{,}849\ \text{м/с}^2$.

Задача 4. Якої маси баласт треба скинути з аеростата, який рівномірно спускається, щоб він почав рівномірно підійматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом 1600 кг, підйомна сила аеростата $F = 12000$ Н. Вважати силу опору повітря однією і тією ж при підйомі і спуску.

Відповідь: $m = 800$ кг.

Задача 5. На гладкому столі лежить брусок масою $m = 4$ кг. До бруска прив'язані два шнура, прикріплені до протилежних країв стола. До кінців шнурів підвішені гирі, маси яких $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення a, з яким рухається брусок, і силу натягу T кожного з шнурів. Масою блоків та тертям знехтувати.

Відповідь: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m} = 1{,}40\ \text{м/с}^2$, $T_1 = m_1(g + a) = 11{,}2$ Н, $T_2 = m_2(g - a) = 16{,}8$ Н.

Задача 6. Похила площа, яка утворює кут $\alpha = 25°$ з площиною горизонту, має довжину $l = 2\ м$. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зслизнуло з цієї площини за час $t = 2\ с$. Визначити коефіцієнт тертя μ тіла з площиною.

Відповідь: $\mu = tg\alpha - \dfrac{2l}{gt^2\cos\alpha} = 0{,}35$.

Задача 7. Матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухається під дією деякої сили F згідно з рівнянням $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 1\ \text{м/с}^2$, $D = -0{,}2\ \text{м/с}^3$. Знайти значення цієї сили в момент часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с. В який момент часу сила дорівнює нулю?

Відповідь: $F_1 = -0{,}8$ Н, $F_2 = -8$ Н, $F = 0$ при $t = 1{,}67$ с.

Задача 8. Поїзд маси $m = 500$ т після припинення тяги паровоза зупиняється під дією сили тертя $F_{тер} = 0{,}1$ МН через час $t = 1$ хв. З якою швидкістю υ їхав поїзд до моменту припинення тяги паровоза?

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{t \cdot F_{тер}}{m} \approx 43$ км/год.

Задача 9. Сталевий дріт витримує силу натягу 4400 Н. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж масою 400 кг, підвішений на цьому дроті, щоб він при цьому не розірвався? Масою дроту знехтувати.

Відповідь: $a = 1{,}2\ \text{м/с}^2$.

Задача 10. Маса ліфта з пасажирами дорівнює 800 кг. Знайти, з яким прискоренням і в якому напрямі рухається ліфт, якщо відомо, що натяг тросу, який підтримує ліфт, дорівнює: 1) 12 кН; 2) 6 кН.

Відповідь: 1) $a_1 = 5{,}2\ \text{м/с}^2$, догори; 2) $a_2 = 2{,}3\ \text{м/с}^2$, донизу.

Задача 11. Під дією постійної сили $F = 10$ Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу дається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$. Знайти масу тіла, якщо стала $C = 1\ \text{м/с}^2$.

Відповідь: $m = 5$ кг.

Задача 12. Тіло масою m рівноприскоренно піднімають на тросі вгору протягом $t = 3$ с на висоту $h = 10$ м. Визначте коефіцієнт пружності k троса, якщо його подовження $\Delta x = 0,3$ м.

Відповідь $k = \dfrac{m}{\Delta x}\left(g + \dfrac{2h}{t^2}\right) = 4$ кН/м.

Задача 13. Кулька масою $m = 250$ г, що летить зі швидкістю $\upsilon = 3,4$ м/с під кутом $\alpha = 25°$ до обрію, пружно вдаряється об гладку стіну. Визначте імпульс p, отриманий стіною в результаті удару.

Відповідь: $p = 1,54$ Н $\cdot$ с

Задача 14. Тіло масою $m = 1,2$ кг кинуто з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 12$ м/с під кутом $\alpha = 36°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря. Визначте зміну імпульсу Δp тіла за час його руху.

Відповідь $\Delta p = -16,9$ Н $\cdot$ с

Задача 15. Тіло перебуває в рівновазі на похилій площині довжиною $l = 16$ м з кутом $\alpha = 28°$ до обрію. Визначте час, за який тіло зісковзне із площини, якщо кут нахилу збільшити до $\beta = 40°$.

Відповідь: $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g\left(\sin\beta - \cos\beta\, tg\alpha\right)}} = 3,26$ с.

Задача 16. Тіло масою $m = 5$ кг кинуто під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с^2. Нехтуючи опором повітря, знайти імпульс сили $\vec{F}$, діючої на тіло за час його польоту; зміну Δp імпульсу за час польоту.

Відповідь: $F\Delta t = 100$ Н $\cdot$ с; $\Delta p = 100$ Н $\cdot$ с.

Задача 17. З якою силою F потрібно діяти на тіло маси $m = 5$ кг, щоб воно падало вертикально донизу із прискоренням $a = 15$ м/с^2?

Відповідь: $F = m(a - g) \approx 26$ Н.

Задача 18. Брусок масою $m_2 = 5$ кг може вільно ковзати по горизонтальній поверхні без тертя. На ньому знаходиться другий брусок масою $m_1 = 1$ кг. Коефіцієнт тертя зітнутих поверхонь брусків $\mu = 0,3$. Визначити мінімальне значення сили $F_{\min}$, прикладеної до нижнього бруска, при якій почнеться зсовування верхнього бруска.

Відповідь: $F_{\min} = \mu(m_1 + m_2)g = 17,7$ Н.

Задача 19. Паровоз на горизонтальній ділянці шляху, що має довжину $s = 600$ м, розвиває силу тяги $F = 147$ кН. Швидкість поїзда маси $m = 1000$ т зростає при цьому від $\upsilon_0 = 36$ км/год до $\upsilon = 54$ км/год. Знайти силу опору F_{on} руху поїзда, уважаючи її постійною.

Відповідь: $F_{on} = F - ma = F - m(\upsilon^2 - \upsilon_0^2)/2s \approx 4,3$ кН.

Задача 20. Дріт витримує вантаж маси $m_{max} = 450$ кг. З яким максимальним прискоренням можна піднімати вантаж маси $m = 400$ кг, підвішений на цьому дроті, щоб він не обірвався?

Відповідь: $a \le g\left(\dfrac{m_{max}}{m} - 1\right) \approx 1,2$ м/с^2.

Задача 21. Дві гирі масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою і перекинути через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі та натяг нитки. Тертям в блоці знехтувати.

Відповідь: $a = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 3,27$ м/с^2; $T_1 = T_2 = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 13,0$ Н.

Задача 22. Літак летить в горизонтальному напрямі з прискоренням $a = 20$ м/с^2. Яке перевантаження пасажира літака (перевантаженням називається відношення сили F, діючої на пасажира, до сили тяжіння P)?

Відповідь: $F / P = 2,27$.

Задача 23. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Яке прискорення a в горизонтальному напрямку варто надати дошці, щоб вантаж зісковзнув з неї? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою $\mu = 0,2$.

Відповідь: $a > \mu g = 1,96$ м/с^2.

Задача 24. Початкова швидкість υ_0 кулі дорівнює 800 м/с. При русі в повітрі за час $t = 0,8$ с її швидкість зменшилася до $\upsilon = 200$ м/с. Маса кулі дорівнює 10 г. Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості, визначити коефіцієнт опору k. Дією сили тяжіння знехтувати.

Відповідь: $k = \dfrac{m}{t} \cdot \dfrac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0 \upsilon} = 4,7 \cdot 10^{-5}$ кг/м.

Задача 25. Знайти прискорення a тіла, що зсковзує з похилої площини, що утворює із обрієм кут $\alpha = 30°$. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0,3$.

Відповідь: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 2,45$ м/с^2.

Задача 26. На тіло маси m, яке лежало на гладенькій горизонтальній площині, в момент $t = 0$ почала діяти сила, яка залежить від часу $F = kt$, де k – стала. Напрямок цієї сили весь час складає кут α з горизонтом. Знайти швидкість тіла в момент відриву від площини; шлях, пройдений тілом до цього моменту.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $S = \dfrac{m^2 g^3 cos\,\alpha}{6k^2 sin^3\,\alpha}$.

Задача 27. Куля, пробивши дошку довжиною h, змінила свою швидкість від υ_0 до υ. Знайти час руху кулі у дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості.

Відповідь: $t = \dfrac{h(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon_0 \upsilon \ln(\upsilon_0 / \upsilon)}$.

Задача 28. Куля на нитці підвішена до стелі вагона. Вагон гальмується, і його швидкість за час $t = 3$ с рівномірно зменшується від $\upsilon_1 = 18$ км/год до $\upsilon_2 = 6$ км/год. На який кут α відхилиться при цьому нитка з кулею?

Відповідь: $\alpha = 6°30'$.

Задача 29. На горизонтальній поверхні знаходиться брусок масою $m_1 = 2$ кг. Коефіцієнт тертя μ_1 бруска з поверхнею дорівнює $0{,}2$. На бруску знаходиться другий брусок масою $m_2 = 8$ кг. Коефіцієнт тертя μ_2 верхнього бруска з нижнім дорівнює $0{,}3$. До верхнього бруска прикладена сила F. Визначити значення сили F_1, при якому почнеться спільне ковзання брусків по поверхні; значення сили F_2, при якому верхній брусок почне ковзати відносно нижнього.

Відповідь: $F_1 = \mu_1(m_1 + m_2)g = 19{,}6$ Н; $F_2 = (\mu_2 - \mu_1)\dfrac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)g = 39{,}2$ Н.

Задача 30. Тіло сповзає спочатку з похилої площини, яка складає кут $\alpha = 8°$ з горизонтом, а потім по горизонтальній поверхні. Знайти, чому дорівнює коефіцієнт тертя, якщо тіло проходить по горизонталі таку ж саму відстань, як і по похилій площині.

Відповідь: $\mu = 0{,}07$.

3 РОБОТА, ЕНЕРГІЯ, ПОТУЖНІСТЬ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

3.1 Мета заняття

Визначення енергетичних характеристик: роботи консервативних та неконсервативних сил, механічної енергії, потужності. Познайомитись з законами збереження імпульсу та енергії, навчитись застосовувати ці закони до розв'язування задач.

3.2 Вказівки до організації самостійної роботи студентів

Користуючись конспектом лекцій та підручником [1, розд. 3; 2, розд. 3; 5, §2, 3], вивчити закони збереження. Проаналізувавши розв'язання завдань, приведених як приклади, перейти до самостійної роботи над рекомендованими завданнями.

3.3 Основні закони та формули

1. Елементарна робота сталої сили $\vec{F}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha dS = F_s dS,$$

де $d\vec{r}$ – вектор елементарного переміщення; α – кут між векторами $\vec{F}$ та $d\vec{r}$; $dS = |d\vec{r}|$ – елементарний шлях; F_s – проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

2. Робота змінної сили на шляху *S*:

$$A = \int_s \vec{F}d\vec{r} = \int_s F_s dS = \int_s F\cos\alpha dS.$$

3. Робота змінної сили на шляху від точки 1 до точки 2 :

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}.$$

4. Середня потужність за проміжок часу Δt:

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

5. Потужність (миттєва потужність):

$$N = \frac{dA}{dt}; \; N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha,$$

де $\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості, з якої рухається точка прикладення сили $\vec{F}$; α – кут між векторами $\vec{F}$ та $\vec{\upsilon}$.

6. Кінетична енергія тіла, що рухається:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

де m – маса тіла; υ – його швидкість.

7. Зв'язок між силою, що діє на тіло в даній точці поля, і потенційною енергією частинки:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U \text{, або } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей.

8. Потенційна енергія тіла, піднятого над поверхнею Землі на висоту h**,**

$$U = mgh,$$

де g – прискорення вільного падіння.

9. Сила пружності:

$$F = -kx,$$

де x – абсолютна деформація; k – коефіцієнт жорсткості.

10. Потенційна енергія пружнодеформованого тіла:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

де k – коефіцієнт пружності (у випадку пружини – коефіцієнт жорсткості).

11. Закон збереження механічної енергії (для консервативної системи):

$$T + U = E = const,$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgh = const \\ \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = const \end{cases},$$

де T і U - відповідно кінетична та потенційна енергії тіла.

12. Швидкість двох тіл масами m_1 та m_2 після прямого абсолютно пружного центрального удару:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \quad \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Передбачається, що при прямому центральному ударі вектори швидкостей куль до $\left(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2\right)$ й після $\left(\vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_2'\right)$ удару лежать на прямій, що з'єднує їхні центри. Проекції векторів швидкості на цю пряму дорівнюють модулям швидкостей.

13. Швидкість руху тіл після абсолютно непружного центрального удару:

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

14. Зміна кінетичної енергії тіл при абсолютно непружному центральному ударі (різниця кінетичної енергії тіл до та після удару):

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_1\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{\left(m_1 + m_2\right)\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right)^2.$$

15. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i-ої матеріальної точки (тіла); υ_i – швидкість i-ої точки (тіла).

3.4 Контрольні запитання

1. Що таке робота сили?
2. Що таке кінетична енергія? Наведіть приклади.
3. Що таке потенційна енергія? Наведіть приклади.
4. Як пов'язана робота сили тяжіння з потенційною енергією?
5. Як потенційна енергія пов'язана з силою?
6. Доведіть, що робота рівнодійної сил, прикладених до тіла, дорівнює приросту кінетичної енергії.
7. Чому дорівнює середня потужність, миттєва потужність?
8. Як миттєва потужність пов'язана із силою та швидкістю руху?
9. Запишіть закон збереження імпульсу.
10. Запишіть закон збереження механічної енергії.
11. Запишіть закон збереження моменту імпульсу.
12. Як пов’язана робота із зміною кінетичної енергії матеріальної точки?
13. Як пов’язана робота із зміною потенціальної енергії матеріальної точки?
14. Яка взаємодія тіл називається абсолютно пружним ударом?
15. Яка взаємодія тіл називається непружним ударом?
16. Які закони збереження виконуються та не виконуються при абсолютно пружному та абсолютно непружному ударах?
17. Які закони збереження виконуються та не виконуються при частково пружному ударі?

3.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Матеріальна точка масою $m = 0{,}1$ кг рухається рівномірно і прямолінійно з швидкістю $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с. У момент часу $t_0 = 0$ на неї почала діяти сила $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н. Ця сила діяла протягом $t_1 = 2$ с. Визначити роботу сили $\vec{F}$ та зміну кінетичної енергії за 2 с.

Дані: $m = 0{,}1$ кг, $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с, $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н, $t_0 = 0$; $t_1 = 2$ с.

Знайти: A, ΔT.

Аналіз та розв’язання

Відомо, що робота сили $\vec{F}$ дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = \Delta T = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Швидкість тіла $\vec{\upsilon}_1$ в момент часу t_1 можна знайти із основного рівняння динаміки

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

$$d\vec{\upsilon} = \frac{1}{m}\vec{F}dt,$$

$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0 = \frac{1}{m}\int_0^{t_1}\vec{F}dt,$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{F}t_1}{m} + \vec{\upsilon}_0.$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j}}{0{,}1} + 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = 65\vec{i} + 44\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Тоді робота сили $\vec{F}$ і зміна кінетичної енергії дорівнюють

$$A = \Delta T = \frac{m}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2) = \frac{0{,}1}{2}(65^2 + 44^2 + 3^2 - 5^2 - 4^2 - 3^2) = 306 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A = \Delta T = 306$ Дж.

Задача 2. Куля, рухаючись із швидкістю $\upsilon_0 = 900$ м/с, пробиває стінку товщиною 50 см і вилітає із неї зі швидкістю $\upsilon = 350$ м/с. Знайти час руху кулі у стінці, вважаючи опір стінки пропорційним кубу швидкості руху кулі.

Дані: $\upsilon_0 = 900$ м/с, $\upsilon = 350$ м/с, $d = 0{,}5$ м, $F = -k\upsilon^3$.

Знайти: t.

Аналіз та розв'язання

Під час руху кулі у стінці на неї діє тільки сила опору. Використовуючи основний закон динаміки поступального руху, можемо записати рівняння

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^3.$$

Розділивши змінні у цьому диференціальному рівнянні, одержуємо

$$\frac{md\upsilon}{\upsilon^3} = -kdt$$

Інтегруючи одержане рівняння, знаходимо

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^3} = -k\int_0^t dt;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\upsilon_0^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\right) = -kt;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{\upsilon_0^2\upsilon^2}\right) = kt. \qquad (3.1)$$

Робота сили опору при переміщенні кулі на $d\vec{r}$ дорівнює

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt = m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}.$$

Враховуючи напрямок векторів, одержуємо рівняння

$$-k\upsilon^3 dr = m\upsilon d\upsilon. \qquad (3.2)$$

Розділивши змінні у рівнянні (3.2) та інтегруючи, знайдемо

$$-k\int_0^d dr = m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2};$$

$$-kd = m\left(-\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{\upsilon_0}\right) \qquad (3.3)$$

$$m\frac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0\upsilon} = kd.$$

Якщо розділити рівняння (3.1) на рівняння (3.3), знайдемо

$$t = \frac{(\upsilon_0 + \upsilon)d}{2\upsilon_0\cdot\upsilon} = 1{,}0\cdot 10^{-3}\text{ с}.$$

Відповідь: $t = 10^{-3}$ с.

Задача 3. Тіло масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти середню потужність, яку розвиває сила тяжіння за весь час руху тіла; миттєву потужність цієї сили як функцію часу; потужність в верхній точці траєкторії; роботу сили тяжіння за t секунд руху. Опором повітря знехтувати.

Дані: α, υ_0, m.

Знайти: $<N>$, $N(t)$, N_b, $A(t)$.

Аналіз та розв’язання

Знайдемо миттєве значення потужності сили тяжіння, використовуючи формулу

$$N(t) = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}.$$

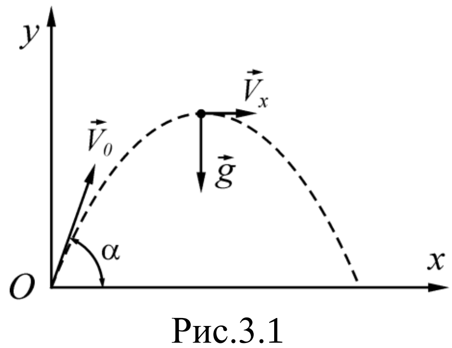

Рис.3.1

Рух тіла – рівноприскорений, тому $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t$.

Враховуючи напрям векторів (рис.3.1), знайдемо

$$N(t) = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon} = m\vec{g}(\vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t) =$$

$$= mg\upsilon_0\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + mg^2t = .$$

$$= mg(gt - \upsilon_0\sin\alpha)$$

У вершині траєкторії кут між векторами $\vec{g}$ та $\vec{\upsilon}$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тому

$$N_b = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon} = 0.$$

Середня потужність сили тяжіння за весь час руху дорівнює

$$< N >= \frac{A}{t},$$

де A – робота сили тяжіння; t – час руху.

Початкова та кінцева точки траєкторії знаходяться на однаковій висоті, тому $A = 0$, $< N >= 0$.

Із формули $P = \frac{dA}{dt}$ знаходимо силу тяжіння за час t:

$$A(t) = \int_0^t P dt = \int_0^t mg(gt - \upsilon_0 \sin \alpha) dt = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin \alpha\right).$$

Відповідь: $< N >= 0$, $N_b = 0$, $N(t) = mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$,

$$A(t) = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin \alpha\right).$$

Задача 4. Куля масою m_1, яка рухалась горизонтально з швидкістю υ_1, зіткнулась з нерухомою кулею масою m_2. Кулі абсолютно пружні, зіткненя пряме. Яку долю w своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дані: m_1, υ_1, m_2, $\upsilon_2 = 0$.

Знайти: w.

Аналіз та розв’язання

Доля енергії, переданої першою кулею другій:

$$w = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2},$$

де T_1 – кінетична енергія першої кулі до удару; T_2' – кінетична енергія другої кулі після удару; υ_1 – швидкість першої кулі до удару; u_2 – швидкість другої кулі після удару.

Для визначення w треба знайти u_2. Скористаємось тим, що при абсолютно пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії. Враховуючи, що друга куля до зіткнення була нерухомою, запишемо ці закони:

$$m_1 \upsilon_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

де u_1 – швидкість першої кулі після удару.

Розв’язавши рівняння, одержимо

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.4)$$

Підставивши значення u_2 у рівняння (3.4), одержимо

$$w = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{2m_1\upsilon_1}{\upsilon_1(m_1+m_2)}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}.$$

Відповідь: $w = \dfrac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$.

Задача 5. Ящик масою $m_1 = 20\,\text{кг}$ зісковзує по ідеально гладкому лотку довжиною $l = 2\,\text{м}$ у нерухомий візок з піском і застряє в ньому. Візок з піском масою $m_2 = 20\,\text{кг}$ може вільно (без тертя) переміщатися по рейках у горизонтальному напрямку. Визначити швидкість u візка з ящиком, якщо лоток нахилений під кутом $\alpha = 30°$ до рейок.

Дані: $m_1 = 20\,\text{кг}$, $l = 2\,\text{м}$, $m_2 = 20\,\text{кг}$, $\alpha = 30°$.

Знайти: u

Аналіз та розв'язання

Візок і ящик можна розглядати як систему двох взаємодіючих тіл. Але ця система незамкнена, тому що на неї діють зовнішні сили: тяжіння m_1g та m_2g та реакції опори N_2 (рис.3.2). Тому застосувати закон збереження імпульсу до системи "ящик-візок" не можна. Оскільки проекції зазначених сил на напрямок осі x, що збігає з напрямком рейок, дорівнюють нулю, то проекцію імпульсу системи на цей напрямок можна вважати сталою, тобто

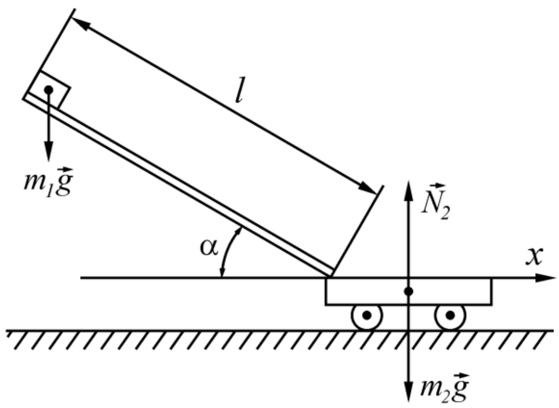

Рис.3.2

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \tag{3.5}$$

де p_{1x} і p_{2x} – проекції імпульсу ящика та візка з піском у момент падіння ящика на візок; p'_{1x} і p'_{2x} – ті ж величини після падіння ящика.

Розглядаючи тіла системи як матеріальні точки, виразимо в рівнянні (3.5) імпульси тіл через їхні маси і швидкості, з огляду на те, що $p_{2x} = 0$ (візок до взаємодії з ящиком не рухався), а також що після взаємодії обидва тіла системи рухаються з однієї й тією ж швидкістю u:

$$m_1\upsilon_{1x} = (m_1+m_2)u,$$

або

$$m_1\upsilon_1\cos\alpha = (m_1+m_2)u,$$

де υ_1 – модуль швидкості ящика перед падінням на візок; $\upsilon_{1x} = \upsilon_1\cos\alpha$ – проекція цієї швидкості на вісь x .

Звідси

$$u = \frac{m_1 \upsilon_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} \tag{3.6}$$

Модуль швидкості υ_1 визначимо із закону збереження енергії:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2,$$

де $h = l\sin\alpha$, звідки $\upsilon_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}$.

Підставивши вираз у формулу (3.6), одержимо:

$$u = \frac{m_1 \sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Після обчислення знайдемо:

$$u = \frac{20\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot \sin 30}}{20 + 80}\cos 30^\circ \text{ м/с} = 0{,}767 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $u = 0{,}767$ м/с.

Задача 6. Куля, що летить горизонтально, попадає в тіло, що висить на легкому твердому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше маси тіла. Відстань від точки підвісу стрижня до центра 1 м. Знайти швидкість кулі, якщо відомо, що стрижень із тілом відхилився від удару кулі на кут 10°.

Дані: $m_2 = 1000 m_1$, $l = 1$ м; $\alpha = 10^\circ \approx 0{,}17$ рад.

Знайти: υ.

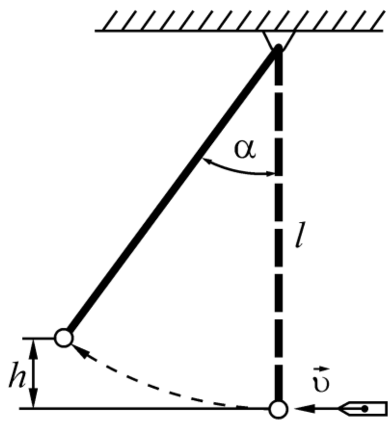

Рис.3.3

Аналіз та розв'язання

Запишемо закон збереження імпульсу для непружного удару в проекції на вісь X (рис.3.3):

$$m_2 \upsilon = (m_1 + m_2) u$$

звідки

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u. \tag{3.7}$$

Тут υ – швидкість кулі до зіткнення; u – швидкість кулі і тіла після їхнього зіткнення. У виразі (3.7) крім υ невідома ще швидкість u, яку можна знайти за законом збереження енергії.

Нехай у результаті зіткнення з тілом центр маси тіла піднявся на висоту h, тоді, за законом збереження енергії,

$$(m_1 + m_2) u^2 / 2 = (m_1 + m_2) gh,$$

звідки

$$u^2 = 2gh. \tag{3.8}$$

З рис.3.3 маємо $h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$. Підставимо вираз для h у рівняння (3.8):

$$u^2 = 2gl(1-\cos\alpha),$$

звідки

$$u = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

Тоді рівняння (3.7) можна привести до виду

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}. \qquad (3.9)$$

Використовуючи тригонометричне рівняння $\sin(\alpha/2) = \sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$, перетворимо вираз (3.9):

$$\upsilon = 2\frac{m_1 + m_2}{m_1}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl} \approx 570\ \text{м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon \approx 570\ \text{м/с}$.

3.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Куля масою $m_1 = 6\ \text{кг}$ налетіла на іншу кулю $m_2 = 4\ \text{кг}$, яка перебувала у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив $5\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну імпульсу першої кулі.

Відповідь: $\Delta p = 2\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$.

Задача 2. В човні масою $m_1 = 240\ \text{кг}$ стоїть людина масою $m_2 = 60\ \text{кг}$. Човен пливе з швидкістю $\upsilon_1 = 2\ \text{м/с}$. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі з швидкістю $\upsilon = 4\ \text{м/с}$ (відносно човна). Знайти швидкість u човна після стрибка людини, розглянувши два випадки: людина стрибає вперед за рухом човна; в напрямі, протилежному напряму руху човна.

Відповідь: $u_1 = 1\ \text{м/с}$, $u_2 = 3\ \text{м/с}$.

Задача 3. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15\ \text{т}$. Гармата стріляє вгору під кутом $\varphi = 60°$ до горизонту в напрямку руху. З якою швидкістю υ_1 рухатиметься платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20\ \text{кг}$ і він вилетів з швидкістю $\upsilon_2 = 600\ \text{м/с}$.

Відповідь: $\upsilon_1 = 0{,}4\ \text{м/с}$.

Задача 4. Куля масою $m = 10\ \text{г}$, яка летіла з швидкістю $\upsilon = 600\ \text{м/с}$, влучила в балістичний маятник масою $M = 5\ \text{кг}$ і застряла в ньому. На яку висоту h після удару піднявся маятник?

Відповідь: $h = 7{,}34\ \text{см}$.

Задача 5. Куля масою $m_1 = 6\ \text{кг}$ налетіла на другу кулю $m_2 = 4\ \text{кг}$, яка знаходилась у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив $5\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну ΔU внутрішньої енергії куль.

Відповідь: $\Delta U = 0{,}83\ \text{Дж}$.

Задача 6. Ковзаняр, розігнавшись до швидкості $\upsilon = 21\,\text{км/год}$, в'їжджає на гірку з ухилом $\alpha = 20°$ на висоту $h = 1{,}6\,\text{м}$. Визначте коефіцієнт тертя μ ковзанів об лід.

Відповідь: $\mu = 0{,}03$.

Задача 7. Санчата, що рухаються по льоду зі швидкості $\upsilon = 11\,\text{км/год}$, в'їжджають на гірку з ухилом $\alpha = 10°$ на висоту $h = 2{,}5\,\text{м}$. Визначте коефіцієнт тертя μ санчат об лід.

Відповідь: $\mu = 0{,}02$.

Задача 8. Потужність N двигунів літака при відриві від Землі дорівнює $820\,\text{кВт}$. Маса літака – $m = 5{,}2\,\text{т}$. Розганяючись рівноприскорено, літак досягає швидкості $\upsilon = 32\,\text{м/с}$. Вважаючи, що коефіцієнт опору $\mu = 0{,}04$ не залежить від швидкості, визначте довжину пробігу S літака перед зльотом.

Відповідь: $S = 113\,\text{м}$.

Задача 10. Кулька масою $m_1 = 16\,\text{г}$, що рухається горизонтально, зіштовхнулася з кулею масою $m_2 = 0{,}8\,\text{кг}$, що висить на прямому невагомому стрижні довжиною $l = 1{,}7\,\text{м}$. Вважаючи удар пружним, Визначте швидкість кульки υ_1, якщо кут відхилення стрижня після удару $\alpha = 20°$.

Відповідь: $\upsilon_1 = 36{,}2\,\text{м/с}$.

Задача 11. Куля, що рухається зі швидкістю υ_1, налітає на нерухому кулю, маса якого в $n = 1{,}5$ рази більше першої. Визначте відношення швидкості υ_1' першої кулі й швидкості υ_2' другої кулі після удару. Удар вважати пружним, центральним і прямим.

Відповідь: $\dfrac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'} = \dfrac{n-1}{2} = 0{,}25$.

Задача 12. Падаючи вертикально, кулька маси $m = 200\,\text{г}$ вдарилася о підлогу зі швидкістю $\upsilon = 5\,\text{м/с}$ і підстрибнула на висоту $h = 46\,\text{см}$. Знайти зміну Δp імпульсу кульки при ударі.

Відповідь: $\Delta p = m\left(\upsilon + \sqrt{2gh}\right) = 1{,}6\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

Задача 13. Гармата, що стоїть на гладкій горизонтальній площадці, стріляє під кутом $\alpha = 30°$ до обрію. Маса снаряда $m = 20\,\text{кг}$, його початкова швидкість $\upsilon = 200\,\text{м/с}$. Яку швидкість u здобуває гармата при пострілі, якщо її маса $M = 500\,\text{кг}$?

Відповідь: $u = -\left(m\upsilon\cos\alpha\right)/M = -7\,\text{м/с}$.

Задача 14. Снаряд масою $m = 20\,\text{кг}$, що летить зі швидкістю $\upsilon = 800\,\text{м/с}$ під кутом $\alpha = 30°$ до вертикалі, попадає в платформу з піском і застряє в неї. Знайти швидкість платформи u після влучення снаряда, якщо її маса $M = 16\,\text{т}$.

Відповідь: $u = m\upsilon\cos\alpha/\left(m + M\right) \approx 1{,}25\,\text{м/с}$.

Задача 15. Матеріальна точка масою $m = 1\,\text{кг}$ рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі *x*, відповідно до рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 2\,\text{м/с}$, $C = 1\,\text{м/с}^2$, $D = -0{,}2\,\text{м/с}^3$. Визначте потужність N, що затрачується на рух точки, за час $t = 2\,\text{с}$.

Відповідь: $N = 0{,}16\,\text{Вт}$.

Задача 16. Сила $F = 0{,}5\,\text{Н}$ діє на тіло маси $m = 10\,\text{кг}$ протягом часу $t = 2\,\text{с}$. Знайти кінцеву кінетичну енергію тіла T, якщо початкова кінетична енергія дорівнює нулю.

Відповідь: $T = \left(Ft\right)^2 / m = 0{,}05\,\text{Дж}$.

Задача 17. З вежі висотою $h = 62\,\text{м}$ горизонтально зі швидкістю $\upsilon_0 = 12\,\text{м/с}$ кинули камінь масою $m = 120\,\text{г}$. Нехтуючи, опором повітря, визначте кінетичну T та потенціальну U енергії каменю через час $t = 3\,c$ після кидка.

Відповідь: $T = \dfrac{m}{2}\left(\upsilon_0{}^2 + g^2t^2\right) = 60{,}6\,\text{Дж}$; $U = mg\left(h + \dfrac{gt^2}{2}\right) = 21\,\text{Дж}$.

Задача 18. Визначити роботу, що виконується на шляху $s = 12\,\text{м}$ силою, яка рівномірно зростає від $F_1 = 10\,\text{Н}$ до $F_2 = 26\,\text{Н}$.

Відповідь: $A = 336\,\text{Дж}$.

Задача 19. Куля масою $m = 10\,\text{г}$ летить з швидкістю $\upsilon = 800\,\text{м/с}$, обертаючись навколо горизонтальної осі з частотою $n = 3000\,\text{с}^{-1}$. Прийнявши кулю за циліндрик діаметром $d = 8\,\text{мм}$, визначити повну кінетичну енергію T кулі.

Відповідь: $T = 3{,}21\,\text{кДж}$.

Задача 20. Визначити лінійну швидкість υ центра кулі, яка скотилась без просковзування з похилої площини висотою $h = 1\,\text{м}$.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{10}{7}gh} = 3{,}74\,\text{м/с}$.

Задача 21. Скільки часу t буде спускатись без просковзування обруч з похилої площини довжиною $l = 2\,\text{м}$ і висотою $h = 10\,\text{см}$?

Відповідь: $t = 4{,}04\,\text{с}$.

Задача 22. Тонкий стрижень довжиною $l = 1\,\text{м}$ прикріплений до горизонтальної осі, яка проходить через його кінець. Стрижень відхилили на кут $\varphi = 60°$ від положення рівноваги і відпустили. Визначити лінійну швидкість υ нижнього кінця стрижня в момент проходження положення рівноваги.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{3\text{gl}(1 - cos\ \ \varphi)} = 3{,}84\,\text{м / с}$.

Задача 23. Яку роботу виконав хлопчик, що стоїть на гладкому льоді, надавши санчатам швидкість $\upsilon = 4\,\text{м/с}$ відносно льоду, якщо маса санчат $m = 4\,\text{кг}$, а маса хлопчика $M = 20\,\text{кг}$?

Відповідь: $A = \left(m + M\right)m\upsilon^2 / 2M = 38{,}4\,\text{Дж}$.

Задача 24. Важку кульку, що підвішена на нерозтяжній і невагомій нитці довжиною l, відхиляють від вертикалі на кут α і потім відпускають. Яку максимальну швидкість υ набуде кулька?

Відповідь: $\upsilon = 2\sqrt{gl}\sin\left(\alpha / 2\right)$.

Задача 25. Камінь маси $m = 5\,\text{кг}$ впав з деякої висоти. Знайти кінетичну енергію T каменю в середній точці його шляху, якщо він падав протягом часу $t = 2\,\text{с}$.

Відповідь: $T = mg^2t^2 / 4 = 480\,\text{Дж}$.

Задача 26. Визначте роботу A, яку треба виконати, щоб стиснути пружину на $x = 15\,\text{см}$, якщо відомо, що сила пропорційна деформації, та під дією сили $F = 50\,\text{Н}$ пружина стискується на $x_0 = 2{,}25\,\text{см}$.

Відповідь: $A = \dfrac{Fx^2}{2x_0} = 25\,\text{Дж}$.

Задача 27. З якою швидкістю υ вилітає із пружинного пістолета кулька масою $m = 10\,\text{г}$, якщо пружину було стиснуто на $x = 5\,\text{см}$? Жорсткість пружини дорівнює $k = 200\,\text{Н/м}$.

Відповідь: $\upsilon = 7{,}07\,\text{м/с}$.

Задача 28. Сталева кулька масою $m = 50\,\text{кг}$ падає з висоти $h = 1{,}0\,\text{м}$ на горизонтальну поверхню масивної плити. Знайти сумарний імпульс, який вона передає плиті внаслідок багатократних відштовхувань, якщо при кожному ударі швидкість кульки змінюється в $\eta = 0{,}8$ разів.

Відповідь: $p = \dfrac{m\sqrt{2gh}(1+\eta)}{1-\eta} = 2\,\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 29. Дві однакові платформи рухаються одна за одною по інерції (без тертя) з однакової швидкістю υ_0. На задній платформі знаходиться людина масою m. У якийсь момент людина стрибнула на передню платформу з швидкістю u відносно своєї платформи. Маса кожної платформи M. Знайти швидкості, з якими будуть рухатись обидві платформи після цього.

Відповідь: $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \dfrac{mM}{(m+M)^2}u$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 - \dfrac{m}{m+M}u$.

Задача 30. Яку кінетичну енергію T набуває тіло масою $m = 1\,\text{кг}$ при падінні без початкової швидкості через проміжок часу $\Delta t = 5\,\text{с}$ після початку падіння?

Відповідь: $T = mg^2(\Delta t)^2 / 2 = 1{,}2\,\text{кДж}$.

4 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

4.1 Мета заняття

Засвоїти методику розв’язання задач динаміки твердого тіла: обертання навколо нерухомої осі й складного плоского руху.

4.2 Вказівки до організації самостійної роботи студентів

Повторіть означення основних фізичних величин, які характеризують рух твердого тіла: моменту сили, моменту імпульсу, моменту інерції [1, розд. 4; 2, розд. 4; 5, §3]. Зверніть увагу на те, що плоский рух твердого тіла описують векторні рівняння: рівняння руху центра мас та основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

4.3 Основні закони та формули

1. Момент інерції матеріальної точки:

$$J = mr^2,$$

де m – маса точки; r – її відстань до осі обертання.

2. Момент інерції системи точок, тіла:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \quad J = \int r^2 dm,$$

де r_i – відстань i-ої матеріальної точки масою m_i до осі обертання.

3. Моменти інерції тіл правильної геометричної форми (тіла вважаються однорідними; m – маса тіла)

<table>
<tr><th>Тіло</th><th>Положення осі обертання</th><th>Момент інерції</th></tr>
<tr><td>Порожній тонкостінний циліндр радіусом R</td><td>Вісь симетрії</td><td>$J = mR^2$</td></tr>
<tr><td>Суцільний циліндр або диск радіусом R</td><td>Вісь симетрії</td><td>$J = \frac{1}{2}mR^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Прямий тонкий стрижень довжиною l</td><td>Вісь перпендикулярна стрижню та проходить через його середину</td><td>$J = \frac{1}{12}ml^2$</td></tr>
<tr><td>Вісь перпендикулярна стрижню та проходить через його кінець</td><td>$J = \frac{1}{3}ml^2$</td></tr>
<tr><td>Куля радіусом R</td><td>Вісь проходить через центр кулі</td><td>$J = \frac{2}{5}ml^2$</td></tr>
</table>

4. Теорема Штейнера:

$$J = J_C + ma^2,$$

де J_C – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас; J – момент інерції відносно паралельної осі, що відстоїть від першої на відстані a; m– маса тіла.

5. Кінетична енергія обертання тіла:

$$T_{об} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – його кутова швидкість.

6. Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

де m – маса тіла; υ_C– швидкість центра мас тіла; J_C– момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас; ω – кутова швидкість тіла.

7. Момент сили відносно нерухомої точки:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із цієї точки в точку додатка сили $\vec{F}$.

8. Модуль вектора моменту сили:

$$M = Fl,$$

де l – плече сили.

9. Момент сили відносно нерухомої осі:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z.$$

10. Робота при обертанні тіла:

$$dA = M_z d\varphi,$$

де $d\varphi$ – кут повороту тіла; M_z – момент сили відносно нерухомої осі z.

11. Момент імпульсу матеріальної точки A відносно нерухомої точки O:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]$$

де $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$– імпульс матеріальної точки.

12. Модуль вектора моменту імпульсу

$$L = pr\sin\alpha = m\upsilon\sin\alpha = pl,$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$; l – плече вектора $\vec{p}$ відносно точки O.

13. Момент імпульсу твердого тіла відносно осі обертання

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z \omega$$

де r_i – відстань від осі z до окремої частинки тіла; $m_i\upsilon_i$– імпульс цієї частинки; J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – кутова швидкість тіла.

14. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухливої осі (рівняння моментів):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення; J_z – момент інерції тіла відносно осі z.

15. Закон збереження моменту імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{L} = const, \quad J_z\omega = const$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – кутова швидкість тіла.

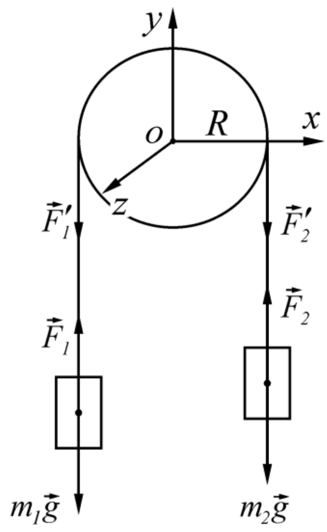

Рис.4.1

4.4. Контрольні запитання

1. Чому дорівнює момент інерції матеріальної точки, системи матеріальних точок?
2. Чому дорівнює момент інерції твердого тіла?
3. Чому дорівнює момент сили відносно нерухомої точки та осі?
4. Чому дорівнює момент імпульсу частинки відносно нерухомої точки та осі?
5. Чому дорівнює момент імпульсу твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі?
6. Запишіть та проаналізуйте рівняння моментів.
7. Сформулюйте та доведіть теорему Штейнера.
8. Запишіть вираз для кінетичної енергії обертального руху твердого тіла.
9. Запишіть вираз для кінетичної енергії твердого тіла у випадку плоского руху.
10. Чому дорівнює робота зовнішніх сил при обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі?

4.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Два тягарці масами $m_1 = 2$ кг та $m_2 = 1$ кг з'єднані невагомою та нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок масою $m = 1$ кг. Знайти прискорення, з яким рухаються тягарці; сили натягу F_1 та F_2 ниток, до яких прикріплено тягарці. Блок вважати однорідним диском, тертям знехтувати.

Дані: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m = 1$ кг.

Знайти: a, F_1, F_2.

Аналіз та розв'язання

Тягарці рухаються поступально, блок обертається, запишемо основне рівняння динаміки поступального руху тягарців та обертального руху блока:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F}_1 = m_1\vec{a} \\ m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a} \\ \vec{M}_1' + \vec{M}_2' = J\vec{\varepsilon} \end{cases}, \qquad (4.1)$$

де $J=\dfrac{mR^2}{2}$ – момент інерції блока, $\vec{M}_1'=\left[\vec{r}\,,\vec{F}_1'\right]$; $\vec{M}_2'=\left[\vec{r}\,,\vec{F}_2'\right]$ – моменти сил натягу, які діють на блок. Сили, що діють на тягарці та блок, позначено на рис.4.1.

Спроектувавши вектори рівнянь (4.1) на координатні осі Oz та Oy, запишемо ($F_1'=F_1; F_2'=F_2$):

$$\begin{cases} F_1-m_1g=-m_1a \\ F_2-m_2g=m_2a \\ (F_1-F_2)R=J\varepsilon \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь, враховуємо, що кутове прискорення блока ε в залежності від прискорення тягарців (в даному випадку тангенціального прискорення) описується формулою $\varepsilon=\dfrac{a}{R}$, знаходимо шукані параметри:

$$a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\dfrac{m}{2}}=2{,}8\ \text{м/с}^2,$$

$$F_1=\frac{m_1(2m_2+\dfrac{m}{2})}{m_1+m_2+\dfrac{m}{2}}g=14\ \text{Н}.$$

$$F_2=\frac{m_2(2m_1+\dfrac{m}{2})}{m_1+m_2+\dfrac{m}{2}}g=12{,}6\ \text{Н}.$$

Відповідь: $a=2{,}8\ \text{м/с}^2$, $F_1=14\ \text{Н}$, $F_2=12{,}6\ \text{Н}$.

Задача 2. З похилої площини, що становить кут $\alpha=37°$ з обрієм, скачується без ковзання суцільний диск. Нехтуючи тертям, Визначте швидкість υ диска через $t=4\ \text{с}$ після початку руху.

Дані: $\alpha=37°$, $t=4\ \text{с}$.

Знайти: υ.

Аналіз та розв'язання

Відповідно до закону збереження механічної енергії, при скочуванні диска його потенційна енергія переходить у кінетичну енергію поступального та обертального руху

$$mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}, \qquad (4.2)$$

де m – маса диска; J – момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр мас; υ – швидкість центра мас диска; ω – кутова

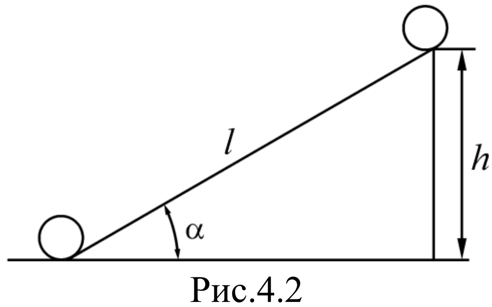

Рис.4.2

швидкість відносно осі, що проходить через центр мас.

З огляду на то, що $h = l\sin\alpha$ (рис.4.2), $\upsilon = \omega R$, а момент інерції суцільного диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$ (R – радіус диска), вираження (4.2) запишеться у вигляді

$$mgl\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{4} = \frac{3}{2}m\upsilon^2. \tag{4.3}$$

Оскільки $l = \dfrac{at^2}{2}$ та $a = \dfrac{\upsilon}{t}$ ($\upsilon_0 = 0$), з вираження (4.3) знайдемо шукану швидкість

$$\upsilon = \frac{2}{3}gt\sin\alpha = 15,7\text{ м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon = 15,7$ м/с.

Задача 3. Маховик у вигляді однорідного суцільного диска радіусом $R = 35$ см і масою $m = 2,1$ кг обертається із частотою $n = 360\text{ хв}^{-1}$. Після прикладення до диска постійної дотичної сили гальмування він зупиняється за час $t = 2$ хв. Визначте роботу сили гальмування; силу гальмування F.

Дані: $R = 0,35$ м, $m = 2,1$ кг, $n = 6\text{ с}^{-1}$, $t = 120$ с.

Знайти: A, F.

Аналіз та розв'язання

У результаті гальмування диск зупиняється, тому робота сили гальмування

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{4.4}$$

де $J = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска відносно осі обертання; $\omega = 2\pi n$ – кутова швидкість. Підставивши ці вираження у формулу (4.4), знайдемо роботу сили гальмування

$$A = \pi^2 n^2 m r^2 = 91,3\text{ Дж}.$$

Момент сили гальмування

$$M = FR, \tag{4.5}$$

де R – радіус диска (у нашім випадку плече сили). З іншого боку, відповідно до основного закону динаміки обертового руху,

$$M = J\varepsilon, \tag{4.6}$$

де кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}.$$

Прирівнявши вираження (4.5) і (4.6), знайдемо шукану силу

$$F = \frac{\pi m n R}{t} = 0,115\text{ Н}.$$

Відповідь: $A = 91{,}3$ Дж; $F = 0{,}115$ Н.

Задача 4. Людина сидить у центрі лави Жуковського, що обертається по інерції навколо нерухомої вертикальної осі із частотою $n_1 = 30\ \text{хв}^{-1}$. У витягнутих в сторони руках він тримає по гантелі масою $m = 5$ кг кожна. Відстань від кожної гантелі до осі обертання $l_1 = 60$ см. Сумарний момент інерції людини та лави відносно осі обертання $J_0 = 2\ \text{кг·м}^2$. Визначте: 1) частоту n_2 обертання лави з людиною; 2) яку роботу A виконає людина, коли вона притисне гантелі до себе так, що відстань від кожної гантелі до оси дорівнюватиме $l_2 = 20$ см?

Дані: $n_1 = 0{,}5\ \text{с}^{-1}$, $m = 5$ кг, $l_1 = 0{,}6$м, $J_0 = 2\ \text{кг·м}^2$, $l_2 = 0{,}2$ м.

Знайти: n_2, A.

Аналіз та розв'язання

За умовою завдання момент зовнішніх сил відносно вертикальної осі дорівнює нулю, тому момент імпульсу цієї системи зберігається, тобто

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (4.7)$$

де $J_1 = J_0 + 2ml_1^2$ та $J_2 = J_0 + 2ml_2^2$ – відповідно момент інерції всієї системи до та після зближення; m – маса кожної гирі. Кутова швидкість $\omega = 2\pi n$. Підставляючи ці вирази у рівняння (4.7), одержимо шукану частоту обертання:

$$n_2 = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2} n_1 = 1{,}17\text{с}^{-1}.$$

Робота, виконана людиною, дорівнює зміні кінетичної енергії системи:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}$$

Виразивши з рівняння (4.7) $\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_1}{J_2}$, одержимо:

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}\left(J_1 - J_2\right) = \frac{2J_1\pi^2 n_1^2}{J_2}\left(J_1 - J_2\right) = 36{,}8\ \text{Дж}.$$

Відповідь: 1) $n_2 == 1{,}17\text{с}^{-1}$, 2) $A = 36{,}8$ Дж.

Задача 5. Камінь масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти залежність від часу моменту сили $\vec{M}(t)$, що діє на тіло, моменту імпульсу $\vec{L}(t)$. Опором повітря знехтувати. Обидва моменти знайти відносно точки кидання.

Дані: $\vec{\upsilon}_0$, α.

Знайти: $\vec{M}(t)$, $\vec{L}(t)$.

Аналіз та розв'язання

На камінь діє сила тяжіння. Момент цієї сили за означенням дорівнює $\vec{M}=\left[\vec{r},m\vec{g}\right]$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор сили тяжіння. Початок системи координат поєднаємо з точкою кидання, напрям координатних осей вказано на рис.4.3. Траєкторія руху каменя лежить в площині xOy, радіус-вектор

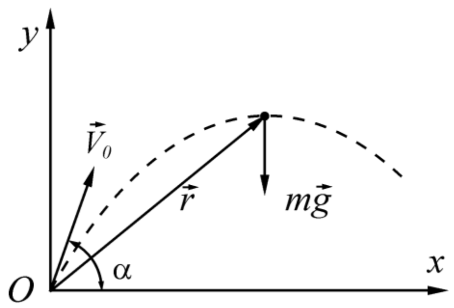

Рис.4.3

його змінюється за законом $\vec{r}(t)=\vec{\upsilon}_0 t+\dfrac{\vec{g}t^2}{2}$.

Тоді відносно точки O момент сили тяжіння дорівнює

$$\vec{M}(t)=\left[\left(\vec{\upsilon}_0 t+\frac{\vec{g}t^2}{2}\right),m\vec{g}\right]=\left[\vec{\upsilon}_0 t,m\vec{g}\right]+\left[\frac{\vec{g}t^2}{2},m\vec{g}\right]=\left[\vec{\upsilon}_0 t,m\vec{g}\right].$$

Вектор $\vec{M}(t)$ напрямлений перпендикулярно площині xOy, проекція цього вектора на вісь z дорівнює

$$M_z(t)=\upsilon_0 t\cdot mg\cdot\sin(90^0+\alpha)=-\upsilon_0 t\cdot mg\cdot\cos(\alpha).$$

Використовуючи рівняння моментів $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$, знайдемо

$$d\vec{L}=\vec{M}dt;\ \int_0^L d\vec{L}=\int_0^t \vec{M}dt,$$

$$\vec{L}(t)=\int_0^t[\vec{\upsilon}_0 t,m\vec{g}]dt=[\vec{\upsilon}_0,m\vec{g}]\int_0^t tdt=[\vec{\upsilon}_0,m\vec{g}]\frac{t^2}{2}.$$

Вектор $\vec{L}$ напрямлений протилежно осі z, проекція його на цю вісь:

$$L_Z(t)=-\frac{1}{2}\upsilon_0\cdot mg\cdot t^2\cos\alpha.$$

Залежність $\vec{M}(t)$ та $\vec{L}(t)$ можна записати у вигляді

$$\vec{M}(t)=-\upsilon_0\cdot mg\cdot t\cos\alpha\cdot\vec{k},$$

$$\vec{L}(t)=-\frac{1}{2}\upsilon_0\cdot mg\cdot t^2\cos\alpha\cdot\vec{k},$$

де $\vec{k}$ – одиничний вектор вздовж осі z.

Відповідь: $\vec{M}(t)=-\upsilon_0\cdot mg\cdot t\cos\alpha\cdot\vec{k}$, $\vec{L}(t)=-\dfrac{1}{2}\upsilon_0\cdot mg\cdot t^2\cos\alpha\cdot\vec{k}$.

Задача 6. Стрижень довжиною $l=1{,}5$ м і масою $M=10$ кг може обертатися навколо нерухомої осі, яка проходить через його верхній кінець. У середину стрижня потрапляє куля масою $m=10$ г, яка летить в горизонтальному напрямі зі швидкістю $\upsilon_0 = 500$ м/с і застряє у ньому. На який кут φ відхилиться стрижень після удару?

Дані: $l = 1{,}5$ м, $M = 10$ кг, $m = 10$ г, $\upsilon_0 = 500$ м/с.

Знайти: φ.

Аналіз та розв'язання

Куля, співударяючись зі стрижнем, за дуже малий проміжок часу приводить його у рух із кутовою швидкістю ω і надає йому кінетичну енергію $T = J\omega^2 / 2$, де J – момент інерції стрижня відносно осі обертання. Потім стрижень повертається на кут φ, при цьому його центр мас піднімається на висоту $h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$ (рис.4.4). В цьому положенні стрижень має потенціальну енергію

$$U = Mg\frac{l}{2}(1 - cos\varphi).$$

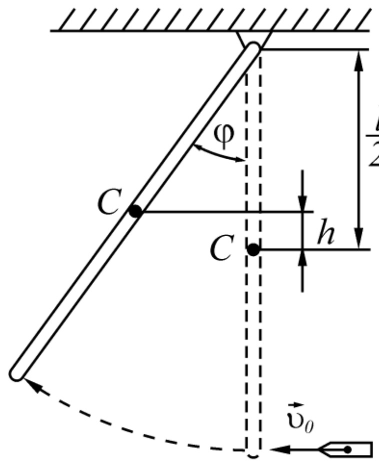

Рис.4.4

За законом збереження енергії

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

маємо

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}. \tag{4.8}$$

Щоб знайти кут φ, треба у це рівняння підставити значення J та ω. Момент інерції стрижня J відносно осі обертання, що проходить через його кінець, дорівнює $J = Ml^2 / 3$. Кутову швидкість ω знайдемо за законом збереження моменту імпульсу

$$m\upsilon_0\tau = J\omega + mr^2\omega.$$

Враховуючи, що $\upsilon_0 = \omega r$, а $\tau = \frac{l}{2}$, одержимо

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 l}{2\frac{ml^2}{3} + \frac{ml^2}{2}}.$$

Підставляючи в рівняння (4.8) значення J, знайдемо $\cos\varphi = 0{,}987$, $\varphi = 9°20'$.

Відповідь: $\varphi = 9°20'$.

4.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти момент інерції та момент імпульсу земної кулі відносно осі обертання.

Відповідь: $J = 10^{38}$ кг $\cdot$ м^2, $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг $\cdot$ м^2/с.

Задача 2. Знайти момент інерції тонкої плаcкої пластини із сторонами $a = 10$ см та $b = 20$ см відносно осі, що проходить через центр мас пластини паралельно бічній. Маса пластини рівномірно розподілена по її площі з поверхневою густиною $\sigma = 1{,}2$ кг/м^2.

Відповідь: $J = 2 \cdot 10^{-5}$ кг $\cdot$ м^2.

Задача 3. Маховик, що має момент інерції $J = 63{,}6$ кг $\cdot$ м^2, обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 3{,}14$ рад/с. Знайти гальмівний момент, дія якого призводить до зупинки маховика через 20 с.

Відповідь: $M = 10$ Н $\cdot$ м

Задача 4. Маховик, що має радіус $R = 0{,}2$ м і масу $m = 10$ кг, з'єднано з мотором за допомогою пасу. Сила натягу пасу є сталою і дорівнює $F = 14{,}7$ Н. Яке число обертів в секунду буде робити маховик через $t = 10$ с після початку руху? Маховик вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.

Відповідь: $n = 23{,}4$ с$^{-1}$.

Задача 5. Махове колесо, що має момент інерції 245 кг $\cdot$ м^2, обертається з частотою $n_1 = 20$ с$^{-1}$. Через хвилину після того, як на колесо припинено дію обертального моменту, воно зупинилося. Знайти момент сил тертя.

Відповідь: $M_{тер} = 513$ Н $\cdot$ м

Задача 6. На барабан масою $m_1 = 6$ кг намотано шнур, до кінця якого прикріплено вантаж масою $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним циліндром. Тертям знехтувати.

Відповідь: $a = 3{,}9$ м/с^2.

Задача 7. На барабан радіусом $R = 0{,}5$ м намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж $m = 10$ кг. Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що вантаж опускається з прискоренням $a = 2{,}04$ м/с^2.

Відповідь: $J = 9{,}5$ кг $\cdot$ м^2.

Задача 8. Визначте момент інерції J кулі масою $m = 400$ г і радіусом $R = 7$ см відносно осі, що є дотичної до її поверхні.

Відповідь: $J = \frac{7}{5} mR^2 = 2{,}74 \cdot 10^{-3}$ кг$\cdot$м^2.

Задача 9. Диск масою 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю 4 м/с. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $T = 24$ Дж.

Задача 10. Обруч і диск мають однакові маси та котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю υ. Кінетична енергія обруча дорівнює $T_1 = 40$Дж . Знайти кінетичну енергію T_2 диска.

Відповідь: $T_2 = 30$Дж .

Задача 11. Обруч масою $m = 2$ кг котиться без ковзання по горизонтальній поверхні з лінійною швидкістю $\upsilon = 5$ м/с. Знайти його кінетичну енергію.

Відповідь: $T = 50$Дж .

Задача 12. Велосипедист, маса якого разом з велосипедом є $m_1 = 80$ кг, їде рівномірно по дорозі з швидкістю 18 км/год. Маса кожного колеса велосипеда $m_2 = m_3 = 5$ кг. Колеса обертаються з кутовою частотою $\omega = 1{,}6$ с$^{-1}$. Визначити кінетичну енергію системи. Колеса вважати тонкими кільцями з радіусом $R = 0{,}5$ м.

Відповідь: $T = 10^3$ Дж.

Задача 13. Кінетична енергія обертального руху $T_{об}$ кулі, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 20 Дж. Визначте кінетичну енергію $T_п$ поступального руху кулі і її повну кінетичну енергію T.

Відповідь: $T_п = 2{,}5T_{об} = 50$ Дж, $T = 3{,}5T_{об} = 70$ Дж.

Задача 14. На похилій площині з кутом нахилу до горизонту α стоїть циліндр радіусом R. Якою може бути найвища висота циліндра, при якій він не перекинеться, якщо циліндр виготовлений з однорідної речовини?

Відповідь: $h = 2Rctg\,\alpha$.

Задача 15. Біліардна куля масою $m = 250$ г, що котиться без ковзання, вдаряється о борт і відскакує від нього. Швидкість кулі до удару $\upsilon = 0{,}8$ м/с, після удару $\upsilon' = 0{,}3$ м/с. Визначить кількість теплоти Q, що виділилась при ударі.

Відповідь: $Q = \dfrac{7}{10}m\left(\upsilon^2 - (\upsilon')^2\right) = 96{,}3$ мДж .

Задача 16. Вентилятор, момент інерції J якого дорівнює 8 кг·м^2, обертається с частотою $n = 300$ мин$^{-1}$. Після вимкнення він почав обертатися рівносповільнено та, зробивши $N = 30$ обертів, зупинився. Визначте час t, за який вентилятор зупинився та момент M сил гальмування.

Відповідь: $t = \dfrac{2N}{n} = 12$ с, $M = \dfrac{J\pi n^2}{N} = 20{,}9$ Н·м.

Задача 17. Кінетична енергія маховика, який обертається навколо горизонтальної осі, дорівнює 1 кДж. Під дією постійного гальмуючого моменту маховик почав обертатись рівносповільнено і, зробивши 80 обертів, зупинився. Визначити момент M сили тертя.

Відповідь: $M = 1{,}99$ Н·м.

Задача 18. Людина стоїть в центрі лави Жуковського та тримає в руках стрижень масою $m = 9$ кг за середину в горизонтальному положенні. Після повороту стрижня у вертикальне положення лава змінює частоту обертання з $n_1 = 40$ хв$^{-1}$ до $n_2 = 50$ хв$^{-1}$. Визначте довжину l стрижня, якщо сумарний момент інерції людину та лави $J = 10$ кг·м^2.

Відповідь: $l = 2\sqrt{\dfrac{3(n_2 - n_1)J}{m}} = 1,49$ м.

Задача 19. Однорідний диск радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω та обережно поклали на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск буде обертатись на поверхні, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ.

Відповідь: $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$.

Задача 20. Кругла платформа у вигляді однорідного суцільного диска, у центрі якої стоїть людина масою $m_1 = 72$ кг, обертається по інерції із частотою $n_1 = 25$ хв$^{-1}$. При переході людини на край платформи частота її обертання стала рівною $n_2 = 10$ хв$^{-1}$. Визначте масу m_2 платформи.

Відповідь: $m_2 = 2m_1 \dfrac{n_2}{n_1 - n_2} = 96$ кг.

Задача 21. На платформі, що обертається горизонтально, на відстані $R = 50$ см від осі обертання лежить вантаж. При якій частоті n обертання платформи вантаж почне зісковзувати? Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою $\mu = 0,05$.

Відповідь: $n > \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}} \approx 0,16$ об/с.

Задача 22. Тіло маси $m = 200$ г рівномірно обертається в горизонтальній площині по колу радіуса $R = 0,5$ м з частотою $n_1 = 3$ об/с. Яку роботу A потрібно виконати, щоб збільшити частоту обертання до $n_2 = 5$ об/с?

Відповідь: $A = 2\pi^2 R^2 m(n_2{}^2 - n_1{}^2) = 15,8$ Дж.

Задача 23. Кульку масою m, що підвішена на нитці, відхиляють від положення рівноваги на кут $\alpha = 90°$ і відпускають. Яка максимальна сила натягу F нитки?

Відповідь: $F = 3mg$.

Задача 24. Якір двигуна обертається з частотою $n = 1500$ хв$^{-1}$. Знайти обертальний момент, якщо двигун розвиває потужність $N = 500$ Вт.

Відповідь: $M = 3,18$ Н·м.

Задача 25. Барабан сушильної машини, що має діаметр $D = 1,96$ м, обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с. У скільки разів сила F, що притискає тканину до стінки, більше сили тяжіння mg, що діє на тканину?

Відповідь: $F / mg = \omega^2 D / 2g = 40$.

Задача 26. Два тягарця різної маси з'єднані ниткою, перекиненою через блок, момент інерції якого $J = 50\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, а радіус – $R = 20\,\text{см}$. Блок обертається з тертям, і момент сил тертя дорівнює $M_{тер} = 98{,}1\,\text{Н}\cdot\text{м}$. Знайти різницю сил натягу ниток $(F_1 - F_2)$ з обох боків блоку, якщо відомо, що блок обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2{,}36\,\text{рад/с}^2$.

Відповідь: $F_1 - F_2 = 1{,}08 \cdot 10^3\,\text{Н}$.

Задача 27. З похилої площини скочується без ковзання однорідний диск. Лінійне прискорення центра мас диска $\alpha = 3{,}9\,\text{м/с}^2$. Сила тертя дорівнює $F = 1\,\text{Н}$. Знайти кут нахилу похилої площини до горизонту та масу диска.

Відповідь: $\alpha = 36°$, $m = 0{,}5\,\text{кг}$.

Задача 28. Маховик, момент інерції J якого дорівнює $40\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, почав обертатись рівноприскорено із стану спокою під дією моменту сили $M = 20\,\text{Н}\cdot\text{м}$. Обертання продовжувалось $t = 10\,c$. Визначити кінетичну енергію T маховика.

Відповідь: $T = 500\,\text{Дж}$.

Задача 29. Однорідна куля радіусом r починає скочуватись без просковзування з вершини сфери радіусом R. Знайти кутову швидкість кулі ω після відриву від поверхні сфери.

Відповідь: $\omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}$.

Задача 30. На гладенькій горизонтальній поверхні лежить однорідний диск радіусом r_0. На нього обережно опустили інший такий же диск, що обертається із кутовою швидкістю ω_0. Через який час обидва диски будуть обертатись з однаковою кутовою швидкістю, якщо коефіцієнт тертя між дисками дорівнює μ.

Відповідь: $t = \dfrac{3r_0\omega_0}{8\mu g}$.