9 ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

9.1 Мета заняття

Навчитися розраховувати електричні поля в діелектриках, визначати поверхневі та об'ємні густини вільних і зв'язаних зарядів, поляризованість і діелектричну проникність діелектриків.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [3, розд. 2; 4, розд. 2; 5, §13…16], відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв’язання завдань, наведених як приклад.

Під час вивчення теоретичного матеріалу особливу увагу необхідно звернути на те, що під дією зовнішнього поля діелектрики, незалежно від типу молекул, набувають дипольний момент, тобто поляризуються. Поляризований діелектрик стає джерелом електричного поля, яке накладається на поле вільних зарядів, а самі молекули зазнають дії цього сумарного поля. Для розв'язання задач необхідно мати уяву про вільні і зв'язані заряди, засвоїти смисл теореми Гауса і таких фізичних величин, як вектор поляризації діелектрика, вектор електричного зміщення.

9.3 Основні закони і формули

1. Вектор поляризації (поляризованість) діелектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{\vec{p}_V}{\Delta V},$$

де $\vec{p}_i$ – електричний дипольний момент i-ї молекули, N – кількість молекул в об’ємі ΔV, $\vec{p}_V$ – дипольний момент об’єму ΔV.

2. Зв’язок поляризованості $\vec{P}$ з вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

де χ – діелектрична сприйнятливість діелектрика, ε_0 – електрична стала.

3. Теорема Гауса для поляризованості

– в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -\sum q',$$

де $\oint_S \vec{P}d\vec{S}$ – потік вектора поляризації крізь замкнуту поверхню, $\sum q'$ – алгебраїчна сума зв’язаних зарядів всередині поверхні S.

– в диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{P} = -\rho',$$

де ρ' – об’ємна густина зв’язаних зарядів.

4. Вектор електричного зміщення (електричної індукції)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

5. Теорема Гауса для вектора електричної індукції

– в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q,$$

де $\oint_S \vec{D} d\vec{S}$ – потік вектора електричної індукції, $\sum q$ – алгебраїчна сума сторонніх (вільних) зарядів, охоплених поверхнею S;

– в диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho,$$

де ρ – об’ємна густина вільних зарядів.

6. Зв’язок вектора електричного зміщення з вектором напруженості електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\chi + 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

де $\varepsilon = \chi + 1$ – діелектрична проникність діелектрика.

7. Напруженість поля всередині діелектрика

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

де E_0 – зовнішнє електричне поле.

8. Умови на межі розділу двох діелектриків

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}\ ;\quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1};\quad D_{1n} = D_{2n};$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma;$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

де E_τ, E_n – тангенціальна та нормальна складові вектора напруженості, D_τ, D_n – тангенціальна та нормальна складові вектора електричного зміщення, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – діелектричні проникності двох діелектриків, σ, σ' – поверхневі густини вільних і зв’язаних зарядів на граничній поверхні.

9. Зв'язок вектора поляризованості з поверхневою густиною зв’язаних зарядів

$$P_n = \sigma'.$$

10. Зв'язок вектора електричного зміщення з поверхневою густиною вільних зарядів

$$D_n = \sigma.$$

9.4 Контрольні запитання та завдання

1. У чому відмінність діелектриків від провідників?
2. Що називається поляризацією?
3. Які види поляризації діелектриків ви знаєте?
4. Які заряди називаються зв'язаними, вільними?
5. Дайте визначення поляризованості.
6. Як поляризованість пов'язана з напруженістю електричного поля?
7. Як зв'язана поляризованість діелектрика з поверхневою та об'ємною густинами зв'язаних зарядів?
8. Сформулюйте теорему Гауса для поляризованості в інтегральній та диференціальній формах.
9. Який фізичний смисл діелектричної проникності?
10. Що називається вектором електричного зміщення.
11. Як вектор електричного зсуву пов'язаний з напруженістю електричного поля?
12. Сформулюйте теорему Гауса для вектора електричного зсуву в інтег-ральній та диференціальній формах.
13. Які речовини називаються сегнетоелектриками?
14. За якими ознаками можна відрізнити сегнетоелектрики від звичайних діелектриків?
15. Що називається коерцитивною силою?
16. Що називається залишковою поляризацією?
17. Які умови для напруженості та вектора електричного зсуву на границі розділу двох діелектриків?

9.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Металева куля радіусом $R = 5$ см оточена шаром фарфору завтовшки $d = 2$ см (рис. 9.1). Визначити поверхневі густини σ_1' і σ_2' зв'язаних зарядів відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях діелектрика. Заряд кулі $Q = 10$ нКл.

Дані: $Q = 10$ нКл, $\varepsilon = 6$, $R = 5$ см, $d = 2$ см.

Знайти: σ_1', σ_2' .

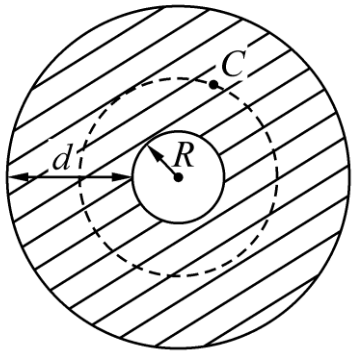

Рисунок 9.1

Аналіз і розв'язання

Наявність шару діелектрика, що оточує металеву кулю, внаслідок поляризації приведе до зміни напруженості поля. Щоб знайти напруженість поля всередині діелектрика, скористаємося теоремою Гауса для вектора зміщення $\vec{D}$.

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q_i \,. \qquad (9.1)$$

Лінії вектора $\vec{D}$, як і силові лінії поля $\vec{E}$, будуть спрямовані радіально. Виберемо всередині діелектричного шару точку C і проведемо через неї допоміжну сферичну поверхню s_C. Тоді

$$\oint_{s_C} \vec{D}d\vec{S} = \oint_{s_C} DdS = D\oint_{s_C} dS = D4\pi r_C^2 \,. \qquad (9.2)$$

Допоміжна поверхня охоплює вільні заряди, що знаходяться на внутрішній кулі, тобто

$$\sum q_i = Q \,. \qquad (9.3)$$

Підставивши (9.2) і (9.3) в (9.1), одержимо:

$$D4\pi r_C^2 = Q;$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r_C^2} \,. \qquad (9.4)$$

Оскільки

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \,, \qquad (9.5)$$

то з (9.4) і (9.5) знаходимо:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_C^2} \,.$$

В діелектричному середовищі, для $R_1 > r > R$, $R_1 = R + d$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \,. \qquad (9.6)$$

У вакуумі, для $r > R_1$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,. \qquad (9.7)$$

З (9.6) і (9.7) випливає, що на межі ($r = R_1$) діелектрик-вакуум вектор напруженості E зазнає розрив і величина стрибка

$$|\Delta E| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \,,$$

де σ' – поверхнева густина зв'язаних зарядів на межі діелектрик-вакуум. Знайдемо поверхневу густину зв'язаних зарядів, що з'явилися на зовнішній і внутрішній поверхнях діелектричного шару.

При $r = R_1$

$$\sigma_2' = \varepsilon_0 |\Delta E| \,. \qquad (9.8)$$

Стрибок ΔE знайдемо з рівнянь (9.7) і (9.6)

$$\left|\Delta E\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right). \qquad (9.9)$$

Тоді поверхневу густину зв'язаних зарядів на зовнішній поверхні діелектрика отримаємо, підставивши (9.9) у (9.8) і врахувавши, що $R_1 = R + d$

$$\sigma_2' = \frac{Q}{4\pi\left(R + d\right)^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) = \frac{10^{-8}}{4\pi\left(7 \cdot 10^{-2}\right)^2} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}13 \text{ мкКл/м}^2.$$

Щоб знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів σ_1' на внутрішній поверхні діелектричного шару (r = R), необхідно звернути увагу, що на цій поверхні, яка межує з поверхнею металевої кулі, крім зв'язаних зарядів, що виникли внаслідок поляризації, є і вільні заряди з поверхневою густиною σ.

Таким чином

$$\sigma + \sigma_1' = \varepsilon_0\left|\Delta E\right|,$$

де $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

$$\left|\Delta E\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} - E_{внутр},$$

де $E_{внутр}$ – поле у металевій кулі.

Але $E_{внутр} = 0$, тому

$$\left|\Delta E\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}.$$

Тоді

$$\sigma_1' = \varepsilon_0\left|\Delta E\right| - \sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} - \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right) = -0{,}255 \text{ мкКл/м}^2.$$

Відповідь: $\sigma_1' = -0{,}255$ мкКл/м^2, $\sigma_2' = 0{,}13$ мкКл/м^2.

Задача 2. Нескінченна пластина з проникністю ε заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ. Товщина пластини дорівнює $2a$. Поза пластиною $\varepsilon_1 = 1$. Вісь x перпендикулярна до пластини, а початок координат збігається з серединою пластини (рис. 9.2). Знайти потенціал φ і поле E_x всередині пластини як функцію x (потенціал у точці O пластини покласти рівним нулю).

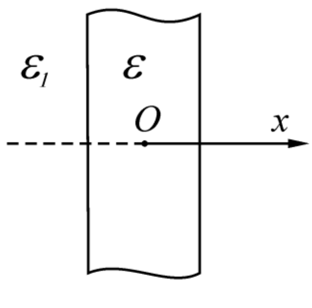

Рисунок 9.2

Дані: ε, ρ, d = $2a$, $\varepsilon_1 = 1$;

Знайти: φ , E_x.

Аналіз і розв'язання

Вектор зміщення $\vec{D}$ і об'ємна густина вільних зарядів зв'язані, як відомо, теоремою Гауса у диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho.$$

Цей самий вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля у пластині.

Або для проекції $\vec{D}$ на вісь x маємо:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \rho. \tag{9.10}$$

І аналогічно

$$D_x = \varepsilon_0\varepsilon E_x. \tag{9.11}$$

З рівняння (9.10) маємо:

$$D_x = \rho x. \tag{9.12}$$

З рівняння (9.11) з урахуванням (9.12) отримаємо для $|x| \le a$:

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0\varepsilon}. \tag{9.13}$$

Для того, щоб визначити потенціал φ всередині діелектричної пластини, скористаємося тим, що вектор напруженості поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi,$$

або для проекції вектора $\vec{E}$ на вісь x маємо:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Звідки з урахуванням (9.13)

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Відповідь: $\varphi(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Задача 3. Скляна пластинка з проник-ністю $\varepsilon_2 = 6$ внесена в однорідне електричне поле з напруженістю $E_1 = 10$ В/м і розташована так, що кут α_1 між нормаллю до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює 30°

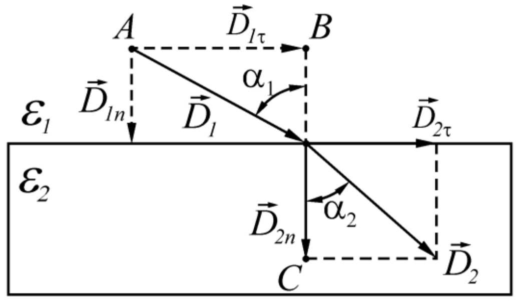

Рисунок 9.3

(рис. 9.3). Знайти: 1) напруженість E_2 поля у пластинці; 2) кут α_2, який це поле утворює з нормаллю до пластинки; 3) густину σ' зв'язаних зарядів, що виникли на поверхнях пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

Дані: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 6$, $E_1 = 10$ В/м, $\alpha_1 = 30°$,

Знайти: E_2, α_2, σ'.

Аналіз і розв'язання

1.З граничних умов, яким задовольняють вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на межі розділу двох однорідних та ізотропних діелектричних середовищ, виходить, що нормальна складова вектора зміщення $\vec{D}$ в обох діелектриках одна й та сама, тобто

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Оскільки $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ то

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n},$$

звідки

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{9.14}$$

Таким чином, нормальні складові вектора $\vec{E}$ на межі розподілу зазнають розриву.

Для тангенціальних складових граничні умови, як відомо, мають такий вигляд:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \tag{9.15}$$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

З рис. 9.3 випливає, що

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}} = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}. \tag{9.16}$$

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}. \tag{9.17}$$

Поділимо (9.16) на (9.17):

$$\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{E_{1\tau} E_{2n}}{E_{1n} E_{2\tau}}.$$

З урахуванням (9.14) і (9.15) одержимо:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{9.18}$$

звідки

$$\text{tg}\alpha_2 = \text{tg}\alpha_1 \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\alpha_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot \mathrm{tg}\alpha_1\right) = \mathrm{arctg}\left(6\cdot \mathrm{tg}30^\circ\right) = 74^\circ .$$

2. Щоб знайти напруженість поля E_2 у пластинці, скористаємося рис. 9.3. З прямокутного трикутника OCD_2

$$D_2 = \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}\right)^2} = D_{2n}\sqrt{1+tg^2\alpha_2} .$$

Оскільки з (9.18) $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\alpha_1 \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, а $D_{1n} = D_{2n}$, то

$$D_2 = D_{2n}\sqrt{1+\left(\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} = D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}} =$$

$$= \frac{D_{2n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1}. \tag{9.19}$$

З прямокутного трикутника ABO

$$D_{1n} = D_1\cos\alpha_1 . \tag{9.20}$$

Враховуючи, що $D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1$, $D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2$ і підставляючи ці вирази, а також вираз (9.20) у формулу (9.19), отримаємо

$$E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1} = 5{,}2\ \text{В/м}.$$

3. Під дією електричного поля E_1 скляна пластинка поляризується і на поверхнях пластини з'являються зв'язані заряди з густиною σ', яка визнача-ється нормальною складовою вектора поляризації $\vec{P}$, тобто

$$\sigma' = P_n .$$

Оскільки

$$P_n = \varepsilon_0\left(\varepsilon_2 - 1\right)E_{2n}, \text{ а } E_{2n} = E_{1n}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

то

$$\sigma' = \left(\varepsilon_2 - 1\right)\varepsilon_0\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n},$$

тобто

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_2 - 1\right)\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1\cos\alpha_1 = 64\ \text{нКл/м}^2.$$

Відповідь: $E_2 = 5{,}2$ В/м, $\alpha_2 = 74^\circ$, $\sigma' = 64$ нКл/м².

9.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. В однорідному електростатичному полі напруженістю 700 В/м перпендикулярно полю розміщена нескінчена плоскопаралельна скляна пластина ($\varepsilon=7$). Визначити: 1) напруженість електростатичного поля всередині пластини; 2) електричне зміщення всередині пластини; 3) поляризованість скла; 4) поверхневу густину зв'язаних зарядів на склі.

Відповідь: $E=100$ В/м, $D=6{,}19$ нКл/м^2, $P=5{,}31$ нКл/м^2, $\sigma'=5{,}31$ нКл/м^2.

Задача 2. Між пластинами плоского конденсатора розміщені два шари діелектрика – слюдяна пластинка ($\varepsilon_1=7$) товщиною 1 мм та парафін ($\varepsilon_2=2$) товщиною 0,5 мм. Визначити: 1) напруженість електростатичних полів у шарах діелектрика; 2) електричне зміщення, якщо різниця потенціалів між пластинами конденсатора 500 В.

Відповідь: $E_1=182$ кВ/м, $E_2=637$ кВ/м, $D=11{,}3$ мкКл/м^2.

Задача 3. Відстань між пластинами плоского конденсатора складає 1 см, різниця потенціалів 200 В. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів ебонітової пластинки, розміщеної на нижній обкладинці конденсатора. Товщина пластини 8 мм.

Відповідь: $\sigma'=253$ нКл/м^2.

Задача 4. Вільні заряди рівномірно розташовані з об'ємною густиною $\rho=5$ нКл/м^3 по кулі радіусом 10 см з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon=5$. Визначте напруженість електростатичного поля на відстанях 5 см та 15 см від центра кулі.

Відповідь: $E_1=1{,}88$ В/м, $E_2=8{,}37$ В/м.

Задача 5. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений парафіном ($\varepsilon=2$). Відстань між пластинами $d=8{,}85$ мм. Яку різницю потенціалів необхідно подати на пластини, щоб поверхнева густина зв'язаних зарядів на парафіні склала $\sigma=0{,}1$ нКл/см^2?

Відповідь: $U=1$ кВ.

Задача 6. Відстань d між пластинами плоского конденсатора дорівнює 2 мм, різниця потенціалів U = 1,8 кВ. Діелектрик – скло ($\varepsilon=7$). Визначити діелектричну сприйнятливість скла і поверхневу густину σ' поляризаційних (зв'язаних) зарядів на поверхні скла.

Відповідь: $\chi=6$, $\sigma'=47{,}7$ мкКл/м^2.

Задача 7. Ебонітова плоскопаралельна пластина розташована в однорід-ному електричному полі напруженістю $E_0=2$ МВ/м. Площина пластини перпендикулярна лініям напруженості. Визначити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на поверхнях пластини.

Відповідь: $\sigma'=\pm\,11{,}8$ мкКл/м^2.

Задача 8. У деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю ε електричне зміщення має значення $\vec{D}$. Чому дорівнює поляризованість $\vec{P}$ у цій точці?

Відповідь: $\vec{P}=\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\vec{D}$.

Задача 9. Поляризованість нескінченної плоско-паралельної пластини з парафіну (ε=2), розміщеної перпендикулярно до напрямку електричного поля, дорівнює 0,44 нКл/м^2. Визначити напруженість поля E_0.

Відповідь: E_0 =100 В/м.

Задача 10. Дві нескінченні паралельні площини заряджені з густиною $+\sigma$ і $-\sigma$. Спочатку вони перебувають у вакуумі. Потім проміжок між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ε. Що відбувається при цьому у проміжку з напруженістю $\vec{E}$ поля, зміщенням $\vec{D}$, різницею потенціалів U між площинами?

Відповідь: а)$\vec{E}$ зменшується у ε разів; б)$\vec{D}$ залишається незмінним; в)U зменшується в ε разів.

Задача 11. Знайти напруженість $\vec{E}$ і електричне зміщення $\vec{D}$ всередині нескінченної плоскопаралельної пластини з фарфору (ε=5), яку розмістили перпендикулярно до напрямку поля напруженістю E_0=200 В/м.

Відповідь: E = 40 В/м, D =1,77 нКл/м^2.

Задача 12. Визначити, за якою напруженості E середнього макроскопіч-ного поля у діелектрику (ε=3) поляризованість P досягає значення, що дорівнює 200 мкКл/м^2.

Відповідь: $E = 11{,}3$ МВ/м.

Задача 13. Діелектрик розмістили в електричному полі напруженістю E_0=20 кВ/м. Чому дорівнює поляризованість P діелектрика, якщо напруженість E середнього макроскопічного поля у діелектрику виявилась рівною 4 кВ/м?

Відповідь: $P = 141{,}6$ нКл/м^2.

Задача 14. У середині кулі з однорідного ізотропного діелектрика з ε = 5 утворене однорідне електричне поле з напруженістю E = 100 В/м. Знайти максимальну поверхневу густину σ'_{max} зв’язаних зарядів і середнє значення σ' зарядів одного знака.

Відповідь: $\sigma'_{max} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3{,}5$ нКл/м^2, $\langle\sigma'\rangle = \dfrac{\sigma'_{max}}{2} = 1{,}75$ нКл/м^2.

Задача 15. Напруженість електричного поля біля поверхні Землі $E_0 = -130$ В/м (знак мінус показує, що вектор напруженості спрямований до центра Землі). На висоті h=0,5 км напруженість $E_1 = -50$ В/м. Обчислити об’ємну густину ρ електричних зарядів в атмосфері, вважаючи, що вона до висоти h є сталою. Радіус Землі $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Відповідь: $\rho = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м^3.

Задача 16. У проміжок між різнойменними зарядженими площинами ввели пластину з діелектрика, яка не несе сторонніх зарядів (рис. 9.4). Штриховою лінією на рисунку показана уявна замкнена поверхня, яка частково проходить всередині діелектрика, частково поза ним. Чому дорівнює потік вектора D через цю поверхню?

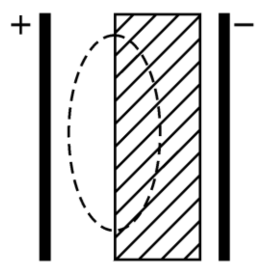

Рисунок 9.4

Відповідь: $\Phi_D = 0$.

Задача17. Всередині діелектрика відомі його поляризованість $\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$ і напруженість поля $\vec{E} = \dfrac{a}{\varepsilon_0}(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$, де a – стала. Визначити густини зв'язаних та сторонніх зарядів всередині діелектрика. Чому дорівнює діелектрична проникність матеріалу?

Відповідь: $\rho' = -12a$, $\rho = 18a$, $\varepsilon = 3$.

Задача 18. Проміжок між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком. Товщина проміжку $d = 1$ мм, напруга на пластинах конденсатора $U = 1000$ В, а поверхнева густина індукованого на діелектрику заряду дорівнює 11,5 мкКл/м^2. Обчислити діелектричну проникність матеріалу, що заповнює проміжок між пластинами.

Відповідь: $\varepsilon = 2{,}3$.

Задача 19. Поверхнева густина зв'язаних зарядів на діелектричній пластині, що розміщена між пластинами плоского конденсатора дорівнює $\sigma' = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. Пластини конденсатора притягуються одна до одної з силою $F = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н. Площа пластин дорівнює $S = 100$ см^2. Визначити проникність діелектричної пластини.

Відповідь: $\varepsilon = 7$.

Задача 20. Однорідний діелектрик має вигляд сферичного шару. внутрішній та зовнішній радіуси якого дорівнюють a і b. Нарисуйте і поясніть графіки залежності напруженості E і потенціалу φ електричного поля від відстані r до центра системи, якщо діелектрику надати позитивний сторонній заряд, що розподілений рівномірно: 1) по внутрішній поверхні шару; 2) по об'єму шару.

Задача 21. Сферичний шар радіусами $R_1 = 3$ см і $R_2 = 5$ см рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho = 3$ мкКл/м^3. Діелектрична проникність шару $\varepsilon_1 = 5$, діелектрична проникність середовища зовні шару ($r > R_2$) $\varepsilon_2 = 2{,}5$. Знайти індукцію і напруженість електричного поля: в центрі кулі; між поверхнями шару на відстані 4 см від центра; зовні шару на відстані 4 см від зовнішньої поверхні. Чому дорівнює різниця потенціалів між поверхнями шару?

Відповідь: 1) $D = E = 0$; 2) $D = 23$ нКл /м^2, $E = 523$ В/м;

3) $D = 12{,}1$ нКл /м^2, $E = 550$ В/м; 4) $\Delta\varphi = 9{,}94$ В.

Задача 22. Система з двох однорідних та ізотропних діелектриків, що розділені плоскою межею, розміщена в електричному полі. Напруженість поля у першому діелектрику утворює з нормаллю до межі розподілу кут $\alpha_1 = 20^\circ$.

У другому діелектрику ($\varepsilon_2 = 3$) кут α_2 між нормаллю до межі розподілу і напрямком поля в ньому складає $28^\circ 36'$. Визначити проникність ε_1 першого діелектрика.

Відповідь: $\varepsilon_1 = 2$.

Задача 23. Біля поверхні фарфору ($\varepsilon = 6$) напруженість поля у повітрі дорівнює $E = 2 \cdot 10^4$ В/м. Напрямок поля утворює з нормаллю до поверхні кут $\alpha = 40°$. Визначити: 1) кут β між напрямком поля та нормаллю у фарфорі;
2) напруженість поля у фарфорі; 3) поверхневу густину зв'язаних зарядів у фарфорі.

Відповідь: $\beta = 78° 46'$; $E = 1{,}31 \cdot 10^4$ В/м; $\sigma' = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2.

Задача 24. Поблизу межі розділу скло-вакуум напруженість електричного поля у вакуумі $E_0 = 10$ В/м, кут між вектором напруженості та нормаллю до межі $\alpha_0 = 30^\circ$. Знайти напруженість поля у склі, кут між вектором напруженості та нормаллю до межу розділу у склі, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі розділу.

Відповідь: $tg\alpha = \varepsilon tg\alpha_0, E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2\alpha_0}$,
$\sigma' = \varepsilon_0 (1 - 1/\varepsilon) E_0 \cos\alpha_0$.

Задача 25. За деяких умов поляризованість нескінченої незарядженої пластини має вигляд $\vec{P} = \vec{P}_0 (1 - x^2/d^2)$, де P_0 − вектор, перпендикулярний до пластини, x – відстань від середини пластини, d − її напівтовщина. Знайти напруженість електричного поля всередині пластини та різницю потенціалів між її поверхнями.

Відповідь: $\vec{E} = -\vec{P}_0 (1 - x^2/d^2) / \varepsilon_0$, $U = \dfrac{4 P_0 d}{3\varepsilon_0}$.

Задача 26. Точковий заряд q розташований у центрі кулі з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ε. Знайти поляризованість $\vec{P}$ як функцію радіус-вектора $\vec{r}$ відносно центра сфери, а також зв'язаний заряд всередині кулі.

Відповідь: $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$, $q' = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot q$.

Задача 27. Нескінчена пластина з діелектрика з проникністю ε заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ. Товщина пластини $2a$. Поза пластиною $\varepsilon = 1$. Знайти: а) поляризованість $\vec{P}$ діелектрика як функцію x; б) поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на лівій ($x = -a$) і правій ($x = +a$) межах пластини; в) об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів.

Відповідь: а) $\vec{P} = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\rho x \vec{i}$; б) на обох поверхнях $\sigma' = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\rho a$;
в) $\rho' = \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)\rho$.

Задача 28. Нескінченна пластина з ізотропного діелектрика розміщена в перпендикулярному до неї однорідному зовнішньому електричному полі напруженістю E_0. Товщина пластини a, проникність змінюється лінійно від значення ε_1 на лівій межі до ε_2 на правій. Поза пластиною $\varepsilon = 1$ (рис. 9.5). Знайти: а) $\nabla\vec{E}$ всередині пластини як функцію x; б) потік вектора $\vec{E}$ крізь уявну циліндричну поверхню, з твірними, паралельними осі x; основи циліндра розміщені у точках $x_1 = -a/2$, $x_2 = a/2$; площа кожної основи дорівнює S; в) об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів як функцію x.

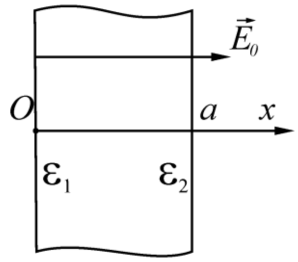

Рисунок 9.5

Відповідь: а) $\nabla\vec{E} = -\dfrac{E_0 k}{\left(\varepsilon_1 + kx\right)^2}$, де $k = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}$;

б) $\Phi_E = SE_0\left[\dfrac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - 1\right]$;

в) $\rho' = -\dfrac{\varepsilon_0 E_0 k}{\left(\varepsilon_1 + kx\right)^2}$.

Задача 29. Знайти ρ' усередині пластини з задачі 18, якщо $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, a=1см, E_0=3кВ/м.

Відповідь: $\rho' = -\dfrac{\left(4\varepsilon_0 E_0/a\right)\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)}{\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\right)^2} = -0{,}59$ мкКл/м^2.

Задача 30. Нескінченна діелектрична пластина товщиною a розміщена у зовнішньому, перпендикулярному до пластини, однорідному електричному полі з напруженістю E_0. Проникність пластини змінюється за деяким законом $\varepsilon(x)$, причому $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ де x=0 знаходиться на одній грані, а вісь x спрямована перпендикулярно до пластини від цієї грані до іншої. Який вигляд повинна мати функція $\varepsilon(x)$, щоб густина об'ємних зв'язаних зарядів змінювалася за законом $\rho' = \rho_1'/(1 + \alpha x)$ де ρ_1' і α сталі? Поза пластиною $\varepsilon = 1$.

Відповідь: $\varepsilon(x) = \alpha\varepsilon_1\varepsilon_0 E_0\left[\varepsilon_1\rho_1' \ln\left(1 + \alpha x\right) + \alpha\varepsilon_0 E_0\right]$.