МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
«ФІЗИКА»

ЧАСТИНА 2

для студентів денної форми навчання
напрямів 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика», 6.040303 «Системний аналіз», 6.050101 «Комп’ютерні науки», 6.050102 «Комп’ютерна інженерія», 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050201 «Системна інженерія», 6.050202 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології», 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 «Електронні пристрої та системи», 6.050803 «Акустотехніка», 6.050901 «Радіотехніка», 6.050902 «Радіоелектронні апарати», 6.050903 «Телекомунікації», 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», 6.051002 «Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.051004 «Оптотехніка», 6.051402 «Біомедична інженерія», 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», 6.170102 «Системи технічного захисту інформації», 6.170103 «Управління інформаційною безпекою»

Електронне видання

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою фізики.
Протокол № 6 від 30.12.2013 р.

ХАРКІВ 2014

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Фізика» (Частина 2) для студентів денної форми навчання напрямів 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика», 6.040303 «Системний аналіз», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія», 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050201 «Системна інженерія», 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 «Електронні пристрої та системи», 6.050803 «Акустотехніка», 6.050901 «Радіотехніка», 6.050902 «Радіоелектронні апарати», 6.050903 «Телекомунікації», 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», 6.051002 «Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.051004 «Оптотехніка», 6.051402 «Біомедична інженерія», 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», 6.170102 «Системи технічного захисту інформації», 6.170103 «Управління інформаційною безпекою» [Електронне видання] / Упоряд.: Стороженко В. О., Коваленко О. М., Кібець І. М., Орел Р. П., Малик С. Б. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 138 с.

Упорядники: В. О. Стороженко,
О. М. Коваленко,
І. М. Кібець,
Р. П. Орел,
С. Б. Малик.

Рецензент: С. М. Мешков, канд. техн. наук, доц. каф. фізики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вміння розв’язувати задачі – один з основних критеріїв засвоєння курсу фізики. Воно свідчить про здібність студента до аналізу фізичних процесів та явищ, про розуміння основних фізичних ідей, вміння знаходити зв’язок між окремими явищами.

Мета запропонованих методичних вказівок – допомогти студентам під час підготовки до практичних занять з фізики.

Дані вказівки є заключною (другою) частиною методичних вказівок до практичних занять з курсу загальної фізики і включають 12 тем, що відповідають робочій програмі курсу фізики.

Методичний матеріал до кожного практичного заняття містить стислі теоретичні відомості з теми заняття (основні закони та формули). Для кожної теми наведено контрольні запитання та завдання, які можна використовувати для самоперевірки та експрес-контролю на заняттях.

Методичні вказівки містять типові задачі з кожної теми та приклади їх розв’язування, а також задачі, які рекомендовані для самостійної роботи студентів.

1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Мета заняття

Користуючись основними законами магнетизму, навчитися розв'язувати задачі з розрахунку кількісних характеристик магнітного поля, дії магнітного поля на струми та заряджені частинки.

1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до заняття необхідно вивчити теоретичний матеріал, наведений у конспекті лекцій та підручнику [1, розд. 5; 3, §39-50, 72-76; 5, розд. 5.1]. Зверніть увагу на зміст та межі застосування основних законів і формул цього розділу.

1.3 Основні закони і формули

1. Закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3},$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, яке створюється елементом провідника довжиною dl зі струмом; μ_0 – магнітна стала; μ – магнітна проникність (у вакуумі $\mu=1$); $d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем dl провідника і збігається за напрямком зі струмом; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від середини елемента провідника до точки, в якій визначається магнітна індукція; I – сила струму.

Модуль вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I dl \sin\alpha}{r^2},$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

2. Зв'язок магнітної індукції $\vec{B}$ із напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

У вакуумі ($\mu=1$)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

3. Магнітна індукція у центрі колового провідника зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R},$$

де R – радіус колового витка.

4. Магнітна індукція у будь-якій точці на осі колового струму

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}},$$

де h – відстань від центра витка до точки, в якій визначається магнітна індукція.

5. Магнітна індукція поля, що створюється нескінченно довгим прямим провідником зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{R},$$

де R – відстань від осі провідника.

6. Магнітна індукція поля, що створюється відрізком провідника

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right),$$

де позначення I, r_0, φ_1, φ_2 зрозумілі з рис. 1.1 (вектор $\vec{B}$ напрямлений перпендикулярно площині рисунка).

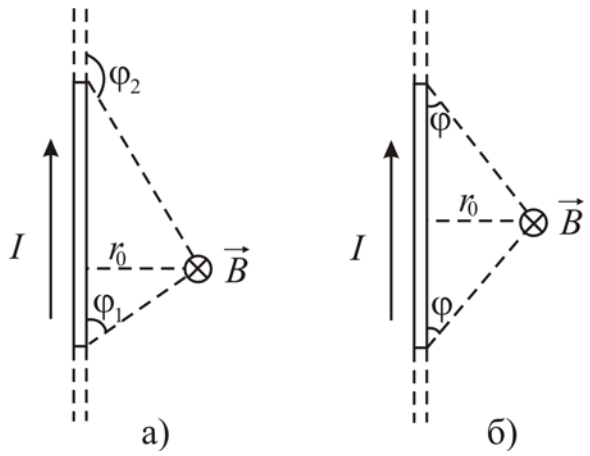

Рисунок 1.1

При симетричному розташуванні кінців провідника відносно точки, в якій визначається магнітна індукція (рис. 1.1, б)

$$-\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi.$$

Отже,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\varphi.$$

7. Магнітна індукція поля всередині соленоїда

$$B = \frac{\mu_0 \mu N I}{l} = \mu_0 \mu n I,$$

де N – кількість витків соленоїда; l – довжина соленоїда; I – сила струму в одному витку, n – щільність намотки, тобто кількість витків, що припадають на одиницю довжини соленоїда.

8. Принцип суперпозиції магнітних полів

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i ,$$

де $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції поля, яке породжується декількома рухомими зарядами (струмами); $\vec{B}_i$ – вектор магнітної індукції поля, яке породжується окремим рухомим зарядом (струмом).

У випадку накладання двох полів

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 ,$$

а модуль вектора магнітної індукції

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\alpha} ,$$

де α – кут між векторами.

9. Закон Ампера. Сила, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі

$$\vec{F} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right],$$

де I – сила струму, $\vec{l}$ – вектор, який за модулем дорівнює довжині l провідника і за напрямком збігається з напрямком струму; $\vec{B}$ – магнітна індукція поля.

Модуль вектора сили $\vec{F}$

$$F = IBl\sin\alpha ,$$

де α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$.

Сила, що діє на елемент провідника $d\vec{l}$ зі струмом I в магнітному полі

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right],$$

або за модулем

$$dF = IBdl\sin\alpha ,$$

де α – кут між $d\vec{l}$ і $\vec{B}$.

10. Сила взаємодії двох прямих паралельних провідників зі стумами I_1 та I_2:

$$F = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}l ,$$

де l – довжина провідників, d – відстань між ними.

11. Магнітний момент плоского контуру зі струмом

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} ,$$

де I – сила струму у плоскому контурі, S – площа контуру, $\vec{n}$ – одиничний вектор позитивної нормалі до контуру.

12. Механічний момент, який діє на рамку зі струмом із боку магнітного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right],$$

$$M = p_mB\sin\alpha ,$$

де α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

13. Сила Лоренца

$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

або за модулем

$$F = q\upsilon B \sin\alpha,$$

де $\vec{\upsilon}$ – швидкість зарядженої частинки, q – заряд частинки, α – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$.

Якщо частинка знаходиться одночасно в електричному і магнітному полях, то сила, що діє на частинку, має вигляд

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

14. Теорема про циркуляцію вектора $\vec{B}$ (закон повного струму для магнітного поля у вакуумі)

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

де n – кількість провідників зі струмом, які охоплені контуром L довільної форми.

15. Потік вектора магнітної індукції (магнітний потік) крізь площину dS

$$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S} = BdS\cos\alpha = B_n dS,$$

де $B_n = B\cos\alpha$ – проекція вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі до площини dS (α – кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{B}$), $d\vec{S} = \vec{n}dS$ – вектор, модуль якого дорівнює dS, а напрямок збігається з напрямком нормалі $\vec{n}$ до площини.

Магнітний потік крізь довільну поверхню

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

16. Повний потік (потокозчеплення)

$$\Psi = N\Phi,$$

де N – кількість витків соленоїда або тороїда з рівномірним намотуванням, які щільно прилягають один до одного.

17. Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі

$$dA = Id\Phi.$$

18. Робота з переміщення контуру зі струмом

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

де $d\Phi_1$ – потік, який пронизує контур у початковому положенні, $d\Phi_2$ – у кінцевому.

1.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що називають магнітним полем? Яка його природа та кількісні характеристики?

2. Яку величину називають вектором магнітної індукції? Як визначити її напрямок?

3. Як пов'язані магнітна індукція $\vec{B}$ та напруженість $\vec{H}$ магнітного поля?

4. Сформулюйте закон Біо-Савара-Лапласа.

5. Сформулюйте принцип суперпозиції магнітних полів.

6. Чому дорівнює магнітна індукція у центрі колового провідника зі струмом?

7. Чому дорівнює магнітна індукція поля, що створюється нескінченно довгим прямим провідником зі струмом? Відрізком провідника?

8. Опишіть дію магнітного поля на прямолінійний провідник зі струмом. Сформулюйте закон Ампера. Як визначити напрямок сили Ампера?

9. Чому дорівнює магнітний момент контуру зі струмом?

10. Чому дорівнює механічний момент рамки зі струмом у магнітному полі?

11. Розрахуйте силу взаємодії двох провідників зі струмами.

12. Що називають магнітним потоком? В яких одиницях його вимірюють?

13. Чому дорівнює робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі?

14. Сформулюйте закон повного струму.

15. Чому дорівнює сила, що діє на рухомий заряд у магнітному полі? В електричному і магнітному полях одночасно?

16. Як визначити напрямок сили Лоренца?

17. Розрахуйте магнітне поле всередині соленоїда.

1.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. По двох довгих паралельних нескінченних провідниках у протилежних напрямках проходять струми 90 і 70 А. Визначити напруженість магнітного поля, яке створюється струмами у точці *M*, що лежить на відстані 12 см від першого і 14 см від другого провідників, якщо відстань між ними 10 см.

Дані: $I_1 = 90$ А; $I_2 = 70$ А;

$R_1 = 12$ см; $R_2 = 14$ см; $d = 10$ см;

$H - ?$

Аналіз і розв'язання

Припустимо, що провідники спрямовані перпендикулярно до площини рис. 1.2. Струм I_1 йде від нас, а I_2 до нас. Кожний струм створює у точці *M* напруженість магнітного поля $H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi R_1}$; $H_2 = \dfrac{I_2}{2\pi R_2}$. Напрям векторів $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ визначається за правилом свердлика і вказаний на рис. 1.2. Згідно з принципом суперпозиції величина напружeності поля $\vec{H}$ у точці *M* дорівнює геометричній сумі напруженостей $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ (за теоремою косинусів):

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - 2H_1H_2\cos\beta}\,. \qquad (1.1)$$

Обчислення

$$H_1 = \frac{90}{2\pi \cdot 0{,}12} = 120 \text{ (А/м)}; \; H_2 = \frac{70}{2\pi \cdot 0{,}14} = 80 \text{ (А/м)}.$$

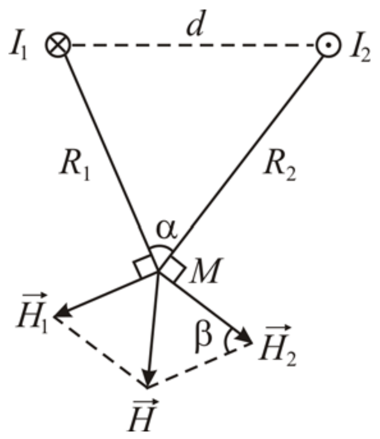

Рисунок 1.2

З (1.1) визначимо $\cos\beta$ (оскільки $\alpha = \beta$, то $\cos\beta = \cos\alpha$)

$$\cos\alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2} = \frac{\left(144 + 196 + 100\right) \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 0{,}71$$

Отже

$$H = \sqrt{14400 + 6400 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot 0{,}71} = 84 \text{ А/м}.$$

Задача 2. Круглу рамку зі струмом площею 1 см^2 закріплено паралельно магнітному полю, і на неї діє обертальний момент $M = 10^{-5}$ Н·м при індукції 0,05 Тл. Рамку звільнили, після повороту на 90° її кутова швидкість дорівнює 20 с$^{-1}$. Визначити струм I, що проходить по рамці, і момент інерції рамки відносно діаметра.

Дані: S =1см^2; $M = 10^{-5}$ Н·м;
$B =$ 0,05 Тл; $\omega =$ 20 с$^{-1}$;
I – ? J – ?

Аналіз і розв'язання

Коли площина рамки розміщена паралельно полю, на неї діє максимальний обертальний момент $M = p_m B = BIS$, де B – індукція поля; I – сила струму; S – площа рамки; $p_m = IS$ – магнітний момент. Звідси

$$I = \frac{M}{BS}.$$

Під час повороту рамки виконується робота

$$A = I\Delta\Phi,$$

де $\Delta\Phi = BS$ – зміна магнітного потоку, який пронизує площину рамки. Отже, $A = IBS$. Ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії рамки:

$$IBS = J\omega^2/2 - J\omega_0^2/2 = J\omega^2/2,$$

де J – момент інерції рамки; ω – кінцева кутова швидкість; $\omega_0 = 0$ – початкова кутова швидкість. Звідси

$$J = \frac{2IBS}{\omega^2},$$

оскільки $M = BIS$, то $J = \dfrac{2M}{\omega^2}$.

Обчислення

$$I = \frac{10^{-5}}{0{,}05 \cdot 10^{-4}} = 2\ \text{А},\ J = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{20^2} = 5 \cdot 10^{-8}\ (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

Задача 3. Соленоїд без осердя з одношаровою обмоткою з дроту діаметром 0,5 мм завдовжки 0,6 м має поперечний переріз 0,006 м^2. Який струм проходить по обмотці при напрузі 10 В, якщо за 0,001 с в обмотці виділяється кількість теплоти, яка дорівнює енергії поля всередині соленоїда? Поле вважати однорідним.

Дані: $d = 0{,}5$ мм ; $l = 0{,}6$ м; $S = 0{,}006$ м^2;

$U = 10$ В; $t = 0{,}001$ с; $\mu = 1$;

I – ?

Аналіз і розв'язання

Під час проходження струму I при напрузі U в обмотці за час t виділиться кількість теплоти

$$Q = IUt. \tag{1.2}$$

Енергія поля всередині соленоїда

$$W = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 Sl, \tag{1.3}$$

де S – переріз; l – довжина соленоїда.

Напруга поля всередині соленоїда

$$H = nI,$$

де $n = \dfrac{N}{l} = \dfrac{N}{Nd} = \dfrac{1}{d}$ – щільність намотки витків соленоїда; N – кількість витків; d – діаметр дроту. Якщо витки щільно прилягають один до одного, то $l = Nd$.

Після підстановки в (1.3) значення H за умовою задачі можна дорівняти праві частини (1.2) та (1.3), тоді одержимо:

$$IUt = \frac{\mu\mu_0 I^2 Sl}{2d^2}.$$

Звідси

$$I = \frac{2Ud^2 t}{\mu\mu_0 Sl}.$$

Обчислення

$$I = \frac{2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}001}{1 \cdot 12{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}6} = 1{,}1 \text{ (A)}.$$

Задача 4. Електрон, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 100$ В, потрапив в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл під кутом $\alpha = 30°$ до напрямку ліній індукції. Визначити радіус R та крок h траєкторії руху електрону у вигляді гвинтової лінії.

Дані: $U = 100$ В; $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл; $\alpha = 30°$;

$R - ?$

Аналіз і розв'язання

На заряджену частинку, що рухається у магнітному полі, діє сила Лоренца, перпендикулярна векторам індукції $\vec{B}$ і швидкості $\vec{\upsilon}$:

$$F = |e| \upsilon B \sin\alpha = |e| \upsilon_{\perp} B$$

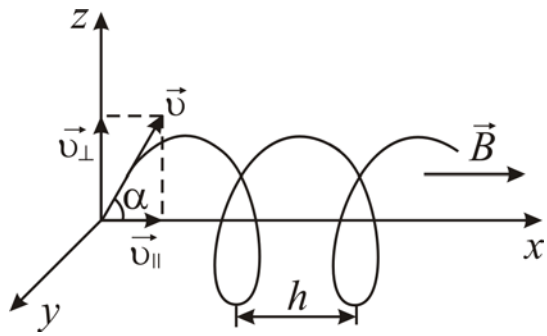

Рисунок 1.3

Складова сили Лоренца у напрямку $\vec{B}$ дорівнює нулю. Отже, електрон, що влетів у магнітне поле, рухатиметься по колу у площині, перпендикулярній лініям індукції зі швидкістю $\upsilon_{\perp}$ (рис. 1.3) і одночасно вздовж поля зі швидкістю $\upsilon_{||}$:

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \sin\alpha; \ \upsilon_{||} = \upsilon \cos\alpha .$$

Внаслідок одночасного руху по колу і прямій електрон рухатиметься по гвинтовій лінії.

Радіус кола знайдемо з таких міркувань. Магнітна сила для частинки є доцентровою. Таким чином,

$$|e| \upsilon_{\perp} B = \frac{m \upsilon_{\perp}^2}{R} .$$

Звідки радіус гвинтової лінії

$$R = \frac{\upsilon m \sin\alpha}{|e| B} .$$

Кінетична енергія електрона, яку він набув у прискорюючому електричному полі, дорівнює роботі, яку здійснило поле над частинкою. Тому

$$m\upsilon^2 / 2 = |e| U . \qquad (1.4)$$

Маючи швидкість з виразу (1.4), отримаємо:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|e|}}\sin\alpha .$$

Крок гвинтової лінії дорівнює шляху, що пройшов електрон у напрямку $\vec{B}$ зі швидкістю $\upsilon_{||}$ за час, протягом якого електрон здійснює один оберт,

$$h = \upsilon_{||}T ,$$

де $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon_{\perp}}$.

Отже,

$$h = \upsilon_{||}\frac{2\pi R}{\upsilon_{\perp}} = 2\pi R ctg\alpha .$$

Задача 5. Протон, прискорений різницею потенціалів $U = 500$ кВ пролітає поперечне однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0{,}51$ Тл. Ширина області з полем $d = 10$ см (рис. 1.4). Знайти кут відхилення протона від початкового напрямку руху.

Дані: $U = 500$ кВ; $B = 0{,}51$ Тл; $d = 10$ см;

$\alpha - ?$

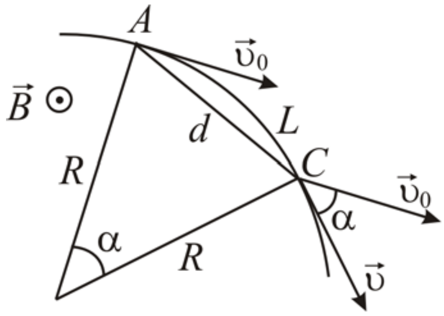

Рисунок 1.4

Аналіз і розв'язання

Перш ніж потрапити в однорідне магнітне поле протон рухається у прискорюючому електричному полі. Робота сил електричного поля йде при цьому на збільшення його кінетичної енергії

$$eU = \frac{m_p\upsilon_0^2}{2}, \tag{1.5}$$

де e – заряд протона; m_p – його маса; υ_0 – швидкість, набута протоном в електричному полі.

З рівняння (1.5)

$$\upsilon_0 = \sqrt{2eU/m_p} .$$

На протон, що рухається у магнітному полі, діє сила Лоренца $\vec{F} = e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$, яка надає протону нормальне прискорення:

$$a_n = F/m_p = e\upsilon B/m_p = \upsilon_0^2/R .$$

Отже,

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_p}{e}} = 2\,(\text{м}).$$

Вийшовши з магнітного поля, протон продовжуватиме рух по прямій під певним кутом α до напрямку вектора початкової швидкості $\vec{\upsilon}_0$. Вектори $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\upsilon}_0$ перпендикулярні радіусам відповідно у точках А і С (рис. 1.4), тому кут можна знайти зі співвідношення $R\alpha = L$, де L – довжина дуги.

Для $R >> d$, що має місце у цьому випадку, можна припустити $AC \approx d$. Таким чином

$$\alpha \approx d/R = 0{,}51(\text{рад}).$$

1.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. По двох паралельних провідниках проходять струми 3 А і 4 А. Відстань між провідниками 14 см. Знайти геометричне місце точок, в яких напруженість магнітного поля дорівнює нулю. Розглянути два випадки надходження струму: а) в одному напрямку; б) у протилежних напрямках.

Відповідь: а) 6 см від меншого; б) 42 см від меншого.

Задача 2. По двох паралельних провідниках, розміщених на відстані 12 см один від одного, проходять струми по 30 А. Визначити напруженість магнітного поля в точці, яка лежить на відстані 10 см від кожного провідника, якщо струми проходять: а) в одному напрямі; б) у протилежних напрямках.

Відповідь: $H_1 =$76,4 А/м; $H_2 =$57,3 А/м.

Задача 3. Два колових провідники, радіусом 4 см кожний, розташовані у паралельних площинах на відстані 0,1 м. По кожному провіднику проходить струм $I_1 = I_2 = 2$ А. Знайти напруженість магнітного поля на осі кіл у точці, яка знаходиться на однаковій відстані від кожного провідника. Задачу обчислити для випадків, коли струми у провідниках мають: а) однаковий напрямок; б) протилежні напрямки.

Відповідь: $H = 12{,}2$ А/м ; $H = 0$.

Задача 4. Провідник завдовжки 1 м має вигляд квадрата. По ньому проходить струм 10 А. Знайти напруженість магнітного поля у центрі квадрата.

Відповідь: $H =$35,8 А/м.

Задача 5. Соленоїд довжиною 30 см має 1000 витків. Знайти напруженість магнітного поля всередині соленоїда, якщо струм, що проходить по соленоїду, $I = 2$ А.

Відповідь: $H =$ 6670 А/м.

Задача 6. Рамка, площа якої 16 см^2 обертається в однорідному магнітному полі зі швидкістю 2 об/с. Вісь обертання розташована у площині рамки і перпендикулярна лініям магнітної індукції. Напруженість магнітного поля $7{,}96 \cdot 10^4$ А/м. Визначити: 1) залежність величини магнітного потоку крізь площину рамки від часу; 2) найбільше значення магнітного потоку.

Відповідь: $\Phi = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \cos(4\pi t)$ Вб; $\Phi_{max} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Вб.

Задача 7. Потік магнітної індукції крізь соленоїд без осердя дорівнює $5 \cdot 10^{-6}$ Вб. Знайти магнітний момент соленоїда, якщо його довжина 25 см.

Відповідь: $p_m = 1\,\text{А} \cdot \text{м}^2$.

Задача 8. Магнітний момент колового контуру зі струмом $p_m = 1\,\text{А} \cdot \text{м}^2$. Радіус кола $R = 10$ см. Знайти індукцію B у центрі контуру.

Відповідь: B = 0,2 мТл.

Задача 9. В однорідному горизонтальному магнітному полі розміщений у рівновазі перпендикулярно до поля горизонтальний прямолінійний алюмінієвий провідник зі струмом 10 А. Визначити індукцію поля, якщо радіус провідника дорівнює 2 мм.

Відповідь: $B = 3{,}39 \cdot 10^{-2}$ Тл.

Задача 10. По дротяному кільцю $R = 10$ см проходить струм $I = 80$ А. Знайти магнітну індукцію B у точці, рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань r = 20 см.

Відповідь: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2r^3} R^2 = 62{,}8$ мкТл.

Задача 11. Два нескінченно довгих прямих провідники схрещені під прямим кутом (рис. 1.5). По провідниках йдуть струми I_1=80 А та I_2=60 А. Відстань між провідниками d=10 см. Чому дорівнює магнітна індукція B у точках A і C, які розташовані на однаковій відстані від обох провідників?

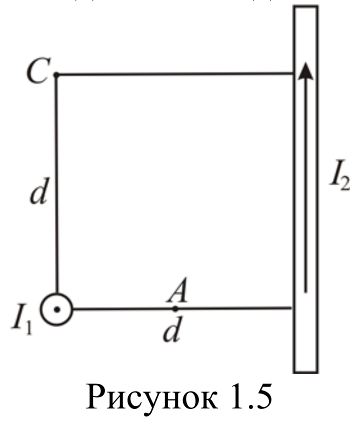

Рисунок 1.5

Відповідь: $B_1 = 400$ мкТл, $B_2 = 200$ мкТл.

Задача 12. По тонкому дроту, вигнутому у вигляді прямокутника, проходить струм I=60 А. Сторони прямокутника a=30 см і b=40 см. Яке значення має магнітна індукція в точці перехрестя діагоналей?

Відповідь: $B = \dfrac{2\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}$=200 мкТл.

Задача 13. По тонкому дротяному кільцю проходить струм. Не змінюючи сили струму у провіднику, його перетворили на квадрат. У скільки разів змінилася магнітна індукція у центрі контуру?

Відповідь: в 1,14 рази.

Задача 14. Електрон знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю E = 200 кВ/м. Який шлях пройде електрон за час t=1 нс, якщо його початкова швидкість дорівнює нулю? Яку швидкість матиме електрон у кінці цього проміжку часу?

Відповідь: $S = \dfrac{|e|Et^2}{2m}$=1,76 см; $\upsilon = \dfrac{|e|E}{mt}$=35,2 Мм/с.

Задача 15. Яка прискорююча різниця потенціалів U потрібна для того, щоб надати швидкість υ=30 Мм/с: 1) електрону; 2) протону?

Відповідь: 1) 2,56 кВ; 2) 4,7 МВ.

Задача 16. Протон, початкова швидкість якого дорівнює 100 км/с, влетів у однорідне електричне поле (E=300 В/см) так, що вектор швидкості збігся з напрямком ліній напруженості. Який шлях S має пройти протон у напрямку ліній поля, щоб його швидкість подвоїлась?

Відповідь: $S = \dfrac{3m_p\upsilon^2}{2eE}$=5,19 мм. ($m_p$ – маса протона).

Задача 17. Нескінченна площина заряджена негативно з поверхневою густиною σ=35,4 нКл/м^2. У напрямку силової лінії поля, створеного площиною, летить електрон. Визначити мінімальну відстань $l_{\min}$, на яку може підійти до площини електрон, якщо на відстані l_0=5 см він мав кінетичну енергію $T = 80$ еВ.

Відповідь: $l = l_0 - \dfrac{2\varepsilon_0 T}{|e|\sigma} = 1$ см.

Задача 18. Електрон, що летів горизонтально зі швидкістю υ =1,6 Мм/с, потрапив в однорідне електричне поле з напруженістю E = 90 В/см, яке спрямовано вертикально вгору. Якою буде за абсолютним значенням і напрямком швидкість електрона υ через 1 нс?

Відповідь: 2,24 Мм/с; відхилиться на 45° від початкового напрямку.

Задача 19. В однорідне електричне поле напруженістю E=1 кВ/м вздовж силової лінії влітає електрон зі швидкістю υ_0=1 Мм/с. Визначити відстань l, що пройшов електрон до точки, в якій його швидкість υ_1 дорівнюватиме половині початкової.

Відповідь: $l = \dfrac{3m\upsilon_1^2}{8|e|E}$=2,13 мм.

Задача 20. Електрон із початковою швидкістю υ_0=3 Мм/с влетів в однорідне електричне поле напруженістю E=150 В/м. Вектор початкової швидкості перпендикулярний лініям напруженості електричного поля. Знайти: силу F, що діє на електрон; прискорення a, якого набув електрон; швидкість υ електрона через t = 0,1 мкс.

Відповідь: F = $2{,}4\cdot10^{-17}$ Н; a = $2{,}75\cdot10^{13}$ м/с^2; υ = 4,07 Мм/с.

Задача 21. Електрон влетів у плоский конденсатор, маючи швидкість υ=10 Мм/с, яка спрямована паралельно пластинам. У момент вильоту з конденсатора напрямок швидкості електрона складав α=35° з початковим напрямком швидкості. Визначити різницю потенціалів U між пластинами (поле вважати однорідним), якщо довжина пластин l дорівнює 10 см, відстань d між ними дорівнює 2 см.

Відповідь: 79,6 В.

Задача 22. Два електрона, що розташовані на великій відстані один від одного, зближуються з відносною початковою швидкістю υ=10 Мм/с. Визначити мінімальну відстань $r_{\min}$, на яку вони можуть підійти один до одного.

Відповідь: $r_{\min} = \dfrac{e^2}{\pi m\varepsilon_0\upsilon^2}$=10,1 пм.

Задача 23. Електрон рухається у магнітному полі з індукцією B=0,02 Тл по колу радіусом 1 см. Визначити кінетичну енергію T електрона (у джоулях і електрон-вольтах).

Відповідь: $T = \dfrac{B^2r^2e^2}{2m}$ = 0,563 Дж = 3,52 кеВ.

Задача 24. Заряджена частинка з енергією T=1 кеВ рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом R = 1 мм. Знайти силу F, що діє на частинку з боку поля.

Відповідь: $F = 2T/R$=0,32 пН.

Задача 25. Визначити частоту обертання електрона по коловій орбіті у магнітному полі, індукція B якого дорівнює 0,2 Тл.

Відповідь: $\nu = \dfrac{B|e|}{2\pi m} = 5{,}6 \cdot 10^9$ Гц.

Задача 26. В однорідному магнітному полі з індукцією B=100 мкТл рухається електрон по гвинтовій лінії. Визначити швидкість υ електрона, якщо крок h гвинтової лінії дорівнює 20 см, а радіус R = 5 см.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{B|e|}{m}\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}$ =1,04 Мм/с.

Задача 27. Провідник довжиною 0,6 м і опором 0,025 Ом рухається поступально у площині, перпендикулярній до магнітного поля з індукцією $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Тл. По провіднику проходить струм 4 А. Швидкість руху провідника 0,8 м/с. Яка потужність більша і в скільки разів: витрачена на переміщення провідника в магнітному полі чи на його нагрівання?

Відповідь: у 416 разів.

Задача 28. З дроту довжиною 20 см зробили квадратний і коловий контури. Знайти обертальні моменти, що діють на контури, якщо вони знаходяться в однорідному магнітному полі, індукція якого 0,1 Тл. По контурах проходить струм 2 А. Площина контурів складає 45° із напрямком ліній індукції.

Відповідь: M_1 =$3{,}53 \cdot 10^{-4}$ Н·м; M_2=$4{,}5 \cdot 10^{-4}$ Н·м.

Задача 29. Заряджена частинка влетіла перпендикулярно лініям індукції в однорідне магнітне поле, утворене у середовищі. Внаслідок взаємодії з речовиною частинка, знаходячись у полі, втратила половину своєї початкової енергії. У скільки разів будуть відрізнятися радіуси кривизни R траєкторії початку і кінця шляху?

Відповідь: $R_1/R_2 = \sqrt{T_1/T_2} = \sqrt{2}$.

Задача 30. Перпендикулярно магнітному полю з індукцією B = 0,1 Тл збуджене електричне поле напруженістю E = 100кВ/м. Перпендикулярно обом полям рухається, не відхиляючись від прямолінійної траєкторії, заряджена частинка. Обчислити швидкість υ частинки.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{E}{B}$= 1Мм/с.

2 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА.

2.1 Мета заняття

Вивчити закони електромагнітної індукції та рівняння Максвелла. Навчитися користуватися ними для розв'язання задач.

2.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом або підручником [1, розд. 7, 10; 3, § 60-71; 5, розд. 5.3, 5.5]. Особливу увагу зверніть на закон Фарадея, правило Ленца, явища самоіндукції та взаємоіндукції. З'ясуйте фізичний зміст та межі застосування рівнянь Максвелла. Дайте відповіді на контрольні запитання, проаналізуйте розв'язання завдань, наведених, як приклад.

2.3 Основні закони і формули

1. Закон Фарадея (закон електромагнітної індукції)

$$\varepsilon_i = -d\Phi/dt,$$

де ε_i – електрорушійна сила (ЕРС) електромагнітної індукції, $\Phi = BS\cos\alpha$ – потік вектора магнітної індукції $\vec{B}$ крізь площину S, α – кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до площини S і вектором магнітної індукції $\vec{B}$, N – кількість витків котушки.

2. ЕРС самоіндукції

$$\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt},$$

де $L = \Phi/I$ – індуктивність контуру, I – сила струму у контурі.

3. Індуктивність соленоїда

$$L = \mu_0\mu n^2 V,$$

де $n = N/l$ – кількість витків на одиницю довжини соленоїда, $V = Sl$ – об'єм соленоїда.

4. Магнітна індукція соленоїда

$$B = \mu_0\mu nI.$$

5. Миттєве значення сили струму у колі, яке має опір R та індуктивність L:

а) при замиканні кола

$$I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$

б) при розмиканні кола

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

де I_0 – сила струму у колі при $t = 0$; t – час, який минув після замикання чи розмикання кола.

6. ЕРС взаємоіндукції

$$\varepsilon_{i12} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}; \ \varepsilon_{i21} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

де $L_{12}I_2 = \Phi_1$, $L_{21}I_1 = \Phi_2$ – магнітні потоки у першому та другому контурах, створені струмами I_2 та I_1 відповідно.

7. Енергія магнітного поля, зчепленого з контуром

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

8. Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

9. Перше рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}.$$

10. Друге рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}.$$

2.4 Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає явище електромагнітної індукції?
2. Сформулюйте закон електромагнітної індукції.
3. Поясніть правило Ленца.
4. У чому полягає явище самоіндукції? Чому дорівнює ЕРС самоіндукції?. Дайте визначення індуктивності.
5. Як змінюється з часом сила струму при включенні електричного поля з індуктивністю?
6. Запишіть закони зміни струму у колі з індуктивністю при замиканні та розмиканні кола. Поясніть за допомогою графіка.
7. У чому полягає явище взаємної індукції? Чому дорівнює ЕРС взаємної індукції? Дайте визначення взаємної індуктивності.
8. Охарактеризуйте природу вихрового електричного поля та його зв'язок зі змінним магнітним полем.
9. Які величини характеризують електромагнітне поле?
10. Запишіть та проаналізуйте рівняння Максвелла.

2.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Прямий провідник довжиною l рухається зі швидкістю $\upsilon = const$ в однорідному магнітному полі з індуктивністю $\vec{B}$ так, що площина dS його траєкторії перпендикулярна вектору $\vec{B}$ (рис. 2.1). Користуючись електронною теорією провідності, виведіть формулу закону електромагнітної індукції і з'ясуйте сутність природи цього явища, відкритого М. Фарадеєм.

Дані: $l\,;\vec{B}\,;\vec{\upsilon}\,;dS\,;$

$\varepsilon_i\ -?$

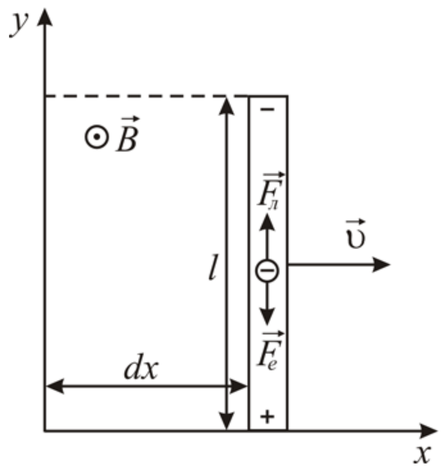

Рисунок 2.1

Аналіз і розв'язання

Вільні електрони провідності, що знаходяться у провіднику, разом із ним рухаються у магнітному полі зі швидкістю υ. Отже на кожен з них діє сила Лоренца

$$\vec{F}_л = e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right].$$

Результатом цього є впорядковане переміщення цих електронів вздовж провідника в один його кінець з утворенням там надлишку від'ємного заряду. На протилежному боці утворюватиметься недостача електронів із позитивним зарядом. У результаті такого перерозподілу між цими зарядами виникає електричне поле з напруженістю $\vec{E}$, яке викликає дію на електрони ще однієї сили – сили електричного поля

$$\vec{F}_e = e\vec{E}\,.$$

Електрони рухатимуться під дією рівнодіючої цих сил, доки вона не стане рівною нулю, тобто при

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_л$$

або з урахуванням їх значень

$$e\vec{E} = -e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right].$$

Звідси

$$\vec{E} = -\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right].$$

З останнього виразу видно, що напруженість поля сил, які рухають електрони проти сил електростатичного поля, має неелектростатичну природу. Тому її називають напруженістю поля сторонніх сил $\vec{E}_{ст} = \left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]$. Вона однакова за величиною з напруженістю електричного поля $\vec{E}$, але протилежна їй за напрямком $\vec{E} = -\vec{E}_{ст}$.

Робота поля сторонніх сил $dA = F_л dl\cos\varphi$ з переміщення зарядів проти сил електричного поля зумовлює появу ЕРС, індукованої магнітним полем

$$\varepsilon_i = \int_0^l \vec{E}d\vec{l} = -\int_0^l \vec{E}_{cm}d\vec{l} = -\int_0^l \left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]d\vec{l} = -\int_0^l \upsilon Bdl = -\upsilon Bl\,.$$

Враховуючи, що $\upsilon = dx/dt$, маємо:

$$\varepsilon_i = -\upsilon Bl = -B\frac{ldx}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де $d\Phi = BdS$ – магнітний потік через площину dS.

Отже ми вивели формулу ЕРС електромагнітної індукції $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ як роботу сторонніх сил з переміщення зарядів вздовж провідника, що рухається у магнітному полі, а також з'ясували, що поле цих сил не є електростатичним.

Задача 2. Між полюсами магніту з індукцією $\vec{B}$ знаходиться підвішений провідний плоский контур із джерелом електрики. Опір контуру R. Його площина dS розташована паралельно лініям магнітної індукції (рис. 2.2). Після замикання ключа К за час dt контур повертається на деякий кут. При цьому магнітний потік через нього змінюється на величину $d\Phi$. З'ясувати природу електромагнітних явищ, які відбуваються при цьому, їх кількісні характеристики та зв'язок між ними.

Дані: $\vec{B}$; R; dS; dt; $d\Phi$

ε_i – ?

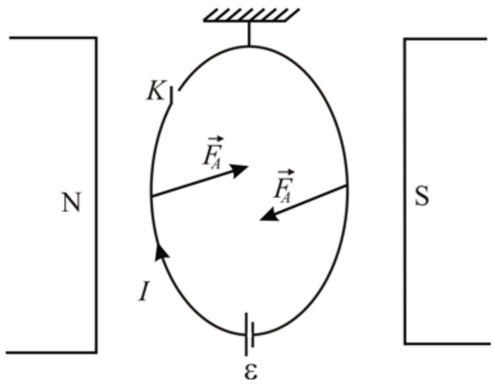

Рисунок 2.2

Аналіз і розв'язання

Після замикання ключа К відбувається протікання струму I по контуру, його нагрівання та кутове переміщення. Ці явища супроводжуються енергетичними змінами у джерелі електрики εIdt, тепловими в електричному опорі контуру $Q = I^2Rdt$ та механічною роботою пари сил Ампера при зміні кутового положення контуру у магнітному полі $dA = Id\Phi$, де $d\Phi$ – зміна потоку магнітної індукції через площу контуру dS за час dt. Всі ці зміни врівноважені законом збереження енергії

$$\varepsilon Idt = I^2Rdt + Id\Phi\,.$$

Після очевидних перетворень цього виразу маємо еквівалентне йому рівняння закону Ома

$$RI = \varepsilon - d\Phi/dt$$

або

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R},$$

де $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ – ЕРС індукції магнітного поля.

Струм, індукований у контурі магнітним полем, виражається формулою

$$I_i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

До речі, з цих виразів видно, що цей струм існуватиме й за відсутності джерела електрики, коли $\varepsilon = 0$, тільки б відбувалася зміна магнітного потоку в часі.

Зробимо вслід за Максвеллом ще один важливий висновок з отриманих результатів. При повороті контуру силами Ампера чи силами будь-якої іншої природи змінюється у часі величина магнітного потоку через його площину dS зі швидкістю $\frac{d\Phi}{dt}$, де $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$. Отже

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{B}d\vec{S}\right).$$

Оскільки площина контуру при цьому не змінюється у часі, операції диференціювання за часом та інтегрування по поверхні можна поміняти місцями і записати зміну потоку Φ через контур як частинну похідну від $\vec{B}$ за часом. Тоді ЕРС індукції магнітного поля матиме такий вигляд:

$$\varepsilon_i = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Звернемо увагу на те, що ЕРС у будь-якому контурі дорівнює циркуляції вектора напруженості сторонніх сил, тобто

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{cm} d\vec{l},$$

де $\vec{E}_{cm} = \vec{E}$ – вектор напруженості вихрового електричного поля за висновком Максвелла. Прирівняємо праві частини останніх двох виразів

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Це перше рівняння Максвелла. Воно дає можливість стверджувати, що вихрове магнітне поле неминуче породжує вихрове електричне поле, і вони існують невід'ємно одне від одного, причому незалежно від існування провідникового контуру. Адже у цьому рівнянні відсутні його електричні чи магнітні характеристики. Тому контур є тільки індикатором наявності вихрового електричного поля.

Задача 3. Контур радіусом 0,2 м розташований у площині, перпендикулярній вектору магнітної індукції, яка змінюється з часом за законом $B = 6\cdot 10^{-3} e^{-2\cdot 10^5 t}$. У просторі це поле однорідне. Знайдіть напруженість вихрового електричного поля, що збуджується у контурі у момент часу $t = 3\cdot 10^{-5}$ с.

Дані: R=0,2 м; $B = 6\cdot 10^{-3} e^{-2\cdot 10^5 t}$; $t = 3\cdot 10^{-5}$ с

E – ?

Аналіз і розв'язання

За першим рівнянням Максвела в інтегральній формі $\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ можна визначити залежність E від B таким чином:

$$E\cdot 2\pi R = -\pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t},$$

звідки

$$E = -\frac{R}{2}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(6\cdot 10^{-3} e^{-2\cdot 10^5 t}\right) = 1,2\cdot 10^3 \frac{R}{2} e^{-2\cdot 10^5 t} =$$

$$= 1,2\cdot 10^3 \frac{0,2}{2} e^{-2\cdot 10^5 \cdot 3\cdot 10^{-3}} = 0,3 \text{ (А/м)}.$$

Задача 4. По довгому прямому соленоїду радіусом R проходить струм, який можна змінювати так, що магнітне поле у середині соленоїда змінюється за законом $B = \beta t^2$, де β – стала величина. Знайдіть густину струму зміщення як функцію відстані r від соленоїда.

Дані: R; $B = \beta t^2$

$j_{зм}(r)$ – ?

Аналіз і розв'язання

Густина струму зміщення $\vec{j}_{зм} = d\vec{D}/\partial t$, де $\vec{D}$ – вектор електричного зміщення $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Знайдемо спочатку зміщення вихрового електричного поля $\vec{E}$. Для цього використаємо рівняння Максвелла для циркуляції вектора $\vec{E}$

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \qquad (2.1)$$

Якщо $r < R$, то рівняння (2.1) має вигляд

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \text{ або } E = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right).$$

Знаходимо $\partial B/\partial t = 2\beta t$. Тоді $E(r) = r\beta t$, ($r < R$).

Для $r > R$ теорему про циркуляцію вектора $\vec{E}$ запишемо у вигляді:

$$2\pi r E = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Звідси $E(r) = \dfrac{\beta R^2 t}{r}$, $(r > R)$.

Знаючи залежність напруженості вихрового електричного поля від відстані $E(r)$, знайдемо густину струму зміщення

$$j_{зм} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \beta r, \; (r < R),$$

$$j_{зм} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \beta R^2}{r}, \; (r > R).$$

Залежність $j_{зм}(r)$ можна зобразити графічно (рис. 2.3)

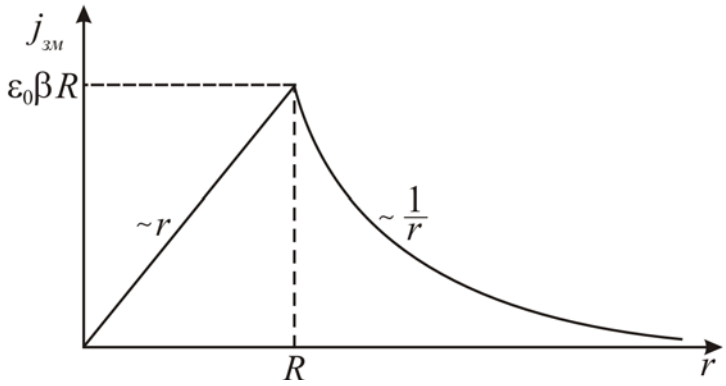

Рисунок 2.3

2.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Прямий провідник довжиною l=0,4 м рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю υ=5 м/с перпендикулярно лініям індукції. Різниця потенціалів між кінцями провідника дорівнює 0,6 В. Знайти індукцію магнітного поля.

Відповідь: B = 0,3 Тл.

Задача 2. Прямий провідник довжиною l=0,1 м знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B=1 Тл. Кінці його замкнуто гнучким провідником, що не знаходиться у магнітному полі. Опір цього електричного кола дорівнює 0,4 Ом. Яка потужність витрачається, якщо провідник рухається перпендикулярно лініям індукції з швидкістю υ = 20 м/с?

Відповідь: P=10 Вт.

Задача 3. В однорідному магнітному полі з індукцією B=0,4 Тл обертається стержень довжиною l=0,1 м. Вісь обертання проходить через один із кінців стержня. Визначити різницю потенціалів між кінцями стержня при частоті обертання n = 16 с$^{-1}$.

Відповідь: U =0,2 В.

Задача 4. В однорідному магнітному полі з індукцією B=0,35 Тл рівномірно обертається з частотою n = 8 с$^{-1}$ рамка. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна лініям індукції. Площа рамки S=50 см^2, кількість витків N=1500. Визначити максимальну ЕРС індукції, яка виникає у рамці.

Відповідь: ε_{max} = 132 В.

Задача 5. По П-подібному провіднику (рис. 2.4) переміщується зі сталою швидкістю υ під дією сили F перемичка. Контур знаходиться у перпендикулярному його площині однорідному магнітному полі. Чому дорівнює сила F, якщо кожної секунди у контурі виділяється кількість теплоти Q?

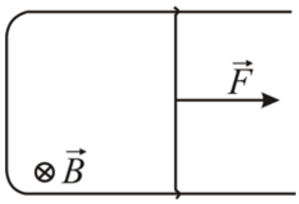

Рисунок 2.4

Відповідь: $F = \dfrac{Q}{\upsilon t}$.

Задача 6. Провідник, що має форму параболи $y = kx^2$, знаходиться у однорідному магнітному полі з індукцією B (рис. 2.5). З вершини параболи в момент часу t=0 почати переміщувати перемичку 1-2. Знайти ЕРС індукції у контурі як функцію y, якщо перемичка рухається зі сталою швидкістю υ.

Відповідь: $\varepsilon_i = 2B\upsilon\sqrt{y/k}$.

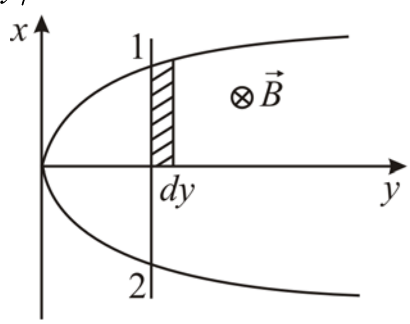

Рисунок 2.5

Задача 7. Кільце з провідника радіусом a = 0,1 м лежить на столі. Який електричний заряд пройде по кільцю, якщо його перевернути з однієї сторони на іншу? Опір кільця R=1 Ом. Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі B = 10 мТл.

Відповідь: q = 3,14 мкКл.

Задача 8. Квадратна рамка зі струмом а=5 см і опором R=10 мОм знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B=40 мТл. Нормаль до площини рамки розташована під кутом α=30° до ліній магнітної індукції. Знайти заряд, що пройде по рамці, якщо магнітне поле виключити.

Відповідь: q = 8,67 мКл.

Задача 9. Тонкий провідник довжиною l=1 м зігнуто у вигляді квадрата, кінці якого замкнено. Квадрат знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B=0,1 Тл. Визначити заряд, що пройде по провіднику, якщо квадрат, протягнувши за протилежні вершини, витягнути у лінію. Опір провідника дорівнює 3 Ом.

Відповідь: q = $2{,}08\cdot10^{-3}$ Кл.

Задача 10. Магнітна індукція B поля між полюсами двополюсного генератора дорівнює 0,8 Тл. Ротор має N=100 витків площею S=400 см^2. Визначити частоту обертання якоря, якщо максимальне значення ЕРС індукції ε_{max}=200 В.

Відповідь: n=10 с$^{-1}$.

Задача 11. Соленоїд площею перерізу 5 см^2 має N = 1200 витків. При силі струму I = 2 А індукція магнітного поля всередині соленоїда B = 0,01Тл. Знайти індуктивність соленоїда.

Відповідь: L = 3 мГн.

Задача 12. Ізольований металевий диск радіусом r = 0,25 м обертається з кутовою швидкістю ω = 100 с$^{-1}$ навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно площині диска. Визначити різницю потенціалів між центром та краєм диска, яка виникає за відсутності магнітного поля та в однорідному магнітному полі, перпендикулярному площині диска (B = 10 млТл).

Відповідь: 1,8 нВ; $3{,}08\cdot10^{-2}$ В.

Задача 13. Котушка з індуктивністю L = 250 мГн і опором R = 0,3 Ом підключається до джерела постійної напруги. Через який проміжок часу τ сила струму у котушці досягне 50% від усталеного значення?

Відповідь: τ = 0,58 с.

Задача 14. У колі проходив струм I_0 = 50 А. Джерело струму можна включити, не розриваючи кола. Визначити силу струму в цьому колі через t 0,01 с після відключення його від джерела струму. Опір кола дорівнює 20 Ом, індуктивність L = 0,1 Гн.

Відповідь: I = 6,86 А.

Задача 15. До джерела струму з внутрішнім опором r= 2 Ом підключили котушку індуктивністю L = 0,5 Гн і опором R = 8 Ом. Знайти проміжок часу, за який струм у котушці, збільшуючись, досягне значення, що відрізняється від максимального на 1%.

Відповідь: t =0,23 с.

Задача 16. Дві котушки знаходяться на невеликій відстані одна від одної. Коли сила струму у першій котушці змінюється зі швидкістю $\Delta I/\Delta t$=5 А/с, у другій виникає ЕРС індукції $\mathcal{E}_1$ = 0,1В. Визначити коефіцієнт взаємної індукції.

Відповідь: 20 мГн.

Задача 17. Магнітний потік через нерухомий контур з опором R змінюється протягом часу τ за законом $\Phi(t) = at(\tau - t)$. Знайти кількість теплоти, яка виділяється за цей час у контурі. Індуктивністю контуру знехтувати.

Відповідь: $Q = \dfrac{a^2\tau^3}{R}$.

Задача 18. Скільки метрів тонкого дроту потрібно для виготовлення соленоїда довжиною 100 см та індуктивністю 1 мГн, якщо діаметр перерізу соленоїда значно менший за його довжину.

Відповідь: l = 100 м.

Задача 19. Через котушку радіусом 2 см, яка має 500 витків, проходить струм силою 2 А. Визначити індуктивність котушки, якщо напруженість магнітного поля у центрі дорівнює 10 кА/м.

Відповідь: L = 4 мГн.

Задача 20. Знайти індуктивність одиниці довжини кабеля, що складається з двох тонкостінних коаксіальних металевих циліндрів радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$). Сили струмів у циліндрах однакові та протилежно напрямлені. Магнітна проникність середовища дорівнює одиниці.

Відповідь: $\dfrac{L}{l} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

Задача 21. Дві котушки, індуктивності яких дорівнюють L_1 = 3 мГн та L_2 = 5 мГн, з’єднані послідовно. При цьому індуктивність системи L =11 мГн. Як зміниться індуктивність системи, якщо в одній з котушок напрям струму змінити на протилежний, не змінюючи взаємне положення котушок?

Відповідь: L = 5 мГн.

Задача 22. Два соленоїда однакової довжини l та з радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$) мають відповідно n_1 та n_2 витків на одиницю довжини. Менший соленоїд цілком помістили всередину більшого так, що осі їх співпали. Визначити модуль взаємної індуктивності $|L_{12}|$ соленоїдів.

Відповідь: $|L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$.

Задача 23. Довжина соленоїда 1 м, площа його поперечного перерізу 20 см^2, індуктивність L=0,4 мГн, об'ємна густина енергії w=0,1 Дж/м^2. Визначити силу струму у соленоїді.

Відповідь: $I = \sqrt{\dfrac{2wSl}{L}} = 1$А.

Задача 24. Одношаровий соленоїд довжиною 0,4 м із площею поперечного перерізу 50 см^2, намотаний дротом діаметром 0,5 мм, підключено до напруги 10 В. Який струм тече по обмотці, якщо за 0,5 мс в ній виділяється кількість теплоти, яка дорівнює енергії магнітного поля всередині соленоїда? Поле однорідне.

Відповідь: I = 995 мА.

Задача 25. Визначити енергію магнітного поля соленоїда, який має 300 витків, що намотані на картонний каркас радіусом 3 см та довжиною 6 см, якщо по ньому проходить струм 4 А.

Відповідь: 8,5 мДж.

Задача 26. Довести, використовуючи рівняння Максвелла, що змінне магнітне поле не може існувати без електричного поля; що однорідне електричне поле не може існувати за наявності змінного магнітного поля.

Задача 27. Показати, що наслідком рівнянь Максвелла є закон збереження електричного заряду, тобто $div\vec{j} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$.

Задача 28. Сила струму у прямому нескінченному провіднику дорівнює I. На відстані r_0 (рис. 2.6) від провідника знаходиться плоский контур, утворений двома паралельними шинами, по яких переміщується прямий провідник, та резистором з опором R. Відстань між шинами дорівнює a, швидкість руху провідника υ. Знайти, за якими законами змінюється з часом: магнітний потік, що пронизує контур, $\Phi(t)$; ЕРС індукції $\varepsilon_i(t)$; індукційний струм у контурі $I_i(t)$ кількість теплоти Q, що виділяється у контурі за проміжок часу від t_1 до t_2.

Відповідь: $\Phi(t) = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\dfrac{r_0 + \upsilon t}{r_0}$;

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\cdot\frac{\upsilon}{r_0 + \upsilon t};$$

$$I_i(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\cdot\frac{\upsilon}{r_0 + \upsilon t};$$

$$Q = \frac{\mu_0^2 I^2 a^2 \upsilon}{4\pi^2 R}\left(\frac{1}{r_0 + \upsilon t_1} - \frac{1}{r_0 + \upsilon t_2}\right).$$

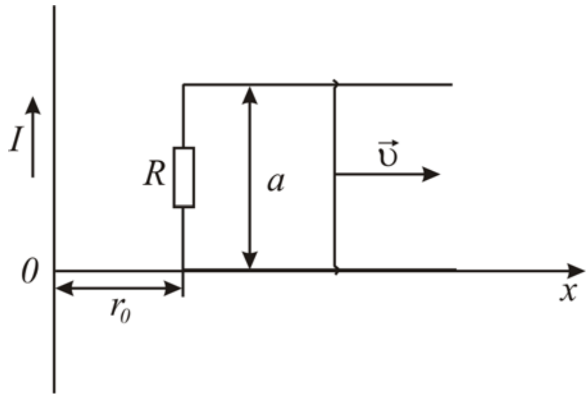

Рисунок 2.6

Задача 29. Квадратна рамка і довгий прямий провідник зі струмом I знаходиться в одній площині (рис. 2.7). Сторона рамки дорівнює a. Рамку переміщують вправо зі сталою швидкістю υ. Знайти ЕРС індукції як функцію відстані x.

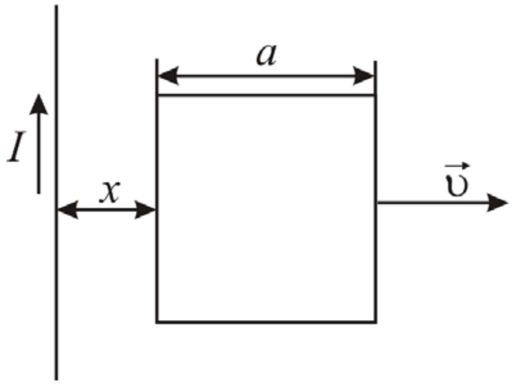

Рисунок 2.7

Відповідь: $\varepsilon_i = \dfrac{\mu_0 I a^2 \upsilon}{2\pi x(x+a)}$.

Задача 30. Визначити величину заряду, який пройшов по соленоїду зі струмом 0,5 А після замикання його кінців. Діаметр соленоїда 3 см, дріт обмотки (алюміній, $\rho = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) має діаметр 0,3 мм.

Відповідь: $q = 42{,}7$ мкКл.

3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

3.1 Мета заняття

Засвоїти фізичні величини та рівняння, що характеризують електромагнітні коливання (вільні, загасаючі, вимушені) та хвилі. Оволодіти методами розв'язання задач.

3.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом або підручником [1, розд. 9, 10; 3, § 88-92, 104-109; 5, розд. 7]. Засвоїти фізичні принципи утворення вільних незгасаючих, загасаючих та вимушених коливань, а також випромінювання, розповсюдження та прийому електромагнітних хвиль. Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язування задач, що наведені у прикладах.

3.3 Основні закони і формули

1. Вільні незгасаючі електромагнітні коливання:

− диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань заряду в електромагнітному контурі

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0;$$

− розв'язок диференціального рівняння $q=q_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$,

де q_0 – амплітуда заряду; φ_0 – початкова фаза коливань;

− $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ – власна частота коливань контуру, L – індуктивність контуру; C – його електроємність;

− період власних коливань, формула Томсона

$$T_0=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC};$$

− сила струму у коливальному контурі

$$I=dq/dt=-q_0\omega_0\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)=q_0\omega_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\pi/2\right)=I_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\pi/2\right);$$

− напруга на обкладках конденсатора

$$U=\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C}\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)=U_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right),$$

де $U_0=q_0/C$ – амплітуда напруги на конденсаторі.

2. Загасаючі електромагнітні коливання:

− диференціальне рівняння загасаючих коливань

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=0;$$

де $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коефіцієнт загасання, ω_0 – власна частота коливань контуру, R – активний опір.

– розв'язок диференціального рівняння

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_1\right);$$

– частота загасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2};$$

– період загасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}.$$

3. Величини, що характеризують загасання:

– час релаксації τ – час, за який амплітуда зменшується в е разів;

– коефіцієнт загасання $\beta = 1/\tau$;

– логарифмічний декремент загасання

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e},$$

де A – амплітуда коливань, N_e – кількість коливань за час, протягом якого амплітуда зменшиться в e разів;

– добротність коливального контуру

$$Q \approx 2\pi\frac{W}{\delta W},$$

де W – енергія, яку має контур у визначений час, δW – зменшення енергії за період коливань.

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e.$$

4. Вимушені коливання:

– диференціальне рівняння коливань заряду у контурі

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t,$$

де $\varepsilon = \varepsilon_0\cos\omega t$ – змінна ЕРС;

– розв'язок диференціального рівняння $q = q_0\cos\left(\omega t - \psi\right)$,

де $q_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}}$, $tg\psi = \dfrac{R}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}$.

5. Резонансна частота для заряду та напруги

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}};$$

для сили струму

$$\omega_p = \omega_0 = 1\Big/\sqrt{LC}.$$

6. Змінний струм $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$,

де $I_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$ – амплітуда сили струму, φ – фазовий зсув між напругою і струмом , $tg\varphi = (\omega L - 1/\omega C)\big/R$.

7. Повний опір або імпеданс

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

8. Індуктивний опір $X_L = \omega L$, ємнісний опір $X_C = 1/\omega C$, реактивний опір $X = X_L - X_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$.

9. Потужність, що виділяється у колі змінного струму $P = I_\partial U_\partial \cos\varphi$, де $I_\partial = I_0\big/\sqrt{2}$, $U_\partial = U_0\big/\sqrt{2}$ – діючі значення сили струму та напруги, φ – фазовий зсув між напругою і струмом.

10. Зв'язок довжини електромагнітної хвилі λ з періодом T і частотою ν коливань

$$\lambda = cT \quad \text{або} \quad \lambda = c/\nu,$$

де c – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

11. Фазова швидкість (швидкість поширення у середовищі фази монохроматичної хвилі)

$$\upsilon = c/n = c\Big/\sqrt{\varepsilon\mu},$$

де n – абсолютний показник заломлення, ε – відносна діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність.

12. Хвильові рівняння електромагнітної хвилі

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

13. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі

$$E = E_0 \cos\left(\omega t - kx + \alpha_1\right),$$

$$H = H_0 \cos\left(\omega t - kx + \alpha_2\right),$$

де ω – частота хвилі, $k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, α_1 і α_2 – початкові фази коливань.

14. Зв'язок між миттєвими значеннями напруженостей електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів в електромагнітній хвилі

$$E\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}\,.$$

15. Зв'язок між амплітудними значеннями векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0\sqrt{\mu_0 \mu}\,.$$

16. Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} EH\,.$$

17. Вектор Умова-Пойнтінга (вектор густини потоку енергії хвилі)

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right].$$

18. Модуль густини потоку енергії

$$S = wv = EH\,.$$

3.4 Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть рівняння вільних незгасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв'язок воно має?
2. Чому дорівнюють період й частота вільних незгасаючих коливань?
3. Запишіть рівняння загасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв'язок воно має?
4. За яких умов електричні коливання у коливальному контурі є незгасаючими, а за яких загасаючими?
5. Чому дорівнюють період та частота загасаючих коливань?
6. Назвіть величини, що характеризують загасання електромагнітних коливань.
7. Що таке логарифмічний декремент загасання та добротність?

8. Запишіть рівняння вимушених коливань в електричному контурі. Який розв'язок воно має?

9. Чому дорівнюють індуктивний, ємнісний, реактивний та повний опори кола?

10. Сформулюйте закон Ома для електричного кола змінного струму.

11. Що таке діючі значення сили струму та напруги? Чому вони дорівнюють?

12. Що таке електромагнітна хвиля? Яка швидкість її поширення у вакуумі та у середовищі?

13. Запишіть хвильові рівняння для $\vec{E}$ і $\vec{H}$ електромагнітної хвилі.

14. Запишіть рівняння плоскої електромагнітної хвилі.

15. Чому дорівнює густина енергії електромагнітної хвилі?

16. Чому дорівнює і який фізичний зміст вектора Умова-Пойнтінга?

3.4 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Коливальний контур складається з конденсатора з двома пластинами площею $S = 10\,\text{см}^2$ кожна, які знаходяться на відстані $d = 0{,}7\,\text{мм}$ одна від одної, і котушки індуктивністю $L = 1\,\text{мкГн}$. Простір між пластинами конденсатора заповнений діелектриком. Коливальний контур має резонанс на довжині хвилі $\lambda = 17{,}73\,\text{м}$. Визначити діелектричну проникність ε середовища, яке заповнює конденсатор.

Дані: $S = 10\,\text{см}^2$, $d = 0{,}7\,\text{мм}$, $L = 1\,\text{мкГн}$, $\lambda = 17{,}73\,\text{м}$.

$\varepsilon - ?$

Аналіз і розв'язання

Електроємність плоского конденсатора дорівнює:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

Тоді діелектрична проникність середовища, яке заповнює конденсатор:

$$\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S}. \tag{3.1}$$

Електроємність C конденсатора знайдемо з формули для резонансної частоти коливального контуру:

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC},$$

$$C = \frac{1}{\omega_p^2 L}. \tag{3.2}$$

Щоб знайти резонансну частоту, скористаємось співвідношенням $\nu = c/\lambda$, яке пов'язує довжину хвилі λ, на якій резонує контур, з частотою; c – швидкість світла.

$$\omega_p = 2\pi \cdot c/\lambda. \tag{3.3}$$

Підставивши (3.3) у (3.2), а потім електроємність C у формулу (3.1), отримаємо

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 LS}. \qquad (3.4)$$

Виконавши обчислення, знаходимо $\varepsilon = 7$.

Задача 2. Визначити час t_0, за який амплітуда коливань сили струму у контурі з добротністю Q зменшиться у η разів, якщо частота загасаючих коливань дорівнює ω.

Дані: Q, ω, $A_0/A_1 = \eta$.

t_0 – ?

Аналіз розв'язання

Для загасаючих коливань сила струму змінюється з часом за законом:

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Тобто амплітуда зменшується з часом за законом $A = I_0 e^{-\beta t}$. У початковий момент часу $t = 0$ амплітуда $A_0 = I_0$, у момент часу t_0 амплітуда $A_1 = I_0 e^{-\beta t_0}$. Тоді час, за який амплітуда зменшиться у η разів, можна визначити з рівняння:

$$A_0/A_1 = \eta = e^{-\beta t_0},$$

звідки

$$t_0 = \frac{\ln \eta}{\beta} \qquad (3.5)$$

Добротність Q пов'язана з коефіцієнтом загасання β:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta}, \qquad (3.6)$$

беручи до уваги, що $T = 2\pi/\omega$.

З (3.5) та (3.6) одержимо

$$\beta = \frac{\omega}{2Q},\ t_0 = \frac{2Q}{\omega} \ln \eta.$$

Задача 3. Контур, який складається з резистора опором 100 Ом, конденсатора ємністю 35,4 мкФ і котушки індуктивністю 0,7 Гн, підключений до кола змінного струму з діючою напругою $U_\partial = 220$ В і частотою 50 Гц. Напишіть рівняння залежності від часу струму $I(t)$ і напруги $U(t)$. Знайдіть падіння напруги на резисторі, конденсаторі і котушці. Визначте частоту змінного струму, за якої у даному контурі спостерігатиметься резонанс, і потужність, що споживає контур.

Дані: $R = 100$ Ом, $C = 35{,}4$мкФ, $L = 0{,}7$Гн, $U_\partial = 220$В, $\nu = 50$Гц.

$I(t)$ – ? $U(t)$ – ? U_R – ? U_C – ? U_L – ? ν_p – ? P – ?

Аналіз і розв'язання

Струм і напруга у колі змінюються за законом

$$I = I_0 \sin\omega t \ , \ U = U_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{3.7}$$

де φ – зсув фаз між струмом і напругою.

Амплітуду U_0 напруги знайдемо зі співвідношенням

$$U_0 = \sqrt{2} U_\partial, \ \omega = 2\pi\nu \,. \tag{3.8}$$

Амплітуди струму і напруги пов'язані законом Ома:

$$I_0 = U_0 / Z \,, \tag{3.9}$$

де $Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$ – повний опір кола змінного струму, $X_L = \omega L$, $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – індуктивний та ємнісний опори кола відповідно.

Зі співвідношень (3.8), (3.9) знайдемо:

$$I_0 = \frac{\sqrt{2} U_\partial}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} \,.$$

Розрахунки дають:

$$U_0 = 311\,(\text{В}), \ I_0 = 1{,}9 \ (\text{А}), \ \omega = 100\pi(c^{-1}) \,.$$

Зсув фаз між коливаннями сили струму і зовнішньою напругою визначимо так:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} = 0{,}61; \ \varphi = 54^\circ = 0{,}3\pi \,.$$

Рівняння (3.7) з урахуванням розрахунків:

$$I\left(t\right) = 1{,}9 \sin 100\pi t \,;$$

$$U\left(t\right) = 311 \sin\left(100\pi t + 0{,}3\pi\right).$$

Падіння напруги на елементах контуру дорівнює

$$U_R = I_\partial R \,; \ U_C = I_\partial X_C \,; \ U_L = I_\partial X_L \,,$$

де $I_\partial = I_0 / \sqrt{2}$ – діюче значення сили струму.

Тоді

$$U_R = \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = 134 \ (\text{В}); \ U_C = \frac{I_0}{\sqrt{2}\omega C} = 121 \ (\text{В}); \ U_L = \frac{I_0 \omega L}{\sqrt{2}} = 295 \ (\text{В}).$$

Умова резонансу $X_L = X_C$. Зі співвідношення $\omega L = 1/\omega C$ отримаємо резонансну частоту:

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 32 \ (\text{Гц}).$$

Потужність, що споживається контуром:

$$P = I_\partial U_\partial \cos\varphi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos\varphi = 180 \ (\text{Вт}).$$

Задача 4. Розрахувати енергію, яку перенесе за час $t = 1$ хв плоска синусоїдальна електромагнітна хвиля, що розповсюджується у вакуумі, через площину $S_0 = 10$ см^2, розташовану перпендикулярно напрямку поширення хвилі. Амплітуда напруженості електричної хвилі $E_0 = 1{,}0$ мВ/м. Період хвилі $T << t$.

Дані: $t = 1$ хв, $S_0 = 10$ см^2, $E_0 = 1{,}0$ мВ/м , $T << t$.

$W - ?$

Аналіз і розв'язання

Енергія, яку перенесе електромагнітна хвиля за одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярної напрямку розповсюдження хвилі, визначається вектором Пойнтинга $\vec{S}$. Беручи до уваги, що $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$, а в електромагнітній хвилі $\vec{E} \perp \vec{H}$, отримаємо для модуля вектора $\vec{\Pi}$

$$S = EH. \tag{3.10}$$

Величини $\vec{E}$ та $\vec{H}$ змінюються за гармонічним законом і мають однакову фазу, тоді з (3.10):

$$S = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t, \tag{3.11}$$

тобто S залежить від часу. Тоді вектор $\vec{S}$ можна пов'язати з модулем густини потоку енергії:

$$S = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{S_0}.$$

Звідки енергія, яка переноситься хвилею через площу S за час dt, з урахуванням (3.11)

$$dW = SS_0 dt = E_0 H_0 S \sin^2 \omega t dt. \tag{3.12}$$

Амплітудні значення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ пов'язані між собою виразом:

$$E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu}. \tag{3.13}$$

Якщо $\mu = \varepsilon = 1$, то з (3.13) одержимо:

$$H_0 = E_0 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}.$$

Тоді рівняння (3.12) має вигляд:

$$dW = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_0^2 S_0 \sin^2 \omega t dt.$$

Повна енергія, яка переноситься хвилею за час t

$$W = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S_0 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right). \tag{3.14}$$

Частота ω невідома за умовою задачі, тому скористаємося умовою $T << t$ для оцінки значення $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$. Беручи до уваги, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$, маємо:

$$\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{1}{8\pi} T \sin \frac{4\pi t}{T} \le \frac{T}{8\pi}.$$

Внаслідок умови $T << t$ членом $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$ у формулі (3.14) можна знехтувати.

Тоді одержимо

$$W = 1/2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \cdot E_0^2 S_0 t\,,$$
$$W = 8 \cdot 10^{-11}\,(\text{Дж}).$$

3.5 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Котушка з індуктивністю $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн з'єднана послідовно з плоским конденсатором, площа пластин якого $S = 100$ см^2 , відстань між ними $d = 0{,}1$ мм. Чому дорівнює діелектрична проникність середовища між пластинами, якщо контур резонує на довжину хвилі 750 м?

Відповідь: $\varepsilon = 6$.

Задача 2. Період коливань контуру, який складається з котушки і конденсатора, що з'єднані паралельно, дорівнює $T = 33{,}2$ нс. Повітряний конденсатор являє собою дві круглі пластини діаметром $D = 20$ см, які знаходяться на відстані $d = 1$ см. Визначити індуктивність котушки.

Відповідь: $L = 1$ мкГн.

Задача 3. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 1$ мГн і конденсатора змінної ємності. Діапазон довжин електромагнітних хвиль, які можуть викликати резонанс у цьому контурі, складає від $\lambda_1 = 200$ м до $\lambda_2 = 600$ м. Визначити, в яких межах змінюється ємність конденсатора. Активним опором контуру знехтувати.

Відповідь: від $C_1 = 11{,}3$ пФ до $C_2 = 101{,}4$ пФ.

Задача 4. Знайти період коливань контуру, який складається з котушки довжиною $l = 50$ см, площею поперечного перерізу $S_1 = 2$ см^2 і кількістю витків $N = 1000$ та конденсатора з двома пластинами площею $S = 50$ см^2 кожна, розташованими на відстані $d = 2$ мм одна від одної. Простір між пластинами конденсатора заповнений парафіном ($\varepsilon = 2$).

Відповідь: $T = 0{,}93$ мкс.

Задача 5. Коливальний контур складається з ємності $C = 0{,}025$ мкФ та індуктивності $L = 1{,}015$ Гн. Омічний опір відсутній. Конденсатор заряджений зарядом $q = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Написати для цього коливального контуру рівняння, яке описує залежність напруги на конденсаторі і сили струму у колі від часу. Знайти напругу на конденсаторі і силу струму у колі у моменти часу $T/8$, $T/4$, $T/2$ (T – період коливань).

Відповідь:

1) $U = 100\cos\left(2\pi \cdot 10^3 \cdot t\right)$ В, $I = -15{,}7\sin\left(2\pi \cdot 10^3 \cdot t\right)$ мА,

2) $U_1 = 70{,}7$ В, $I_1 = -11{,}1$ мА; $U_2 = 0$, $I_2 = -15{,}7$ мА; $U_3 = -100$ В, $I_3 = 0$.

Задача 6. Рівняння, яке визначає залежність напруги на конденсаторі від часу у коливальному контурі, має вигляд $U = 50\cos\left(10^4 \cdot \pi \cdot t\right)$ В, ємність конденсатора $C = 10^{-7}$ Ф. Визначити: 1) період коливань; 2) індуктивність контуру; 3) закон зміни сили струму в контурі від часу; 4) довжину хвилі, яка відповідає цьому контуру.

Відповідь: 1) $T = 2\cdot10^{-4}$с; 2) $L = 10{,}15$ мГн; 3) $I = -157\sin(10^{-4}\pi \cdot t)$ мА; 4) $\lambda = 6\cdot10^4$м.

Задача 7. Сила струму у коливальному контурі, що складається з котушки індуктивністю $L = 0{,}1$ Гн та конденсатора, змінюється з часом згідно з виразом $I = -0{,}1\sin(200\pi \cdot t)$ А. Визначити: 1) період коливань; 2) ємність конденсатора; 3) максимальну напругу на обкладках конденсатора; 4) максимальну енергію магнітного та електричного полів.

Відповідь: 1) $T = 10$ мс; 2) $C = 0{,}25\cdot10^{-4}$ Ф; 3) $U_m = 6{,}29$ В; 4) $W^m_{\max}$=0,5 мДж; $W^e_{\max}$=0,5 мДж;.

Задача 8. У коливальному контурі спостерігаються вільні незгасаючі коливання з енергією 0,5 мДж. Частота власних коливань у контурі збільшилась у 2,5 рази при повільному розсуванні пластин конденсатора. Знайти роботу, здійснену проти сил електростатичного поля.

Відповідь: $A = 2{,}63$ мДж.

Задача 9. Коливальний контур має конденсатор ємністю $C = 2$ мкФ і котушку індуктивності $L = 0{,}1$ мГн із загальною кількістю витків 500. Максимальна напруга на обкладках конденсатора дорівнює 300 В. Визначте максимальний магнітний потік, що пронизує котушку.

Відповідь: $\Phi = 8{,}5$ мкВб.

Задача 10. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 7$ мкФ, індуктивності $L = 0{,}23$ Гн і опору $R = 40$ Ом. Конденсатор заряджений зарядом $q = 5{,}6\cdot10^{-4}$ Кл. Знайти період коливань контуру, логарифмічний декремент загасання. Написати рівняння залежності зміни напруги на конденсаторі від часу. Знайти напругу на конденсаторі у моменти часу $T/2$, T, $3/2T$ і $2T$ (T – період коливань).

Відповідь: 1) $T = 8\cdot10^{-3}$с; 2) $\lambda =$ 0,7; 3) $U = 80e^{-87t}\cos\left(250\cdot\pi\cdot t\right)$ В; 4) $U_1 = -56{,}5$ В; $U_2 = 40$ В; $U_3 = -28$ В; $U_4 = 20$ В.

Задача 11. Котушка коливального контуру має індуктивність $L = 1$ Гн. Який активний опір має контур, якщо амплітуда вільних коливань у ньому за 0,05 с зменшується у 2,7 рази?

Відповідь: $R = 40$ Ом.

Задача 12. Індуктивність котушки коливального контуру $L = 5$ мГн, ємність конденсатора $C = 0{,}05$ мкФ, опір $R = 10$ Ом. Визначити кількість повних коливань, через яку амплітуда струму зменшиться в e разів.

Відповідь: 10.

Задача 13. Визначити, через скільки повних коливань енергія коливального контуру зменшиться у 16 разів, якщо логарифмічний декремент загасання $\lambda = 0{,}138$.

Відповідь: 10.

Задача 14. Добротність коливального контуру дорівнює 30, частота загасаючих коливань 600 кГц. Визначити час, за який амплітуда сили струму у цьому контурі зменшиться у 10 разів.

Відповідь: $t = 37$ мс.

Задача 15. Індуктивність котушки коливального контуру $L = 6$ мГн, а ємність конденсатора $C = 0{,}3$ мкФ. Знайти логарифмічний декремент загасання та опір контуру, якщо за час $t = 1$ мс різниця потенціалів на обкладках конденсатора зменшилась у 4 рази.

Відповідь: $\lambda = 0{,}358$; $R = 16{,}6$ Ом.

Задача 16. Коливальний контур має параметри: $L = 40$ мкГн і $R = 8$ Ом. Визначити час, протягом якого амплітуда вільних коливань зменшиться в e^2 разів.

Відповідь: $t = 4L/R = 20$ мкс.

Задача 17. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2 мкФ і котушки індуктивністю 5,07 мГн. При яких значеннях логарифмічного декремента загасання та опору різниця потенціалів на обкладках конденсатора за 0,001 с зменшується втричі?

Відповідь: $\lambda = 0{,}22$; $R = 11$ Ом.

Задача 18. Індуктивність $L = 2{,}26 \cdot 10^{-2}$ Гн та активний опір R увімкнуті паралельно у коло змінного струму частотою 50 Гц. Знайти величину опору R, якщо відомо, що зсув фаз між напругою і струмом дорівнює 60°.

Відповідь: $R = 12{,}3$ Ом.

Задача 19. Активний опір коливального контуру $R = 0{,}33$ Ом. Яку потужність потрібно надавати контуру, щоб у ньому існували незгасаючі коливання з амплітудою сили струму $I_0 = 30$ мА?

Відповідь: $P = \dfrac{RI_0^2}{2} = 0{,}15$ мВт.

Задача 20. Параметри коливального контуру $C = 10$ пФ, $L = 6{,}0$ мкГн, $R = 0{,}50$ Ом. Яку потужність потрібно надавати контуру, щоб у ньому існували незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_0 = 10$ В?

Відповідь: $P = 42$ мкВт.

Задача 21. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 4 мкФ і котушки індуктивністю 2 мГн та активним опором 10 Ом. Визначити відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора у момент часу, що відповідає максимуму сили струму у контурі.

Відповідь: $W_m / W_e = 5$.

Задача 22. Коливальний контур радіоприймача настроєний на довжину хвилі 1,5 м. У скільки разів потрібно змінити ємність конденсатора контуру, щоб настроїтися на частоту 100 МГц?

Відповідь: збільшити у 4 рази.

Задача 23. Визначити модуль напруженості електричного поля E плоскої хвилі через модуль вектора Умова-Пойтинга $\vec{S}$ і діелектричну проникність середовища ε. Припустити $\mu = 1$.

Відповідь: $E = \left(S / c\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon} \right)^{1/2}$.

Задача 24. Електромагнітна хвиля з частотою 3,0 МГц переходить з вакууму у немагнітне середовище з відносною діелектричною проникністю ε=4. Визначити зміну довжини хвилі.

Відповідь: $\Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) \frac{c}{\nu} = 50$ м.

Задача 25. Амплітуда напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі, що розповсюджується у немагнітному середовищі, діелектрична проникність якого ε=81, дорівнює $H_0 = 0{,}05$ А/м. Визначити амплітуду напруженості електричного поля E_0 і швидкість розповсюдження хвилі у середовищі.

Відповідь: E_0=2,09 В/м; $\upsilon = 1{,}1 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 26. Плоска монохроматична електромагнітна хвиля поширюється вздовж осі x. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 5$ мВ/м, амплітуда напруженості магнітного поля хвилі $H_0 = 1$ мА/м. Визначити енергію, перенесену хвилею за час $t = 10$ хв через поверхню, розташовану перпендикулярно осі x, площа поверхні $S = 15$ см^2. Період хвилі $T << t$.

Відповідь: $W = \frac{1}{2} E_0 H_0 S t = 2{,}25$ мкДж.

Задача 27. Змінну напругу, діюче значення якої $U_{\partial} =$ 220 В, а частота ν =50 Гц, увімкнули послідовно з індуктивністю $L = 31{,}8$ мГн з активним опором $R = 10$ Ом. Знайти кількість тепла Q, що виділилося на активному опорі за 1 с. Як зміниться Q, якщо послідовно з індуктивністю і активним опором увімкнули конденсатор ємністю $C = 219$ мкФ?

Відповідь: $Q = 2{,}4$ кДж; збільшиться у два рази.

Задача 28. Власна частота коливань контуру ν_0 =8 кГц, добротність $Q = 72$, у контурі виникають загасаючі коливання. Знайти закон зменшення енергії в опорі від часу. Яка частина початкової енергії збережеться у контурі за 1 мс?

Відповідь: $W = W_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right)$, 50%.

Задача 29. На скільки процентів відрізняється частота вільних коливань реального контуру з добротністю $Q = 5$ від частоти вільних коливань такого самого ідеального контуру?

Відповідь: 5%.

Задача 30. Коло змінного струму складається з послідовно з’єднаних котушки, конденсатора та резистора. Амплітудне значення сумарної напруги на котушці та конденсаторі U_{LC_0} =173 В, а амплітудне значення напруги на резисторі U_{R_0} =100 В. Визначте зсув фаз між струмом та зовнішньою напругою.

Відповідь: 60°.

4 ХВИЛЬОВА ОПТИКА

4.1 Мета заняття

Засвоїти основні закони хвильової оптики. Навчитися використовувати на практиці основні співвідношення, що описують такі явища, як інтерференція, дифракція, поляризація, дисперсія та поглинання світла.

4.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для більш повного засвоєння матеріалу потрібно вивчити розділи «Інтерференція світла», «Дифракція світла» [1, розд. 12, 13; 3, §119-133; 5, розд. 8.3, 8.4], «Поляризація» й «Дисперсія та поглинання світла» [1, розд. 14; 3, §134-146; 5, розд. 8.5], а також використовувати конспект лекцій.

Під час вивчення розділу «Інтерференція світла» у першу чергу необхідно навчитися проводити розрахунок інтерференційної картини.

Задачі на інтерференцію можуть бути двох типів:

1) дослідження інтерференції світла від двох когерентних джерел випромінювання, при якому використовуються дзеркала Френеля, біпризма Френеля, дзеркало Ллойда, дослід Юнга тощо.

2) дослідження інтерференції в тонких плівках. Інтерференційні полоси рівного нахилу та рівної товщини.

Під час розгляду явища дифракції основною метою є розрахунок дифракційної картини, тобто знаходження розподілу інтенсивності світла у залежності від розмірів та форми неоднорідностей, які спричиняють дифракцію.

Необхідно розрізняти два види дифракції: дифракцію Фраунгофера (дифракція у паралельних променях) та дифракцію Френеля (дифракція променів, які сходяться).

При розгляді явища поляризації необхідно звернути увагу на такі поняття, як неполяризована, часткова чи повністю поляризована світлова хвиля, площина поляризації, поляризатор, аналізатор. Варто також ознайомитися з принципом дії призм Ніколя та згадати закони відбиття та заломлення світла.

Необхідно усвідомити зміст таких явищ як поглинання світла, розсіювання світла та дисперсія світла.

4.3 Основні закони і формули

Інтерференція світла

1. Швидкість світла у середовищі

$$\upsilon = c/n,$$

де c – швидкість світла у вакуумі, n – абсолютний показник заломлення середовища.

2. Закон відбиття світла: кут падіння променів дорівнює куту відбиття.

3. Закон заломлення світла

$$\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1 = n_{21},$$

де α і β – кути падіння і заломлення; n_1 і n_2 – абсолютні показники заломлення для першого і другого середовища; n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

4. Оптичний шлях світла у середовищі

$$L = \int n\,dS,$$

де S – геометричний шлях.

Якщо середовище однорідне, тобто $n = const$, то оптичний шлях дорівнює

$$L = nS.$$

5. Оптична різниця ходу двох світлових хвиль

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2 S_2 - n_1 S_1,$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення; S_1 і S_2 – шляхи відповідних хвиль.

6. Результуюча інтенсивність світла при накладанні двох монохроматичних хвиль однакової частоти

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta,$$

де $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$ – різниця фаз хвиль, Δ – оптична різниця ходу, λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

7. Умови інтерференційних

максимумів $\Delta = \pm m\lambda_0,\ m = 0, 1, 2, \ldots,$

і мінімумів $\Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda_0}{2},\ m = 0, 1, 2, \ldots$

8. При відбитті світла від середовища з оптично більшою густиною фаза хвилі стрибком змінюється на π, тобто оптичний шлях світлової хвилі змінюється на $\lambda/2$.

9. Різниця ходу світлових хвиль, відбитих від верхньої і нижньої поверхонь плоскопаралельної пластинки або плівки з показником заломлення n_2:

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha} + \lambda_0/2 = 2dn\cos\beta + \lambda_0/2,$$

де d – товщина пластинки (плівки), α – кут падіння променів на неї, β – кут заломлення, n_1– показник заломлення оточуючого середовища. Другий доданок $(\lambda_0/2)$ враховує зміну оптичного шляху при відбитті світла від середовища з оптично більшою густиною. Для світла, що проходить крізь плівку, відбиття світлової хвилі відбувається від середовища з меншою оптичною густиною, тому додаткової різниці ходу світлових променів не спостерігається.

10. Радіуси кілець Ньютона у відбитому світлі

світлих $r_m = \sqrt{(m - 1/2)R\lambda_0},\ m = 1, 2, 3, \ldots,$

темних $r_m = \sqrt{mR\lambda_0},$

де m– номер кільця (m=1, 2, 3,…), R – радіус кривизни лінзи.

Дифракція світла

11. Зовнішній радіус m-ї зони Френеля для сферичної хвилі

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де a – відстань від діафрагми з круглим отвором до точкового джерела світла, b – відстань від діафрагми до екрана, де спостерігається дифракційна картина, m – номер зони Френеля, λ – довжина хвилі.

Для плоскої хвилі

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

12. Кількість відкритих зон Френеля для дифракції Френеля від відкритого отвору радіуса r

$$m = \frac{r^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

де a – відстань від джерела до отвору, b – відстань від отвору до точки спостереження.

13. При дифракції Фраунгофера на щілині шириною a при нормальному падінні світла

– умова мінімумів інтенсивності світла

$$a \sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

– умова максимумів інтенсивності

$$a \sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

де φ – кут дифракції, m – номер максимуму.

14. При дифракції світла на дифракційній решітці з періодом $d = a + b$ (a – ширина щілини, b – відстань між щілинами).

– умова головних максимумів інтенсивності

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де m – порядок головного максимуму.

15. Роздільна сила дифракційної решітки

$$R = \lambda / \Delta\lambda = mN,$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній (λ і $\lambda + \Delta\lambda$), які можна розділити за допомогою цієї решітки, m – порядковий номер дифракційного максимуму, N – кількість щілин у решітці.

16. Кутова дисперсія дифракційної решітки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

17. Лінійна дисперсія дифракційної решітки

$$D_l = \delta l / \delta\lambda,$$

де $\delta\varphi$ – кутова відстань, δl – лінійна відстань меж спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на $\delta\lambda$.

Для малих кутів дифракції

$$D_l \approx fD_\varphi \approx f\frac{m}{d},$$

де f – фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран.

18. Формула Вульфа-Брегга

$$2d\sin\theta = \pm m\lambda, \;\; m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де d – відстань між атомними площинами кристала, θ – кут ковзання (кут між напрямком паралельних рентгенівських променів, що падають на кристал, і грані кристала), що визначає напрямок, в якому спостерігається дзеркальне відбиття випромінювання (дифракційний максимум).

Поляризація світла

19. Закон Брюстера

$$tg\varphi_Б = n_{21},$$

де $\varphi_Б$ – кут падіння, при якому відбита світлова хвиля повністю поляризована, $n_{21} = n_2/n_1$ – відносний показник заломлення двох середовищ.

20. Закон Малюса

$$I = I_0\cos^2\varphi,$$

де I – інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло крізь аналізатор, I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на аналізатор, φ – кут між напрямком коливань світлового вектора хвилі, що падає на аналізатор, та площиною пропускання аналізатора.

21. Ступінь поляризації світла

$$P = \left(I_{\max} - I_{\min}\right)/\left(I_{\max} + I_{\min}\right),$$

де $I_{\max}$, $I_{\min}$ – відповідно максимальна і мінімальна інтенсивність частково поляризованого світла, що пройшло через аналізатор.

Поглинання світла. Розсіювання світла. Дисперсія світла

22. Закон Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

де I_0 – значення інтенсивності світла на вході у шар середовища товщиною x, I – значення інтенсивності світла на виході з середовища, α – коефіцієнт поглинання середовища, який залежить від хімічної природи, стану середовища та від довжини хвилі λ.

23. Абсолютний показник заломлення середовища

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu},$$

де ε – діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність.

24. Дисперсія речовини показує, як швидко змінюється показник заломлення з довжиною хвилі

$$D = dn/d\lambda,$$

Якщо $dn/d\lambda < 0$ $\left(dn/d\omega > 0\right)$ – нормальна дисперсія.

Якщо $dn/d\lambda > 0$ $\left(dn/d\omega < 0\right)$ – аномальна дисперсія.

25. Групова швидкість

$$u = d\omega/dk\ ,$$

де $\omega = \dfrac{2\pi\nu}{\lambda}$ – циклічна частота, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

26. Зв'язок між груповою та фазовою швидкістю

$$u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda},$$

де υ – фазова швидкість.

4.4 Контрольні запитання та завдання

1. Яке явище має назву інтерференції світла та які умови її спостереження?
2. Які хвилі називаються когерентними?
3. Що таке геометрична та оптична різниця ходу?
4. Запишіть умови мінімуму та максимуму інтенсивності при інтерференції світла.
5. Назвіть способи одержання когерентних джерел світла.
6. Що таке дифракція світла? Які види дифракції ви знаєте?
7. У чому полягає відмінність дифракції Френеля від дифракції Фраунгофера?
8. Визначте умови спостереження дифракції світла.
9. У чому полягає принцип побудови зон Френеля?
10. Запишіть умови дифракційних мінімумів та максимумів для однієї щілини, для дифракційної решітки.
11. Як визначається розподіл інтенсивності світла у випадку дифракції у паралельних променях на одній щілині і на дифракційній решітці?
12. Який вигляд має дифракційний спектр видимого світла? Чим він відрізняється від призматичного спектра?
13. Що таке лінійна, кутова дисперсія і роздільна сила дифракційної решітки?
14. Запишіть формулу Вульфа-Брегга. Яке практичне застосування вона має?
15. Яке явище має назву дисперсії світла? Чим відрізняється нормальна дисперсія від аномальної?
16. Яке світло називається природним, а яке – поляризованим та частково поляризованим?
17. Що називається ступенем поляризації світла? Чому дорівнює ступінь поляризації природного, плоскополяризованого світла?
18. Сформулюйте закон Малюса.
19. Під яким кутом світло має падати на межу розподілу двох прозорих діелектриків, щоб відбитий промінь був повністю поляризований?
20. Що називається поглинанням світла? Сформулюйте закон Бугера.

21. Який фізичний зміст поняття «коефіцієнт поглинання»? Від чого залежить цей коефіцієнт?

22. Чим відрізняються групова та фазова швидкості хвилі? Якою формулою вони пов'язані?

4.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Два когерентних джерела світла S' і S'' розташовані на відстані $d = 5$ мм одне від одного і на відстані $L = 6$ м від екрана (рис. 4.1). Довжина хвилі джерел у вакуумі $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Визначити на екрані місце розташування п'ятого максимуму і відстань між сусідніми максимумами. Припустивши, що джерела мають скінченні розміри, визначити якою має бути допустима ширина щілин d_0, щоб на екрані одержати виразну інтерференційну картину.

Дані: $d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м,

$L = 6$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

$x_5 -$? $\Delta x -$? $d_0 -$?

Аналіз і розв'язання

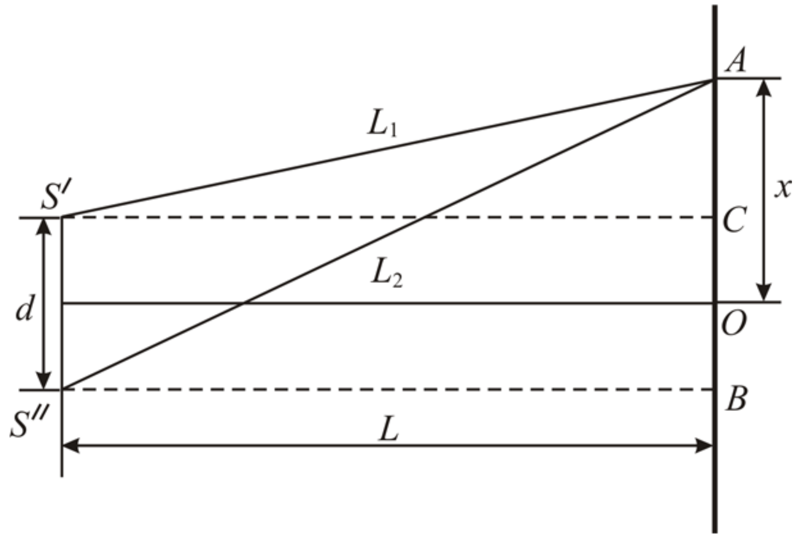

Рисунок 4.1

Хвилі від джерел S' і S'', які інтерферують у точці *A*, до зустрічі проходять різні геометричні шляхи L_1 і L_2. Маючи на увазі, що показник заломлення середовища, де розповсюджуються хвилі, дорівнює одиниці, можна записати оптичну різницю ходу двох променів:

$$\Delta = \left(L_2 - L_1\right)n = L_2 - L_1.$$

Умова максимуму інтенсивності

$$\Delta = m\lambda,$$

$$L_2 - L_1 = m\lambda, \quad m = 0,1,2,\ldots \qquad (4.1)$$

Враховуючи це, для визначення положення максимуму потрібно зв'язати різницю ходу з координатою x точки *A* на екрані.

З $\Delta CS'A$ одержуємо:

$$L_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \ \left(CO = \frac{d}{2}\right), \tag{4.2}$$

а з $\Delta BS''A$ одержуємо:

$$L_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \tag{4.3}$$

Віднімаючи від (4.3) співвідношення (4.2), маємо:

$$L_2^2 - L_1^2 = 2xd,$$

$$(L_2 - L_1)(L_2 + L_1) = 2xd. \tag{4.4}$$

Маючи на увазі, що відстань між джерелами набагато менша ніж відстані від джерел випромінювання до екрана, можна вважати $L_1 \approx L_2 \approx L$, тобто $L_2 + L_1 = 2L$, тоді з (4.4) виходить:

$$L_2 - L_1 = 2xd/2L = xd/L.$$

Використовуючи (4.1), визначаємо положення m-го максимуму:

$$x_m d/L = m\lambda,$$

$$x_m = \frac{m\lambda L}{d}.$$

Якщо середовище має показник заломлення n, то:

$$x_m = \pm\frac{m\lambda L}{nd}.$$

$x_5 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-3}$ (м) – положення п’ятого максимуму.

Відстань між сусідніми максимумами (а також і відстань між сусідніми мінімумами)

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{L}{d}\lambda,$$

$$\Delta x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

Таким чином, відстань Δx не залежить від порядку інтерференції, тобто інтерференційна картина має вигляд світлих і темних смуг рівної ширини.

Якщо джерела випромінювання протяжні, то кожна точка щілини може вважатися точечним джерелом. Інтерференційна картина від крайніх точок щілини складатиметься з двох інтерференційних картин, зсунутих одна відносно іншої на відстань d_0. Якщо ця відстань менша за відстань між сусідніми світлою і темною смугами, яка дорівнює $L\lambda/2d$, то сумарна інтерференційна картина буде виразною. Це означає, що сумарна інтерференційна картина виразна, якщо виконується умова $d_0 \le L\lambda/2d$, тобто $d_0 \le \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 2. На плоскопаралельну плівку з показником заломлення 1,33 падає нормально паралельний пучок білого світла. При якій найменшій товщині плівки вона буда найбільш прозорою для світла з довжиною хвилі $\lambda_1 = 600$ нм? При якій найменшій товщині плівка одночасно буде найбільш прозорою для світла з довжинами хвиль $\lambda_1 = 600$ нм, $\lambda_2 = 500$ нм?

Дані: $n = 1{,}33$; $\lambda_1 = 600$ нм; $\lambda_2 = 500$ нм;

$d_1 -$? $d_2 -$?

Аналіз і розв’язання

При падінні на плівку світло частково проходить, частково відбивається від її поверхні. У світлі, що проходить, інтерферують дві хвилі, одна з яких проходить крізь плівку без відбиття, а друга – після відбиття від обох поверхонь плівки (рис. 4.2, промені 1 і 2). Результат інтерференції залежить від оптичної різниці ходу, яка при нормальному падінні променів має вигляд:

$$\Delta = 2dn\,. \tag{4.5}$$

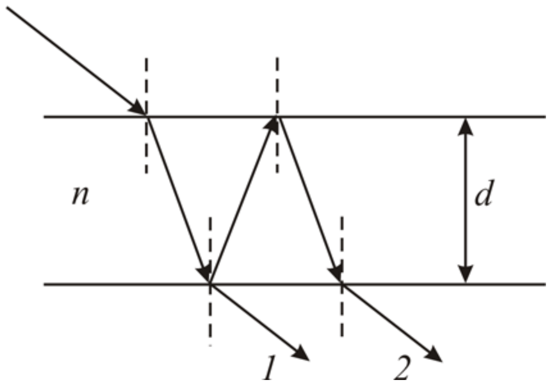

Рисунок 4.2

Плівка буде найбільш прозорою, якщо різниця ходу (4.5) дорівнює цілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = m\lambda\,,\ m = 1,2,3,\ldots \tag{4.6}$$

Прирівнюючи (4.5) та (4.6), одержимо:

$$2dn = m\lambda\,,$$

$$d = \frac{\lambda_1 m}{2n}\ (\text{для } \lambda_1). \tag{4.7}$$

Найменша товщина плівки відповідає $m = 1$, тобто

$$d = \lambda_1 / 2n = 0{,}23\ \text{мкм}.$$

Плівка буде найбільш прозорою для хвиль з довжинами λ_1 і λ_2 одночасно тоді, коли виконуються і умова (4.7), і умова

$$d = \frac{\lambda_2 k}{2n},\ k = 1,2,3,\ldots \tag{4.8}$$

Прирівнявши праві частини (4.7) та (4.8), знайдемо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k}{m}.$$

Це означає, що найбільша прозорість для двох заданих довжин хвиль одночасно можлива, якщо відношення цих довжин хвиль дорівнює відношенню двох цілих чисел.

За умовою

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\ldots,$$

тобто $k=6$, $m=5$ – мінімально можливі значення. Найменша товщина плівки, яка відповідає цим k і m, згідно з (4.7) та (4.8)

$$d=\frac{5\lambda_1}{2n}=\frac{6\lambda_2}{2n}=1{,}15\,(\text{мкм}).$$

Задача 3. Жовте світло натрію (якому відповідають довжини хвиль 589,00 нм та 589,59 нм) падає на дифракційну решітку, що має 7500 штрихів на сантиметр. Визначити: 1) максимум якого найбільшого порядку спостерігається для жовтого світла натрію; 2) кутову дисперсію дифракційної решітки; 3) ширину решітки, яка необхідна для розділення двох ліній натрію; 4) роздільну здатність дифракційної решітки у цьому випадку.

Дані: $\lambda_1=589{,}00$ нм; $\lambda_2=589{,}59$ нм; $N=7500$ штр/см.

$m_{\max}-?$ $D_\varphi-?$ $l-?$ $R-?$

Аналіз і розв'язання

1) Згідно з умовою максимумів для дифракційної решітки

$$d\sin\varphi=m\lambda, \tag{4.9}$$

де d – стала (період) дифракційної решітки, λ – довжина хвилі, m – порядок дифракційного максимуму, φ – кут відхилення променів, які відповідають m-му дифракційному максимуму.

Зважаючи на те, що стала решітки d пов'язана з кількістю штрихів на одиницю довжини решітки N як $d=\frac{1}{N}$, маємо $d=\frac{10^{-2}}{7500}=1{,}33\cdot10^{-6}$ м.

Найбільший порядок максимуму для $\lambda_1=589{,}00$ нм, який можна спостерігати за допомогою цієї решітки, знайдемо з формули (4.9), беручи до уваги, що максимальний кут відхилення променів решіткою не може перевищувати 90°:

$$m\le\frac{d}{\lambda}\sin\varphi_{\max},$$

$$m\le\frac{1{,}33\cdot10^{-6}}{5{,}89\cdot10^{-7}}=2{,}25.$$

m – ціле число. Таким чином, максимальний порядок $m_{\max}=2$.

2) Кутова дисперсія дифракційної решітки

$$D_\varphi=\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}=\frac{m}{d\cos\varphi}.$$

Лінія натрію у спектрі другого порядку спостерігається при

$$\sin\varphi = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2\cdot 589\cdot 10^{-9}}{1{,}33\cdot 10^{-6}} = 0{,}886,$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = 0{,}464,$$

$$D_\varphi = \frac{2}{1{,}33\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}464} = 3{,}24\cdot 10^{-3}\,(\text{рад/нм}).$$

3) Для розділення двох ліній натрію необхідна роздільна здатність решітки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\cdot 10^{-9}}{0{,}59\cdot 10^{-9}} = 1000.$$

Щоб досягти такої роздільної здатності, повна кількість штрихів решітки, внаслідок $R = mN'$, має дорівнювати $N' = \frac{R}{m}$.

Ширина решітки $l = N'\cdot d = \frac{R}{m}d = \frac{1000}{2}\cdot 1{,}33\cdot 10^{-6} = 6{,}7\cdot 10^{-4}$ (м).

Задача 4. Який кут складають між собою головні площини поляризаторів, якщо інтенсивність природного світла, що пройшло крізь два поляризатори, зменшилась у 3,29 разів? При проходженні кожного з поляризаторів втрати на відбиття і поглинання світла дорівнюють $k = 10$ %.

Дані: $I_0/I_2 = 3{,}29$, $k = 10$ %.

$\varphi - ?$

Аналіз і розв'язання

Поляризатор пропускає коливання, паралельні головній площині поляризатора, тому інтенсивність природного світла після проходження ідеального поляризатора зменшується вдвічі. З урахуванням втрат при відбитті і поглинанні інтенсивність світла, що пройшло крізь перший поляризатор

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0(1-k),$$

де I_0 – інтенсивність природного світла, що падає на перший поляризатор.

Інтенсивність світла, що пройшло крізь другий поляризатор (аналізатор) з урахуванням втрат, знайдемо за законом Малюса

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\varphi = \frac{1}{2}I_0(1-k)^2\cos^2\varphi.$$

Згідно з умовою задачі $I_0/I_2 = 3{,}29$, тоді

$$\cos\varphi = \frac{1}{1-k}\sqrt{\frac{2I_2}{I_0}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{1-k}\sqrt{\frac{2I_2}{I_0}}\right);\ \varphi = 30°.$$

Задача 5. Під яким кутом має падати пучок світла з повітря на поверхню води ($n = 1{,}33$), щоб при відбитті від дна скляної посудини ($n = 1{,}5$) світло було повністю поляризоване?

Дані: $n_1 = 1{,}33$; $n_2 = 1{,}5$.

$\alpha - ?$

Аналіз і розв'язання

На рис. 4.3 зображено явище проходження світла крізь межу розподілу двох діелектриків. На межі повітря-вода природне світло (промінь 1) частково відбивається (промінь 2), частково заломлюється (промінь 3) (рис. 4.3). Заломлений промінь 3 частково поляризований. Він частково відбивається від межі вода-скло (промінь 4).

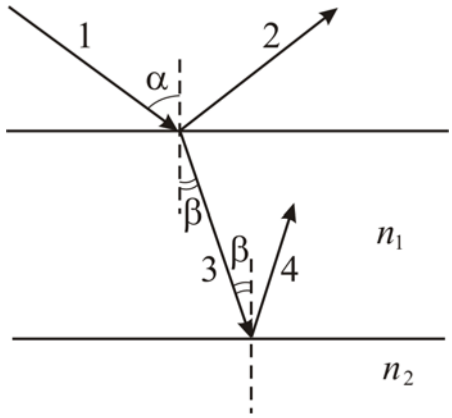

Рисунок 4.3

Для того, щоб відбитий промінь 4 був повністю поляризований, має виконуватись умова:

$$tg\beta = n_{21} = n_2/n_1,$$
$$\beta = arctg(n_2/n_1).$$

Щоб знайти кут падіння α, скористаємося законом заломлення світла:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n} = n_1,$$

де $n = 1$ – показник заломлення повітря.

У підсумку матимемо:

$$\alpha = \arcsin\left[n_1 \sin\left(arctg\frac{n_2}{n_1}\right)\right] = 84°.$$

Задача 6. Частково поляризоване світло проходить крізь ніколь. При повороті ніколя на 60° від положення, яке відповідає максимальній інтенсивності, інтенсивність світлового пучка зменшується у 2 рази. Знехтувавши поглинанням світла у ніколі, визначте: 1) відношення інтенсивностей природного та плоскополяризованого світла; 2) ступінь поляризації пучка.

Дані: $\alpha = 60°$; $I'/I'' = 2$.

$I_e/I_n - ?$ $P - ?$

Аналіз і розв'язання.

У першому положенні ніколь повністю пропустить лінійно поляризоване світло I_n, а також половину інтенсивності природного світла I_e.

Таким чином, інтенсивність світла, яке пройде

$$I' = I_n + 0,5I_e. \tag{4.10}$$

У другому положенні інтенсивність пропущеного поляризованого світла зміниться у відповідності із законом Малюса і сума матиме вигляд:

$$I'' = I_n \cos^2 \alpha + 0,5I_e. \tag{4.11}$$

Згідно з умовою задачі $I' = 2I''$. Використавши (4.10) та (4.11), матимемо

$$I_n + 0,5I_e = 2(I_n \cos^2 60^\circ + 0,5I_e),$$

$$I_n + 0,5I_e = 2\left(\frac{1}{4}I_n + 0,5I_e\right),$$

$$I_n = I_e.$$

Отже, відношення інтенсивностей природного та плоскополяризованого світла дорівнює одиниці.

Ступінь поляризації знаходиться за співвідношенням:

$$P = \left(I_{\max} - I_{\min}\right) / \left(I_{\max} + I_{\min}\right).$$

Очевидно, що $I_{\max} = I' = I_n + 0,5I_e$, а $I_{\min} = 0,5I_e$.

Таким чином,

$$P = \frac{\left(I_n + 0,5I_e\right) - 0,5I_e}{\left(I_n + 0,5I_e\right) + 0,5I_e} = \frac{I_n}{I_n + I_e} = \frac{I_n}{2I_n} = 0,5.$$

4.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. На шляху світлової хвилі, що розповсюджується у повітрі, поставили скляну пластинку ($n = 1,5$) товщиною 1 мм. На скільки зміниться оптична довжина шляху, якщо хвиля падає на пластинку: 1) нормально, 2) під кутом 30°.

Відповідь: збільшиться 1) на 0,5 мм, 2) на 0,548 мм.

Задача 2. Відстань між двома щілинами у досліді Юнга $d = 0,5$ мм ($\lambda = 0,6$ мкм). Знайти ширину Δx інтерференційних полос, якщо відстань L від щілин до екрана становить 1м.

Відповідь: $\Delta x = 1,2$ мм.

Задача 3. Знайти відстань між щілинами d у досліді Юнга, якщо відстань між третім і п'ятим інтерференційними мінімумами дорівнює $l = 0,8$ см, довжина хвилі $\lambda = 0,48$ мкм, екран розміщений на відстані $L = 5$ м від щілин.

Відповідь: $d = 0,6$ мм.

Задача 4. На мильну плівку ($n = 1{,}3$), яка розташована на повітрі, падає нормально пучок променів білого світла. При якій найменшій товщині плівки d відбите світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}55$ мкм виявиться максимально підсиленим внаслідок інтерференції.

Відповідь: $d = 0{,}1$ мкм.

Задача 5. Чому дорівнює товщина оптичного покриття d із MgF_9 ($n_1 = 1{,}38$), яке призначене для гасіння світла з довжиною хвилі $\lambda = 550$ нм при нормальному падінні на скло ($n_2 = 1{,}5$)?

Відповідь: $d = 99{,}6$ нм.

Задача 6. На тонкий скляний клин у напрямку нормалі до його поверхні падає монохроматичне світло ($\lambda = 600$ нм). Визначити кут α між поверхнями клина, якщо відстань між суміжними інтерференційними максимумами у відбитому світлі дорівнює 4 мм.

Відповідь: $\alpha = 10{,}3''$.

Задача 7. Поверхні скляного клина ($n = 1{,}5$) створюють між собою кут $\alpha = 0{,}2'$. На клин нормально до його поверхні падає пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}55$ мкм. Визначити ширину b інтерференційної смуги.

Відповідь: $b = \dfrac{\lambda}{2n\alpha} = 3{,}15$ мм.

Задача 8. Плосковипукла лінза опуклою стороною лежить на скляній пластині. Визначити товщину h шару повітря там, де у відбитому ($\lambda = 0{,}6$ мкм) спостерігається перше світле кільце Ньютона.

Відповідь: $h = 0{,}15$ мкм.

Задача 9. При спостереженні кілець Ньютона у жовтому світлі $\lambda = 0{,}58$ мкм, що проходить крізь установку, простір між лінзою і скляною пластиною заповнений водою ($n = 1{,}33$). Різниця радіусів шістнадцятого і четвертого кілець Ньютона $\Delta r_{16,4} = 1{,}32 \cdot 10^{-3}$ м. Визначити радіус кривизни лінзи R.

Відповідь: $R = 1$м.

Задача 10. Між точковим джерелом світла та екраном розташували діафрагму з круглим отвором, радіус якого R можна змінювати. Відстань від діафрагми до джерела і від діафрагми до екрана $a = 100$ см і $b = 125$ см, відповідно. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості у центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при $R_1 = 1$ мм і наступний максимум при $R_2 = 1{,}29$ мм.

Відповідь: $\lambda = 0{,}6$ мкм.

Задача 11. Радіус четвертої зони Френеля для плоского хвильового фронту дорівнює 3 мм. Визначити радіус шостої зони Френеля.

Відповідь: $r_6 = 3{,}69$ мкм.

Задача 12. Плоска світлова хвиля ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падає нормально на діафрагму з круглим отвором діаметром $d = 1$ см. На якій відстані b від отвору має знаходитися точка спостереження, щоб отвір відкривав зони Френеля: 1) одну; 2) дві?

Відповідь: 1) $b = 50$ м; 2) $b = 25$ м.

Задача 13. На щілину шириною $a = 0{,}1$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0{,}5$ мкм). За щілиною розташована збираюча лінза, у фокальній площині якої розташований екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут φ дифракції дорівнює: 1) $17'$; 2) $43'$?

Відповідь: перший дифракційний мінімум; дифракційний максимум, що відповідає $m = 2$.

Задача 14. На дифракційну решітку, яка має $N = 400$ штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Знайти загальну кількість дифракційних максимумів, які має решітка. Визначити кут φ дифракції, який відповідає останньому максимуму.

Відповідь: $m_{\max} = 8$; $\varphi_{\max} = 74°$.

Задача 15. На дифракційну решітку, яка має 50 штрихів на 1 мм, падає паралельно пучок білого світла. Яка різниця кутів відхилення кінця першого і початку другого спектра? Довжину крайніх червоних і крайніх фіолетових хвиль прийняти рівними 760 і 400 нм.

Відповідь: $\Delta\varphi = 7'$.

Задача 16. На дифракційну решітку, яка має $N = 500$ штрихів на 1 мм, падає у напрямку нормалі до її поверхні біле світло. Спектр спроектований розташованою поблизу решітки лінзою на екран. Визначити ширину b спектра першого порядку на екрані, якщо відстань L лінзи до екрана дорівнює 3 м. Границя видимості спектра $\lambda_{черв} = 780$ нм, $\lambda_{фіол} = 400$ нм.

Відповідь: $b_1 = 66$ см.

Задача 17. При проходженні у речовині відстані 1,5 см інтенсивність світла зменшилась у 3 рази. Чому дорівнюватиме шлях x, на якому інтенсивність світла зменшиться у 9 разів?

Відповідь: $x = 3$ см.

Задача 18. При проходженні у деякій речовині шляху x інтенсивність світла зменшується у 2 рази. Як зміниться інтенсивність світла при проходженні втричі більшого шляху?

Відповідь: зменшиться у 8 разів.

Задача 19. Визначити, у скільки разів послабиться інтенсивність світла, що пройшло крізь два ніколя, розташованих так, що кут між головними площинами дорівнює 45°, а у кожному ніколі втрачається 5% інтенсивності падаючого на нього світла.

Відповідь: I_0/I_2 =4,73.

Задача 20. Визначити ступінь поляризації P світла, утвореного сумішшю природного світла з плоскополяризованим, якщо інтенсивність поляризованого світла у три рази більша за інтенсивність природного.

Відповідь: $P = 0{,}75$.

Задача 21. Кут між головними площинами аналізатора і поляризатора дорівнює 60°. У скільки разів збільшиться інтенсивність світла, що виходить з аналізатора, якщо кут зменшити до 45°?

Відповідь: I_2/I_1 =2.

Задача 22. Кут заломлення променя у рідині β=35°. Визначити показник заломлення n рідини, якщо відомо, що відбитий пучок світла максимально поляризований.

Відповідь: $n = 1{,}43$.

Задача 23. Визначити кут повної поляризації при відбитті світла від скла, показник заломлення якого дорівнює 1,57.

Відповідь: $\varphi_n = 57^\circ\,30'$.

Задача 24. Граничний кут повного внутрішнього відбиття для деякої речовини дорівнює 45°. Чому дорівнює для цієї речовини кут повної поляризації?

Відповідь: $\varphi_n = 54^\circ\,44'$.

Задача 25. Чому дорівнює показник заломлення скла, якщо при відбитті від нього світла відбитий промінь буде повністю поляризований при куті заломлення 30°?

Відповідь: 1,73.

Задача 26. У досліді Юнга знайти відстань x між центральною смугою і четвертим інтерференційним максимумом, якщо відстань між щілинами $d = 0{,}5$ мм, екран розміщений на відстані $L = 3$ м від щілин, довжина хвилі $\lambda_0 = 0{,}58$ мкм.

Відповідь: $x = 14$ мм.

Задача 27. Пучок монохроматичних ($\lambda = 0{,}6$ мкм) світлових хвиль падає під кутом 30° на розташовану у повітрі мильну плівку ($n = 1{,}3$). При якій найменшій товщині плівки відбиті світлові хвилі будуть максимально послаблені інтерференцією, максимально підсилені?

Відповідь: $t_1 =$ 0,25 мкм; $t_2 = 0{,}125$ мкм.

Задача 28. Між скляною пластинкою і розташованою на ній плоско-випуклою скляною лінзою налито рідину, показник заломлення якої менший за показник заломлення скла. Радіус r_8 восьмого темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі ($\lambda = 700$ нм) дорівнює 2 мм. Радіус R кривизни опуклої поверхні лінзи дорівнює 1 м. Знайти показник заломлення n рідини.

Відповідь: $h = 1{,}4$.

Задача 29. Паралельний пучок рентгенівського випромінювання падає на грань кристала. Під кутом $\theta = 65°$ до площини грані спостерігається максимум першого порядку. Відстань d між атомними площинами кристала 280 нм. Визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

Відповідь: λ=506 нм.

Задача 30. Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0{,}2$. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної складової I_n / I_{np}.

Відповідь: $I_n / I_{np} = 0{,}25$.

5 РІВНОВАЖНЕ ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

5.1 Мета заняття

Вивчення законів теплового випромінювання та оволодіння методикою розв'язування задач на основі цих законів.

5.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 1; 4, § 1-7; 5, розд. 9.1], засвоїти зміст фізичних величин, що характеризують теплове випромінювання, і законів теплового випромінювання (закон Кірхгофа, закон Стефана–Больцмана, закони Віна, закон Релея–Джинса, формула Планка), відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язування задач, що наведені у прикладах.

5.3 Основні закони і формули

1. Потік (потужність) випромінювання

$$\Phi = W/t,$$

де W – енергія випромінювання, t – час.

2. Інтегральна енергетична світність тіла (інтегральна випромінювальна здатність)

$$R_e = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{t \cdot S},$$

де S – площа тіла.

3. Спектральна енергетична світність (спектральна випромінювальна здатність, спектральна густина енергетичної світності) тіла

$$r(\nu, T) = dR_e/d\nu,$$

де R_e – енергетична світність;

ν – частота випромінювання.

4. Зв'язок між довжиною хвилі і частотою теплового випромінювання

$$\lambda = c/\nu,$$

де λ – довжина хвилі, c – швидкість світла.

5. Зв'язок між випромінювальною здатністю в частотному діапазоні $r(\nu, T)$ і діапазоні довжин хвиль $r(\lambda, T)$

$$r(\lambda, T) = r(\nu, T)\frac{c}{\lambda^2}.$$

6. Поглинальна здатність тіла

$$\alpha(\nu, T) = d\Phi'/d\Phi,$$

де $d\Phi$ – потік променевої енергії, що падає на елементарну площу поверхні,

$d\Phi'$ – потік, який поглинається цією площею.

7. Закон Кірхгофа

$$r(\nu,T)/\alpha(\nu,T) = f(\nu,T),$$

де $f(\nu,T)$ – універсальна функція Кірхгофа.

8. Закон Стефана–Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

де R_e – інтегральна енергетична світність абсолютно чорного тіла,

T – термодинамічна температура,

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2·К^4 – стала Стефана–Больцмана.

9. Енергетична світність сірого тіла

$$R_e = \alpha(\nu,T)\sigma T^4.$$

10. Закон зміщення Віна

$$\lambda_{max} = b/T,$$

де $\lambda_{\max}$ – довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної енергетичної світності абсолютно чорного тіла;

$b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – стала Віна.

11. Залежність максимальної випромінювальної здатності від температури

$$r_{\max}(\lambda,T) = CT^5,$$

де C – стала ($C = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^3·К^5).

12. Формула Планка

$$r(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

$$r(\nu,T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

де $r(\lambda,T)$ і $r(\nu,T)$ – випромінювальні здатності абсолютно чорного тіла,

λ – довжина хвилі,

ν – частота,

c – швидкість світла у вакуумі,

k – стала Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К),

T – термодинамічна температура,

h – стала Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с).

13. Енергія кванта

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = \hbar\omega,$$

де $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с.

5.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що називають тепловим випромінюванням?
2. Назвіть характеристики теплового випромінювання.

3. Яке тіло називають абсолютно чорним, сірим?

4. Яке випромінювання називається рівноважним?

5. Сформулюйте закони теплового випромінювання – закон Кірхгофа, закон Стефана–Больцмана, закон Віна.

6. Поясніть фізичний зміст універсальної функції Кірхгофа.

7. Що таке квант? Чому дорівнює енергія кванта?

8. Запишіть формулу Планка для теплового випромінювання.

9. Дайте визначення радіаційній, кольоровій та яскравісній температурі.

5.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Поверхня Сонця за своїми властивостями близька до абсолютно чорного тіла. Максимум емісійної здатності припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0{,}50$ мкм (у випромінюванні Сонця, що пройшло крізь атмосферу і досягло поверхні Землі, максимум припадає на $\lambda_m = 0{,}55$ мкм).

Визначити:

1) температуру T сонячної поверхні;

2) енергію W, що випромінюється Сонцем за 1 секунду у вигляді електромагнітних хвиль;

3) масу Δm, що губить Сонце за 1 секунду за рахунок випромінювання;

4) приблизний час τ, за який маса Сонця зменшилась би за рахунок випромінювання на 1%, якби температура Сонця залишалася сталою.

Дані: $\lambda_m = 0{,}50$ мкм; $t = 1$ с; $\dfrac{\Delta m_1}{M_c} = 0{,}01$; $M_c = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг (маса Сонця); $r_c = 6{,}95 \cdot 10^8$ м (радіус Сонця); $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (швидкість світла);

$T - ?$ $W - ?$ $\Delta m - ?$ $\tau - ?$

Аналіз і розв'язання

Температуру T сонячної поверхні можна визначити за законом зміщення Віна:

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}\, м \cdot К}{0{,}50 \cdot 10^{-6}\, м} = 5{,}8 \text{ (кК)}. \tag{5.1}$$

Енергія, що випромінюється Сонцем, дорівнює добутку потоку енергії на час, за який цей потік випромінюється, тобто:

$$W = \Phi \cdot t. \tag{5.2}$$

Потік енергії Φ, що випромінюється Сонцем, дорівнює добутку випромінювальності (енергетичної світності) на площу S його поверхні:

$$\Phi = R_e \cdot S.$$

Енергетичну світність R_e знаходимо із закону Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4. \tag{5.3}$$

Площа сонячної поверхні

$$S = 4\pi r_c^2. \tag{5.4}$$

Підставляючи (5.1), (5.3), (5.4) у формулу (5.2), отримаємо

$$W = 4\pi r_c^2 \cdot \sigma b^4\, t \big/ \lambda^4 = 3{,}9 \cdot 10^{26} \text{ (Дж).} \qquad (5.5)$$

Масу Δm, що губить Сонце кожної секунди за рахунок випромінювання електромагнітних хвиль, знайдемо з таких міркувань.

Оскільки маса Сонця зменшується кожної секунди на величину Δm, то при цьому виділяється енергія $\Delta E = (\Delta m)c^2$, де c – швидкість електромагнітного випромінювання.

Ця ж енергія електромагнітних хвиль, випромінюваних за час t, дорівнює добутку потоку енергії Φ (потужність випромінювання) на час t (5.2). Таким чином, $W = c^2 \Delta m$, звідки, з урахуванням (5.5):

$$\Delta m = \frac{W}{c^2} = \frac{4\pi r_c^2 \cdot \sigma b^4 \cdot t}{c^2 \cdot \lambda^4}.$$

Виконавши обчислення за цією формулою, отримаємо

$$\Delta m = 4{,}3 \text{ Гкг.}$$

Оскільки кожної секунди маса Сонця зменшується за рахунок випромінювання на $4{,}3\ Гкг$, то зменшення маси Сонця на 1% (тобто $\Delta m_1 = 0{,}01\, M_c$) відбудеться за час

$$\tau = \frac{0{,}01\, M_c}{\Delta m} = \frac{1{,}98 \cdot 10^{28}\, кг}{4{,}3 \cdot 10^9\, кг/с} \approx 10^{11} \text{ років.}$$

Задача 2. Внаслідок зміни температури абсолютно чорного тіла максимум спектральної густини випромінювальності $r_{\max}(\lambda, T)$ змістився з $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм на $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм. Як і у скільки разів змінилася випромінювальність R_e тіла і максимальна спектральна густина випромінювальності $r_{\max}(\lambda, T)$?

Дані: $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм; $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм;

$\dfrac{R_{e2}}{R_{e1}}$ – ? $\dfrac{r_{\max 2}(\lambda, T)}{r_{\max 1}(\lambda, T)}$ – ?

Аналіз і розв'язання

Випромінювальність (енергетичну світність) абсолютно чорного тіла знайдемо із закону Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4.$$

Для температури T_1, якій відповідає максимум спектральної випромінювальності $r(\lambda, T)$ на довжині хвилі $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм випромінюваність $R_{e1} = \sigma T_1^4$. Для температури T_2, якій відповідає максимум спектральної випромінювальної здатності $r(\lambda, T)$ на довжині хвилі $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм, відповідно знаходимо $R_{e2} = \sigma T_2^4$.

Тоді

$$R_{e2} \big/ R_{e1} = T_2^4 \big/ T_1^4. \qquad (5.6)$$

Температури T_1 і T_2 визначимо із закону зміщення Віна:

$$\lambda_m = b/T.$$

Тоді

$$T_1 = b/\lambda_1;\ T_2 = b/\lambda_2.$$

Підставивши T_1 і T_2 у формулу (5.6), отримаємо

$$R_{e2}/R_{e1} = \lambda_1^4/\lambda_2^4 = 81 \text{ раз.}$$

Максимальну спектральну випромінювальну здатність знаходимо з формули:

$$r_{\max}(\lambda, T) = CT^5,$$

тоді

$$r_{\max 2}(\lambda, T)/r_{\max 1}(\lambda, T) = T_2^5/T_1^5 = \lambda_1^5/\lambda_2^5 = 243 \text{ рази.}$$

5.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Визначити температуру T, за якої випромінювальність (енергетична світність) R_e абсолютно чорного тіла дорівнює 10 кВт/м^2.

Відповідь: 648 К.

Задача 2. Потік енергії Φ, що випромінюється з оглядового віконця плавильної печі, дорівнює 34 Вт. Визначити температуру T печі, якщо площа отвору S=6 см^2.

Відповідь: 1 кК.

Задача 3. Визначити енергію W, що випромінюється за час $t = 1$ хв. з оглядового віконця площею $S = 8$ см^2 плавильної печі, якщо її температура T=1,2 кК.

Відповідь: 5,65 кДж.

Задача 4. Вважаючи, що муфельна піч випромінює як абсолютно чорне тіло і розсіює стінками 70% потужності, визначити температуру її внутрішньої поверхні при відкритому оглядовому отворі площею $S = 20$ см^2, якщо потужність, яка споживається піччю, дорівнює P=1,4 кВт.

Відповідь: T=1386 К.

Задача 5. Термодинамічна температура абсолютно чорного тіла зросла у 3 рази. Визначити, у скільки разів збільшилась при цьому його інтегральна енергетична світність? У скільки разів і як змінилася довжина хвилі, яка відповідає максимуму його випромінювальної здатності?

Відповідь: 1) 81 раз; 2) зменшилась у 3 рази.

Задача 6. Енергія, що випромінюється за час $t = 2$ хв. з оглядового віконця площею $S = 10$ см^2 плавильної печі, дорівнює W=8 кДж. Визначити температуру печі.

Відповідь: T=1041К.

Задача 7. Температура T верхніх шарів зірки Сіріус дорівнює 10 кК. Визначити потік енергії Φ, що випромінюється з поверхні площею $S = 1$ км^2 цієї зірки.

Відповідь: 56,7 ГВт.

Задача 8. У скільки разів потрібно збільшити термодинамічну температуру абсолютно чорного тіла, щоб його інтегральна випромінювальна здатність зросла у два рази?

Відповідь: В 1,19 разів.

Задача 9. Визначити відносну зміну інтегральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $\Delta R_e / R_e$ при збільшенні його температури на 1%.

Відповідь: 4%.

Задача 10. Визначити температуру T зачерненої металевої пластинки, розташованої перпендикулярно сонячним променям поза земною атмосферою на середній відстані від Землі до Сонця (1,49·10^{11}м). Сонячна стала $C = 1{,}4$ кДж/м^2·с.

Відповідь: 396 К.

Задача 11. Вважаючи, що коефіцієнт чорноти вугілля при температурі T=600 К дорівнює 0,8, визначити випромінювальну здатність вугілля R_e; енергію W, яка випромінюється з поверхні вугілля площею $S = 5$ см^2 за $t = 10$ хв.

Відповідь: R_e =5,88 кДж/м^2·с; W =1,76кДж.

Задача 12. З поверхні сажі площею $S = 2$ см^2 при температурі T=400 К за час $t = 5$ хвилин випромінюється енергія W =83 Дж. Визначити коефіцієнт чорноти сажі.

Відповідь: 0,953.

Задача 13. Можна умовно вважати, що Земля випромінює, як сіре тіло, що має температуру T=280 К. Визначити коефіцієнт чорноти Землі, якщо випромінювальна здатність R_e її поверхні дорівнює 325 кДж/м^2·с.

Відповідь: 0,26.

Задача 14. Потужність P випромінювання кулі радіусом $R = 10$ см при деякій сталій температурі T дорівнює 1 кВт. Знайти цю температуру, вважаючи кулю сірим тілом з коефіцієнтом чорноти 0,25.

Відповідь: $T = \left(\dfrac{P}{4\pi\alpha R^2 \sigma} \right)^{1/4} = 866\,\text{К}.$

Задача 15. Муфельна піч споживає потужність $P = 1$ кВт. Температура її внутрішньої поверхні при відкритому отворі площею $S = 25$ см^2 дорівнює 1,2 кК. Вважаючи, що отвір печі випромінює, як абсолютно чорне тіло, визначити, яка частка n потужності розсіюється.

Відповідь: $n = 1 - \sigma T^4 S / P \approx 0,71$.

Задача 16. Максимум спектральної густини випромінювальності $r_{\max}(\lambda, T)$ зірки Арктур припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 580$ нм. Вважаючи, що зірка випромінює, як абсолютно чорне тіло, визначити температуру T поверхні зірки.

Відповідь: 4,98 кК.

Задача 17. Температура T верхніх шарів Сонця дорівнює 5,3 кК. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, визначити довжину хвилі λ_m, якій відповідає максимальна спектральна випромінювальна здатність $r_{\max}(\lambda, T)$ Сонця.

Відповідь: 547 нм.

Задача 18. При збільшенні термодинамічної температури T абсолютно чорного тіла у два рази довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності $r_{\max}(\lambda, T)$, зменшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Визначити початкову та кінцеву температури T_1 і T_2.

Відповідь: 3,62 кК; 7,24 кК.

Задача 19. Визначити температуру T абсолютно чорного тіла, при якій максимум спектральної випромінювальної здатності $r_{\max}(\lambda, T)$ припадає на червону границю видимого спектра $\lambda_1 = 750$ нм, на фіолетову $\lambda_2 = 380$ нм.

Відповідь: 3,8 кК; 7,6 кК.

Задача 20. При переході від температури T_1 до температури T_2 площа, яка обмежена графіком функції розподілу густини енергії рівноважного випромінювання по довжинах хвиль, збільшується у 16 разів. Як зміниться при цьому довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла?

Відповідь: λ_m зменшується у два рази.

Задача 21. Максимальна спектральна випромінювальна здатність $r_{\max}(\lambda, T)$ абсолютно чорного тіла дорівнює $4{,}16 \cdot 10^{11}$ Вт/м^3. На яку довжину хвилі λ_m вона припадає?

Відповідь: 1,45 мкм.

Задача 22. Куля радіусом $r = 8$ см випромінює, як сіре тіло. Потужність випромінювання при сталій температурі кулі T=1000 К дорівнює $P = 800$ Вт. Визначити коефіцієнт чорноти кулі.

Відповідь: $0{,}18$.

Задача 23. Довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, збільшилася на $\Delta\lambda = 600$ нм при охолодженні абсолютно чорного тіла. Термодинамічна температура тіла при цьому зменшилася у три рази. Знайти початкову і кінцеву температури і довжини хвиль, на які припадають максимуми випромінювальної здатності на цих температурах. У скільки разів змінилась спектральна випромінювальна здатність?

Відповідь: 1) T_1=9,66 кК, T_2=3,22 кК; 2) λ_1=300 нм, λ_2=900 нм; 3) 243.

Задача 24. Довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, зменшилась у три рази при збільшенні його температури від T_1 до T_2. Визначити, у скільки разів і як зміниться площа, обмежена графіком функцій спектральної випромінювальної здатності тіла від довжини хвилі.

Відповідь: збільшиться у 81 раз.

Задача 25. Куб, ребра якого $a = 20$ см, нагрітий до певної сталої температури. Випромінювальна потужність куба $P = 2$ кВт, коефіцієнт чорноти α=0,2. Знайти температуру куба.

Відповідь: T=930 К.

Задача 26. До мідного циліндра довжиною $l = 4$ см і діаметром $d = 2$ см підводиться тепло потужністю $P = 0{,}2$ Вт. У результаті температура циліндра підтримується сталою і рівною $t = 17°C$. Визначити температуру простору, оточуючого циліндр. Поглинальна здатність міді 0,6.

Відповідь: $t_0 = -5°C$.

Задача 27. По дроту діаметром $d = 1$ мм протікає струм $I = 5$ А. Температура дроту підтримується сталою і рівною $t = 727°C$. Питомий опір дроту $\rho = 9{,}2\cdot 10^{-7}$ Ом·м. Температура оточуючого дріт середовища $t = 17°C$. Вважаючи поверхню дроту сірою, знайти його поглинальну здатність.

Відповідь: $0{,}165$.

Задача 28. Зірка масою $m = 1{,}98\cdot 10^{30}$ кг і радіусом $R = 6{,}95\cdot 10^{8}$ м випромінює, як абсолютно чорне тіло. Максимум випромінювальної здатності зірки припадає на довжину хвилі $\lambda = 480$ нм. Знайти її максимальну випромінювальну здатність $r_{\max}(\lambda, T)$ і час t, за який зірка втратить свою масу внаслідок випромінювання електромагнітних хвиль.

Відповідь: 1) $r_{\max}(\lambda,T)=1{,}04\cdot10^{24}$ Вт/м. 2) $t=1{,}24\cdot10^{13}$ років.

Задача 29. Вважаючи, що Сонце має властивості абсолютно чорного тіла, визначити інтенсивність I сонячного випромінювання поблизу Землі за межами її атмосфери (ця інтенсивність має назву сонячної сталої). Температура сонячної поверхні T=5785 К.

Відповідь: $I=\sigma T^4\left(r/R\right)^2=1{,}37$ кВт/м^2 (r– радіус Сонця, R – відстань від Сонця до Землі).

Задача 30. Вважаючи, що Сонце випромінює, як абсолютно чорне тіло, обчислити інтегральну випромінювальну здатність і температуру його поверхні. Сонячний диск видно із Землі під кутом $\theta=32'$. Сонячна стала $C=1{,}4$ кДж/ м$^2\cdot$с (сонячною сталою називається величина, що дорівнює поверхневій густині потоку енергії випромінювання Сонця поза земною атмосферою на середній відстані від Землі до Сонця).

Відповідь: R_e =64,7 МВт/м^2; $T=5{,}8$ кК.

6 КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ

6.1 Мета заняття

Ознайомитися з явищами, які свідчать про квантові властивості випромінювання – зовнішнім фотоефектом, тиском світла та ефектом Комптона. Навчитися розв’язувати задачі, користуючись рівнянням Ейнштейна, розраховувати енергію, масу, імпульс фотона, тиск світла, зміну довжини хвилі фотона при його розсіюванні на електроні.

6.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Користуючись конспектом лекцій та навчальними посібниками [2, розд. 2, 4, § 8-11; 5, розд. 9], ознайомитися з явищами, які свідчать про квантову природу випромінювання. Вивчити закони фотоефекту, рівняння Ейнштейна, формулу Комптона, співвідношення, що визначають енергію, масу, імпульс фотона, тиск світла. Відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв’язання завдань, наведених, як приклад.

6.3 Основні закони і формули

1. Енергія фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = \hbar\omega,$$

де h – стала Планка, $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с,

ν – частота випромінювання,

λ – довжина хвилі,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},\ \hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с},$$

$c = 3\cdot 10^{8}$ м/с – швидкість світла.

2. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + T_{\max},$$

або

$$\hbar\omega = A + T_{\max},$$

де $h\nu = \hbar\omega = \varepsilon$ – енергія фотона, який падає на поверхню металу,

A – робота виходу електрона з металу,

$T_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

3. Максимальна кінетична енергія фотоелектрона:

а) нерелятивістський фотон (енергія фотона набагато менша за енергію спокою електрона ($\varepsilon << E_0 = 0{,}51$ МеВ).

$$T_{\max} = m_0\upsilon_{\max}^2/2,$$

де m_0 – маса спокою електрона.

б) релятивістський фотон (енергія фотона порівняна з енергією спокою електрона або більша за неї)

$$T_{\max} = (m - m_0)c^2,$$

де m – маса релятивістського електрона, або

$$T_{\max} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right).$$

4. Червона межа фотоефекту

$$\lambda_0 = hc/A,$$
$$\nu_0 = A/h,$$

де λ_0 – максимальна довжина хвилі випромінювань, ν_0 – мінімальна частота, при яких ще можливий фотоефект.

5. Тиск світла при нормальному падінні на поверхню

$$P = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

де $E_e = Nh\nu$ – енергія усіх фотонів, які падають на 1 м^2 за 1 с, тобто енергетична освітленість поверхні,

N – кількість фотонів,

$w = E_e/c$ – об'ємна густина енергії випромінювання,

ρ – коефіцієнт відбиття світла.

6. Маса та імпульс фотона

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda},$$
$$p = mc = h/\lambda = h\nu/c.$$

7. Формула Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \lambda_C (1 - \cos\theta),$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

де λ – довжина хвилі фотона, що падає на вільний або слабо зв'язаний електрон,

λ' – довжина хвилі фотона, який розсіявся на кут θ після зіткнення з електроном,

m_0 – маса спокою електрона.

8. Комптонівська довжина хвилі

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}.$$

(При розсіянні фотона на електроні $\lambda_C = 2,43$ пм).

6.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що називають явищем зовнішнього фотоефекту?
2. Поясніть рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.
3. Сформулюйте закони зовнішнього фотоефекту.
4. Що таке «червона» межа фотоефекту? Від чого вона залежить?
5. Що таке робота виходу фотоелектрона?
6. Що називають напругою запирання при зовнішньому фотоефекті? Від чого вона залежить?
7. Чому дорівнює енергія, маса, імпульс фотона?
8. Від чого залежить тиск світла?
9. У чому полягає ефект Комптона?
10. Від чого залежить комптонівське збільшення довжини хвилі?

6.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, вибитих із поверхні натрію монохроматичним світлом із довжиною хвилі λ=300 нм, $\gamma-$випромінюванням (λ=1 пм). Робота виходу для натрію дорівнює $A = 2{,}5$ еВ.

Дані: λ_1=300 нм, λ_2=1 пм, $A = 2{,}5$ еВ $= 4 \cdot 10^{-19}$ Дж,

$\upsilon_{\max 1}-?$ $\upsilon_{\max 2}-?$

Аналіз і розв'язання

Для визначення максимальної швидкості фотоелектронів скористаємось рівнянням Ейнштейна для фотоефекту:

$$\varepsilon = A + T_{\max} \qquad (6.1)$$

Енергію фотона знаходимо за формулою $\varepsilon = hc/\lambda$.

Кінетичну енергію фотоелектронів у рівнянні Ейнштейна залежно від того, яка швидкість їм надається, знаходимо або за класичною формулою, якщо енергія фотона набагато менша від енергії спокою електрона ($\varepsilon << E_0 = 0{,}51$ МеВ), або за релятивістською формулою при енергії фотону, порівняній з енергією спокою електрона.

1. Обчислимо енергію фотона для монохроматичного світла (λ=300 нм):

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{300 \cdot 10^{-9}} = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж=4,15 (еВ)}.$$

Енергія фотона виявилася набагато меншою від енергії спокою електрона. Таким чином, максимальну кінетичну енергію фотоелектрона знаходимо за класичною формулою

$$T_{\max} = \frac{m_0 \upsilon_{\max}^2}{2}. \qquad (6.2)$$

Підставляючи (6.2) у (6.1), маємо

$$\varepsilon_1 = A + \frac{1}{2} m_0 \upsilon_{\max}^2 .$$

Звідки

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A)}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\left(6,63\cdot 10^{-19} - 4\cdot 10^{-19}\right)}{9,11\cdot 10^{-31}}} = 0,76\ \text{(Мм/с)}$$

2. Розглянемо тепер випадок, коли на поверхню натрію падає γ-випромінювання з довжиною хвилі λ_2=1 пм.

Обчислимо енергію фотона γ- випромінювання

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1\cdot 10^{-12}} = 19,89\cdot 10^{-14}\,\text{Дж} = 1,24\ \text{(МеВ)}.$$

Таким чином, енергія фотона перевищує масу спокою електрона більше ніж удвічі. Тому для визначення кінетичної енергії фотоелектрона скористаємося релятивістським виразом

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_{\max}^2/c^2}} - 1\right), \tag{6.3}$$

звідки

$$\upsilon_{\max} = \frac{\sqrt{T\left(T+2E_0\right)}}{\left(T+E_0\right)}\cdot c. \tag{6.4}$$

Оскільки робота виходу електронів із натрію дуже мала порівняно з енергією γ-фотона, то нею можна знехтувати у формулі (6.1). Тому можна вважати, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії фотона:

$$T_{\max} = \varepsilon = 1,24\,\text{МеВ} = 19,89\cdot 10^{-14}\ \text{(Дж)}.$$

Підставляючи значення величин T, E_0, c в (6.4), отримаємо

$$\upsilon_{\max} = 2,85\cdot 10^{8}\,\text{м/с} = 285\ \text{(Мм/с)}.$$

Задача 2. Визначити червону межу λ_0 фотоефекта для цезію, якщо під час опромінення його поверхні фіолетовим світлом довжиною хвилі λ=400 нм максимальна швидкість фотоелектронів становить 0,65 Мм/с.

Дані: λ=400 нм, $\upsilon_{\max}$ =0,65 Мм/с,

λ_0–?

Аналіз і розв'язання

Під час опромінення світлом, довжина хвилі λ_0 якого відповідає червоній межі фотоефекту, швидкість, а також кінетична енергія фотоелектрона дорівнює нулю. Тому рівняння Ейнштейна для фотоефекту $h\nu = A + T_{\max}$ у випадку червоної межі запишеться у вигляді $h\nu_0 = A$ або $hc/\lambda_0 = A$. Звідки

$$\lambda_0 = hc/A. \tag{6.5}$$

Роботу виходу для цезію знайдемо з рівняння Ейнштейна

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Підставивши значення A у формулу (6.5), знайдемо λ_0.

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 - m\upsilon^2\lambda/2hc} = 640 \text{ (нм).}$$

Задача 3. Фотон з енергією $\varepsilon = 0,75$ МеВ розсіявся на вільному електроні під кутом $\theta = 60^\circ$. Вважаючи кінетичну енергію та імпульс електрона до зіткнення з фотоном достатньо малими, визначити:

1) енергію розсіяного фотона;
2) кінетичну енергію T електрона віддачі.

Дані: $\varepsilon = 0,75$ МеВ, $\theta = 60^\circ$,

ε' –?, T –?

Аналіз і розв'язання

Енергію розсіяного фотона знайдемо за допомогою формули Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}\left(1 - \cos\theta\right).$$

Виразивши довжину хвиль λ' і λ через енергії відповідних фотонів, одержимо

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar}{mc}\left(1 - \cos\theta\right).$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на $2\pi\hbar c$

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos\theta}{mc^2}.$$

Звідси

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\dfrac{\varepsilon\left(1 - \cos\theta\right)}{mc^2} + 1} \approx 0,43 \text{ (МеВ).}$$

Кінетична енергія електрона віддачі за законом збереження енергії дорівнює різниці між енергією ε фотона, що падає, і енергією ε' розсіяного фотона.

$$T = \varepsilon - \varepsilon',$$
$$T = 0,32 \text{ (МеВ).}$$

Задача 4. Пучок монохроматичного світла падає нормально на плоску поверхню. Потік енергії $\Phi = 0,5$ Вт. Сила тиску на поверхню дорівнює $F = 3$ нН. Визначити коефіцієнт відбиття.

Дані: $\Phi = 0,5$ Вт, $F = 3$нН,

ρ –?

Аналіз і розв'язання

Сила світлового тиску на поверхню дорівнює

$$F = PS, \tag{6.6}$$

де P – тиск світла, S – площина поверхні.

Тиск світла знаходимо за формулою

$$P = \frac{E_e}{c}\left(\rho + 1\right), \tag{6.7}$$

Підставляючи (6.7) у (6.6), отримаємо

$$F = \frac{E_e S(\rho + 1)}{c}.$$

Але $E_e S = \Phi$. Тоді

$$F = \frac{\Phi(\rho + 1)}{c}.$$

Звідси

$$\rho = \frac{cF}{\Phi} - 1 = 0{,}8.$$

6.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. На вольфрам падає світло з довжиною хвилі λ=200 нм. Визначити найменшу затримуючу напругу, при якій фотострум припиниться, якщо робота виходу з вольфраму $A = 4{,}52$ еВ.

Відповідь: U_3=1,695 В.

Задача 2. Затримуюча напруга для калієвої пластинки U_1=0,91 В. Робота виходу електронів із калію A_1 =2,2 еВ. При тих самих умовах для іншої пластинки затримуюча напруга дорівнює U_2 =3 В. Визначити роботу виходу з цієї пластинки.

Відповідь: $A = 0{,}113$ еВ.

Задача 3. Максимальна швидкість електронів, які вириваються з певного металу світлом із довжиною хвилі λ=500 нм, дорівнює υ_{max}=540 км/с. Визначити червону межу фотоефекту.

Відповідь: λ_0=750,5 нм.

Задача 4. На поверхню літію падає монохроматичне світло (λ=310 нм). Щоб припинити емісію електронів, потрібно подати затримуючу різницю потенціалів U не меншу 1,7 В. Знайти роботу виходу A.

Відповідь: A=2,3 еВ.

Задача 5. Яка частина енергії фотона витрачена на роботу виривання фотоелектронів, якщо червона межа фотоефекту λ_0=307 нм, а максимальна кінетична енергія T_{max} фотоелектрона дорівнює 1 еВ?

Відповідь: 0,8.

Задача 6. Для припинення фотоефекту, викликаного опромінюванням ультрафіолетовим світлом платинової пластинки (робота виходу електронів із платини дорівнює 6,3 еВ), потрібно подати затримуючу різницю потенціалів U=3,7 В. Якщо платинову пластину замінити на іншу, то затримуючу різницю потенціалів доведеться збільшити до 6 В. Знайти роботу A виходу електронів із поверхні цієї пластини.

Відповідь: $A = 4$ еВ.

Задача 7. Знайти довжину хвилі ультрафіолетового випромінювання, що падає на поверхню деякого металу, при максимальній швидкості фотоелектронів 10 Мм/с. Роботою виходу електронів із металу знехтувати.

Відповідь: $\lambda = 4{,}36$ нм.

Задача 8. Поверхню металу по черзі опромінюють світлом із довжиною хвилі 400 нм і 800 нм. У другому випадку максимальна швидкість руху фотоелектронів у 1,5 рази менша, ніж у першому. Якою є робота виходу електронів із металу?

Відповідь: $A = 0{,}31$ еВ.

Задача 9. Максимальна швидкість υ_{max} фотоелектронів, що вилітають з металу під час опромінення його γ-фотонами, сягає 291 Мм/с. Визначити енергію ε γ-фотонів.

Відповідь: ε=1,59 МеВ.

Задача 10. Визначити максимальну швидкість υ_{max} фотоелектронів, що вилітають з металу під дією γ-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 3$ пм.

Відповідь: υ_{max}=249 Мм/с.

Задача 11. Робота виходу електронів зі срібла A=4,7 еВ. На пластинку зі срібла падає монохроматичне світло з довжиною хвилі λ=208 нм. Визначити максимальний імпульс, який передається поверхні срібла під час вилітання електрона.

Відповідь: $p = 6{,}09 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

Задача 12. На поверхню вольфраму (робота виходу A=4,52 еВ) падає γ-випромінювання з довжиною хвилі λ=1 пм. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, які вириваються з поверхні вольфраму.

Відповідь: υ_{max}=287 Мм/с.

Задача 13. Визначити енергію ε, масу m та імпульс p фотона, якому відповідає довжина хвилі λ=380 нм (фіолетова межа видимого спектра).

Відповідь: ε=3,27 еВ; m=5,8$\cdot$10^{-36} кг; p=1,74$\cdot$10^{-27} кг$\cdot$м/с.

Задача 14. Визначити довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона, що пройшов різницю потенціалів 9,8 В.

Відповідь: λ=392 пм.

Задача 15. Тиск p монохроматичного світла (λ=600 нм) на чорну поверхню, розташовану перпендикулярно падаючим променям, дорівнює 0,1 мкПа. Визначити кількість N фотонів, що падають за $t = 1$ с на поверхню площею $S = 1$ см^2.

Відповідь: N=9·10^{15}.

Задача 16. Паралельний пучок світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм падає нормально на чорну поверхню і здійснює на неї тиск $p = 10$ мкПа. Визначити: концентрацію n фотонів у пучку; кількість n_1 фотонів, що падають на поверхню площею 1 м^2 за час 1 с.

Відповідь: $n = 2{,}52 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$; $n_1 = 7{,}56 \cdot 10^{22}$ м$^{-2}$с$^{-1}$.

Задача 17. На абсолютно чорну поверхню $S = 2$ м^2, яка розташована перпендикулярно падаючим променям монохроматичного світла, щосекунди падають $N = 8 \cdot 10^{19}$ фотонів. Тиск, який спричиняє світло на поверхню, дорівнює $p = 0{,}1$ мкПа. Визначити довжину хвилі світла.

Відповідь: $\lambda = 265{,}2$ нм.

Задача 18. Тиск монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 400$ нм на ідеально відбиваючу поверхню, розташовану нормально до випромінювання, що падає, дорівнює $p = 0{,}2$ мкПа. Визначити кількість фотонів, які падають на поверхню площею $S = 80$ см^2 за одну секунду.

Відповідь: $N = 4{,}85 \cdot 10^{17}$.

Задача 19. На абсолютно чорну поверхню $S = 2$ м^2, яка розташована перпендикулярно променям монохроматичного світла, що падають на неї, щосекунди потрапляють $N = 8 \cdot 10^{19}$ фотонів. Тиск, який спричиняє світло на поверхню, дорівнює $p = 0{,}1$ мкПа. Визначити довжину хвилі світла.

Відповідь: $\lambda = 265{,}2$ нм.

Задача 20. Довжина хвилі фотона дорівнює комптоновській довжині хвилі λ_C електрона. Визначити енергію та імпульс p фотона.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}511$ МеВ; $p = 2{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

Задача 21. Визначити кут θ розсіяння фотона, який зазнав зіткнення з вільним електроном, якщо зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ при розсіянні становить 3,62 пм.

Відповідь: 120° або 240°.

Задача 22. Визначити імпульс p електрона віддачі при ефекті Комптона, якщо фотон з енергією, однаковою з енергією спокою електрона, був розсіяний на кут $\theta = 180^{\circ}$.

Відповідь: $3{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

Задача 23. Яка частка енергії фотона при ефекті Комптона припадає на електрон віддачі, якщо фотон розсіявся на кут $\theta = 180^{\circ}$? Енергія ε фотона до розсіювання дорівнює $0{,}255$ меВ.

Відповідь: $0{,}5$.

Задача 24. При розсіюванні вузького пучка монохроматичного рентгенівського випромінювання на розсіюючій речовині виявилося, що довжини хвиль розсіяного під кутами $\theta_1 = 45°$ і $\theta_2 = 90°$ випромінювання відрізняються у два рази. Визначити довжину хвилі випромінювання, що падає, вважаючи, що розсіювання відбувається на вільних електронах.

Відповідь: $\lambda = 1{,}01$ пм.

Задача 25. У результаті ефекту Комптона фотон з енергією $\varepsilon = 0{,}5$ МеВ при зіткненні з вільним електроном розсіявся під кутом $\theta = 60°$. Знайти енергію ε' розсіяного фотона.

Відповідь: ε'=0,335 МеВ.

Задача 26. На рисунку 6.1 наведено вольтамперну характеристику вакуумного фотоелемента, на катод якого діє світло з довжиною хвилі 450 нм. Визначити потужність діючого на катод проміння, вважаючи, що кожний сотий з падаючих фотонів вириває з катода електрон.

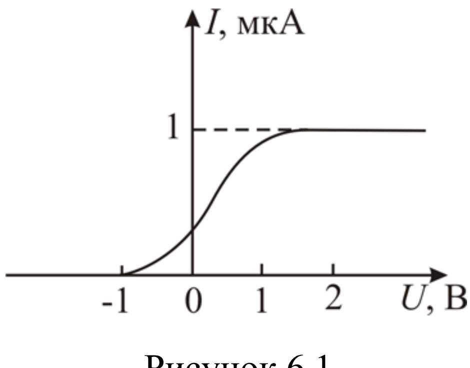

Рисунок 6.1

Відповідь: $27{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт.

Задача 27. Пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі λ=663 нм падає нормально на дзеркальну плоску поверхню. Потік енергії $\Phi = 0{,}6$ Вт. Визначити силу F тиску, якої зазнає ця поверхня, а також кількість фотонів, що падають на неї за час $t = 5$ с.

Відповідь: F=4 нН; $N = 10^{18}$.

Задача 28. Визначте тиск світла на стінки електричної лампочки потужністю 150 Вт, вважаючи, що вся потужність витрачається на випромінювання, а стінки лампочки відбивають 15 % світла, що падає на них. Вважайте лампочку сферою радіусом 4 см.

Відповідь: $p = 28{,}6$ мкПа.

Задача 29. Кут розсіювання θ фотона дорівнює 90°. Кут віддачі φ електрона дорівнює 30°. Визначити енергію ε фотона, що падає.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}37\,\text{МеВ}$.

Задача 30. Фотон розсіявся на вільному електроні, який знаходився у стані спокою. В результаті цього довжина хвилі розсіяного фотона збільшилася на 15%, а кінетична енергія електрона віддачі становила 45 кеВ. Визначити енергію фотона до розсіювання на електроні.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}346\,\text{МеВ}$.

7 ТЕОРІЯ БОРА АТОМА ВОДНЮ. ПОСТУЛАТИ БОРА

7.1 Мета заняття

Засвоїти теорію Бора атома водню. Навчитися застосовувати на практиці постулати Бора та формулу Бальмера для розрахунку спектра водню та воднеподібних іонів (He^{+}, Li^{++} та ін.).

7.2 Вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 5; 4, § 12-17; 5, розд. 10]. Звернути увагу на постулати Бора, квантування електронних орбіт та енергії атому водню, формулу Бальмера. Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

7.3 Основні закони і формули

1. Момент імпульсу електрона на стаціонарних орбітах атома водню за теорією Бора

$$L = m\upsilon r = n\hbar \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

де m – маса електрона,
r – радіус орбіти,
υ – швидкість електрона на орбіті,
n – головне квантове число;
$\hbar$ – стала Планка.

2. Радіус n-ї стаціонарної орбіти

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{ze^2 m} = a_0 n^2,$$

де a_0 – перший борівський радіус ($a_0 = 5{,}3\cdot 10^{-11}$м), Z – порядковий номер атома у таблиці Менделєєва.

3. Енергія електрона в атомі водню

$$E_n = -\frac{mz^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

4. Енергія фотона, що випромінюється атомом водню при переході з одного стаціонарного стану в інший

$$\varepsilon = h\nu = E_n - E_m,$$

де E_n і E_m – відповідно до енергії стаціонарних станів атома до і після випромінювання (поглинання).

5. Узагальнена формула Бальмера

$$\nu = R\left(1/m^2 - 1/n^2\right),$$

де ν – частота спектральних ліній у спектрі атома водню;

$R = \dfrac{mz^2e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3} = 3,29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ – стала Рідберга;

m – визначає серію ($m = 1,\ 2,\ 3,...$);

n – визначає окремі лінії відповідної серії ($n = m+1,\ m+2,\ m+3,...$).

Або $$1/\lambda = R'\left(1/n^2 - 1/m^2\right),$$

де $R' = 1{,}1\cdot 10^7$ м$^{-1}$.

7.4 Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постулати Бора.
2. У чому полягають недоліки планетарної моделі атома Резерфорда?
3. Покажіть різницю між моделями атома Резерфорда та Бора.
4. Запишіть вираз для радіусів борівських орбіт атома водню та воднеподібних іонів.
5. Запишіть вираз для енергії електронів в атомі водню.
6. Чому спектр атомарних газів лінійчатий?
7. Поясніть узагальнену формулу Бальмера.
8. У чому полягають недоліки теорії Бора?

7.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Обчислити потенціал іонізації і перший потенціал збудження атома водню.

Аналіз і розв’язання

Потенціал іонізації U_i - це та найменша різниця потенціалів, яку має пройти у прискорюючому полі електрон, щоб при зіткненні з даним незбудженим атомом іонізувати його. Робота з вилучення електрона з атома A_i дорівнює роботі сил електричного поля, яке прискорює електрон:

$$A_i = eU_i\,.$$

З іншого боку, робота іонізації A_i дорівнює кванту енергії $h\nu$, поглинутому атомом водню при переході електрона з першої боровської орбіти на нескінченно віддалену орбіту. З формули Бальмера

$$\nu = R\left(1/n^2 - 1/m^2\right)$$

при $n = 1$; $m = \infty$ одержимо

$$A_i = h\nu = hR\left(1/n^2 - 1/m^2\right) = hR$$

$$U_i = hR/e = 13{,}6\ \text{(В)}.$$

Перший потенціал збудження U_1 - це та найменша різниця потенціалів, яку має пройти у прискорюючому полі електрон, щоб при зіткненні з незбудженим атомом перевести його у перший збуджений стан. Для атома водню це відповідає переходу з першої Боровської орбіти на другу.

Якщо прийняти $n=1$, $m=2$, одержимо

$$eU_1 = h\nu = hR\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right) = \frac{3}{4}hR$$

$$U_1 = \frac{3}{4}\frac{hR}{e} = \frac{3}{4}\cdot 13{,}6\ \hat{A} = 10{,}2\ \text{(В)}.$$

Задача 2. Обчислити у боровській моделі довжину хвилі світла, яка випромінюється атомом водню під час переходу з енергетичного рівня $m=6$ на рівень $n=2$.

Дані: $m=6$, $n=2$;

$\lambda - ?$

Аналіз і розв'язання

Використаємо формулу Бальмера для обчислення довжини хвилі переходу

$$1/\lambda = R'\left(1/n^2 - 1/m^2\right)$$

Звідки $\lambda = \dfrac{1}{R'\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{m^2}\right)} = \dfrac{1}{1{,}1\cdot 10^7\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{6^2}\right)} \approx 4{,}1\cdot 10^{-7}$ м = 410 (нм).

Це четверта лінія у серії Бальмера (фіолетова).

Задача 3. Обчислити радіус п'ятої орбіти в атомі водню і визначити швидкість обертання електрона на цій орбіті.

Аналіз і розв'язання

Відповідно до теорії Бора умова стаціонарних орбіт в атомі водню визначається співвідношенням

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar, \tag{7.1}$$

де m – маса електрона; υ_n – його швидкість; r_n – радіус орбіти; $\hbar$ – стала Планка; n – головне квантове число ($n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$), яке відповідає номеру орбіти.

Під час обертання електрона навколо ядра, сили взаємодії між електричними зарядами ядра і електрона надають останньому доцентрове прискорення. Згідно з другим законом Ньютона

$$\frac{m\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \tag{7.2}$$

або
$$m\upsilon_n^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}. \tag{7.3}$$

З формули (7.1) знаходимо

$$\upsilon_n = n\hbar / mr_n. \tag{7.4}$$

Підставляємо (7.4) у (7.3) та знаходимо радіус n-ї орбіти

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}. \tag{7.5}$$

Підставляючи у (7.5) числові значення величин, знаходимо

$$r_5 = 1,31\,(\text{нм}). \tag{7.6}$$

Відповідно знаходимо за формулою (7.4) з урахуванням числового значення (7.6) швидкість електрона на п'ятій орбіті атома водню

$$\upsilon_5 = 0,45\ (\text{Мм/с}).$$

7.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Обчислити довжини хвиль перших трьох ліній серії Бальмера.

Відповідь: $\lambda_1 = 657$ нм; $\lambda_2 = 487$ нм; $\lambda_3 = 432$ нм.

Задача 2. Перші потенціали збудження Li та Na дорівнюють відповідно 1,84 В та 2,1 В. При якій температурі середня кінетична енергія частинок цих речовин дорівнює енергії збудження?

Відповідь: $T_1 = 1,43\cdot10^4$ К; $T_2 = 1,63\cdot10^4$ К.

Задача 3. На атом водню падає фотон і вибиває з нього електрон. Кінетична енергія електрона дорівнює $3,22$ еВ. Чому дорівнює довжина хвилі такого світла, якщо атом знаходиться у першому збудженому стані?

Відповідь: $\lambda = 187,5$ нм.

Задача 4. На який енергетичний рівень перейшов електрон при збудженні іона гелію, якщо при переході у нормальний стан було послідовно зафіксовано два фотони з довжиною хвиль $108,5$ нм та $30,4$ нм?

Відповідь: на третій.

Задача 5. На скільки змінилася енергія електрона в атомі водню при випромінюванні атомом фотона з довжиною хвилі $\lambda =$ 486 нм?

Відповідь: 2,55 еВ.

Задача 6. Обчислити швидкість і частоту обертання електрона на другій орбіті атома водню.

Відповідь: $\upsilon = 1,09$ Мм/с; $\nu = 8,19\cdot10^{14}$ Гц.

Задача 7. Обчислити енергію фотона, який випромінюється при переході електрона в атомі водню з третього енергетичного рівня на перший.

Відповідь: $E = 12,1$ еВ.

Задача 8. Фотон з енергією $E = 16,5$ еВ вибив електрон з незбудженого атома водню. Яку швидкість матиме електрон далеко від ядра атома?

Відповідь: $\upsilon = 1$ Мм/с.

Задача 9. Визначити найменшу $E_{\min}$ та найбільшу $E_{\max}$ енергії фотона в ультрафіолетовій серії спектра водню (серії Лаймана).

Відповідь: $E_{\min} = 10,2$ еВ; $E_{\max} = 13,6$ еВ.

Задача 10. Обчислити довжину хвилі λ, яку випромінює іон гелію He^+ при переході з другого енергетичного рівня на перший. Зробити такий же розрахунок для іона літію Li^{++}.

Відповідь: $\lambda_{He^+} = 30,3$ нм; $\lambda_{Li^{++}} = 13,5$ нм.

Задача 11. Визначити кутову швидкість обертання електрона на другій боровській орбіті атома He^+.

Відповідь: $2,07 \cdot 10^{16}$ рад/с.

Задача 12. Обчислити для атома водню та іона He^+: енергію зв'язку електрона в основному стані, потенціал іонізації, перший потенціал збудження і довжину хвилі головної лінії серії Лаймана.

Відповідь: $E_{зв} = \hbar R z^2$, $U_i = \dfrac{E_{зв}}{e}$; $U_1 = \dfrac{3\hbar R z^2}{4e}$, $\lambda = \dfrac{8\pi c}{3Rz^2}$.

Задача 13. Яку мінімальну енергію потрібно передати іону He^+, який перебуває в основному стані, щоб він зміг випроменити фотон, який відповідає головній лінії серії Бальмера?

Відповідь: $E_{\min} = \dfrac{8}{9}\hbar R z^2 = 48,5$ еВ.

Задача 14. Визначте довжину хвиль, що відповідає: 1) межі серії Лаймана; 2) межі серії Бальмера; 3) межі серії Пашена.

Відповідь: $\lambda_1 = 91$ нм, $\lambda_2 = 364$ нм, $\lambda_3 = 820$ нм,.

Задача 15. Якому елементу належить воднеподібний спектр, довжини хвиль ліній якого у чотири рази коротші, ніж в атомарного водню?

Відповідь: He^+.

Задача 16. У якого воднеподібного іону різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера та Лаймана дорівнює 59,3 нм?

Відповідь: Li^{++}.

Задача 17. Які лінії має спектр поглинання атомарного водню у діапазоні довжин хвиль від $94{,}5$ до $130{,}0$ нм.

Відповідь: $\lambda = 97{,}3$ нм; $102{,}6$ нм та $121{,}6$ нм.

Задача 18. Визначити сталу Рідберга, якщо відомо, що для іонів He^+ різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера та Лаймана $\Delta\lambda = 133{,}7$ нм.

Відповідь: $R' = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Задача 19. Обчислити енергію та потенціал іонізації іонів He^+ та Li^{++}.

Відповідь: He: 54 еВ, 54 В; Li: 122 еВ, 122 В.

Задача 20. Атом водню в основному стані поглинув квант світла з довжиною хвилі $\lambda = 121{,}5$ нм. Визначити радіус електронної орбіти збудженого атома водню.

Відповідь: $r = 212$ пм.

Задача 21. Знайти квантове число *n*, що відповідає збудженому стану іона He^+, якщо при переході в основний стан цей іон випромінює послідовно два фотони з довжинами хвиль 108,5 та 30,4 нм.

Відповідь: n=5.

Задача 22. Визначити швидкість і частоту обертання електрона на четвертій орбіті атома водню.

Відповідь: $\upsilon_4 = 0{,}55$ Мм/с; $\nu = 1{,}03 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 23. Визначити період обертання електрона на третій орбіті атома водню.

Відповідь: $4{,}1 \cdot 10^{-15}$ с.

Задача 24. Частота світла, яку випромінює атом водню під час переходу електрона на рівень з головним квантовим числом $n = 3$, дорівнює $\nu = 3{,}29 \cdot 10^{14}$ Гц. Визначити, у скільки разів змінився при цьому радіус орбіти електрона.

Відповідь: у 10 разів.

Задача 25. Електрон обертається в атомі водню з частотою $\nu = 8{,}22 \cdot 10^{14}$ Гц. Визначити, на якій орбіті знаходиться цей електрон.

Відповідь: $n = 2$.

Задача 26. Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 486$ нм. Визначити зміну орбітального механічного моменту електрона при переході зі збудженого стану в основний.

Відповідь: $\Delta L = 1{,}14 \cdot 10^{-35}$ Дж·с.

Задача 27. Електрон переходить зі збудженого стану в основний і випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 102{,}6$ нм. Визначити, на якій орбіті знаходився електрон. Обчислити радіус цієї орбіти та орбітальний механічний момент електрона, коли він знаходився на даній орбіті.

Відповідь: $n = 3$; $r_3 = 47{,}61$ нм; $L = 9{,}45 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 28. Скільки спектральних ліній випромінюватиме атомарний водень, який збуджують на n-й енергетичний рівень.

Відповідь: $N = n\left(n-1\right)/2$.

Задача 29. Використовуючи теорію Бора, визначити орбітальний магнітний момент електрона, що рухається по третій орбіті атома водню.

Відповідь: $2{,}8 \cdot 10^{-23}$ А·м^2.

Задача 30. Атом He^+, випромінює фотон, що відповідає головній лінії серії Лаймана. Цей фотон вибиває електрон з атома водню, що знаходився в основному стані. Знайти швидкість електрона.

Відповідь: $3{,}1 \cdot 10^6$ м/с.

8 ХВИЛІ ДЕ БРОЙЛЯ.
СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

8.1 Мета заняття

Ознайомитись із гіпотезою де Бройля про універсальність корпускулярно-хвильового дуалізму. З'ясувати фізичний смисл співвідношення невизначеностей Гейзенберга та навчитися використовувати його для розв'язання задач.

8.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

При підготовці до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом або підручником [2, розд. 3.1, 3.4; 4, § 18-20; 5, розд. 11.1-11.3]. З'ясувати, що, за де Бройлем, між корпускулярними і хвильовими характеристиками електрона або іншої мікрочастинки існує такий зв'язок, як і між характеристиками фотона. Засвоїти співвідношення невизначеностей Гейзенберга для координат та імпульсу, для енергії та часу. Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язування задач, що наведені у прикладах.

8.3 Основні закони і формули

1. Довжина хвилі де Бройля

$$\lambda = h/p,$$

де p – імпульс частинки,

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

а) у класичному наближенні (швидкість частинки набагато менша за швидкість світла $\upsilon << c$)

$$p = m_0 \upsilon,$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 \upsilon},$$

де υ– швидкість частинки,

m_0 – маса спокою.

б) в релятивістському випадку (швидкість частинки є близькою до швидкості світла у вакуумі)

$$p = m\upsilon = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}},$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 \upsilon}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

2. Зв'язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією T частинки:

а) у класичному наближенні (кінетична енергія частинки набагато менша за її енергію спокою $T << E_0$, $E_0 = m_0 c^2$)

$$T = m_0 \upsilon^2 / 2,$$

$$\lambda = h / \sqrt{2 m_0 T}.$$

б) у релятивістському випадку (кінетична енергія частинки є порівняною з її енергією спокою $T \approx E_0$)

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} - 1 \right),$$

$$\lambda = hc / \sqrt{T(T + 2E_0)}.$$

3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar,$$

$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar,$$

$$\Delta p_z \Delta z \geq \hbar,$$

де Δp_x, Δp_y, Δp_z – невизначеність проекцій імпульсу частинки на осі x, y, z відповідно; Δx, Δy, Δz – невизначеності її координат;

б) для енергії і часу

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔE – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи у цьому стані.

8.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке корпускулярно-хвильовий дуалізм?
2. У чому зміст гіпотези де Бройля?
3. Що таке хвиля де Бройля? Чому дорівнює її довжина?
4. У чому полягають хвильові властивості мікрочастинок?
5. Як визначається групова та фазова швидкість хвиль де Бройля?
6. Запишіть співвідношення невизначеностей для координат та імпульсу.
7. Запишіть співвідношення невизначеностей для енергії та часу.
8. У чому полягає фізичний зміст співвідношення невизначеностей?

8.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Визначити довжину хвилі де Бройля, якщо кінетична енергія електрона дорівнює 0,5 кеВ.

Дані: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг ; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж ·с;

T = 0,5 кеВ = 0,8·10 $^{-19}$ Дж

λ – ?

Аналіз і розв'язання

Кінетична енергія електрона T набагато менша за його енергію спокою $E_0 = m_0 c^2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж=0,51МеВ.

Для визначення довжини хвилі де Бройля скористаємось формулою:

$$\lambda = h/m\upsilon . \tag{8.1}$$

З виразження для кінетичної енергії $T = m\upsilon^2/2$, знайдемо

$$\upsilon = \sqrt{2T/m} \tag{8.2}$$

Підставивши (8.2) у (8.1), отримаємо

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{2T/m}} = \frac{h}{\sqrt{2Tm}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ (м).}$$

Задача 2. Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 212$ Мм/с. Визначити довжину хвилі де Бройля електрона. Порівняти її з комптонівською довжиною хвилі (λ_C=2,426 пм).

Дані: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг ; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж ·с;

υ=212 Мм/с = 2,12·10 ^{8} м/с.

λ – ?

Аналіз і розв'язання

Швидкість електрона є порівняною зі швидкістю світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Скористаємось формулою для релятивістського імпульсу

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \tag{8.3}$$

де m_0 – маса спокою електрона.

Довжина хвилі де Бройля

$$\lambda = h/p . \tag{8.4}$$

Підставляючи (8.3) у (8.4), маємо

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} . \tag{8.5}$$

Підставляючи числові значення величин у (8.5), маємо

$$\lambda = 2{,}426 \text{ (пм).}$$

Таким чином, довжина хвилі де Бройля електрона дорівнює комптонівській довжині хвилі, тобто $\lambda = \lambda_C$.

Задача 3. Частинка рухається із швидкістю υ. Знайти вирази для фазової і групової швидкостей поширення хвиль де Бройля, пов'язаних із рухом частинки.

Дані: υ

$\upsilon_ф$ – ? u – ?

Аналіз і розв'язання

Як відомо, фазова швидкість визначається співвідношенням

$$\upsilon_ф = \omega/k,$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Перепишемо це співвідношення так

$$\upsilon_ф = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = \frac{h\nu\lambda}{h} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{m\upsilon} = \frac{c^2}{\upsilon},$$

де $E = h\nu$, $p = h/\lambda$.

Оскільки $c > \upsilon$, то фазова швидкість хвиль де Бройля більша за швидкість світла у вакуумі.

Групова швидкість визначається за формулою

$$u = d\omega/dk.$$

Перепишемо цей вираз так

$$u = \frac{d(2\pi\nu)}{d(2\pi/\lambda)} = \frac{d(h\nu)}{d(h/\lambda)} = \frac{dE}{dp}.$$

Оскільки $E = \dfrac{p^2}{2m}$, то

$$dE/dp = p/m = m\upsilon/m = \upsilon.$$

Тобто $u = \upsilon$ – групова швидкість хвиль де Бройля дорівнює швидкості частинки.

Задача 4. Пучок електронів, які рухаються з однаковою швидкістю, падає нормально на вузьку щілину шириною $a = 1$ мкм. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, розташованому на відстані 20 см від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму складає Δx =48 мкм.

Дані: a =1 мкм =10^{-6}м; $l = 20$ см =0,2 м;

$\Delta x =$ 48мкм = $4{,}8 \cdot 10^{-5}$м; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

υ – ?

Аналіз і розв'язання

Ширина центрального дифракційного максимуму на екрані дорівнює відстані між двома першими дифракційними мінімумами (рис. 8.1).

Дифракційний мінімум спостерігається, якщо виконується умова

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2}.$$

Для першого дифракційного мінімуму k =1, тоді

$$a\sin\varphi = \lambda. \tag{8.6}$$

З малюнку бачимо, що ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює

$$\Delta x = 2l \cdot tg\varphi. \tag{8.7}$$

Якщо кут φ дуже малий, то $tg\varphi \approx \sin\varphi$.

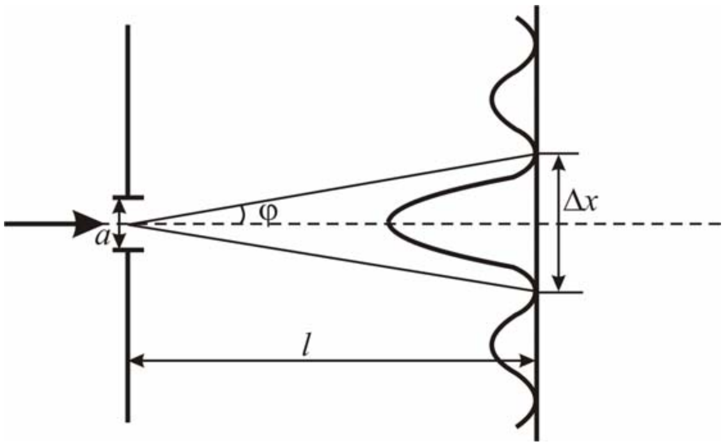

Рисунок 8.1

Скориставшись (8.6) та (8.7), знайдемо

$$\lambda = \frac{a\Delta x}{2l}. \tag{8.8}$$

За де Бройлем рух електрона зі швидкістю υ пов'язаний з певним хвильовим процесом, довжина хвиль якого визначається рівнянням

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon},$$

звідки

$$\upsilon = \frac{h}{m\lambda}.$$

Скориставшись (8.8), знайдемо

$$\upsilon = \frac{2hl}{ma\Delta x} = 6{,}1 \text{ (Мм/с)}.$$

Задача 5. Мінімальний діаметр атома водню $d_{\min}$ =124 пм. Застосовуючи співвідношення невизначеностей, знайти кінетичну енергію електрона в атомі водню.

Дані: $d_{\min}$ =124 пм =$1{,}24\cdot10^{-10}$м; $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.

$T - ?$

Аналіз і розв'язання

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга має вигляд

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar. \tag{8.9}$$

Якщо діаметр атома d, тоді електрон буде знаходитися в атомі у межах області з невизначеністю

$$\Delta x = d/2.$$

Тоді співвідношення (8.9) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{2}\Delta p \geq \hbar,$$

або

$$d \geq 2\hbar/\Delta p. \tag{8.10}$$

Невизначеність імпульсу не може перебільшувати значення самого імпульсу, тобто

$$\Delta p \le p .$$

Імпульс пов'язаний з кінетичною енергією електрона співвідношенням

$$p = \sqrt{2mT} .$$

Замінимо Δp значенням $\sqrt{2mT}$, а d на $d_{\min}$ і перейдемо від нерівності (8.10) до рівності. У результаті маємо

$$d_{min} = \frac{2\hbar}{\Delta p} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}} .$$

Звідси

$$T = \frac{2\hbar^2}{md_{\min}^2} = 1{,}45 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 9{,}1 \text{ (еВ)}.$$

8.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Порівняти дебройлівську хвилю для маленької кульки маси $m = 1$ г, яка переміщується зі швидкістю $\upsilon = 100$ $м/с$, та електрона, який переміщується зі швидкістю $\upsilon = 10^6$ $м/с$.

Відповідь: $6{,}6 \cdot 10^{-24}$ нм; $0{,}67$ нм.

Задача 2. Знайти залежність дебройлівської довжини хвилі λ від кінетичної енергії: а) нерелятивістської частинки $(T << m_0 c^2)$; б) релятивістської частинки $(T \approx m_0 c^2)$.

Відповідь: а) $\lambda = h \big/ \sqrt{2m_0 T}$; б) $\lambda = hc \big/ \sqrt{T\left(T + 2E_0\right)}$.

Задача 3. Знайти довжину хвилі де Бройля молекули водню, яка рухається із середньою квадратичною швидкістю при температурі 300 $К$. Маса молекули водню $3{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг.

Відповідь: $0{,}095$ нм.

Задача 4. Знайти дебройлівську довжину хвилі λ теплових нейтронів, яка відповідає найімовірнішій швидкості $\upsilon_{імов}$ при температурі $T = 300$ $К$ ($m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг).

Відповідь: $\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ $м$.

Задача 5. Порівняти довжину хвиль де Бройля для електрона і протона, які мають однакову швидкість ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг).

Відповідь: $\lambda_e \big/ \lambda_p = m_p \big/ m_e = 1840$.

Задача 6. Яку прискорюючу різницю потенціалів потрібно пройти електрону, щоб довжина хвилі де Бройля дорівнювала 0,1 нм?

Відповідь: U=150 В.

Задача 7. Яку додаткову енергію потрібно надати електрону, щоб його довжина хвилі де Бройля зменшилась від 100 до 50 пм?

Відповідь: 0,45 кеВ.

Задача 8. Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, кінетична енергія якого дорівнює: 1) 10 кеВ 2) 1 МеВ.

Відповідь: 12,2 пм; 0,87 пм.

Задача 9. Знайти довжину хвилі де Бройля для електронів, які прискорені в електричному полі з різницею потенціалів: 1) 1 В; 2) 100 В.

Відповідь: 1,23 нм; 0,123 нм.

Задача 10. Визначити, при якому чисельному значенні швидкості довжина хвилі де Бройля для електрона дорівнює його комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $2{,}12\cdot 10^{8}$ м/с.

Задача 11. Заряджена частинка, що прискорена різницею потенціалів U=500 В, має довжину хвилі де Бройля λ=1,282 нм. Знайдіть масу частинки, якщо її заряд дорівнює заряду електрона. Що це за частинка?

Відповідь: $1{,}672\cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 12. Визначити довжину хвилі де Бройля для електрона, що знаходиться в атомі водню на третій боровській орбіті.

Відповідь: λ=1 нм.

Задача 13. Визначити довжини хвиль де Бройля електрона, протона та атома урану, що мають однакову кінетичну енергію 100 еВ.

Відповідь: 123 пм, 2,86 пм, 0,186 пм.

Задача 14. Електрон рухається по колу радіусом 0,5 см в однорідному магнітному полі, індукція якого дорівнює 8 мТл. Визначити довжину хвилі де Бройля електрона.

Відповідь: 0,1 нм.

Задача 15. Протон, що рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом 1,4 м, має довжину хвилі де Бройля 0,197 пм. Визначити індукцію магнітного поля.

Відповідь: 15 мТл.

Задача 16. Знайти довжину хвилі де Бройля релятивістських електронів, що підлітають до антикатода рентгенівської трубки, якщо довжина хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра 10 пм.

Відповідь: 3,3 пм.

Задача 17. Визначити за допомогою співвідношення Гейзенберга мінімальну кінетичну енергію електрона, локалізованого в області розміром 0,2 нм.

Відповідь: 1 еВ.

Задача 18. Оцініть найменші помилки, з якими можна визначити швидкість електрона, протона та кульки масою 1 мг, якщо координати частинок та центра кульки встановлені з невизначеністю 1 мкм.

Відповідь: 10^4, 10, 10^{-20} см/с.

Задача 19. Вважаючи, що невизначеність координати частинки, що рухається, дорівнює довжині хвилі де Бройля, визначити відносну невизначеність $\Delta p / p$ імпульсу цієї частинки.

Відповідь: 16%.

Задача 20. Електрон рухається в атомі водню по першій Боровській орбіті. Приймаючи, що невизначеність швидкості складає 10% від її чисельного значення, визначити невизначеність координати електрона.

Відповідь: Δx=3,34 нм.

Задача 21. Пучок електронів виходить з електронної пушки під дією різниці потенціалів U=200 В. Чи можна одночасно визначити траєкторію електрона з точністю до 100 пм та його швидкість з точністю до 10%?

Відповідь: $\Delta p \Delta x = 7,64 \cdot 10^{-35}$ Дж $< \hbar$.

Задача 22. Визначити відношення невизначеностей швидкості електрона, якщо його координата визначена з точністю до 10^{-5} м, та частинки масою 10^{-12} кг, якщо її координата визначена з такою ж точністю.

Відповідь: $\Delta\upsilon_e / \Delta\upsilon_ч$ =$1,1 \cdot 10^{18}$.

Задача 23. Електронний пучок прискорюється в електронно-променевій трубці різницею потенціалів U=1 кВ. Відомо, що невизначеність швидкості складає 0,1% від її чисельного значення. Визначити невизначеність координати електрона.

Відповідь: Δx=6,17 нм.

Задача 24. Використовуючи співвідношення невизначеностей Гейзенберга, визначити мінімальну кінетичну енергію електрона, який локалізований у просторі з розмірами: 1) $d \approx 10^{-10}$ м (атом); 2) $d \approx 10^{-15}$ м (атомне ядро).

Відповідь: $T_{\min} \approx 4$ еВ; $T_{\min} \approx 0,2$ ГеВ.

Задача 25. Електрон локалізований у просторі з розміром 10 мкм. Середнє значення його кінетичної енергії дорівнює 4 еВ. За допомогою співвідношення Гейзенберга визначити: 1) відносну невизначеність $\Delta\upsilon/\upsilon$ швидкості електрона; 2) невизначеність його кінетичної енергії T.

Відповідь: 10^{-4}; 0,4 МеВ.

Задача 26. Знайдіть залежність між довжиною хвилі де Бройля релятивістської частинки та її кінетичною енергією T.

Відповідь: $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$.

Задача 27. На грань певного кристалу під кутом 60° до її поверхні падає паралельний потік електронів, що рухаються з однаковою швидкістю. Визначити швидкість електронів, якщо вони зазнають інтерференційне відбиття першого порядку. Відстань між атомними площинами кристалу 0,2 нм.

Відповідь: 2,1 Мм/с.

Задача 28. Пучок електронів, які рухаються із однаковою швидкістю 1 Мм/с, потрапляє на діафрагму зі щілиною завширшки 1 мкм. Внаслідок руху електронів крізь щілину на екрані, який розташований на відстані 50 см від неї, з'являється дифракційна картина. Знайти відстань між першими дифракційними мінімумами.

Відповідь: 1,1 мм.

Задача 29. Паралельний пучок електронів потрапляє на діафрагму зі щілиною завширшки 1 мкм. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, що знаходиться на відстані 50 см від щілини, ширина дифракційного максимуму дорівнює 0,36 мм.

Відповідь: $2\cdot10^6$ м/с.

Задача 30. Паралельний потік електронів, прискорених різницею потенціалів 25 В, падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, відстань між якими 50 мкм. Визначити відстань між сусідніми максимумами інтерференційної картини на екрані, розташованому на відстані 100 см від щілин.

Відповідь: 4,9 мкм.

9 ХВИЛЬОВА ФУНКЦІЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

9.1 Мета заняття

Ознайомитись з рівнянням Шредінгера, усвідомити фізичний зміст хвильової функції. Навчитися розв'язувати прості задачі квантової механіки.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 3.2-3.3; 4, § 21-27, розд. 11.4-11.11]. З'ясувати, що у квантовій механіці стан мікрочастинки описується хвильовою функцією, фізичний зміст якої пов'язаний з імовірністю виявлення мікрочастинки, яку вона описує, у певному місці простору і у певний момент. Звернути увагу на те, що Ψ-функція може бути знайдена під час розв'язання рівняння Шредінгера. Відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв'язання задач, наведених, як приклади.

9.3 Основні закони і формули

1. Загальне рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа,

Ψ – хвильова функція, яка описує стан частинки;

E – повна енергія;

U – потенціальна енергія частинки;

m – маса частинки;

$\hbar$ – стала Планка;

i – уявна одиниця.

2. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

3. Густина імовірності

$$dP/dV = |\psi|^2,$$

де dP – імовірність того, що частинка знаходиться у межах об'єму dV.

4. Імовірність знаходження частинки в об'ємі V.

$$P = \int_V dP = \int_V |\psi|^2 dV = \int_V \psi\psi^* dV,$$

де ψ^* – комплексно спряжена хвильова функція.

5. Умова нормування хвильової функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dV = 1 .$$

6. Коефіцієнт прозорості прямокутного потенціального бар'єра

$$D \approx \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m\left(U_0 - E\right)}\right],$$

де U_0– висота потенціального бар'єра,

E – енергія частинки,

l – висота потенціального бар'єра.

9.4 Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте рівняння Шредінгера у загальному вигляді і дайте визначення основних параметрів.
2. Сформулюйте стаціонарне рівняння Шредінгера і дайте визначення основних параметрів.
3. У чому полягає фізичний зміст ψ-функції?
4. Від чого залежить ймовірність виявлення частинки у даній точці простору?
5. Які умови має задовольняти ψ-функція?
6. Запишіть вираз для ψ-функції у загальному вигляді.
7. Запишіть умову нормування хвильової функції.
8. У чому полягає явище тунельного ефекту?
9. За допомогою яких фізичних характеристик описують проходження частинки крізь потенціальний бар'єр?
10. Чому дорівнює коефіцієнт прозорості прямокутного потенціального бар'єра?

9.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Протон знаходиться у нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною $l = 1$ Å у збудженому стані ($n = 5$). Знайти: 1) різницю енергій між рівнями $n = 6$ і $n = 5$; 2) нормувальний коефіцієнт хвильової функції, яка описує стан протона у потенціальній ямі.

Дані: $l = 1$ Å=10^{-10} м,

$m_p = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг,

$n_1 = 5$, $n_2 = 6$.

ΔE – ? A – ?

Аналіз і розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi = 0 . \qquad (9.1)$$

У випадку одновимірної нескінченно глибокої потенціальної ями, в якій рухається протон, рівняння (9.1) набуває вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi=0. \tag{9.2}$$

Потенціальна енергія U дорівнює нулю при $0\le x\le l$ і перетворюється у нескінченність при $x<0$ і $x>l$ (рис. 9.1).

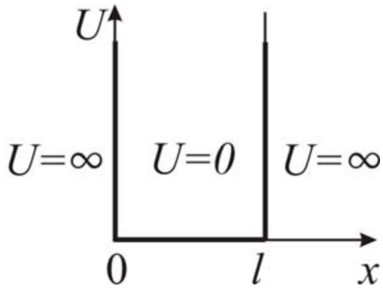

Рисунок 9.1

За межі потенціальної ями протон потрапити не може, тому імовірність виявлення його зовні дорівнює нулю. А з умови безперервності випливає, що хвильова функція ψ має дорівнювати нулю і на межах ями, тобто

$$\psi\left(0\right)=\psi\left(l\right)=0. \tag{9.3}$$

Всередині ями ($0\le x\le l$, $U=0$) рівняння Шредінгера має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0. \tag{9.4}$$

Позначимо

$$\frac{2m}{\hbar^2}E=k^2 \tag{9.5}$$

і запишемо (9.4) у вигляді

$$\psi''+k^2\psi=0. \tag{9.6}$$

Розв’язком рівняння (9.6) є

$$\psi(x)=A\sin(kx+\alpha). \tag{9.7}$$

З граничних умов (9.3) знайдемо сталі k і α.

З умови $\psi\left(0\right)=0$ отримаємо

$$\psi\left(0\right)=A\sin\alpha=0,$$

звідки випливає, що $\alpha=0$.

З другої граничної умови $\psi\left(l\right)=0$ маємо

$$\Psi\left(l\right)=A\sin kl=0$$

і знаходимо, що це можливо лише при

$$kl=\pm n\pi \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots). \tag{9.8}$$

З рівнянь (9.5) і (9.8) знаходимо

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

1. Знайдемо різницю енергії двох сусідніх рівнів із квантовими числами $n=6$ і $n=5$.

$$E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left[\left(n+1\right)^2 - n^2\right] = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(2n+1\right).$$

Підставляючи числові значення величин, знаходимо

$$\Delta E_{6,5} = 22{,}25 \text{ (еВ)}.$$

2. Для знаходження нормувального коефіцієнта A підставимо у (9.7) значення k, яке отримуємо з (9.8). У результаті маємо власні функції

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Скористаємось умовою нормування

$$\int\limits_V |\psi|^2\, dV = 1,$$

яку у даному випадку запишемо так

$$A^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = 1. \qquad (9.9)$$

Візьмемо інтеграл у лівій частині рівності (9.9)

$$\int\limits_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int\limits_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l dx - \frac{1}{2}\int\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l\right] = \frac{1}{2}l. \qquad (9.10)$$

З урахуванням (9.10) умова нормування (9.9) набуває вигляду

$$A^2\frac{l}{2} = 1.$$

Звідки

$$A = \sqrt{2/l}.$$

Для даної ширини ями $l = 1$ Å$=10^{-10}$ м нормувальний коефіцієнт дорівнює

$$A = 1{,}45\cdot 10^5 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

Задача 2. Електрон знаходиться у нескінченно глибокій потенціальній ямі ширини l. Визначити ймовірність того, що електрон, який знаходиться у збудженому стані (n=2), буде виявлений у середній третині ями.

Дані: l, n=2, $l/3 \le x \le 2l/3$,

$P - ?$

Аналіз і розв'язання

Ймовірність того, що частинка буде виявлена у межах інтервалу $x_1 \le x \le x_2$ дорівнює

$$P = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx, \qquad (9.11)$$

де ψ_n – власна хвильова функція, що відповідає даному стану.

Для електрона у потенціальній ямі ця функція дорівнює

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l} x .$$

Для збудженого стану (n=2) :

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2\pi}{l} x \qquad (9.12)$$

Підставивши (9.12) у (9.11), отримаємо

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx = \frac{2}{l}\int_{x_1}^{x_2} \sin^2\frac{2\pi x}{l} dx . \qquad (9.13)$$

Межі інтегрування для середньої третини потенціальної ями дорівнюють $x_1 = l/3,\ x_2 = 2l/3$.

Підставимо ці межі у (9.13) та зробимо заміну $\sin^2\frac{2\pi x}{l} = \frac{1}{2}(1-\cos\frac{4\pi}{l}x)$

$$P = \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \sin^2\frac{2\pi x}{l} dx = \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{l}\right) dx == \frac{1}{l}\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} dx - \frac{1}{l}\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \cos\frac{4\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{x}{l}\Bigg|_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} - \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{l}x\Bigg|_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) = 0{,}195$$

Задача 3. Знайти ймовірність проходження мікрочастинки крізь потенціальний бар'єр прямокутної форми (рис. 9.2), якщо потенціальна енергія U_0 менша від повної енергії.

Дані: $U_0 < E$,

$P - ?$

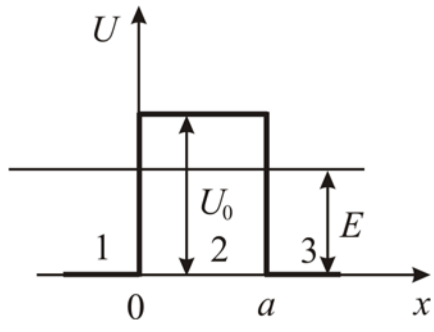

Рисунок 9.2

Аналіз і розв’язання

Для характеристики величини тунельного ефекту введемо коефіцієнт прозорості бар’єра, під яким розумітимемо модуль відношення густини потоку частинок, що пройшли крізь бар’єр, до густини потоку падаючих частинок. Нехай частинка рухається у додатному напрямі осі x. Хвиля де Бройля, яка відповідає руху частинки, пройде крізь нього і поширюватиметься в області $x > a$.

Рівняння Шредінгера у різних областях мають такий вигляд

$$\partial^2\psi_1/\partial x^2 + k_1^2\psi_1 = 0 \text{ – область 1,}$$

$$\partial^2\psi_2/\partial x^2 + k_2^2\psi_2 = 0 \text{ – область 2,}$$

$$\partial^2\psi_3/\partial x^2 + k_3^2\psi_3 = 0 \text{ – область 3,}$$

де $k_1 = k_3 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$.

В областях 1, 2 існує як падаюча, так і відбита хвиля

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \ (x \le 0),$$

$$\psi_2 = A_2 e^{-k_2 x} + B_2 e^{k_2 x} \ (0 \le x \le a).$$

В області 3 є лише хвиля, що рухається у додатному напрямі осі

$$\psi_3 = A_3 e^{ik_3 x} \ (x \ge a).$$

Скориставшись умовами безперервності хвильової функції та її похідної у точках $x = 0$, $x = a$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0),$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0),$$

$$\psi_1(a) = \psi_2(a),$$

$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a),$$

можна знайти такі співвідношення між коефіцієнтами A_1, B_1, A_2, B_2, A_3:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \tag{9.14}$$

$$ik_1(A_1 - B_1) = k_2(B_2 - A_2), \tag{9.15}$$

$$A_2 e^{-k_2 a} + B_2 e^{k_2 a} = A_3 e^{ik_3 a}, \tag{9.16}$$

$$k_2\left(B_2 e^{k_2 a} - A_2 e^{-k_2 a}\right) = ik_3 A_3 e^{ik_3 a}. \tag{9.17}$$

З рівнянь (9.15) та (9.17) випливає, що

$$A_2 = \frac{1 - in}{2} A_3 e^{k_2 a}, \tag{9.18}$$

$$B_2 = \frac{1 + in}{2} A_3 e^{-k_2 a}, \tag{9.19}$$

де $n = k_1/k_2 = \sqrt{E/(U_0 - E)}$.

Оскільки $k_2 a >> 1$, то з (9.18) та (9.19) маємо, що $|A_2| >> |B_2|$. Тому можна вважати $B_2 = 0$.

Розв'язуючи рівняння (9.14) та (9.16), знаходимо

$$A_1 = \frac{1 - in}{2} \cdot \frac{i + n}{2n} A_3 e^{k_2 a},$$

$$B_1 = \frac{1 - in}{2} \cdot \frac{n - i}{2n} A_3 e^{-k_2 a}.$$

звідки коефіцієнт прозорості (дифузії) D матиме такий вигляд

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \approx \frac{16n^2}{\left(1+n^2\right)^2} e^{-2k_2 a}.$$

Введемо величину $D_0 = \dfrac{16n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$, тоді одержимо

$$D \approx D_0 e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}}.$$

9.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Частинка маси m знаходиться в одновимірній потенціальній ямі шириною l.

1. Запишіть рівняння Шредінгера для частинки для області $\left(0 \le x \le l\right)$.

2. Визначіть граничні умови та знайдіть власні значення хвильової функції.

3. Знайдіть нормувальний коефіцієнт для знайдених функцій і покажіть, що він не залежить від номера n.

Відповідь: 1) $\psi'' + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$; 2) $\psi(0) = \psi(l) = 0,\quad \psi_n(x) = B\sin\dfrac{\pi n x}{l}$; 3) $B = \sqrt{2/l}$.

Задача 2. Користуючись рівнянням Шредінгера і функціями, які відповідають власним розв'язкам для частинки в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі, знайти спектр власних значень енергії E_n частинки.

Відповідь: $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} n^2,\ \ n = 1,2,3,\ldots$

Задача 3. Користуючись результатами задач № 1 та № 2, відобразити у масштабі графіки E_n, $\psi_n(x)$ та $\psi_n^2(x)$ у залежності від координати x частинки для $n = 1, 2, 3$. Усвідомити залежність кількості вузлів функції $\psi_n(x)$ від номера n.

Задача 4. Хвильова функція частинки має вигляд $\Psi = A\sin\dfrac{3\pi x}{l}$ і визначена в області $0 \le x \le l$. Знайти нормувальний коефіцієнт A.

Відповідь: $A = \sqrt{2/l}$.

Задача 5. Хвильова функція частинки має вигляд $\Psi(r) = \dfrac{A}{r}\sin kr$, де r – відстань цієї частинки до силового центра, k – деяка стала величина. Визначити нормувальний коефіцієнт A. Хвильова функція визначена лише в області $0 \le r \le R$, де R – радіус цієї області.

Відповідь: $A = 1 \Big/ \sqrt{2\pi\left(R - \dfrac{1}{2k}\sin 2kR\right)}$.

Задача 6. Хвильова функція частинки масою m для основного стану в одновимірному потенціальному полі $U(x) = kx^2/2$ має вигляд $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, де A – нормувальний коефіцієнт, α – позитивна стала. Знайти за допомогою рівняння Шредінгера сталу α та енергію частинки у цьому стані.

Відповідь: $\alpha = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$, $E = \dfrac{\hbar\omega}{2}$, де $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Задача 7. Електрон знаходиться в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l. Визначити імовірність виявлення електрона у першій чверті ями, якщо він знаходиться у збудженому стані ($n = 4$).

Відповідь: 0,25.

Задача 8. Визначити імовірність виявлення частинки у лівій третині одновимірної прямокутної нескінченно глибокої потенціальної ями шириною l. Частинка знаходиться в основному стані.

Відповідь: 0,195.

Задача 9. Визначити імовірність виявлення частинки у третій чверті одновимірної прямокутної нескінченно глибокої потенціальної ями шириною l. Частинка знаходиться у збудженому стані ($n = 2$).

Відповідь: 0,25.

Задача 10. Визначити, в яких точках одновимірної прямокутної нескінченно глибокої потенціальної ями шириною l густина імовірності виявлення частинки буде максимальною і мінімальною. Частинка знаходиться у збудженому стані ($n = 4$).

Відповідь: максимуми: $x = 3l/8$; $5l/8$; $7l/8$; мінімуми: $x = l/4$; $l/2$; $3l/4$.

Задача 11. Визначити, у скільки разів зміниться відношення різниці енергій сусідніх енергетичних рівнів до енергії «нижнього» стану $\Delta E_{n-1,n}/E_n$ частинки, яка знаходиться в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l при переході цієї частинки зі стану $n = 4$ у стан $n' = 10$.

Відповідь: зменшиться у 2,68 рази.

Задача 12. Електрон знаходиться у потенціальній ямі шириною l. В яких точках інтервалу $(0 < x < l)$ густина ймовірності знаходження електрона на першому та другому енергетичному рівнях однакова? Визначити густину ймовірності для цих точок.

Відповідь: $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$; $|\psi|^2 = 3/2l$.

Задача 13. Частинка у потенціальній ямі шириною l знаходиться в основному стані. Визначте ймовірність знаходження частинки у середній третині ями, у крайній третині.

Відповідь: 0,609; 0,195.

Задача 14. Визначити відношення ймовірностей P_1/P_2 знаходження електрона на першому та другому енергетичних рівнях в інтервалі $l/4$, рівновіддаленому від стінок одновимірної потенціальної ями шириною l.

Відповідь: 5,22.

Задача 15. Протон рухається в одновимірній прямокутній потенціальній ямі нескінченної глибини. Знайти ширину ями, якщо різниця енергій між четвертим і третім станами дорівнює 0,5 еВ.

Відповідь: l=53,3 пм.

Задача 16. Електрон з енергією 5 еВ рухається у додатному напрямку осі *x*, зустрічаючи на шляху прямокутний бар’єр висотою U=10 еВ та шириною l=0,1 нм. Визначіть коефіцієнт прозорості бар’єра.

Відповідь: D=0,1.

Задача 17. Прямокутний потенціальний бар’єр має ширину l=0,1 нм. Визначіть різницю енергій $U - E$, при якій ймовірність проходження електрона крізь бар’єр складає 0,5.

Відповідь: $U - E$=0,454 еВ.

Задача 18. Протон та електрон пройшли однакову прискорюючу різницю потенціалів 10 кВ. У скільки разів відрізняються коефіцієнти прозорості потенціального бар’єра для електрона та протона? Висота потенціального бар’єра дорівнює 20 кеВ, ширина 0,1 пм.

Відповідь: 74.

Задача 19. Протон з енергією 5 еВ рухається у додатному напрямку осі x, зустрічаючи на шляху прямокутний бар’єр висотою U=10 еВ та шириною l=0,1 нм. Визначіть у скільки разів потрібно звузити бар’єр, щоб ймовірність проходження його протоном була такою ж, як для електрона за тих самих умов?

Відповідь: $l_1/l_2 = 42{,}8$.

Задача 20. Прямокутний потенціальний бар’єр має ширину l=0,1 нм. Різниця між висотою потенціального бар’єра та енергією електрона, що рухається у додатному напрямку осі x $U-E$=5 еВ. Визначіть, як зміниться коефіцієнт прозорості бар’єра , якщо різниця $U-E$ зросте у 4 рази.

Відповідь: $D_1/D_2=10$.

Задача 21. Електрон з енергією 4,9 еВ рухається у додатному напрямку осі *x*. Висота потенціального бар’єра 5 еВ. При якій ширині потенціального бар’єра ймовірність проходження електрона крізь нього буде дорівнювати 0,2?

Відповідь: $4{,}93\cdot10^{-10}$м.

Задача 22. Частинка з енергією $E=10$ еВ рухається у додатному напрямку осі *x*, зустрічаючи на шляху широкий прямокутний бар’єр висотою U=5 еВ. Визначіть коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля на межі потенціального бар’єра.

Відповідь: $n=\lambda_1/\lambda_2=k_1/k_2=\sqrt{(E-U)/E}=0{,}707$.

Задача 23. Енергія електрона 10 еВ. Визначити у скільки разів зміняться його швидкість та довжина хвилі де Бройля при проходженні крізь потенціальний бар’єр (рис. 9.3) висотою U_0=6еВ.

Відповідь: 0,632; 1,58.

Задача 24. Електрон проходить через прямокутний потенціальний бар’єр шириною 0,5 нм. Висота бар’єра U більше енергії електрона E на 1%. Визначити коефіцієнт прозорості бар’єра, якщо енергія електрона 10 еВ, 100 еВ.

Відповідь: 0,2; $6{,}5\cdot10^{-3}$.

Задача 25. Визначіть коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля для протонів на межі потенціального бар’єра (рис. 9.4) Кінетична енергія протонів дорівнює 16 еВ, а висота потенціального бар’єра дорівнює 9 еВ.

Відповідь: $n=\sqrt{1+U_0/E_k}=1{,}25$.

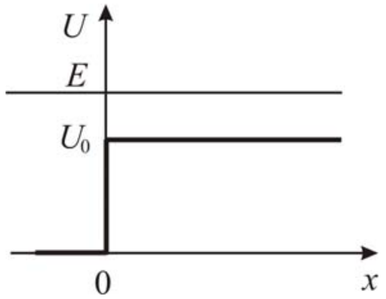

Рисунок 9.3

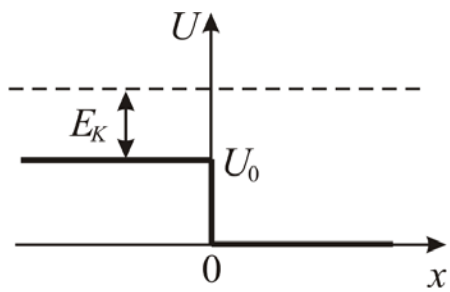

Рисунок 9.4

Задача 26. Визначити ψ-функції і значення енергії частинки маси m, яка знаходиться у двовимірній нескінченній потенціальній ямі, розміри якої $0 \le x \le a$ та $0 \le y \le b$.

Відповідь: $\psi_{n1,n2} = \sqrt{\dfrac{4}{ab}} \cdot \sin\dfrac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin\dfrac{\pi n_2 y}{b}$,

$E_{n1,n2} = \pi^2\hbar^2 / 2m \cdot \left(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2 \right)$, $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$

Задача 27. Визначити ψ-функції і значення енергії частинки маси m, яка знаходиться у тривимірній глибокій потенціальній ямі, розміри якої $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

Відповідь: $\psi_{n1,n2,n3} = \sqrt{\dfrac{8}{abc}} \cdot \sin\dfrac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin\dfrac{\pi n_2 y}{b} \cdot \sin\dfrac{\pi n_3 z}{c}$,

$E_{n1,n2,n3} = \pi^2\hbar^2 / 2m \cdot \left(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2 + n_3^2/c^2 \right)$, $n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \ldots$

Задача 28. Частинка маси m рухається у додатному напрямку осі на потенціальний бар'єр висоти U_0 (рис. 9.3). Енергія частинки дорівнює E ($E > U_0$). Знайти коефіцієнт відбиття R та коефіцієнт прозорості D бар'єра.

Відповідь: $R = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2$, $D = 4k_1^2 / (k_1 + k_2)^2$, $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$.

Задача 29. При якому відношенні висоти потенціального бар'єра U_0 (рис. 9.3) та енергії E електрона, що падає на бар'єр, коефіцієнт відбиття дорівнюватиме 0,5?

Відповідь: 0,97.

Задача 30. Знайти ймовірність проходження електрона з енергією E крізь потенціальний бар'єр (рис. 9.5), якщо ширина основи бар'єра l, а висота U_0.

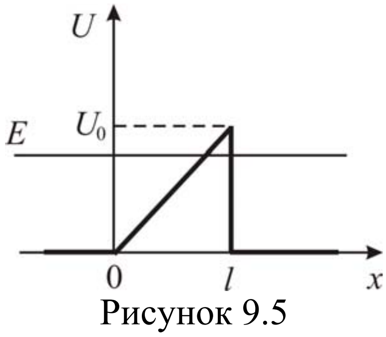

Рисунок 9.5

Відповідь: $P \approx \exp\left(-\dfrac{4\sqrt{2ml}}{3\hbar U_0} (U_0 - E)^{3/2} \right)$.

10 АТОМ ВОДНЮ З ТОЧКИ ЗОРУ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ. ПРИНЦИП ПАУЛІ. ЕЛЕКТРОННІ ШАРИ СКЛАДНИХ АТОМІВ

10.1 Мета заняття

Засвоїти основи квантово-механічної теорії атома водню, воднеподібних систем та багато електронних атомів.

10.2 Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Під час вивчення теоретичних положень за конспектом або підручником [2, розд. 6; 4, § 36-37; 5, розд. 12] потрібно звернути увагу на квантовий характер величин, які описують стан електрона в атомі, запам'ятати правила квантування цих величин та можливі значення квантових чисел для електрона та багатоелектронного атома. Після вивчення теорії відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

10.3 Основні закони і формули

1. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню та воднеподібних атомів:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа у декартовій системі координат;

$\psi = \psi(\vec{r})$ – хвильова функція, яка описує стан електрона;

E – повна енергія електрона;

$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ – потенціальна енергія електрона у воднеподібному атомі,

Z – зарядове число,

r – відстань між ядром та електроном,

e – заряд електрона,

m – маса електрона,

$\hbar$ – стала Планка.

2. Рівняння Шредінгера у сферичних координатах

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\cdot\psi = 0,$$

$$\psi = \psi(r,\varphi,\theta).$$

3. Умови нормування хвильової функції $\psi = \psi(\vec{r})$:

$$\int_G \left|\psi(\vec{r})\right|^2 dV = 1,$$

де G – область визначення хвильової функції $\psi = \psi(\vec{r})$,

$dV = dxdydz$ – диференціал об'єму у прямокутній декартовій системі координат, $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$ – диференціал об'єму у сферичній системі координат.

4. Середнє значення функції $F(\vec{r})$:

$$\left\langle F \right\rangle = \int_G F(\vec{r})\left|\psi(\vec{r})\right|^2 dV .$$

5. Квантові числа, що визначають стан електронів в атомі:
   1) головне квантове число $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$;
   2) орбітальне квантове число $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;
   3) магнітне квантове число $m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$;
   4) спінове магнітне квантове число $m_s = 1/2, -1/2$.

6. Орбітальний момент імпульсу та магнітний момент електрона:

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

$$\mu_l = \mu_Б\sqrt{l(l+1)},$$

де $\mu_Б$ – магнетон Бора, ($\mu_Б = \dfrac{e\hbar}{2m} = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл).

7. Проекції орбітального моменту імпульсу та магнітного моменту на напрямок зовнішнього магнітного поля (що співпадає з віссю Oz)

$$L_{lz} = \hbar m_l,\ \mu_{lz} = \mu_Б m_l .$$

8. Спіновий момент імпульсу та магнітний момент електрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

$$\mu_s = 2\mu_Б\sqrt{s(s+1)},$$

де s – спінове квантове число (для електрона $s = 1/2$).

9. Проекції спінового моменту імпульсу та магнітного моменту електрона на напрямок зовнішнього магнітного поля (що співпадає з віссю Oz)

$$L_{sz} = \hbar m_s,\ \mu_{sz} = 2\mu_Б m_s .$$

10. Принцип Паулі: в атомі не може знаходитись два чи більше електрони, що характеризуються однаковим набором квантових чисел n, l, m_l, m_s.

11. Повний орбітальний момент атома

$$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)},$$

де L – повне орбітальне квантове число.

12. Повний спіновий момент атома

$$L_S = \hbar\sqrt{S(S+1)},$$

де S – повне спінове квантове число

13. Повний момент імпульсу атома:

$$L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)},$$

де J – квантове число повного моменту імпульсу,
$J = L+S, L+S-1, \ldots, |L-S|$.

14. Спектральне позначення термів:

$$^{2S+1}L_J,$$

де $2S+1$ – мультиплетність,

$L=$	0	1	2	3	4	5
	S	P	D	F	G	H

15. Правила відбору для квантових чисел

$$\Delta S = 0;\ \Delta m_S = 0;$$
$$\Delta L = \pm 1;\ \Delta m_L = 0, \pm 1;$$
$$\Delta J = 0, \pm 1; \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

10.4 Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню.
2. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню у сферичній системі координат.
3. Якими квантовими числами визначається стан електрона в атомі? Які значення можуть приймати квантові числа?
4. Квантування яких величин описують головне n, орбітальне l, магнітне m_l та спінове m_s квантові числа електрона в атомі?
5. Сформулюйте принцип Паулі.
6. Що таке електронна оболонка, підоболонка атома?
7. Що таке спін електрона?
8. Які формули визначають модуль орбітального, спінового та повного механічного моментів багатоелектронного атома?
9. Чому дорівнюють квантові числа L, S та J для багатоелектронного атома?
10. Як записати спектральний символ терма? Що таке мультиплетність?
11. Що означає виродження стану, як визначати кратність виродження?

10.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Використовуючи принцип Паулі, знайдіть максимальну кількість електронів в атомі, які мають однакові квантові числа: 1) n, l, m_l, m_s; 2) n, l, m_l; 3) n, l; 4) n.

Дані: n, l, m_l, m_s;

$Z_{\max}$–?

Аналіз і розв'язання

1. Відповідно до принципу Паулі в одному квантовому стані не може перебувати більше, ніж один електрон. Тому в атомі тільки один електрон має квантові числа n, l, m_l та m_s, $Z_{\max}=1$.

2. Однакові квантові числа n, l, m_l можуть мати електрони, для яких різними будуть квантові числа m_s. Спінове квантове число $m_s=\pm 1/2$, тому у даному випадку $Z_{\max}=2$.

3. Магнітне квантове число m_l дорівнює

$$m_l=-l,-l+1,...,+l,$$

отже разом $(2l+1)$ можливих значень. Крім того, кожний із цих станів електрона може відрізнятись від іншого за спіновим квантовим числом $m_s=\pm 1/2$.

Таким чином, однакові квантові числа n та l є у $Z_{\max}=2(2l+1)$ електронів.

4. У стані з даним квантовим числом n, яке визначає енергію електрона, можуть перебувати електрони, що відрізняються квантовими числами l, m_l, m_s. Орбітальне квантове число дорівнює $l=0,1,2,...,n-1$ (всього n можливих значень). Ці електрони можуть відрізнятись за квантовими числами m_l та m_s – всього $2(2l+1)$ значень.

Отже, максимальна кількість електронів, які мають дане значення головного квантового числа n, дорівнює $Z_{\max}=\sum\limits_{l=0}^{n-1}2(2l+1)=2n^2$.

Задача 2. Визначити хімічні елементи періодичної системи Менделєєва, електрони яких послідовно заповнюють оболонку з головним квантовим числом $n=2$. Записати для них основну електронну конфігурацію.

Дані: $n=2$, x – ?

Аналіз і розв'язання

Головне квантове число $n=2$ мають електрони, що перебувають на L-оболонці атома. Тоді K-оболонка ($n=1$) для хімічних елементів, які визначаємо, є заповненою. Якщо $n=2$, то l може мати максимальне значення $l_{\max}=n-1=1$. Тобто на L-оболонці перебувають s- та p-електрони. Літери s та p позначають стан електрона з $l=0,\ 1$ відповідно. На K-оболонці розташовані два s-електрони.

Перший з хімічних елементів, які ми визначаємо, має у таблиці Менделєєва порядковий номер 3 (це $_3Li$). Електронна конфігурація його така: два s-електрони на K-оболонці та один s-електрон на L-оболонці.

Скорочено цю конфігурацію записують так:

$$1s^2 2s\ \left({}_3Li\right).$$

Наступний хімічний елемент – берилій $\left({}_4Be\right)$ має два $2\,s$-електрони, його електронна конфігурація

$$1s^2 2s^2\ \left({}_4Be\right).$$

У бора $\left({}_{5}B\right)$ починається заповнення p-стану $\left(l=1\right)$. Всього 5 електронів: два s-електрони, для яких $n=1$, два s-електрони з $n=2$, та один p-електрон $\left(l=1\right)$ на енергетичному рівні $n=2$. Електронна конфігурація

$$1s^2 2s^2 2p \;\left({}_{5}B\right).$$

Наступні хімічні елементи:

$$1s^2 2s^2 2p^2 \left({}_{6}C\right),$$
$$1s^2 2s^2 2p^3 \left({}_{7}N\right),$$
$$1s^2 2s^2 2p^4 \left({}_{8}O\right),$$
$$1s^2 2s^2 2p^5 \left({}_{9}F\right)$$

Всього на L-оболонці $\left(n=2\right)$ можуть міститися $2n^2$ електронів, тобто два s-електрони та шість p-електронів. Тоді останній з елементів, які визначаємо, має порядковий номер $2+2+6=10$. Це неон ${}_{10}Ne$. УВ нього повністю заповнені K - та L-оболонки:

$$1s^2 2s^2 2p^6 \left({}_{10}Ne\right).$$

Задача 3. Чому дорівнює максимально можливий повний механічний момент L_J атома літію, валентний електрон якого перебуває у стані з $n=3$? Запишіть символ терма відповідного стану.

Дані: $n=3$,

$L_J^{\max}-?$ ${}^{æ}X_J-?$

Аналіз і розв'язання

Якщо $n=3$, то максимально можливе $L=n-1=2$. Один валентний електрон літію розташований на зовнішній електронній оболонці, тому спінове квантове число S визначається спіном цього електрона: $S=1/2$. Тоді максимально можливе значення J складає $J=L+S=5/2$, а механічний момент імпульсу атома дорівнює

$$L_J=\hbar\sqrt{J\left(J+1\right)}=\hbar\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}=\frac{\hbar}{2}\sqrt{35}.$$

Спектральний символ терма запишемо, знаючи квантові числа цього стану: $L=2$. Тоді це D-стан, мультиплетність стану дорівнює $æ=2S+1=2$. Спектральний символ терма ${}^2D_{5/2}$.

10.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Запишіть квантові числа, що визначають зовнішній, або валентний, електрон в основному стані атома натрію.

Відповідь: $n=3$; $l=0$; $m_l=0$; $m_s=\pm 1/2$.

Задача 2. Яку групу електронів в атомі називають оболонкою, підоболонкою? Визначити максимально можливу кількість електронів на оболонці та підоболонці.

Відповідь: Для підоболонки $Z_{\max} = 2(2l-1)$; для оболонки $Z_{\max} = 2n^2$.

Задача 3. Визначити можливі значення повних механічних моментів електронних оболонок атома у станах ${}^4P$ та ${}^5D$.

Відповідь: $L'_J = \hbar\sqrt{35/4}$; $\hbar\sqrt{15/4}$; $\hbar\sqrt{3/4}$;

$L''_J = \hbar\sqrt{20}$; $\hbar\sqrt{12}$; $\hbar\sqrt{6}$; $\hbar\sqrt{2}$; 0.

Задача 4. Визначити можливу мультиплетність терма $D_{3/2}$.

Відповідь: $2, 4, 6, 8$.

Задача 5. Мультиплетність F-стану дорівнює 5. Напишіть терми, які визначають цей стан.

Відповідь: ${}^5F_1$; ${}^5F_2$; ${}^5F_3$; ${}^5F_4$; ${}^5F_5$.

Задача 6. Які з термів ${}^2S_1$; ${}^2P_1$; ${}^3P_{1/2}$; ${}^3P_3$; ${}^5D_0$; ${}^1F_0$; ${}^8F_{13/2}$ записані неправильно?

Відповідь: Перший, другий, третій, четвертий, шостий.

Задача 7. Записати символ терма, що відповідає стану, для якого механічний момент атома дорівнює $L_J = \hbar\sqrt{2}$, магнітний момент – нулю, а спінове квантове число $S = 2$.

Відповідь: ${}^5F_1$.

Задача 8. Атом перебуває у стані, мультиплетність якого дорівнює 4, механічний момент $L_J = \hbar\dfrac{\sqrt{63}}{2}$. Які значення може мати квантове число L для цього стану?

Відповідь: $L = 2, 3, 4, 5$.

Задача 9. Чому дорівнює повний механічний момент M_J атома, якщо магнітний момент дорівнює нулю, а орбітальне та спінове квантові числа мають значення $L = 2$; $S = 3/2$.

Відповідь: $L_J = \hbar\sqrt{3/4}$.

Задача 10. Електронна оболонка атома складається з s-, p- та d-електронів. Записати символ терма для стану, в якому атом має мінімальний для даної конфігурації повний механічний момент L_J.

Відповідь: $^2P_{1/2}$.

Задача 11. Визначити кратність виродження $3D$-стану атома літія. Який фізичний зміст цієї величини?
Відповідь: 10.

Задача 12. Записати спектральний символ терма, кратність виродження якого дорівнює семи, а квантові числа L та S зв'язані співвідношенням $L = 3S$.

Відповідь: $^3F_3$.

Задача 13. У якого елемента заповнені K-, L- та M-оболонки, $4S$-підоболонка та наполовину $4P$-підоболонка?
Відповідь: As.

Задача 14. Визначити, які з переходів заборонено правилами відбору: $^2D_{3/2} \to {}^2P_{1/2}$; $^2P_1 \to {}^2S_{1/2}$; $^3F_3 \to {}^3P_2$; $^4F_{7/2} \to {}^4D_{5/2}$.
Відповідь: Другий та третій.

Задача 15. У випадку чотирьох еквівалентних p-електронів принципу Паулі не суперечать терми $^1S_0$; $^3P_2$; $^3P_1$; $^3P_0$; $^1D_2$. Який з них є основним?

Відповідь: $^3P_2$.

Задача 16. D-терм складається з п'яти компонентів. Якою може бути мультиплетність цього терма?
Відповідь: $5, 6, 7, \ldots$.

Задача 17. Чому дорівнює квадрат орбітального моменту імпульсу L^2 електрона у станах $2p$; $3f$?

Відповідь: $L_1^2 = 2\hbar^2$; $L_2^2 = 12\hbar^2$.

Задача 18. Стан атома характеризується квантовими числами L та S, що дорівнюють 3 та 2; 1 та $3/2$. Знайти можливі значення квантового числа J.

Відповідь: $J_1 = 1, 2, 3, 4, 5$; $J_2 = 1/2, 3/2, 5/2$.

Задача 19. Зі скількох компонентів складаються терми ^1S; ^2S; ^2P; ^4P; ^5D?
Відповідь: 1) з одного; 2) з одного; 3) з двох; 4) з трьох; 5) з п'яти.

Задача 20. Обчислити повну енергію, орбітальний момент імпульсу та магнітний момент електрона, що знаходиться у $2p$-стані в атомі водню.

Відповідь: –3,4 еВ; $1{,}5\cdot10^{-34}$ Дж·с; $1{,}31\cdot10^{-23}$ Дж/Тл.

Задача 21. Визначити, скільки різних хвильових функцій відповідає головному квантовому числу $n = 3$.

Відповідь: 9.

Задача 22. Хвильова функція, що описує $1s$-стан електрона в атомі водню має вигляд $\psi(r) = Ce^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра, a – перший боровський радіус. Визначте нормовану хвильову функцію, що відповідає цьому стану.

Відповідь: $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$.

Задача 23. Атом перебуває у стані, мультиплетність якого дорівнює трьом, а повний механічний момент $L_J = \hbar\sqrt{6}$. Яким буде квантове число L для цього стану?

Відповідь: $L = 3, 4, 5$.

Задача 24. $1s$-електрон, що поглинув фотон з енергією 12,1 еВ, перейшов у збуджений стан із максимально можливим орбітальним квантовим числом. Визначити зміну моменту імпульсу орбітального руху електрона ΔL_l.

Відповідь: $\Delta L_l = 2{,}57\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Задача 25. Заповненій електронній оболонці відповідає головне квантове число $n = 3$. Визначити число електронів на цій оболонці, що мають однакові квантові числа : 1) $m_s = -1/2$; 2) $m_l = 0$; 3) $m_l = -1, m_s = 1/2$.

Відповідь: 1) 9; 2) 6; 3) 2.

Задача 26. Певний атом, окрім заповнених оболонок, має три електрони (s-, p-, d-) та перебуває у стані з максимально можливим механічним моментом. Знайти у векторній моделі атома кут між спіновим і повним механічним моментом атома.

Відповідь: $\theta = 31^\circ$.

Задача 27. Атом перебуває у стані, для якого спінове квантове число дорівнює $S = 1$, а повний механічний момент $L_J = \hbar\sqrt{6}$. Для векторної моделі кут між спіновим та повним механічним моментом дорівнює $\theta = 73{,}2^\circ$. Записати спектральний символ терма цього стану.

Відповідь: ${}^3D_2$.

Задача 28. Нормована хвильова функція, що описує $1s$-стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, де a – перший боровський радіус. Визначте відстань електрона від ядра, на якій він може знаходитись з найбільшою ймовірністю.

Відповідь: $r = a = 52{,}9$ пм.

Задача 29. Враховуючи, що нормована хвильова функція, яка описує основний стан електрона в атомі водню має вигляд $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, знайти середню відстань $< r >$ електрона від ядра.

Відповідь: $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a$.

Задача 30. Нормована хвильова функція, що описує $1s$-стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$. Визначте середню потенціальну енергію електрона у полі ядра.

Відповідь: $< U > = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

11 РЕНТГЕНІВСЬКЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ. МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ АТОМІВ

11.1 Мета заняття

Засвоїти закони, яким підпорядковуються основні характеристики гальмівного та характеристичного рентгенівського випромінювання, розглянути магнітні властивості атома. Навчитись розв'язувати задачі на основі цих законів.

11.2 Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 2.3, 6.6, 7.1; 4, § 8, 33-35, 38]. Рентгенівське випромінювання, що підтверджує квантову природу випромінювання, існує двох видів – гальмівне та характеристичне. Для того, щоб успішно розв'язувати задачі, перш за все потрібно зрозуміти фізичну природу та умови виникнення рентгенівського випромінювання, запам'ятати формулу для коротковохвильової межі рентгенівського спектра та вивчити закон Мозлі.

При вивченні магнітних властивостей атома та теорії ефекту Зеємана потрібно звернути особливу увагу на квантову природу величин, які характеризують ці властивості.

Після теоретичної підготовки потрібно відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

11.3 Основні закони і формули

1. Коротковохвильова межа $\lambda_{\min}$ суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{|e|U} = \frac{hc}{E_{\max}},$$

де e – заряд електрона,
U – різниця потенціалів, яка прикладена до рентгенівської трубки,
h – стала Планка,
c – швидкість світла,
$E_{\max}$ – максимальна кінетична енергія електронів.

2. Закон Мозлі у загальному випадку

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)^2,$$

де ω – частота ліній рентгенівського спектра,
Z – атомний номер елемента, який випромінює цей спектр,
σ – стала екранування,
C – стала.

3. Закон Мозлі для K_α – ліній:

$$\omega_{K_\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}(Z-1)^2 R,$$

або
$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}(Z-1)^2 R',$$

де $R = 2{,}07\cdot10^{16}$ с$^{-1}$ $R' = 1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$– стала Ридберга.

4. Магнітний момент атома

$$\mu_J = g\mu_Б\sqrt{J(J+1)},$$

де $\mu_Б$ – магнетон Бора,

g – множник (або фактор) Ланде.

5. Множник (або фактор) Ланде

$$g = 1+\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)},$$

де J – квантове число повного моменту імпульсу,
($J = L+S, L+S-1,\ldots,|L-S|$);

S – повне спінове квантове число;

L – повне орбітальне квантове число.

6. Проекція магнітного моменту атома на напрямок зовнішнього магнітного поля

$$\mu_{Jz} = g\mu_Б m_J,$$

де m_J – повне магнітне квантове число ($m_J = -J, -J+1, ..., J-1, J$).

7. Сила, що діє на атом у неоднорідному магнітному полі

$$F_z = \frac{\partial B}{\partial z}\mu_{Jz},$$

де $\partial B/\partial z$ – градієнт магнітної індукції.

8. Енергія атома у магнітному полі з індукцією B

$$E = -\mu_{Jz}B.$$

9. Частота ларморової прецесії

$$\omega_L = \frac{eB}{2m},$$

де m – маса електрона,

B – індукція магнітного поля.

10. Величина розщеплення спектральної лінії при ефекті Зеємана

а) аномальному

$$\Delta\omega = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\omega_L,$$

де m_i, g_i – магнітні квантові числа та множники Ланде термів, між якими відбувається перехід.

б) нормальному

$$\Delta\omega = 0,\ \pm\omega_L.$$

11. Правила відбору для квантових чисел

$$\Delta S = 0; \ \Delta m_S = 0;$$
$$\Delta L = \pm 1; \ \Delta m_L = 0, \pm 1;$$
$$\Delta J = 0, \pm 1; \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

11.4 Контрольні запитання та завдання

1. Яке рентгенівське випромінювання називається гальмівним? Сформулюйте умови його виникнення.
2. Яке рентгенівське випромінювання називається характеристичним? Сформулюйте умови його виникнення.
3. Сформулюйте закон Мозлі.
4. Чому дорівнює магнітний момент електрона? Які квантові числа визначають цю величину?
5. Як визначити магнітний момент багатоелектронного атома?
6. Чому дорівнює фактор Ланде?
7. Чому дорівнює проекція магнітного моменту атома на напрямок зовнішнього магнітного поля?
8. Які значення може мати квантове число m_J, що визначає проекцію магнітного моменту атома на вісь Oz?
9. Чому дорівнює сила, яка діє на атом у магнітному полі?
10. Як визначити зміщення спектральних ліній у випадку нормального ефекту Зеємана?
11. Яка формула визначає зміщення спектральних ліній для аномального ефекту Зеємана?
12. Сформулюйте правила відбору для квантових чисел.

11.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Яку напругу прикладено до рентгенівської трубки з нікелевим антикатодом, якщо різниця довжини хвиль K_α-лінії та короткохвильової межі суцільного спектра дорівнює 84 пм?

Дані: $\Delta\lambda = 84\,\text{пм} = 84 \cdot 10^{-12}$ м; $Z = 28$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·С; $R' = 1,1 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$;

U – ?

Аналіз і розв'язання

Гальмівне рентгенівське випромінювання виникає внаслідок гальмування електронів антикатодом. Тому енергія рентгенівського фотона не може бути більшою за енергію електрона $h\nu \le eU$, або $h\dfrac{c}{\lambda} \le eU$.

Внаслідок цього найменша довжина хвилі рентгенівського випромінювання (короткохвильова межа гальмівного рентгенівського випромінювання) дорівнює:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}. \qquad (11.1)$$

Запишемо закон Мозлі для частоти K_α-ліній характеристичного рентгенівського випромінювання:

$$\omega_{k\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

Звідси знайдемо довжину хвилі K_α-лінії:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R'(Z-1)^2. \qquad (11.2)$$

Тут Z – порядковий номер елемента, який випромінює характеристичне рентгенівське випромінювання (у даній задачі це нікель).

Використовуючи (11.1) та (11.2), запишемо

$$\Delta\lambda = \lambda_{K_\alpha} - \lambda_{\min} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \frac{hc}{eU},$$

$$\frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda = \frac{hc}{eU},$$

$$U = \frac{hc}{e\left(\dfrac{4}{3R'(z-1)^2} - \Delta\lambda\right)} = 1{,}5\cdot 10^4 \text{ (В)}.$$

Задача 2. Найменша напруга на рентгенівській трубці, при якій з'являються K_α-лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання, дорівнює $U_{\min} = 8$ кВ. Визначити, з якого матеріалу виготовлений антикатод цієї трубки. Обчислити частоту ν та енергію фотона, який належить до K_α-лінії у спектрі характеристичного випромінювання матеріалу антикатода.

Дані: $U_{\min} = 8$ кВ $= 8\cdot 10^3$ В; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл; $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с;

Z–? ν–? ε–?

Аналіз і розв'язання

Рентгенівське випромінювання з'являється при бомбардуванні антикатода трубки електронами, які випромінюються катодом, за рахунок енергії, що губиться при гальмуванні електроном. Величина кванта $\hbar\omega$ не може перебільшувати енергію електрона. Тому квант випромінювання з'явиться тоді, коли його енергія дорівнюватиме мінімальній енергії електрона, який бомбардує антикатод.

Отже,

$$\hbar\omega = eU_{\min},$$

де e – заряд електрона.

Звідси

$$U_{\min} = \frac{\hbar\omega}{e}. \qquad (11.3)$$

Якщо енергія електрона достатня, щоб проникнути у глибину електронної оболонки атома, то він здатний вибити електрони, які належать електронним шарам атома. При цьому на фоні суцільного рентгенівського спектра з'являються лінії характеристичного випромінювання.

Частота лінії K_α-серії підпорядковується закону Мозлі

$$\omega_{K_\alpha} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2, \qquad (11.4)$$

де $R = 2{,}07 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$ – стала Ридберга, Z – атомний номер елемента, який випромінює цей спектр.

Якщо підставити в (11.3) частоту K_α-серії (11.4), отримаємо:

$$U_{\min} = \frac{3\hbar}{4e}R(Z-1)^2.$$

Звідси отримаємо

$$Z = 1 + 2\sqrt{\frac{eU_{\min}}{3\hbar R}}. \qquad (11.5)$$

Підставляючи числові значення величин у формулу (11.5), знаходимо, що $Z = 29$. Отже, матеріалом антикатода є мідь.

Енергію фотона знайдемо за формулою

$$\varepsilon_{K_\alpha} = \hbar\omega = \frac{3}{4}\hbar R(Z-1)^2. \qquad (11.6)$$

Якщо підставити до (11.6) числові значення величин, маємо

$$\varepsilon_{K_\alpha} = 8{,}01 \text{ (кеВ)}.$$

Частота фотона $\nu = \varepsilon/h$, де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Розрахунок дає ν=19,3 (фГц).

Задача 3. Валентний електрон атома натрію перебуває у стані, що характеризується головним квантовим числом $n = 4$. Інші квантові числа такі, що атом має найбільший із можливих механічний момент L_J. Визначити магнітний момент μ_J атома у цьому стані.

Дані: $n = 4$; $\mu_Б = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл;

μ_J – ?

Аналіз і розв'язання

Магнітний момент атома дорівнює

$$\mu_J = g\mu_Б\sqrt{J(J+1)},$$

де $\mu_Б = \dfrac{e\hbar}{2m}$ – магнетон Бора,

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \text{ – фактор Ланде,}$$

$$J = L + S, L + S - 1, ..., |L - S| \ .$$

Для того, щоб визначити μ, необхідно знати, чому дорівнюють квантові числа J, L та S. Знайдемо ці квантові числа, користуючись умовою задачі. Механічний момент атома дорівнює $L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$.

Найбільшим він буде тоді, коли J має найбільше можливе значення, тобто $J = L + S$.

Для даної задачі найбільшим буде $L = 3$, тому що $n = 4$ за умовою. Для атомів натрію (та інших лужних металів) квантове число S співпадає зі спіновим числом валентного електрона на зовнішній електронній оболонці $S = 1/2$. Тоді $J = L + S = 7/2$, а $g = 8/7$.

Знаходимо магнітний момент атома.

$$\mu_J = \frac{7}{8}\mu_Б\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}} = \frac{4}{7}\sqrt{63}\mu_Б .$$

Задача 4. Вузький пучок атомів ванадію в основному стані $^4F_{3/2}$ пропускають по методу Штерна та Герлаха через поперечне неоднорідне магнітне поле довжиною $l_1 = 5{,}0$ см. Розщеплення пучка спостерігають на екрані, який знаходиться на відстані $l_2 = 15$ см від магніту. Кінетична енергія атомів $T = 22$ МеВ. Чому дорівнює градієнт індукції магнітного поля, якщо відстань між крайніми компонентами розщепленого пучка на екрані дорівнює $x = 2{,}0$ мм?

Дані: $l_1 = 5\,\text{см} = 5\cdot10^{-2}\,\text{м}; l_2 = 15\,\text{см} = 15\cdot10^{-2}\,\text{м}$; $T = 22\,\text{МеВ} = 3{,}52\cdot10^{-13}\,\text{Дж}$; $\mu_Б = 9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл; $x = 2{,}0\,\text{мм} = 2{,}0\cdot10^{-3}\,\text{м}$;

$\partial B/\partial x$ – ?

Аналіз і розв'язання

Атоми ванадію перебувають у стані $^4F_{3/2}$. Цьому стану відповідають квантові числа $L = 3$; $J = 3/2$.

Квантове число S знайдемо зі співвідношення $2S + 1 = 4$:

$$S = 3/2$$

Якщо атом рухається у неоднорідному магнітному полі, то на нього діє сила

$$F_x = \frac{\partial B}{\partial x}\mu_{JZ} = \frac{\partial B}{\partial x} g\mu_Б m_J , \tag{11.7}$$

де $m_J = J, J-1, ..., -J$ – повне магнітне квантове число; g – фактор Ланде.

Якщо $J = 3/2$, то m_J дорівнює $3/2$; $1/2$; $-1/2$; $-3/2$.

Відповідно до цього пучок атомів ванадію у неоднорідному магнітному полі розщеплюється на чотири компоненти. Для крайніх компонент розщепленого пучка $m_J = 3/2$; $-3/2$; або $|m_J| = J$.

Із формули (11.7) можна знайти градієнт індукції магнітного поля $\partial B/\partial x$, для цього потрібно знати F_x. Розглянемо рух атомів у системі координат xOy. Вісь Oy напрямлена перпендикулярно до екрана, а вісь Ox – паралельно до екрана, на якому спостерігають розщеплення пучка (рис. 11.1). У напрямі осі Ox на атоми діє сила F_x, тому атоми рухаються з прискоренням $a_x = F_x/m$, а проекція швидкості атомів υ_x змінюється від 0 до $\upsilon_x = a_x t_1$, де t_1 – час руху атомів у магнітному полі. Проекція швидкості υ_y залишається сталою під час руху атомів у магнітному полі та дорівнює $\upsilon_y = \sqrt{2T/m}$ (T – кінетична енергія атомів). Зміщення атомів у магнітному полі можна знайти з формули

$$x_1 = \frac{a_x t_1^2}{2}, \tag{11.8}$$

де $t_1 = \dfrac{l_1}{\upsilon_y}$; $a_x = \dfrac{F_x}{m}$.

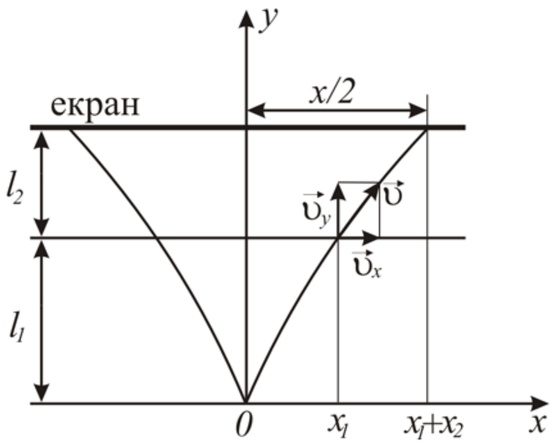

Рисунок 11.1

Використовуючи формули (11.7) та (11.8), визначимо

$$x_1 = \frac{F_x}{2m} t_1^2 = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{g\mu_Б J}{2m}\cdot\frac{l_1^2 m}{2T} = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{g\mu_Б}{4T} l_1^2 J.$$

Після вильоту з області неоднорідного магнітного поля атоми рухаються зі сталою швидкістю υ, проекції якої дорівнюють $\upsilon_x = a_x t_1$, $\upsilon_y = \sqrt{2T/m} = l_1/t_1$. Якщо t_2 – час руху атомів до екрана після вильоту з магнітного поля, а x_2 – зміщення атомів за цей час, то

$$l_2 = \upsilon_y t_2,$$

$$x_2 = \upsilon_x t_2 = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} l_2 = \frac{a_x t_1^2 l_2}{l_1} = 2x_l \frac{l_2}{l_1}.$$

З рис. 11.1 зрозуміло, що $x/2 = x_1 + x_2$, тому

$$x = 2(x_1 + 2x_1 \frac{l_2}{l_1}),$$

$$x = \frac{(l_1 + 2l_2) g \mu_Б J l_1}{2T} \cdot \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{2Tx}{g \mu_Б J l_1 (l_1 + 2l_2)} \approx 1,5 \cdot 10^2 \text{ (Тл/м).}$$

Задача 5. Нарисуйте схему можливих переходів між термами ${}^2P_{3/2}$ та ${}^2S_{1/2}$ у слабкому магнітному полі.

Дані: ${}^2P_{3/2}$; ${}^2S_{1/2}$.

Аналіз і розв'язання

Квантове число, яке визначає проекцію магнітного моменту атома на напрям магнітного поля, дорівнює $m_J = J, J-1, ..., -J$ – (всього $2J+1$ можливих значень). Тому у магнітному полі енергетичні рівні атома розщеплюються на $2J+1$ рівні. Так терм ${}^2P_{3/2}$ $(J_1 = 3/2)$ розщепиться на 4 рівні, що відповідають значенням $m_J = 3/2$; $1/2$; $-1/2$; $-3/2$. Терм ${}^2S_{1/2}$ $(J_1 = 1/2)$ розщепиться на 2 рівня, що відповідають значенням $m_J = 1/2$; $-1/2$.

Схему можливих шести переходів між рівнями зображено на рис. 11.2. Тут враховано, що правила відбору дозволяють переходи між станами, для яких $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

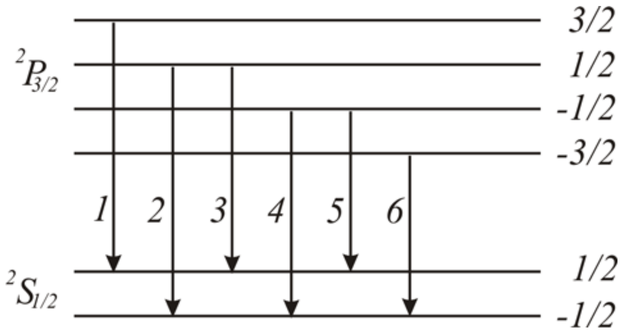

Рисунок 11.2

11.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти максимальну швидкість електронів, що долітають до антикатода рентгенівської труби, якщо короткохвильова межа рентгенівського спектра 2 нм.

Відповідь: $\upsilon = 1,48 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 2. Визначити зміну довжини хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра при зміні напруги на трубці від 16 до 24 кВ, а також відносну зміну довжини хвилі.

Відповідь: $\Delta\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; $\Delta\lambda / \lambda_1 = 33\%$.

Задача 3. Визначити довжину хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра, якщо при збільшенні напруги на рентгенівській трубці у два рази вона зменшилась на 50 пм.

Відповідь: 100 пм.

Задача 4. Знайти довжину хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра, а також прискорюючу різницю потенціалів, якщо швидкість електронів, які підлітають до антикатода, становить $0{,}3\,c$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 1{,}24 \cdot 10^{-11}$ м; $U = 100$ кВ.

Задача 5. У рентгенівській трубці антикатод зроблений з ніобію $_{41}Nb$. Визначити довжину хвилі та енергію кванта для K_α-лінії. При якій найменшій різниці потенціалів збуджується K-серія?

Відповідь: $\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; $E = 16{,}25$ кеВ; $U = 16$ кВ.

Задача 6. При дослідженні лінійчатого рентгенівського спектра деякого елемента було знайдено, що довжина хвилі K_α-лінії становить 22 пм. Який це елемент?

Відповідь: $Z = 74$, вольфрам.

Задача 7. В атомі вольфраму ($Z = 74$) електрон перейшов з M-шару на L-шар. Приймаючи сталу екранування $\sigma = 5{,}5$, визначити довжину хвилі фотона, що випромінюється.

Відповідь: 0,14 нм.

Задача 8. Визначити довжину хвилі K_α та K_β-лінії характеристичного рентгенівського спектра, одержаного у трубці з молібденовим антикатодом $(Z = 42)$. Чи можна спостерігати ці лінії при напрузі 12 кВ?

Відповідь: $\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; $\lambda_\beta = 6{,}1 \cdot 10^{-11}$ м; неможливо.

Задача 9. Довжина хвилі лінії L_α у вольфраму $(Z = 74)$ дорівнює $0{,}1476$ нм, а свинцю $(Z = 82)$ $0{,}1175$ нм. Виходячи з цих даних, знайти значення констант C та σ у законі Мозлі: $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$.

Відповідь: $C = 5{,}398 \cdot 10^7\ c^{-1/2}$ с$^{-1/2}$; $\sigma = 7{,}8$.

Задача 10. За допомогою закону Мозлі:

1) визначити довжину хвилі та енергію кванта, що відповідає K_α-лінії срібла;

2) визначити яким елементам належать наступні K_α-лінії: 193,5; 178,7; 165,6; 143,4 пм.

Відповідь: 1) 57,5 пм; 2) залізо, кобальт, нікель, цинк.

Задача 11. Мінімальна довжина рентгенівських променів, отриманих за допомогою трубки, що працює при напрузі U=60 кВ, дорівнює 20,7 пм. Визначити за цими даними сталу Планка.

Відповідь: $6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Задача 12. Визначити сталу екранування для L-серії рентгенівського випромінювання, якщо при переході електрона в атомі вольфраму з M-оболонки на L-оболонку довжина хвилі фотона, що випромінюється, складає 140 пм.

Відповідь: 5,63.

Задача 13. Визначити фактор Ланде для атомів з одним валентним електроном у станах S та P.

Відповідь: $g_1 = 2$; $g_2 = 2/3$; $3/4$.

Задача 14. Визначити в магнетонах Бора магнітний момент атома у 1) ^1F-стані; 2) в стані $^2D_{3/2}$.

Відповідь: 1) $\sqrt{12}\mu_Б$; 2) $\sqrt{3/5}\mu_Б$.

Задача 15. Визначити спіновий момент атома у стані D_2, якщо максимальне значення проекції магнітного моменту дорівнює чотирьом магнетонам Бора.

Відповідь: $L_S = 2\sqrt{3}\hbar$.

Задача 16. Атом вуглецю з електронною конфігурацією $1s^2 2s^2 2p3d$ має максимально можливий повний механічний момент. Чому дорівнює (у магнетонах Бора) магнітний момент атома у цьому стані?

Відповідь: $\mu = (\mu_Б/2)\sqrt{125}$.

Задача 17. Знайти три найпростіші терми, для яких множник Ланде $g = 0$.

Відповідь: $^4D_{1/2}$; $^5F_1$; $^7H_2$.

Задача 18. На скільки компонентів розщепиться у досліді, аналогічному досліду Штерна та Герлаха, пучок атомів, які перебувають у стані: $^2P_{3/2}$; $^3D_1$; $^7H_1$.

Відповідь: $N = 4; 3; 9$.

Задача 19. Максимальне значення проекції магнітного моменту атома, що перебуває у стані D_2, дорівнює чотирьом магнетонам Бора. Визначити мультиплетність цього терма.

Відповідь: $æ = 7$.

Задача 20. Атом знаходиться у магнітному полі з індукцією $B = 1{,}00$ Тл. Знайти повне розщеплення ΔE термів ^1S, ^1P, $^1D_{5/2}$.

Відповідь: $\Delta E = 0$ еВ; $1{,}16 \cdot 10^{-4}$ еВ; $3{,}48 \cdot 10^{-4}$ еВ.

Задача 21. Знайти числове значення нормального (лоренцевого) зміщення (при простому ефекті Зеємана) $\Delta\omega_0$, що відповідає $B = 1{,}00$ Тл.

Відповідь: $\Delta\omega_0 = 0{,}879 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$.

Задача 22. Побудувати схему можливих енергетичних переходів у магнітному полі між станами атома, що визначаються такими термами: 1) $^2P_{1/2} \to {}^2S$; 2) $^2P_{3/2} \to {}^2S$; 3) $^2D_{3/2} \to {}^2P_{3/2}$.

Задача 23. Який ефект Зеємана (простий чи складний) спостерігають при розщепленні у слабкому магнітному полі спектральної лінії, відповідної переходу: $^1P_1 \to {}^1S_0$; $^1P \to {}^1S_0$; $^2P_{3/2} \to {}^2S_{3/2}$?

Відповідь: Простий; складний; складний.

Задача 24. Навести схему можливих переходів у магнітному полі між станами $^1P \to {}^1S_0$ та $^1F \to {}^1D$. Скільки компонентів має спектральна лінія, яка відповідає кожному з цих переходів?

Відповідь: В обох випадках три компоненти.

Задача 25. Визначити можливі значення квантового числа m_J та зобразити на схемі розщеплення енергетичних рівнів атома у магнітному полі для станів: 1) ^2S, 2) $^2P_{3/2}$, 3) $^2D_{5/2}$, 4) ^1F.

Відповідь: 1) $-1/2, 1/2$, 2) $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$,

3) $-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$, 4) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Задача 26. Визначити кінетичну енергію електронів, що вириваються з K-оболонки атомів молібдену K_α-випромінюванням срібла. Сталу σ у законі Мозлі вважати рівною одиниці.

Відповідь: 1,54 кеВ.

Задача 27. Атом водню у нормальному стані знаходиться на відстані $r = 2{,}5$ см від довгого прямого провідника зі струмом $I = 10$ А. Знайти силу, що діє на атом.

Відповідь: $F = 3 \cdot 10^{-26}$ Н.

Задача 28. Інтервал між крайніми компонентами спектральної лінії $\lambda = 525$ нм при простому ефекті Зеємана дорівнює $\Delta\lambda = 22$ пм. Знайти інтервал (в електронвольтах) між сусідніми рівнями зеєманівського розщеплення відповідних термів.

Відповідь: $\Delta E = \dfrac{\pi c\hbar\Delta\lambda}{\lambda^2} = 5 \cdot 10^{-5}$ еВ.

Задача 29. Вузький пучок атомарного водню пропускається у досліді Штерна та Герлаха через поперечне неоднорідне магнітне поле $\partial B/\partial z$=2кТл/м. Всі атоми водню знаходяться в основному стані, довжина шляху атомів у магнітному полі 8 см, швидкість 4 км/с. Визначити відстань між компонентами розщепленого пучка атомів на виході з магнітного поля.

Відповідь: 4,46 мм.

Задача 30. Вузький пучок атомів рубідію в основному стані пропускається через поперечне неоднорідне магнітне поле довжиною 10 см. На екрані, який розташовано на відстані 10 см від магніту, спостерігають розщеплення пучка на два компоненти. Визначте силу, що діє на атоми рубідію, якщо відстань між компонентами розщепленого пучка на екрані дорівнює 4 мм, а швидкість атомів складає 0,5 км/с.

Відповідь: $2{,}86 \cdot 10^{-21}$ Н.

12 БУДОВА АТОМНИХ ЯДЕР. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ. РАДІОАКТИВНІСТЬ

12.1 Мета заняття

Навчитися розв’язувати задачі, користуючись основними законами ядерної фізики, записувати схеми радіоактивного перетворення одних атомних ядер в інші при всіх видах розпаду і рівняння ядерних реакцій.

12.2 Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом лекцій та підручником [2, розд. 10, 11; 4, § 66-73; 5, розд. 14], звернути особливу увагу на засвоєння основних понять фізики атомного ядра – зарядового числа та масового числа, поняття дефекта маси, енергії зв’язку, основних характеристик радіоактивної речовини – сталої радіоактивного розпаду, періоду піврозпаду, часу життя радіоактивного ядра, активності препарату. Розібратися в усіх радіоактивних процесах (α-розпад, β-розпад, γ-випромінювання, спонтанний поділ важких ядер, протонна радіоактивність). Засвоїти закон радіоактивного розпаду.

Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв’язання задач, що наведені у прикладах.

12.3 Основні закони і формули

1. Ядра атомів складаються з протонів та нейтронів. Загальна назва протона й нейтрона – нуклон. Нейтральний атом та його ядра позначаються одним і тим же символом:

$$ {}_{Z}^{A}X, $$

де X – символ хімічного елемента; Z – атомний номер (кількість протонів у ядрі); A – масове число (кількість нуклонів у ядрі). Кількість N нейтронів у ядрі дорівнює різниці $A–Z$.

2. Згідно з релятивістською механікою, маса спокою m стійкої системи взаємопов’язаних частинок менша за суму мас спокою $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ тих же частинок, взятих у вільному стані. Різниця:

$$\Delta m = (m_1 + m_2 + \ldots + m_k) - m$$

називається дефектом маси системи частинок.

3. Енергія зв’язку прямо пропорційна дефекту маси системи частинок:

$$E_{зв} = c^2 \Delta m,$$

де c – швидкість світла у вакуумі ($c^2 = 8{,}987 \cdot 10^{16}$ м^2/с^2=$8{,}989 \cdot 10^{16}$ Дж/кг).

Якщо енергія виражена у мегаелектронвольтах, а маса в атомних одиницях маси, то $c^2 = 931{,}4$ МеВ/а.о.м.

4. Дефект маси Δm атомного ядра є різницею між сумою мас вільних протонів та нейтронів та масою ядра, що з них утворилося:

$$\Delta m = \left(Zm_p + Nm_н\right) - m_я,$$

де Z – кількість протонів у ядрі, N – кількість нейтронів ($N = A - Z$), m_p та m_n – маси вільних протона та нейтрона відповідно, $m_я$ – маса ядра.

Якщо врахувати, що $m_я = m_a - Zm_e$; $m_p + m_e = m_{{}_1^1H}$, де m_a, m_e, $m_{{}_1^1H}$ – маса атома, електрона та атома водню відповідно, а A – масове число (кількість нуклонів в ядрі), то дефект маси можна записати у вигляді

$$\Delta m = Zm_{{}_1^1H} + \left(A - Z\right)m_н - m_a.$$

5. Питома енергія зв'язку (енергія зв'язку на один нуклон):

$$E_{пит} = E_{зв}/A.$$

6. Основний закон радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

де N – кількість атомів, що не розпалися у момент часу t; N_0 – кількість атомів, що не розпалися у момент часу, прийнятий за початковий (при $t = 0$), e – основа натуральних логарифмів; λ – стала радіоактивного розпаду.

7. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ – проміжок часу, за який кількість атомів, що не розпалися, зменшується у два рази. Період напіврозпаду пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

8. Кількість атомів, що розпадалися за час t:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Якщо проміжок часу $\Delta t << T_{1/2}$, то для визначення числа кількості атомів, що розпалися, можна використовувати наближену формулу:

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

9. Середній час життя τ радіоактивного ядра – проміжок часу, за який кількість ядер, що не розпалися, зменшується в e раз:

$$\tau = 1/\lambda.$$

10. Кількість атомів, що міститься у радіоактивній речовині:

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

де m – маса речовини, M – її молярна маса, N_A – стала Авогадро.

11. Активність A нукліду у радіоактивному джерелі (активність ізотопу) – величина, що дорівнює відношенню кількості dN ядер, що розпалися в ізотопі, до проміжку часу dt, за який відбувся розпад. Активність визначається за формулою:

$$A = -dN/dt = \lambda N,$$

або

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активність джерела у початковий момент часу ($t = 0$):

$$A = \lambda N_0 .$$

Активність ізотопу змінюється з часом за тим же законом, що і кількість ядер, які не розпалися:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} .$$

а.Контрольні запитання та завдання

1. З чого складається атомне ядро?
2. Які характеристики атомного ядра ви знаєте?
3. Дайте визначення ізотопів, ізобарів, ізотонів та ізомерів.
4. Чому дорівнює енергія зв’язку ядра?
5. Дайте визначення питомої енергії зв’язку ядра.
6. Чому міцність ядер зменшується при переході до важких елементів?
7. Запишіть формулу дефекту маси.
8. Що називається ядерними силами? Назвіть їх основні властивості.
9. У чому суть оболонкової моделі ядра, і які явища вона пояснює?
10. У чому суть крапельної моделі ядра, і які явища вона пояснює?
11. Що таке радіоактивність? Назвіть види радіоактивних випромінювань.
12. Чи зміниться хімічна природа елемента при випроміненні його ядром γ-кванта?
13. Які явища супроводжують проходження γ-випромінювання через речовину і в чому їхня суть?
14. Що називається радіоактивним розпадом?
15. Сформулюйте закон радіоактивного розпаду.
16. Що називається періодом напіврозпаду речовини?
17. Що таке час життя радіоактивного ядра? Як ця величина пов’язана зі сталою радіоактивного розпаду?
18. Що називається активністю нукліду? За яким законом змінюється активність з часом?
19. Що називається ядерними реакціями?
20. За якими ознаками можна класифікувати ядерні реакції?

12.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Водень збагачений дейтерієм. Визначити масові частинки w_1 протія і w_2 дейтерія, якщо відносна атомна маса такого водню дорівнює $1{,}122$.

Дані: $A_r = 1{,}222$;

$w_1 - ?$ $w_2 - ?$

Аналіз та розв’язання

Масові частки w_1 протію і w_2 дейтерію можна виразити співвідношеннями

$$w_1 = m_1/\left(m_1 + m_2\right),\; w_2 = m_2/\left(m_1 + m_2\right),$$

де m_1 і m_2 – маси відповідно протію і дейтерію у суміші.

Виразимо з цих рівнянь маси m_1 і m_2

$$m_1 = w_1\left(m_1 + m_2\right);\ m_2 = w_2\left(m_1 + m_2\right)$$

і підставимо їх у знаменник формули, яка визначає молярну масу M суміші

$$M = \left(m_1 + m_2\right) \Big/ \left(m_1/M_1 + m_2/M_2\right),$$

де M_1 і M_2 – молярні маси компонентів суміші. Після такої підстановки і простих перетворювань одержимо

$$M = M_1 M_2 \Big/ \left(w_1 M_1 + w_2 M_2\right). \qquad (12.1)$$

Оскільки молярні маси протію і дейтерію пропорційні їх відносним атомним масам, то рівняння (12.1) можна переписати у вигляді

$$A_r = A_{r_1} A_{r_2} \Big/ \left(w_1 A_{r_2} + w_2 A_{r_1}\right),$$

де A_{r_1} і A_{r_2} – відносні атомні маси, відповідно, протію і дейтерію. Відзначимо далі, що сума масових часток усіх компонентів має бути рівною одиниці, тобто

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Розв’язавши спільно рівняння (12.2) і (12.3), знайдемо

$$w_1 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r\left(A_{r_2} - A_{r_1}\right)}, \qquad (12.2)$$

$$w_2 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r\left(A_{r_1} - A_{r_2}\right)}. \qquad (12.3)$$

Із фізичних таблиць знаходимо $A_{r_1} = 1{,}00783$, $A_{r_2} = 2{,}01410$.

Підставивши числові значення величин у (12.2) та (12.3), одержимо

$$w_1 = 0{,}796 \text{ і } w_2 = 0{,}204.$$

Задача 2. Розрахувати дефект маси Δm, енергію зв’язку $E_{зв}$ ядра ${}^{11}_{5}B$.

Дані: ${}^{11}_{5}B$;

$\Delta m - ?$ $E_{зв} - ?$

Аналіз та розв’язання

Дефект маси ядра визначимо за формулою

$$\Delta m = Z m_{{}^1_1 H} + \left(A - Z\right) m_н - m_а \qquad (12.4)$$

Обчислення дефекту маси виконаємо у несистемних одиницях *а.о.м.* Для ядра ${}^{11}_{5}B$: $Z = 5$, $A = 11$. Маси нейтральних атомів водню ${}^{1}_{1}H$ і бору ${}^{11}_{5}B$, а також нейтрона n знайдемо у фізичних таблицях. Підставимо значення мас у формулу (12.4)

$$\Delta m = \left[5 \cdot 1{,}00783 + \left(11 - 5\right) \cdot 1{,}00867 - 11{,}00931\right]$$

$$\Delta m = 0{,}08186 \text{ а.о.м.} \qquad (12.5)$$

Енергія зв'язку ядра визначається співвідношенням

$$E_{зв} = \Delta m \cdot c^2 .$$

Енергію зв'язку також знайдемо у МеВ.

Для цього дефект маси підставимо у співвідношення (12.5) в *а.о.м.*, а коефіцієнт пропорційності $c^2 = 931,4$ МеВ/а.о.м., тобто

$$E_{зв} = 931,4 \cdot 0,08186 = 76,24 \text{ МеВ}.$$

Задача 3. Визначити енергію E, яку потрібно затратити для відриву нейтрона від ядра ${}_{11}^{23}Na$.

Дані: ${}_{11}^{23}Na$;

E – ?

Аналіз та розв'язання

Після відриву нейтрона число нуклонів A в ядрі зменшиться на одиницю. А кількість протонів Z залишиться без зміни; одержимо ядро ${}^{23}Na$, що утворилось у результаті захоплення вільного нейтрона ядром ${}^{22}Na$. Енергія відриву нейтрона від ядра ${}^{23}Na$ дорівнює енергії зв'язку нейтрона з ядром ${}^{22}Na$ $\left(E = E_{зв}\right)$.

Виразивши енергію зв'язку нейтрона через дефект маси системи, одержимо

$$E = E_{зв} = c^2 \Delta m = c^2 \left(m_{{}^{22}Na} + m_н - m_{{}^{23}Na} \right). \qquad (12.6)$$

При підстановці числових значень у (12.6) замінюємо маси ядер масами нейтральних атомів. Зважаючи на те, що кількість електронів в оболонках атомів ${}^{22}Na$ і ${}^{23}Na$ однакова, різниця мас атомів ${}^{23}Na$, ${}^{22}Na$ від такої заміни не зміниться.

$$E = 931,4 \quad 0,01334 \ = 12,42 \text{ МеВ}.$$

Задача 4. Радіоізотоп A_1 зі сталою розпаду λ_1 перетворюється у радіоізотоп A_2 зі сталою розпаду λ_2. Вважаючи, що у початковий момент препарат мав лише ядра ізотопу A_1, знайти, через який час активність радіоізотопу A_2 досягне максимуму?

Дані: A_1, λ_1, A_2, λ_2; $t_{a\ \max}$ – ?

Аналіз та розв'язання

Активність препарату пропорційна кількості існуючих ядер

$$a = -dN/dt = \lambda N .$$

Отже, максимальна активність радіоізотопу A_2 відповідатиме максимальній кількості ядер N_2. Закон зміни N_2 з часом має вигляд

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right), \qquad (12.6)$$

де $N_1(0)$ – кількість ядер радіоізотопу A_1 у момент часу $t = 0$.

Щоб знайти час t, якому відповідає максимум функції $N_2(t)$, продиференціюємо вираз (12.6) за часом і прирівняємо до нуля похідну

$$N_2'(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right) = 0, \qquad (12.7)$$

з формули (12.7)

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Звідки маємо

$$t_{a\ \max} = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Задача 5. Визначити, скільки ядер радіоізотопу церію $^{141}_{51}Ce$ масою $m_0 = 2$ мг розпадаються протягом таких проміжків часу: $\Delta t_1 = 10$ с; $\Delta t_2 = 1$ рік. Період піврозпаду церію $T = 285$ діб.

Дані: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $m_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ кг, $\Delta t_1 = 10$ с, $\Delta t_2 = 1$ рік,

$T = 285$ діб; $\mu = 0{,}144$ кг/моль.

ΔN – ?

Аналіз та розв'язання.

1. Кількість ядер ΔN, що не розпалися, знайдемо із закону радіоактивного розпаду

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

де

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \qquad (12.8)$$

Звідси

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Delta t. \qquad (12.9)$$

Початкову кількість ядер (атомів) визначимо як

$$N_0 = N_A \cdot v = N_A \frac{m_0}{\mu}, \qquad (12.10)$$

де v – кількість молів, що міститься у препараті, m_0 – початкова маса препарату, N_A – число Авогадро, μ – молярна маса ізотопу.

Підставивши (12.10) у (12.9), отримаємо

$$\Delta N = \frac{\ln 2 \cdot N_A \cdot m_0 \cdot \Delta t}{T\mu} = 2{,}4 \cdot 10^{12}.$$

2. У другому випадку $\Delta t = T$. Тому можна скористатися інтегральною формою закону радіоактивного розпаду

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \qquad (12.11)$$

Підставивши у (12.11) значення N_0 і λ з (12.10) і (12.8), отримаємо

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{t \cdot \ln 2}{T}}\right).$$

Оскільки $e^{\ln 2} = 2$, то $\Delta N = \frac{N_A \cdot m_0}{\mu}\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) = 5 \cdot 10^{18}$.

Задача 6. Визначити енергію реакції $^{10}B(n,\alpha)\ ^{7}\rightarrow Li$, що відбувається внаслідок взаємодії повільних нейтронів з ядрами бору, що перебувають у спокої. Знайти також кінетичні енергії T продуктів реакції.

Дані: m_{Li}; m_{He}; m_n; c;

Q – ? T – ?

Аналіз та розв'язання.

Ядерна реакція має такий вигляд

$$^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{11}_{5}B \rightarrow {}^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}He. \tag{12.12}$$

Як видно з (12.12), ядро бору, що поглинуло повільний нейтрон, перетворюється у проміжне ядро $^{11}_{5}B$. Останнє переходить у збуджений стан, після якого випромінює α-частинку (ядро гелію $^{4}_{2}He$) і перетворюється у $^{7}_{3}Li$, тобто ядро літію.

Знайдемо енергію реакції

$$Q = c^2\left(\sum m - \sum m'\right). \tag{12.13}$$

$\sum m$ і $\sum m'$ – суми мас спокою частинок до і після реакції, відповідно.

Перепишемо (12.13) у такому вигляді

$$Q = c^2\left[\left(m_{^{10}B} + m_n\right) - \left(m_{^{7}Li} + m_{^{4}He}\right)\right]$$

де m_n – маса нейтрона.

Замінимо маси спокою ядер атомів на маси спокою власне атомів $\left(m = m_0, m' = m_0'\right)$.

Тоді $Q = 2{,}8\,\text{МеВ}$.

Знайдемо кінетичні енергії продуктів реакції, тобто ядра літію $^{7}_{3}Li$ і α-частинки. Закон збереження релятивістської енергії у цьому випадку має такий вигляд

$$\sum m_0 c^2 + \sum E_к = \sum m_0' c^2 + \sum E_к',$$

$$c^2\left(\sum m_0 - \sum m_0'\right) + \sum E_к = \sum E_к'. \tag{12.14}$$

В останньому співвідношенні врахуємо (12.13) і отримаємо

$$Q + \sum E_к = \sum E_к'.$$

Нейтрони мають малу швидкість, тому $\sum E_к = 0$. Суму кінетичних енергій продуктів реакції можна подати як

$$E_{кLi} + E_{кHe} = Q. \qquad (12.15)$$

Сумарний імпульс частинок до реакції дорівнював нулю. Згідно із законом збереження імпульсу і після реакції сумарний імпульс має дорівнювати нулю

$$\vec{p}_{Li} + \vec{p}_{He} = 0.$$

Звідки модулі імпульсів

$$|\vec{p}_{Li}| = |\vec{p}_{He}|.$$

Від імпульсів частинок реакції перейдемо до їх кінетичних енергій. Оскільки для класичної частинки

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

звідси

$$p = \sqrt{2mE_к},$$

тоді

$$\sqrt{2m_{Li}E_{кLi}} = \sqrt{2m_{He}E_{кHe}},$$

або

$$m_{Li}E_{кLi} = m_{He}E_{кHe}. \qquad (12.16)$$

З рівнянь (12.15) і (12.16), отримаємо

$$E_{кLi} = \frac{Qm_{He}}{m_{Li} + m_{He}}; \; E_{кHe} = \frac{Qm_{Li}}{m_{Li} + m_{He}}.$$

Підставивши значення m_{He}, m_{Li}, отримаємо

$$E_{кLi} = \frac{4Q}{11} = 1{,}02 \text{ МеВ}, \; E_{кHe} = \frac{7Q}{11} = 1{,}78 \text{ МеВ}.$$

12.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Хлор являє собою суміш двох ізотопів із відносними атомними масами $A_{r_1} = 34{,}969$ і $A_{r_2} = 36{,}966$. Обчислити відносну атомну масу A_r хлору, якщо масові частки w_1 і w_2 першого і другого ізотопів відповідно дорівнюють 0,754 і 0,246.

Відповідь: $A_r = 35{,}439$.

Задача 2. Бор являє собою суміш ізотопів із відносними атомними масами $A_{r_1} = 10{,}013$ і $A_{r_2} = 11{,}009$. Визначити масові частки w_1 і w_2 першого і другого ізотопів у природному борі. Відносна атомна маса A_r бора дорівнює $10{,}811$.

Відповідь: $w_1 = 0{,}186$; $w_2 = 0{,}184$.

Задача 3. Визначити масу ядра літію, якщо маса нейтрального атома літію дорівнює $7{,}01601$ *а.о.м.*

Відповідь: $m_{я_{Li}} = 7{,}01436$ *а.о.м.*

Задача 4. Визначити атомні номери, масові числа і хімічні символи дзеркальних ядер, які отримуються, якщо в ядрах ${}_{2}^{3}He$, ${}_{4}^{7}Be$, ${}_{8}^{15}O$ протони замінити нейтронами, а нейтрони – протонами. Навести символічний запис отриманих ядер.

Відповідь: ${}_{1}^{3}H$, ${}_{3}^{7}Li$, ${}_{7}^{15}N$.

Задача 5. Два ядра гелію ${}_{2}^{4}He$ злиплися в одне ядро. Процес супроводжувався викидом протона. Визначити, ядро якого елемента утворилося у результаті перетворення (наведіть символічний запис ядра).

Відповідь: ${}_{3}^{7}Li$.

Задача 6. В ядрі ізотопу кремнія ${}_{14}^{27}Si$ один із протонів перетворився у нейтрон (β^{+}-розпад). Яке ядро отрималось у результаті такого перетворення?

Відповідь: ${}_{13}^{27}Al$.

Задача 7. Ядро плутонія ${}_{94}^{238}Pu$ випробувало шість послідовних α-розпадів. Написати ланцюжок перетворень із зазначенням хімічних символів, масових і зарядових чисел проміжних ядер і кінцевого ядра.

Відповідь: ${}_{94}^{238}Pu \to {}_{92}^{234}U \to {}_{90}^{230}Th \to {}_{88}^{226}Ra \to {}_{86}^{222}Rn \to {}_{84}^{218}Po \to {}_{82}^{214}Pb$.

Задача 8. Визначити дефект маси Δm та енергію зв'язку ядра атома важкого водню.

Відповідь: $\Delta m = 0{,}00240$ *а.о.м.*; $E_{зв} = 2{,}23$ МеВ.

Задача 9. Визначити енергію $E_{зв}$, яка звільнилася при з'єднанні одного протона і двох нейтронів в атомне ядро.

Відповідь: $E_{зв} = 8{,}49$ МеВ.

Задача 10. Енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра, яке складається з двох протонів і одного нейтрона, дорівнює $7{,}72$ МеВ. Визначити масу m_a нейтрального атома, що має це ядро.

Відповідь: $m_a = 3{,}01604$ *а.о.м.*

Задача 11. Визначити масу m_a нейтрального атома, якщо ядро цього атома складається з трьох протонів і двох нейтронів й енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра дорівнює $26{,}3$ МеВ.

Відповідь: $m_a = 5{,}01258$ *а.о.м.* (атом літію ${}_{3}^{5}Li$).

Задача 12. Визначити енергію E, яка звільняється при створенні із протонів і нейтронів ядер гелія ${}_{2}^{4}He$ масою $m = 1$ г.

Відповідь: $E = 682$ ГДж.

Задача 13. Знайти мінімальну енергію $E_{\min}$, необхідну для виривання одного протона з ядра азоту ${}^{14}_{7}N$.

Відповідь: $E_{\min} = 7{,}55$ МеВ.

Задача 14. Енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра кисню ${}^{18}_{8}O$ дорівнює 139,8 МеВ, ядра фтору ${}^{19}_{9}F$ – 147,8 МеВ. Визначити, яку мінімальну енергію E потрібно затратити, щоб відірвати один протон від ядра фтору.

Відповідь: $E_{\min} = 8{,}0$ МеВ.

Задача 15. Яку найменшу енергію зв'язку $E_{\min}$ необхідно затратити, щоб розділити ядро ${}^{4}_{2}He$ на дві однакові частинки?

Відповідь: $E_{\min} = 23{,}8$ МеВ.

Задача 16. Визначити найменшу енергію $E_{\min}$, необхідну для розділення ядра вуглецю ${}^{12}_{6}C$ на три однакові частинки.

Відповідь: $E_{\min} = 7{,}26$ МеВ.

Задача 17. Яка частина початкової кількості атомів радіоактивного актинію ${}^{225}Ac$ залишиться через 5 діб, 15 діб? Період напіврозпаду актинію 10 діб.

Відповідь: $0{,}71$; $0{,}36$.

Задача 18. Ядро ізотопу кобальту ${}^{60}_{27}Co$ викинуло негативно заряджену β-частинку. В яке ядро перетворилося ядро кобальту?

Відповідь: ${}^{60}_{28}Ni$.

Задача 19. Визначити зарядове Z і масове A число ізотопу, який утворюється з торію ${}^{232}_{90}Th$ після трьох α і двох β-перетворень.

Відповідь: $Z = 86$; $A = 220$, ${}^{220}_{86}Rn$.

Задача 20. Визначити сталі розпаду λ ізотопів радію ${}^{219}_{88}Ra$ і ${}^{226}_{88}Ra$. Їх періоди напіврозпаду – 10^{-3}с та $1{,}62 \cdot 10^{3}$ років.

Відповідь: 700 с$^{-1}$; $13{,}6$ пс$^{-1}$.

Задача 21. Стала розпаду λ рубідію ${}^{89}Rb$ дорівнює $0{,}00077$ с$^{-1}$. Визначити його період напіврозпаду $T_{1/2}$.

Відповідь: 15 хв.

Задача 22. Якщо період напіврозпаду радію 1600 років, то яка частка зразка радію розпадеться після того, як мине 3200 років?

Відповідь: $3/4$.

Задача 23. Визначити енергію Q α-розпаду ядра полонію ${}^{210}_{84}Po$.

Відповідь: $Q = 5,41$ МеВ.

Задача 24. За один рік початкова кількість радіоактивного ізотопу зменшилася у три рази. У скільки разів вона зменшиться за два роки?

Відповідь: У 9 разів.

Задача 25. Знайти енергію *E*, яка вивільнюється при поділі всіх ядер, що містяться в урані-235 масою *m*=1 *г*.

Відповідь: $E = 82$ ГДж.

Задача 26. Ядро радону ${}^{220}_{86}Rn$, що знаходилося у стані спокою, викинуло α-частинку зі швидкістю $\upsilon = 16$ Мм/с. В яке ядро перетворилося ядро радону? Яку швидкість υ_1 воно здобуло внаслідок віддачі?

Відповідь: ${}^{216}_{84}Po$, $\upsilon_1 = 29$ Мм/с.

Задача 27. Ядро вуглецю ${}^{14}_{6}C$ викинуло від'ємно заряджену β-частинку та антинейтрино. Визначити повну енергію Q β-розпаду ядра.

Відповідь: $Q = 0,156$ МеВ.

Задача 28. Ядро атома радію ${}^{226}_{88}Ra$, що вільно покоїться, зазнає α-розпаду. Енергія зв'язку ядра дорівнює 1731,6 Ме*В*, ядра ${}^{222}_{86}Rn$ – 1708,2 *МеВ*, α-частинки – 28,3*МеВ*. Вважаючи, що дочірнє ядро радона ${}^{222}_{86}Rn$ утворюється у незбудженому стані, знайти: а) швидкість υ_α частинки, що утворилась; б) швидкість дочірнього атома.

Відповідь: а) $\upsilon_\alpha = 1,5 \cdot 10^7$ м/с; б) $\upsilon = 2,7 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 29. Скільки ядер урану-235 має ділитися за *t* = 1*с*, щоб теплова потужність *P* ядерного реактора дорівнювала 1 Вт?

Відповідь: $N = 3,1 \cdot 10^{10}$.

Задача 30. Знайти потужність *P* атомної електростанції, яка витрачає 0,1 кг урану-235 за добу, якщо ККД η станції дорівнює 16%.

Відповідь: $P = 15$ МВт.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: Навч. посібник / Упор. Українець М.І. та ін. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 164 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: Наука, 1987. – Т.2. – 318 с.
3. Квантова та ядерна фізика: Навч. посібник / Упор. Українець М.І. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 124 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: Наука, 1987. – Т.3. – 318 с.
5. Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів / В.В. Кармазін, В.В. Семенець – К.: Кондор, 2009. – 786 с.
6. Чертов А.Г., Воробьев А.В. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1982. – 420 с.
9. Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
10. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высшая школа, 1978. – 452 с.
11. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Курс общей физики: – М.: Высшая школа, 1972. – 534 с.

Електронне навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять

з дисципліни
«ФІЗИКА»
Частина 2

для студентів денної форми навчання
напрямів 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика», 6.040303 «Системний аналіз», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія», 6.050103 «Програмна інженерія», 6.050201 «Системна інженерія», 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 «Електронні пристрої та системи», 6.050803 «Акустотехніка», 6.050901 «Радіотехніка», 6.050902 «Радіоелектронні апарати», 6.050903 «Телекомунікації», 6.051001 «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології», 6.051002 «Метрологія, стандартизація та сертифікація», 6.051004 «Оптотехніка», 6.051402 «Біомедична інженерія», 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», 6.170102 «Системи технічного захисту інформації», 6.170103 «Управління інформаційною безпекою»

Упорядники: СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна
КІБЕЦЬ Інна Миколаївна
ОРЕЛ Роман Петрович
МАЛИК Світлана Борисівна

Відповідальний випусковий: О. В. Лазоренко

Авторська редакція