8 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

8.1 Мета заняття

Навчитися розраховувати напруженість електричного поля, створеного системою точкових електричних зарядів і об'ємними зарядженими тілами, набути практичні навички розрахунку потенціалу та різниці потенціалів електростатичних полів, які створені зарядами, зарядженими провідниками.

8.2 Методичні вказівки до організації самостійної роботи

При підготовці до заняття ознайомитися з контрольними запитаннями і завданнями. Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом і [3, розд. 1; 4, розд. 1; 5, §13…16]. Особливу увагу слід звернути на поняття точкового заряду, пробного заряду, на межу застосування закону Кулона, за яким визначається сила взаємодії двох точкових зарядів.

8.3 Основні закони та формули

1. Закон збереження заряду у замкнутої системі:

$$\sum_i q_i = const.$$

2. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \qquad \text{(у вакуумі)},$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\varepsilon \cdot r^2} \qquad \text{(в середовищі)},$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2; r – відстань між зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; ε – діелектрична проникність середовища.

3. Напруженість електростатичного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

де F – сила, що діє на точковий позитивний заряд q_0, поміщений у дану точку поля.

4. Напруженість електростатичного поля точкового заряду на відстані r від заряду:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

5. Потік вектора напруженості електростатичного поля:

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS \qquad \text{(крізь елементарну площину } dS\text{)},$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS \qquad \text{(крізь замкнуту поверхню } S\text{)},$$

де $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль якого рівний dS, а напрямок збігається з зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до поверхні; E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$.

6. Принцип суперпозиції електростатичних полів:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i ,$$

де $\vec{E}_i$ – напруженість поля, створюваного зарядом q.

7. Густина зарядів (лінійна, поверхнева, об'ємна):

$$\tau = \frac{dq}{dl},\ \sigma = \frac{dq}{dS},\ \rho = \frac{dq}{dV}.$$

8. Теорема Гауса для електростатичного поля у вакуумі:
у випадку дискретного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i ;$$

у випадку безперервного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV ,$$

де $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, що знаходяться у середині замкнутої поверхні S; N – число зарядів; ρ – об'ємна густина зарядів.

9. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженою нескінченною площиною:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

де σ – поверхнева густина заряду.

10. Напруженість поля, створеного двома нескінченними паралельними різнойменно зарядженими площинами:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

11. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженою сферичною поверхнею радіусом R із загальним зарядом q на відстані r від центру сфери:

$$E = 0 \qquad \text{при } r < R \text{ (всередині сфери)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (поза сферою)}.$$

12. Напруженість поля, створеного об'ємно зарядженої кулею радіусом R із загальним зарядом q на відстані r від центру кулі:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} r \qquad \text{при } r \le R \text{ (всередині кулі)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad \text{при } r \ge R \text{ (поза кулею)}.$$

13. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженим нескінченним циліндром радіусом R на відстані r від осі циліндра:

$$E = 0 \qquad \text{при } r < R \text{ (всередині циліндра)},$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r} \qquad \text{при } r \ge R \text{ (поза циліндром)},$$

де τ – лінійна густина заряду.

14. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж замкнутого контуру:

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = \oint\limits_L E_l dl = 0,$$

де E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$. Інтегрування проводиться по замкненому контуру L.

15. Потенціальна енергія заряду q_0 у полі заряду q на відстані r від нього:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r}.$$

16. Потенціал електростатичного поля :

$$\varphi = \frac{U}{q_0}, \; \varphi = \frac{A_\infty}{q_0},$$

де q_0 – точковий позитивний заряд, поміщений у дану точку поля; U – потенціальна енергія заряду q_0; A_∞ – робота переміщення заряду q_0 з даної точки поля за його межі.

17. Потенціал електростатичного поля точкового заряду на відстані від заряду:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}.$$

18. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \right),$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей. Знак «–» визначається тим, що вектор $\vec{E}$ поля спрямований у бік зменшення потенціалу.

19. У випадку поля з центральною або осьовою симетрією:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

20. Робота, що здійснюється силами електростатичного поля під час переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad A_{12} = q_0\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = q_0\int_1^2 E_l dl,$$

де E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$.

21. Різниця потенціалів між двома точками 1 и 2 в електростатичному полі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

де A_{12} – робота, що здійснюються силами електростатичного поля під час переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2; E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$; інтегрування проводиться вздовж будь-якої лінії, що з'єднує початкову та кінцеву точки, тому що робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії переміщення.

22. Різниця потенціалів між точками, що знаходяться на відстані x_1 і x_2 від рівномірно зарядженої нескінченної площини:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1),$$

де σ – поверхнева густина заряду.

23. Різниця потенціалів між нескінченними різнойменно зарядженими площинами, відстань між якими дорівнює d :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d Edx = \int_0^d \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d.$$

24. Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від центру рівномірно зарядженої сферичної поверхні (об'ємно зарядженого кулі) радіусом R із загальним зарядом q за умови $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

25. Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від центру об'ємно зарядженого кулі радіусом R із загальним зарядом q, за умови $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

26. Різниця потенціалів між двома точками, що знаходяться на відстанях r_1 і r_2, від осі рівномірно зарядженого з лінійною густиною τ нескінченного циліндра радіусом R, за умови $r_1 < R$, $r_2 > R, r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

8.4 Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон Кулона.
2. Для яких зарядів можна застосувати закон Кулона?
3. Який заряд називається точковим, пробним?
4. Фізичний смисл напруженості електростатичного поля.
5. Які властивості має електростатичне поле?
6. Як визначається напруженість електростатичного поля точкового заряду?
7. Дайте визначення ліній напруженості електричного поля.
8. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів.
9. Що таке циркуляція вектора напруженості електростатичного поля і чому вона дорівнює?
10. Чому дорівнює потенціальна енергія взаємодії двох точкових електричних зарядів?
11. Що таке потенціал електричного поля?
12. Що таке різниця потенціалів?
13. Чому дорівнює робота сил електричного поля по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2?
14. Як пов'язані різниця потенціалів з вектором напруженості електричного поля?
15. Як пов'язані вектор напруженості електричного поля з потенціалом?
16. Чому дорівнює потенціал поля точкового заряду?

8.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Три точкових заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл розташовані у вершинах рівнобічного трикутника. Який заряд q_4 треба розташувати в центрі трикутника, щоб ця система зарядів була в рівновазі?

Дані: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл.

Знайти: q_4.

Аналіз і розв'язання

Всі три заряди, що розташовані в вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах. Тому досить з'ясувати, який заряд слід розташувати в центрі трикутника, щоб будь-який з трьох зарядів, наприклад q_1 перебував в рівновазі. Заряд q_1 буде знаходитися в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнює нулю (рис.8.1).

$$\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\vec{F}+\vec{F}_4=0, \qquad (8.1)$$

де $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ – сили, які відповідно діють на заряд q_1 з боку зарядів q_2, q_3, q_4; $\vec{F}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

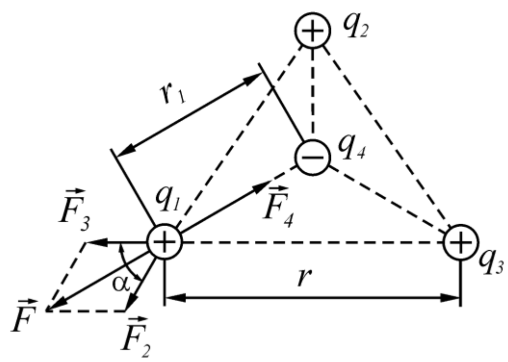

Рис.8.1

Беручи до уваги, що $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ спрямовані по одній прямій в протилежні боки, векторне рівняння (8.1) можна замінити скалярним $F-F_4=0$, звідки $F_4=F$. Враховуючи, що $F_3=F_2$, маємо:

$$F_4=F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Застосовуючи закон Кулона і маючи на увазі, що $q_1=q_2=q_3$, визначаємо:

$$\frac{q_1q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Звідки:

$$q_4=\frac{q_1r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Беручи до уваги, що трикутник $q_1q_2q_3$ рівнобічний, маємо:

$$r_1=\frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{2\cos30^\circ}=\frac{r}{\sqrt{3}};\ \cos\alpha=\cos60^\circ=\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$q_4=\frac{q_1}{\sqrt{3}};\ q_4=\frac{10^{-9}}{\sqrt{3}}=5{,}77\cdot10^{-7}\text{ Кл}=577\text{ нКл}.$$

Відповідь: q_4= 577 нКл. Слід відзначити, що рівновага системи зарядів буде нестійкою.

Задача 2. Кільце радіусом R з тонкого дроту має заряд q, що рівномірно розподілений по кільцю. Знайти модуль напруженості електричного поля на осі кільця в точці A як функцію відстані f до його центра. Дослідити одержану залежність при $f>>R$.

Дані: R, q, f, $f>>R$.

Знайти: $E(f)$.

Аналіз і розв'язання

Поєднаємо координатну площину xOy з площиною кільця, а вісь Oz – з віссю кільця (рис.8.2). На кільці виділимо малий елемент довжиною dl.

Заряд цього елемента $dq = \tau dl = \dfrac{q}{2\pi R}dl$ можна вважати точковим, тоді напруженість $d\vec{E}$ електричного поля, створеного цим зарядом, може бути записана у вигляді:

$$d\vec{E} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R(R^2 + f^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

$$r = \sqrt{R^2 + f^2},$$

де $\vec{r}$ = радіус-вектор, спрямований від елемента dl до точки A.

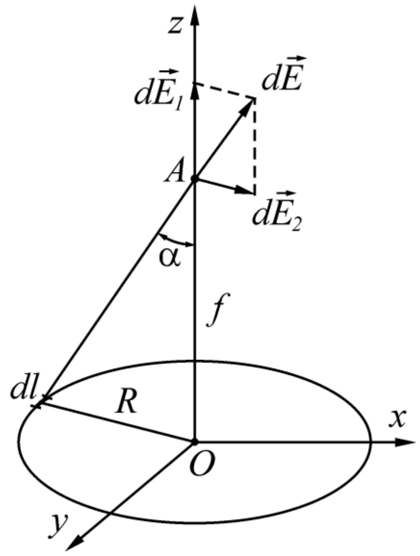

Рис.8.2

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: $d\vec{E}_1$, перпендикулярну площині кільця, (спрямовану так же, як і вісь O_z), і $d\vec{E}_2$, паралельну площині кільця (площині xOy), тобто :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці A знайдемо інтегруванням:

$$E = \oint_L d\vec{E}_1 + \oint_L d\vec{E}_2,$$

де інтегрування ведеться по довжині кільця $L = 2\pi R$. Врахуємо, що для кожної пари зарядів dq і dq' ($dq = dq'$), розташованих симетрично відносно центра кільця, вектори $d\vec{E}_2$ і $d\vec{E}_2'$ в точці A однакові за модулем і протилежні за напрямком, тобто $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}_2'$. Тому векторна сума (інтеграл):

$$\oint_L d\vec{E}_2 = 0.$$

Складові $d\vec{E}_1$ для всіх елементів кільця спрямовані вздовж осі Oz, (вздовж одиничного вектора $\vec{k}$), тобто $d\vec{E} = \vec{k}dE_1$. Тоді $\vec{E} = \vec{k}\int_L dE_1$. Зважаючи на те, що

$$dE = \frac{qdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R(R^2 + f^2)} \text{ і } \cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{R^2 + f^2}},$$

маємо:

$$dE_1 = \frac{fqdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R(R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким чином:

$$\vec{E}(f) = \vec{k} \cdot \oint_L \frac{fqdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R(R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} = \vec{k}\frac{fq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

При $f >> R$: $E(f)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 f^2}$ – як для точкового заряду.

Відповідь: $\vec{E}(f)=\vec{k}\dfrac{fq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+f^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 3. Тонкий стрижень довжиною $l=10$ см рівномірно заряджений зарядом $q=10^{-7}$ Кл. Знайти силу, яка діє на точковий заряд q_0 = 6 нКл, розташований на подовженні стрижня на відстані $a=20$см від нього. Найти напруженість поля як функцію відстані до стержня *a*.

Дані*:* $q=10^{-7}$ Кл, $q_0=6$ нКл = $6\cdot10^{-9}$ Кл, $a=20$ см = 0,2 м.

Знайти: F , $E(a)$.

Аналіз і розв'язання

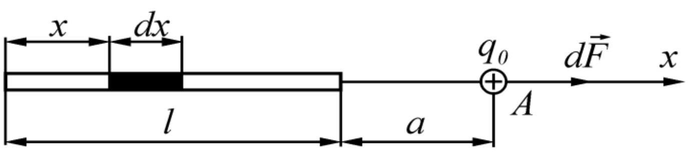

Рис.8.3

Безпосередньо застосувати закон Кулона неможливо, тому що стрижень – не точковий заряд. Але можна застосувати метод диференціювання та інтегрування. Виділимо на стержні дуже малий елемент довжиною *dx*, заряд якого $dq=\dfrac{q}{l}dx$ можна вважати точковим (рис. 8.3).

Сила взаємодії *dF* точкового заряду q_0 і елементарного точкового заряду *dq* по закону Кулона:

$$dF=\frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)^2},$$

де $(l+a-x)$ – відстань від елемента *dx* до точкового заряду q_0, x – відстань від початку координат до елемента *dx*(рис.8.3). Інтегруючі вираз для *dF* по довжіні стрижня, отримаємо результуючу силу:

$$F=\int dF=\int_0^l\frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\int_0^l\frac{dx}{(l+a-x)^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=90$$

мкН.

Напруженість поля в точці *A* дорівнює:

$$E=\frac{F}{q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right).$$

За напрямком напруженість $\vec{E}$ збігається з $\vec{F}$. Для будь-якої точки на подовженні стрижня:

$$E(a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right),$$

де a – відстань від кінця стрижня до точки, де визначається напруженість поля.

Відповідь: $F=90$ мкН, $E(a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)$.

Задача 4. Електричне поле створене тонким прямим провідником, рівномірно зарядженим з лінійного густиною $\tau=0{,}2$ мкКл/м. Визначити потенціал φ поля в точці C , яка розташована від кінців провідника на відстанях, що дорівнюють довжині провідника l. Яку роботу здійснить електричне поле по переміщенню заряду $q=10^{-5}$ Кл з точки C на нескінченно велику відстань?

Дані: $\tau=0{,}2$ мкКл/м, $r_{\max}=l$, $q=10^{-5}$ Кл.

Знайти: φ_C, A.

Аналіз і розв'язання

Заряд, який знаходиться на провіднику, не можна вважати точковим, тому необхідно розподілити провідник на елементарні відрізки (рис.8.4). У цьому випадку заряд $dq=\tau dl$, який перебуває на кожному з них, можна розглядати як точковий. Потенціал, утворений в точці C зарядом dq:

$$d\varphi=\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (8.2)$$

де r – відстань від точки, в якій визначається потенціал, до елемента провідника. З рис.8.4 можна бачити, що $dl=\frac{\tau d\alpha}{\cos\alpha}$. Тоді з формули (8.2):

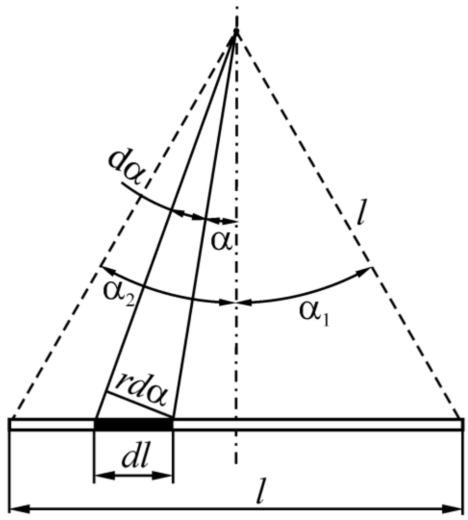

Рис.8.4

$$d\varphi=\frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cos\alpha}.$$

Інтегруючи одержаний вираз від, α_1до α_2 знайдемо потенціал в точці C:

$$\varphi_C = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Внаслідок симетрії розташування точки C відносно кінців провідника маємо: $\alpha_1 = \alpha_2$ тому :

$$\varphi_C = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln tg\frac{\pi}{3} - \ln tg\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\frac{\pi}{3}.$$

Робота переміщення заряду qз точки C на нескінченність:

$$A = q(\varphi_C - \varphi_\infty) = q\varphi_c,$$

де потенціал поля на нескінченності $\varphi_C = 0$. Розрахуємо:

$$\varphi_C = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}55}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}98 \cdot 10^3 \text{ В}; \quad A = 10^{-5} \cdot 1978 \approx 0{,}02 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $\varphi_C = 1{,}98 \cdot 10^3$ В, $A = 0{,}02$ Дж.

Задача 5. Електричне поле створюється точковим диполем, електричний момент якого $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м. Знайти роботу A_{12}сил поля по переміщенню заряду $q = +0{,}1$ Кл з точки 1 (рис.8.5), яка розташована на осі диполя на відстані $r_1 = 0{,}1$ м від його центра з боку позитивного заряду, в точку 2, яка розташована на осі диполя на відстані $r_2 = 0{,}2$ м від його центра.

Дані: $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м, $q = +0{,}1$ Кл, $r_1 = 0{,}1$ м, $r_2 = 0{,}2$ м.

Знайти: A_{12}.

Аналіз і розв'язання

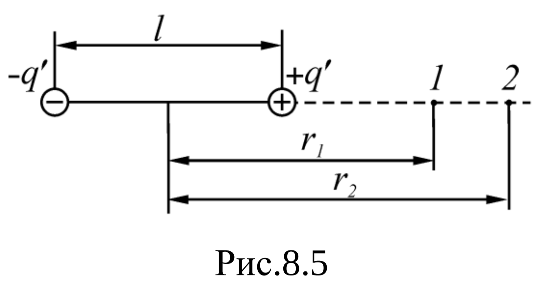

Рис.8.5

Для визначення роботи сил поля скористаємося співвідношенням

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) .(8/3)$$

З принципу суперпозиції полів випливає, що потенціал будь-якої точки електричного поля диполя:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-\frac{l}{2}} - \frac{q}{r+\frac{l}{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ql}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)}. \qquad (8.4)$$

Враховуючи, що для точкового диполя $l \ll r$, можна знехтувати значенням $\frac{l^2}{4}$ в знаменнику, з формул (8.3) та (8.4) одержимо:

$$A_{12} = \frac{q\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right);$$

$$A_{12} = \frac{0{,}1\cdot 2\cdot 10^{-14}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right) = 2{,}7\cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A_{12} = 2{,}7\cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 6. Тонкий диск радіусом R рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ. Знайти потенціал і напруженість поля в точці A, що лежить на осі диска на відстані a від нього.

Дані: R, σ, a.

Знайти: φ , $\vec{E}$.

Аналіз і розв’язання

Для визначення потенціалу в точці A, застосуємо принцип суперпозиції полів. Розіб'ємо диск на елементарні кільця шириною dx(рис.8.6). Площа кільця радіусом x дорівнює $2\pi x\cdot dx$, заряд кільця $dq = 2\pi\sigma x\cdot dx$. Потенціал поля кільця в точці A дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, утворених усіма його точковими елементами, які рівновіддалені від точки A.

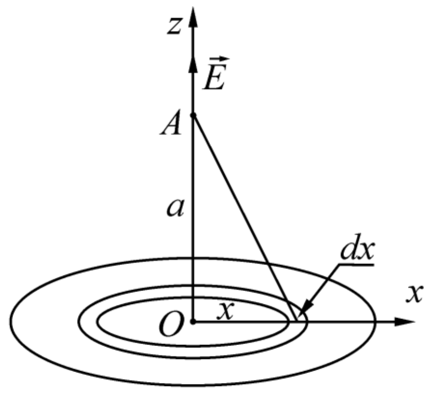

Рис.8.6

Потенціал кільця A:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi\sigma x\cdot dx}{\sqrt{a^2+x^2}}. \qquad (8.5)$$

Потенціал диска визначимо інтегруванням (8.5):

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\int_0^R \frac{x\cdot dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+R^2} - a\right).$$

Враховуючи симетрію, можна бачити, що вектор напруженості електричного поля в точці Aспрямований уздовж осі диска, тому, розглядаючи a як змінну, отримаємо $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{da}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k},$$

де $\vec{k}$ – орт, спрямований вздовж осі z.

Відповідь: $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right)$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k}$.

8.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Відстань l між вільними зарядами $q_1 = 180$ нКл і $q_2 = 720$ нКл дорівнює 60 см. Який негативній заряд q_3 потрібно розташувати між вказаними зарядами, щоб система зарядів знаходилася в рівновазі. Визначити його відстань від заряду q_1.

Відповідь: $q_3 = -8 \cdot 10^{-8}$ Кл, $l_1 = 20$ см від заряду q_1.

Задача 2. У вершинах квадрата знаходяться однакові заряди $q = 0{,}33$ нКл. Який заряд q_1 необхідно розташувати в центрі квадрата, щоб система була в рівновазі?

Відповідь: $q_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)q = -0{,}287$ нКл.

Задача 3. Тонкий стрижень довжиною $l = 10$ см рівномірно заряджений. Лінійна густина τ заряду дорівнює 1 мкКл/м. На продовженні осі стрижня на відстані $a = 20$ см від ближнього його кінця знаходиться точковий заряд $q = 100$ нКл. Визначити силу F взаємодії зарядженого стрижня і точкового заряду.

Відповідь: $F = \frac{q\tau l}{4\pi\varepsilon_0 (l + a)a} = 1{,}5$ мН.

Задача 4. Тонке напівкільце радіусом $R = 10$ см несе рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 1$ мкКл/м. У центрі кривизни півкільця розташовано заряд $q = 20$ нКл. Визначити силу F взаємодії точкового заряду і зарядженого напівкільця.

Відповідь: $F = \frac{q \cdot \tau}{2\pi\varepsilon_0 R} = 3{,}6$ мН.

Задача 5. Електричне поле створене двома точковими зарядами $q_1 = 10$ нКл і $q_2 = -20$ нКл, що розташований на відстані $d = 20$ см один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, віддаленій від першого заряду на $r_1 = 30$ см і від другого на $r_2 = 50$ см.

Відповідь: $E = 280$ В/м.

Задача 6. Електричне поле, створене двома точковими зарядами $q_1 = 40$ нКл і $q_2 = -10$ нКл, що знаходяться на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, віддаленій від першого заряду на $r_1 = 12$ см і від другого на $r_2 = 6$ см.

Відповідь: $E = 23,4 \cdot 10^3$ В/м.

Задача 7. Дві кульки масою $m = 1$ г кожна підвішені на нитках, верхні кінці яких з'єднані. Довжина кожної нитки $l = 10$ см. Які однакові заряди треба передати кулькам, щоб нитки розійшлися на кут $\alpha = 60^\circ$?

Відповідь: $q = 2l\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 mg}{\sqrt{3}}} = 79,3$ нКл.

Задача 8. Довгий прямий тонкий дріт несе рівномірно розподілений заряд. Обчислити лінійну густину τ заряду, якщо напруженість поля на відстані $r = 0,5$ м від дроту навпроти його середини $E = 2$ В/см.

Відповідь: $\tau = 2\pi\varepsilon_0 rE = 5,65$ мКл/м.

Задача 9. Тонке дротяне кільце радіусом r має електричний заряд q. Яким буде приріст сили, яка розтягує дріт, якщо в центрі кільця розташувати точковий заряд q_0?

Відповідь: $\Delta F = \dfrac{q_0 q}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$.

Задача 10. Чотири позитивні точкові заряди, по $q = 7$ нКл кожний, розміщені у вершинах квадрата. Сила, яка діє з боку трьох зарядів на четвертий, дорівнює 20 мкН. Знайти довжину сторони квадрата.

Відповідь: $a = \sqrt{\dfrac{1,9}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 F}} = 0,2$ м.

Задача 11. Дуже довга пряма рівномірно заряджена нитка має заряд τ на одиницю довжини. Знайти модуль і напрямок вектора напруженості електричного поля в точці, яка віддалена від нитки на відстань y і розташована на перпендикулярі до нитки, що проходить через один із її кінців.

Відповідь: $E = \dfrac{\sqrt{2}\tau}{4\pi\varepsilon_0 y}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 12. На відрізку тонкого прямого провідника рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Обчислити потенціал φ, створений зарядом в точці, що розташована на осі провідника та віддалена від ближнього кінця провідника на відстань, що дорівнює довжині цього відрізка.

Відповідь: $\varphi = 62,4$ В.

Задача 13. Тонкий стрижень довжиною $l = 0,1$ м має рівномірно розподілений заряд $q = 1$ нКл. Знайти потенціал φ електричного поля в точці, що міститься на осі стрижня на відстані $a = 0,2$ м від найближчого кінця.

Відповідь: $\varphi = 36,5$ В.

Задача 14. По тонкому кільцю радіусом $R = 10$ см рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Визначити потенціал φ в точці, яка лежить на осі кільця на відстані $a = 5$ см від його центра.

Відповідь: $\varphi = 505$ В.

Задача 15. Тонкі стрижні утворюють квадрат зі стороною $a = 0{,}1$ м. Стрижні заряджені з лінійною густиною $\tau = 1{,}33$ нКл/м. Знайти потенціал φ в центрі квадрата.

Відповідь: $\varphi = 33{,}6$ В.

Задача 16. Два точкових заряди $q_1 = 6$ нКл і $q_2 = 3$ нКл розташовані на відстані $d = 0{,}6$ м один від одного. Яку роботу необхідно виконати зовнішнім силам, щоб зменшити відстань між зарядами вдвічі?

Відповідь: $A = 2{,}7 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 17. Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною $\tau = 0{,}4$ мкКл/м. Визначити різницю потенціалів точок 1 і 2, якщо точка 2 знаходиться в $\eta = 2$ рази далі від нитки, ніж точка 1.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2 = 5$ кВ.

Задача 18. Зігнутий кільцем радіусом $R = 0{,}1$ м тонкий стрижень заряджений з лінійною густиною $\tau = 600$ нКл/м. Яку роботу A потрібно виконати, щоб перенести заряд $q = 5$ нКл з центра кільця в точку, що розташована на осі кільця на відстані $l = 0{,}2$ м від його центра?

Відповідь: $A = 94$ мкДж.

Задача 19. Знайти напруженість електричного поля E в точці $A(4,2)$, потенціал якого залежить від координат за законом $\varphi = a(2x - xy)$, де $a = 4$ В/м.

Відповідь*:* $E = 16$ В/м.

Задача 20. Знайти потенціальну енергію U системи трьох точкових зарядів $q_1 = 10$ нКл, $q_2 = 20$ нКл та $q_3 = -30$ нКл, які розташовані у вершинах рівнобічного трикутника зі стороною $a = 0{,}1$ м.

Відповідь: $U = -63$ мкДж.

Задача 21. Чому дорівнює потенціальна енергія U системи чотирьох однакових точкових зарядів $q = 10$ нКл, які розташовані у кутах квадрата зі стороною $a = 0{,}1$ м.

Відповідь: $U = 48{,}8$ мкДж.

Задача 22. Різниця потенціалів між точками однорідного електричного поля, що лежать на одній силовій лінії на відстані 12 см одна від одної, дорівнює 24 В. Яка напруженість електричного поля?

Відповідь: $E = 200$ В/м.

Задача 23. Напруженість однорідного електричного поля в деякій точці дорівнює 120 В/м. Визначити різницю потенціалів між цією точкою та іншою, яка лежить на цій силовій лінії на відстані $\Delta r = 1$ мм від першої.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}12$ В .

Задача 24. У центрі куба розташований точковий заряд q. Визначити потік Φ_E вектора напруженості крізь: а) повну поверхню куба; б) одну із граней куба.

Відповідь: а) $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ незалежно від положення заряду в кубі;

б) $\Phi_E = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$, якщо заряд розташований в центрі куба.

Задача 25. По нескінченній площині рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma = 1$ мкКл/м^2. На деякій відстані від площини розташовано коло радіусом $r = 10$ см. Знайти потік вектора напруженості поля Φ_E через коло, якщо кут між площиною кола і нескінченною площиною α.

Відповідь: $\Phi_E = 35\cos\alpha$ В·м.

Задача 26. Металевій сфері надали заряд $q = 1$ нКл. Радіус сфери $R = 15$ см. Визначити напруженість поля $\vec{E}$: а) в центрі сфери; б) на поверхні сфери; в) зовні сфери на відстані $r = 10$ см від її поверхні.

Відповідь: а) 0*;* б) 0,4 кВ/м; в) 144 В/м.

Задача 27. Заряд $q = 0,4$ мкКл рівномірно розподілений по об'єму сфери радіусом $R = 3$ см**.** Знайти напруженість поля E на відстані $r_1 = 2$ см і $r_2 = 4$ см від центра сфери. Відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 5$.

Відповідь: $E_1 = 533$ кВ/м, $E_2 = 2,26$ кВ/м.

Задача 28. Нескінченна тонка пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною τ. Користуючись теоремою Гауса, знайти модуль напруженості поля E в залежності від відстані r між ниткою та точкою спостереження.

Відповідь: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Задача 29. Три однакових точкових заряди по 20 нКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. На кожний заряд діє сила $F = 10$ мН. Найти довжину a сторони трикутника.

Відповідь: $a = q\sqrt{\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 F}} = 2,5\cdot 10^{-2}$ м.

Задача 30. Дві однакових кульки вагою $m = 9$ г знаходяться одна від одної на відстані r, яка значно перевищує їх розміри. Які однакові заряди необхідно помістити на кульках, щоб сила їх кулонівської взаємодії врівноважувала силу гравітаційного тяжіння?

Відповідь: $q = m\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} = 7,74\cdot 10^{-13}$ Кл.