

3 РОБОТА, ЕНЕРГІЯ, ПОТУЖНІСТЬ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

3.1 Мета заняття

Визначення енергетичних характеристик: роботи консервативних та неконсервативних сил, механічної енергії, потужності. Познайомитись з законами збереження імпульсу та енергії, навчитись застосовувати ці закони до розв'язування задач.

3.2 Вказівки до організації самостійної роботи студентів

Користуючись конспектом лекцій та підручником [1, розд. 3; 2, розд. 3; 5, §2, 3], вивчити закони збереження. Проаналізувавши розв'язання завдань, приведених як приклади, перейти до самостійної роботи над рекомендованими завданнями.

3.3 Основні закони та формули

1. Елементарна робота сталої сили \vec{F} :

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F \cos \alpha dS = F_s dS ,$$

де $d\vec{r}$ – вектор елементарного переміщення; α – кут між векторами \vec{F} та $d\vec{r}$;
 $dS = |d\vec{r}|$ – елементарний шлях; F_s – проекція вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$.

2. Робота змінної сили на шляху S :

$$A = \int_s \vec{F}d\vec{r} = \int_s F_s dS = \int_s F \cos \alpha dS .$$

3. Робота змінної сили на шляху від точки 1 до точки 2 :

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} .$$

4. Середня потужність за проміжок часу Δt :

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t} .$$

5. Потужність (миттєва потужність):

$$N = \frac{dA}{dt} ; N = \vec{F}\vec{v} = Fv \cos \alpha ,$$

де \vec{v} – вектор швидкості, з якої рухається точка прикладення сили \vec{F} ; α – кут між векторами \vec{F} та \vec{v} .

6. Кінетична енергія тіла, що рухається:

$$T = \frac{mv^2}{2} ,$$

де m – маса тіла; v – його швидкість.

7. Зв'язок між силою, що діє на тіло в даній точці поля, і потенційною енергією частинки:

$$\vec{F} = -\text{grad}U, \text{ або } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей.

8. Потенційна енергія тіла, піднятого над поверхнею Землі на висоту h ,

$$U = mgh,$$

де g – прискорення вільного падіння.

9. Сила пружності:

$$F = -kx,$$

де x – абсолютна деформація; k – коефіцієнт жорсткості.

10. Потенційна енергія пружнодеформованого тіла:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

де k – коефіцієнт пружності (у випадку пружини – коефіцієнт жорсткості).

11. Закон збереження механічної енергії (для консервативної системи):

$$T + U = E = \text{const},$$

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const} \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const} \end{cases},$$

де T і U – відповідно кінетична та потенційна енергії тіла.

12. Швидкість двох тіл масами m_1 та m_2 після прямого абсолютно пружного центрального удару:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Передбачається, що при прямому центральному ударі вектори швидкостей куль до (\vec{v}_1, \vec{v}_2) й після (\vec{v}_1', \vec{v}_2') удару лежать на прямій, що з'єднує їхні центри. Проекції векторів швидкості на цю пряму дорівнюють модулям швидкостей.

13. Швидкість руху тіл після абсолютно непружного центрального удару:

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

14. Зміна кінетичної енергії тіл при абсолютно непружному центральному ударі (різниця кінетичної енергії тіл до та після удару):

$$\Delta T = \left(\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

15. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i = \text{const}$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i -ої матеріальної точки (тіла); v_i – швидкість i -ої точки (тіла).

3.4 Контрольні запитання

1. Що таке робота сили?
2. Що таке кінетична енергія? Наведіть приклади.
3. Що таке потенційна енергія? Наведіть приклади.
4. Як пов'язана робота сили тяжіння з потенційною енергією?
5. Як потенційна енергія пов'язана з силою?
6. Доведіть, що робота рівнодійної сил, прикладених до тіла, дорівнює приросту кінетичної енергії.
7. Чому дорівнює середня потужність, миттєва потужність?
8. Як миттєва потужність пов'язана із силою та швидкістю руху?
9. Запишіть закон збереження імпульсу.
10. Запишіть закон збереження механічної енергії.
11. Запишіть закон збереження моменту імпульсу.
12. Як пов'язана робота із зміною кінетичної енергії матеріальної точки?
13. Як пов'язана робота із зміною потенціальної енергії матеріальної точки?
14. Яка взаємодія тіл називається абсолютно пружним ударом?
15. Яка взаємодія тіл називається непружним ударом?
16. Які закони збереження виконуються та не виконуються при абсолютно пружному та абсолютно непружному ударах?
17. Які закони збереження виконуються та не виконуються при частково пружному ударі?

3.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Матеріальна точка масою $m = 0,1$ кг рухається рівномірно і прямолінійно з швидкістю $\vec{v}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с. У момент часу $t_0 = 0$ на неї почала діяти сила $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н. Ця сила діяла протягом $t_1 = 2$ с. Визначити роботу сили \vec{F} та зміну кінетичної енергії за 2 с.

Дані: $m = 0,1$ кг, $\vec{v}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с, $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н, $t_0 = 0$; $t_1 = 2$ с.

Знайти: A , ΔT .

Аналіз та розв'язання

Відомо, що робота сили \vec{F} дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = \Delta T = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Швидкість тіла \vec{v}_1 в момент часу t_1 можна знайти із основного рівняння динаміки

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$d\vec{v} = \frac{1}{m} \vec{F} dt,$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} \vec{F} dt,$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{F} t_1}{m} + \vec{v}_0.$$

$$\vec{v}_1 = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j}}{0,1} + 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = 65\vec{i} + 44\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Тоді робота сили \vec{F} і зміна кінетичної енергії дорівнюють

$$A = \Delta T = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_0^2) = \frac{0,1}{2} (65^2 + 44^2 + 3^2 - 5^2 - 4^2 - 3^2) = 306 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A = \Delta T = 306 \text{ Дж}$.

Задача 2. Куля, рухаючись із швидкістю $v_0 = 900 \text{ м/с}$, пробиває стінку товщиною 50 см і вилітає із неї зі швидкістю $v = 350 \text{ м/с}$. Знайти час руху кулі у стінці, вважаючи опір стінки пропорційним кубу швидкості руху кулі.

Дані: $v_0 = 900 \text{ м/с}$, $v = 350 \text{ м/с}$, $d = 0,5 \text{ м}$, $F = -kv^3$.

Знайти: t .

Аналіз та розв'язання

Під час руху кулі у стінці на неї діє тільки сила опору. Використовуючи основний закон динаміки поступального руху, можемо записати рівняння

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^3.$$

Розділивши змінні у цьому диференціальному рівнянні, одержуємо

$$\frac{mdv}{v^3} = -kdt$$

Інтегруючи одержане рівняння, знаходимо

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = -k \int_0^t dt;$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v^2} \right) = -kt;$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{v_0^2 - v^2}{v_0^2 v^2} \right) = kt. \tag{3.1}$$

Робота сили опору при переміщенні кулі на $d\vec{r}$ дорівнює

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = m \vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Враховуючи напрям векторів, одержуємо рівняння

$$-k v^3 dr = m v dv. \quad (3.2)$$

Розділивши змінні у рівнянні (3.2) та інтегруючи, знайдемо

$$-k \int_0^d dr = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2};$$

$$-kd = m \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} \right) \quad (3.3)$$

$$m \frac{v_0 - v}{v_0 v} = kd.$$

Якщо розділити рівняння (3.1) на рівняння (3.3), знайдемо

$$t = \frac{(v_0 + v)d}{2v_0 \cdot v} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Відповідь: $t = 10^{-3} \text{ с.}$

Задача 3. Тіло масою m кинути під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Знайти середню потужність, яку розвиває сила тяжіння за весь час руху тіла; миттєву потужність цієї сили як функцію часу; потужність в верхній точці траєкторії; роботу сили тяжіння за t секунд руху. Опором повітря знехтувати.

Дані: α, v_0, m .

Знайти: $\langle N \rangle, N(t), N_b, A(t)$.

Аналіз та розв'язання

Знайдемо миттєве значення потужності сили тяжіння, використовуючи формулу

$$N(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{g} \cdot \vec{v}.$$

Рух тіла – рівноприскорений, тому $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$.

Враховуючи напрям векторів (рис.3.1), знайдемо

$$N(t) = m\vec{g} \cdot \vec{v} = m\vec{g}(\vec{v}_0 + \vec{g}t) =$$

$$= mgv_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + mg^2t =$$

$$= mg(gt - v_0 \sin \alpha)$$

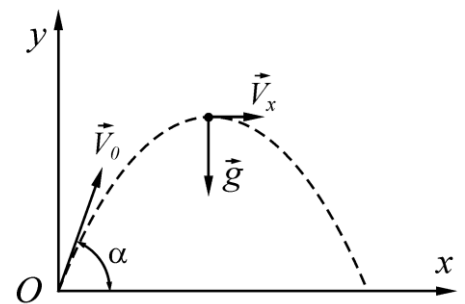


Рис.3.1

У вершині траєкторії кут між векторами \vec{g} та \vec{v} дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тому

$$N_b = m\vec{g} \cdot \vec{v} = 0.$$

Середня потужність сили тяжіння за весь час руху дорівнює

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t},$$

де A – робота сили тяжіння; t – час руху.

Початкова та кінцева точки траєкторії знаходяться на однаковій висоті, тому $A = 0$, $\langle N \rangle = 0$.

Із формули $P = \frac{dA}{dt}$ знаходимо силу тяжіння за час t :

$$A(t) = \int_0^t P dt = \int_0^t mg(gt - v_0 \sin \alpha) dt = mg \left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin \alpha \right).$$

Відповідь: $\langle N \rangle = 0$, $N_b = 0$, $N(t) = mg(gt - v_0 \sin \alpha)$,

$$A(t) = mg \left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin \alpha \right).$$

Задача 4. Куля масою m_1 , яка рухалась горизонтально з швидкістю v_1 , зіткнулась з нерухомою кулею масою m_2 . Кулі абсолютно пружні, зіткнення пряме. Яку долю w своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дані: m_1 , v_1 , m_2 , $v_2 = 0$.

Знайти: w .

Аналіз та розв'язання

Доля енергії, переданої першою кулею другій:

$$w = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2},$$

де T_1 – кінетична енергія першої кулі до удару; T_2' – кінетична енергія другої кулі після удару; v_1 – швидкість першої кулі до удару; u_2 – швидкість другої кулі після удару.

Для визначення w треба знайти u_2 . Скористаємось тим, що при абсолютно пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії. Враховуючи, що друга куля до зіткнення була нерухомою, запишемо ці закони:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \end{aligned}$$

де u_1 – швидкість першої кулі після удару.

Розв'язавши рівняння, одержимо

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Підставивши значення u_2 у рівняння (3.4), одержимо

$$w = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{2m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)} \right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Відповідь: $w = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$

Задача 5. Ящик масою $m_1 = 20$ кг зісковзує по ідеально гладкому лотку довжиною $l = 2$ м у нерухомий візок з піском і застряє в ньому. Візок з піском масою $m_2 = 20$ кг може вільно (без тертя) переміщатися по рейках у горизонтальному напрямку. Визначити швидкість u візка з ящиком, якщо лоток нахилений під кутом $\alpha = 30^\circ$ до рейок.

Дані: $m_1 = 20$ кг, $l = 2$ м, $m_2 = 20$ кг, $\alpha = 30^\circ$.

Знайти: u

Аналіз та розв'язання

Візок і ящик можна розглядати як систему двох взаємодіючих тіл. Але ця система незамкнена, тому що на неї діють зовнішні сили: тяжіння $m_1 g$ та $m_2 g$ та реакції опори N_2 (рис.3.2). Тому застосувати закон збереження імпульсу до системи "ящик-візок" не можна. Оскільки проекції зазначених сил на напрямок осі x , що збігає з напрямком рейок, дорівнюють нулю, то проекцію імпульсу системи на цей напрямок можна вважати сталою, тобто

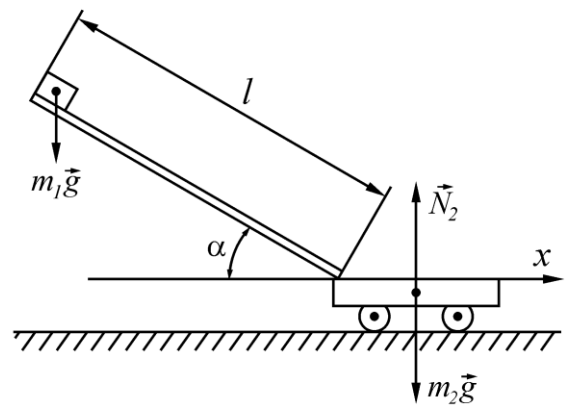


Рис.3.2

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \quad (3.5)$$

де p_{1x} і p_{2x} – проекції імпульсу ящика та візка з піском у момент падіння ящика на візок; p'_{1x} і p'_{2x} – ті ж величини після падіння ящика.

Розглядаючи тіла системи як матеріальні точки, виразимо в рівнянні (3.5) імпульси тіл через їхні маси і швидкості, з огляду на те, що $p_{2x} = 0$ (візок до взаємодії з ящиком не рухався), а також що після взаємодії обидва тіла системи рухаються з однієї й тією ж швидкістю u :

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) u,$$

або

$$m_1 v_1 \cos \alpha = (m_1 + m_2) u,$$

де v_1 – модуль швидкості ящика перед падінням на візок; $v_{1x} = v_1 \cos \alpha$ – проекція цієї швидкості на вісь x .

Звідси

$$u = \frac{m_1 v_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \quad (3.6)$$

Модуль швидкості v_1 визначимо із закону збереження енергії:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

де $h = l \sin \alpha$, звідки $v_1 = \sqrt{2gl \sin \alpha}$.

Підставивши вираз у формулу (3.6), одержимо:

$$u = \frac{m_1 \sqrt{2gl \sin \alpha} \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Після обчислення знайдемо:

$$u = \frac{20 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \sin 30}}{20 + 80} \cos 30^\circ \text{ м/с} = 0,767 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $u = 0,767 \text{ м/с}$.

Задача 6. Куля, що летить горизонтально, попадає в тіло, що висить на легкому твердому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше маси тіла. Відстань від точки підвісу стрижня до центра 1 м. Знайти швидкість кулі, якщо відомо, що стрижень із тілом відхилився від удару кулі на кут 10° .

Дані: $m_2 = 1000m_1$, $l = 1 \text{ м}$; $\alpha = 10^\circ \approx 0,17 \text{ рад}$.

Знайти: v .

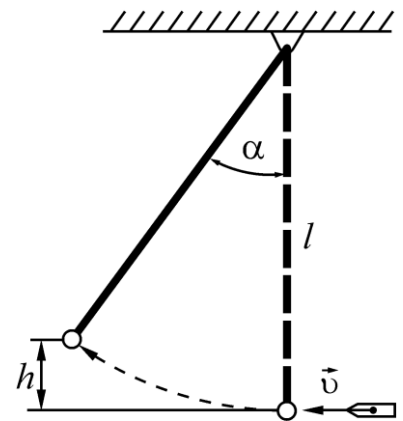


Рис.3.3

Аналіз та розв'язання

Запишемо закон збереження імпульсу для непружного удару в проекції на вісь X (рис.3.3):

$$m_2 v = (m_1 + m_2) u$$

звідки

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u. \quad (3.7)$$

Тут v – швидкість кулі до зіткнення; u – швидкість кулі і тіла після їхнього зіткнення. У виразі (3.7) крім v невідома ще швидкість u , яку можна знайти за законом збереження енергії.

Нехай у результаті зіткнення з тілом центр маси тіла піднявся на висоту h , тоді, за законом збереження енергії,

$$(m_1 + m_2) u^2 / 2 = (m_1 + m_2) gh,$$

звідки

$$u^2 = 2gh. \quad (3.8)$$

З рис.3.3 маємо $h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$. Підставимо вираз для h у рівняння (3.8):

$$u^2 = 2gl(1 - \cos \alpha),$$

звідки

$$u = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Тоді рівняння (3.7) можна привести до виду

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}. \quad (3.9)$$

Використовуючи тригонометричне рівняння $\sin(\alpha/2) = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$, перетворимо вираз (3.9):

$$v = 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl} \approx 570 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v \approx 570 \text{ м/с}$.

3.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Куля масою $m_1 = 6 \text{ кг}$ налетіла на іншу кулю $m_2 = 4 \text{ кг}$, яка перебувала у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив $5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну імпульсу першої кулі.

Відповідь: $\Delta p = 2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

Задача 2. В човні масою $m_1 = 240 \text{ кг}$ стоїть людина масою $m_2 = 60 \text{ кг}$. Човен пливе з швидкістю $v_1 = 2 \text{ м/с}$. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі з швидкістю $v = 4 \text{ м/с}$ (відносно човна). Знайти швидкість u човна після стрибка людини, розглянувши два випадки: людина стрибає вперед за рухом човна; в напрямі, протилежному напрямку руху човна.

Відповідь: $u_1 = 1 \text{ м/с}$, $u_2 = 3 \text{ м/с}$.

Задача 3. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15 \text{ т}$. Гармата стріляє вгору під кутом $\varphi = 60^\circ$ до горизонту в напрямку руху. З якою швидкістю v_1 рухатиметься платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20 \text{ кг}$ і він вилетів з швидкістю $v_2 = 600 \text{ м/с}$.

Відповідь: $v_1 = 0,4 \text{ м/с}$.

Задача 4. Куля масою $m = 10 \text{ г}$, яка летіла з швидкістю $v = 600 \text{ м/с}$, влучила в балістичний маятник масою $M = 5 \text{ кг}$ і застрягла в ньому. На яку висоту h після удару піднявся маятник?

Відповідь: $h = 7,34 \text{ см}$.

Задача 5. Куля масою $m_1 = 6 \text{ кг}$ налетіла на другу кулю $m_2 = 4 \text{ кг}$, яка знаходилась у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив $5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну ΔU внутрішньої енергії куль.

Відповідь: $\Delta U = 0,83 \text{ Дж}$.

Задача 6. Ковзаняр, розігнавшись до швидкості $v = 21$ км/год, в'їжджає на гірку з ухилом $\alpha = 20^\circ$ на висоту $h = 1,6$ м. Визначте коефіцієнт тертя μ ковзанів об лід.

Відповідь: $\mu = 0,03$.

Задача 7. Санчата, що рухаються по льоду зі швидкості $v = 11$ км/год, в'їжджають на гірку з ухилом $\alpha = 10^\circ$ на висоту $h = 2,5$ м. Визначте коефіцієнт тертя μ санчат об лід.

Відповідь: $\mu = 0,02$.

Задача 8. Потужність N двигунів літака при відриві від Землі дорівнює 820 кВт. Маса літака – $m = 5,2$ т. Розганяючись рівноприскорено, літак досягає швидкості $v = 32$ м/с. Вважаючи, що коефіцієнт опору $\mu = 0,04$ не залежить від швидкості, визначте довжину пробігу S літака перед зльотом.

Відповідь: $S = 113$ м.

Задача 10. Кулька масою $m_1 = 16$ г, що рухається горизонтально, зіштовхнулася з кулею масою $m_2 = 0,8$ кг, що висить на прямому невагомому стрижні довжиною $l = 1,7$ м. Вважаючи удар пружним, визначте швидкість кульки v_1 , якщо кут відхилення стрижня після удару $\alpha = 20^\circ$.

Відповідь: $v_1 = 36,2$ м/с.

Задача 11. Куля, що рухається зі швидкістю v_1 , налітає на нерухому кулю, маса якого в $n = 1,5$ рази більше першої. Визначте відношення швидкості v'_1 першої кулі й швидкості v'_2 другої кулі після удару. Удар вважати пружним, центральним і прямим.

Відповідь: $\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{n-1}{2} = 0,25$.

Задача 12. Падаючи вертикально, кулька маси $m = 200$ г вдарилася о підлогу зі швидкістю $v = 5$ м/с і підстрибнула на висоту $h = 46$ см. Знайти зміну Δp імпульсу кульки при ударі.

Відповідь: $\Delta p = m(v + \sqrt{2gh}) = 1,6$ кг · м/с.

Задача 13. Гармата, що стоїть на гладкій горизонтальній площадці, стріляє під кутом $\alpha = 30^\circ$ до обрїю. Маса снаряда $m = 20$ кг, його початкова швидкість $v = 200$ м/с. Яку швидкість u здобуває гармата при пострілі, якщо її маса $M = 500$ кг?

Відповідь: $u = -(mv \cos \alpha) / M = -7$ м/с.

Задача 14. Снаряд масою $m = 20$ кг, що летить зі швидкістю $v = 800$ м/с під кутом $\alpha = 30^\circ$ до вертикалі, попадає в платформу з піском і застряє в неї. Знайти швидкість платформи u після влучення снаряда, якщо її маса $M = 16$ т.

Відповідь: $u = mv \cos \alpha / (m + M) \approx 1,25$ м/с.

Задача 15. Матеріальна точка масою $m=1$ кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі x , відповідно до рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 2$ м/с, $C = 1$ м/с², $D = -0,2$ м/с³. Визначте потужність N , що затрачується на рух точки, за час $t = 2$ с.

Відповідь: $N = 0,16$ Вт.

Задача 16. Сила $F = 0,5$ Н діє на тіло маси $m = 10$ кг протягом часу $t = 2$ с. Знайти кінцеву кінетичну енергію тіла T , якщо початкова кінетична енергія дорівнює нулю.

Відповідь: $T = (Ft)^2 / m = 0,05$ Дж.

Задача 17. З вежі висотою $h = 62$ м горизонтально зі швидкістю $v_0 = 12$ м/с кинули камінь масою $m = 120$ г. Нехтуючи, опором повітря, визначте кінетичну T та потенціальну U енергії каменю через час $t = 3$ с після кидка.

Відповідь: $T = \frac{m}{2}(v_0^2 + g^2 t^2) = 60,6$ Дж; $U = mg\left(h + \frac{gt^2}{2}\right) = 21$ Дж.

Задача 18. Визначити роботу, що виконується на шляху $s = 12$ м силою, яка рівномірно зростає від $F_1 = 10$ Н до $F_2 = 26$ Н.

Відповідь: $A = 336$ Дж.

Задача 19. Куля масою $m = 10$ г летить з швидкістю $v = 800$ м/с, обертаючись навколо горизонтальної осі з частотою $n = 3000$ с⁻¹. Приймаючи кулю за циліндр діаметром $d = 8$ мм, визначити повну кінетичну енергію T кулі.

Відповідь: $T = 3,21$ кДж.

Задача 20. Визначити лінійну швидкість v центра кулі, яка скотилась без просковзування з похилої площини висотою $h = 1$ м.

Відповідь: $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 3,74$ м/с.

Задача 21. Скільки часу t буде спускатись без просковзування обруч з похилої площини довжиною $l = 2$ м і висотою $h = 10$ см?

Відповідь: $t = 4,04$ с.

Задача 22. Тонкий стрижень довжиною $l = 1$ м прикріплений до горизонтальної осі, яка проходить через його кінець. Стрижень відхилили на кут $\varphi = 60^\circ$ від положення рівноваги і відпустили. Визначити лінійну швидкість v нижнього кінця стрижня в момент проходження положення рівноваги.

Відповідь: $v = \sqrt{3gl(1 - \cos \varphi)} = 3,84$ м/с.

Задача 23. Яку роботу виконав хлопчик, що стоїть на гладкому льоді, надавши санчатам швидкість $v = 4$ м/с відносно льоду, якщо маса санчат $m = 4$ кг, а маса хлопчика $M = 20$ кг?

Відповідь: $A = (m + M)mv^2 / 2M = 38,4$ Дж.

Задача 24. Важку кульку, що підвішена на нерозтяжній і невагомій нитці довжиною l , відхиляють від вертикалі на кут α і потім відпускають. Яку максимальну швидкість v набуде кулька?

Відповідь: $v = 2\sqrt{gl} \sin(\alpha / 2)$.

Задача 25. Камінь маси $m = 5$ кг впав з деякої висоти. Знайти кінетичну енергію T каменю в середній точці його шляху, якщо він падав протягом часу $t = 2$ с.

Відповідь: $T = mg^2 t^2 / 4 = 480$ Дж.

Задача 26. Визначте роботу A , яку треба виконати, щоб стиснути пружину на $x = 15$ см, якщо відомо, що сила пропорційна деформації, та під дією сили $F = 50$ Н пружина стискується на $x_0 = 2,25$ см.

Відповідь: $A = \frac{Fx^2}{2x_0} = 25$ Дж.

Задача 27. З якою швидкістю v вилітає із пружинного пістолета кулька масою $m = 10$ г, якщо пружину було стиснуто на $x = 5$ см? Жорсткість пружини дорівнює $k = 200$ Н/м.

Відповідь: $v = 7,07$ м/с.

Задача 28. Сталева кулька масою $m = 50$ кг падає з висоти $h = 1,0$ м на горизонтальну поверхню масивної плити. Знайти сумарний імпульс, який вона передає плиті внаслідок багатократних відштовхувань, якщо при кожному ударі швидкість кульки змінюється в $\eta = 0,8$ разів.

Відповідь: $p = \frac{m\sqrt{2gh}(1 + \eta)}{1 - \eta} = 2 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 29. Дві однакові платформи рухаються одна за одною по інерції (без тертя) з однакою швидкістю v_0 . На задній платформі знаходиться людина масою m . У якийсь момент людина стрибнула на передню платформу з швидкістю u відносно своєї платформи. Маса кожної платформи M . Знайти швидкості, з якими будуть рухатись обидві платформи після цього.

Відповідь: $v_1 = v_0 + \frac{mM}{(m + M)^2} u$, $v_2 = v_0 - \frac{m}{m + M} u$.

Задача 30. Яку кінетичну енергію T набуває тіло масою $m = 1$ кг при падінні без початкової швидкості через проміжок часу $\Delta t = 5$ с після початку падіння?

Відповідь: $T = mg^2 (\Delta t)^2 / 2 = 1,2$ кДж.