В. О. Стороженко, І. М. Кібець, А. І. Рибалка, Т. Б. Ткаченко

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ

Частина І

Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Харків
«Компанія СМІТ»
2006

УДК 53(07)
ББК 22.3я73
З 14

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1.4./18-Г518 від 19.07.06 р.)

Рецензенти:

Мерісов Б. А., доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України;

Сук О. П., кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри загальної й експериментальної фізики НТУ «ХПІ»;

Поліщук А. П., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики Національного авіаційного університету (НАУ)

З 14 **Загальна** фізика з прикладами і задачами. Частина I. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: Навч. посібник / В. О. Стороженко, І. М. Кібець, А. І. Рибалка, Т. Б. Ткаченко. — Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. — 320 с.

ISBN 966-8530-77-2

У посібнику викладено основні положення класичної механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, основи спеціальної теорії відносності. Великий обсяг теоретичних відомостей, прикладів розв'язання задач, задач для самостійного розв'язання, тестів і довідкового матеріалу робить цей посібник особливо цінним.

Для студентів і викладачів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 53(07)
ББК 22.3я73

ISBN 966-8530-77-2

ЗМІСТ

II. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

ПЕРЕДМОВА

Фізика — фундаментальна наука, неосяжна широта практичного застосування якої дозволила їй стати потужним знаряддям технічного прогресу. Без результатів, досягнутих завдяки дослідженням теоретичної та експериментальної фізики, неможливий був би бурхливий розвиток атомної енергетики, мікроелектроніки, нанотехнологій, комп'ютерної та лазерної техніки.

На цей час особливої актуальності набули дослідження фізичних явищ і процесів, пов'язаних з одержанням, передаванням, перетворенням і застосуванням різних форм енергії. Тому вивчення фізики студентами, що здобувають технічні спеціальності, є єдиною можливістю дізнатися, як пов'язані між собою наука і техніка. Це також єдина можливість ознайомитися з новими досягненнями фізики та їх впливом на створення новітніх технологій. Крім того, знання фізичних законів, уміння грамотно поставити задачу та її граничні умови дозволить сучасному інженеру критично ставитися до тих непередбачуваних результатів, що можуть бути одержані в віртуальному світі за допомогою комп'ютера.

Таким чином, вивчення фізики створює основу теоретичної бази підготовки фахівців з технічних спеціальностей для різних галузей господарства, які розроблятимуть нові наукоємні технології.

Сучасні вимоги до викладання фізики, з урахуванням приєднання України до Болонського процесу, потребують використання сучасних методик, де багато уваги приділяється творчому підходу студентів до вивчення дисципліни, навчають застосовувати теоретичні знання для вирішення прикладних задач. Одним із таких чинників є необхідність більше уваги приділяти самостійній роботі студентів та контролю знань на основі кредитно-модульної системи. У даному навчальному посібнику використані матеріали та методики викладання загальної фізики на основі багаторічного викладацького досвіду авторів.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з фізики для вищих технічних навчальних закладів. Його перша частина охоплює два великі розділи: «Механіка», «Молекулярна фізика та термодинаміка». Кожний розділ починається з викладення теоретичного матеріалу з контрольними запитаннями і завданнями. Беручи до уваги, що багато студентів з острахом ставляться до розв'язання задач, після контрольних запитань подані приклади розв'язання задач з докладними поясненнями. Велика кількість задач для самостійного розв'язання дозволяє використовувати посібник і як задачник, що знадобиться у процесі виконання індивідуальних самостійних і контрольних робіт. Довідковий матеріал з «Додатків» допоможе при розв'язанні задач. Перевірити ступінь засвоєння вивченого матеріалу дозволять подані в кінці видання тести.

Досконале вивчення матеріалу цього посібника допоможе студентам добре опанувати викладений на лекціях матеріал та підготуватися до екзамену.

I. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Механіка вивчає закономірності упорядкованого руху, який полягає у зміні взаємного положення матеріальних тіл (або їх частин) у просторі й у часі. Упорядкованість руху полягає в тому, що коли відоме положення тіла (частинки) відносно інших тіл у момент часу t_0 та закон руху, то можна однозначно передбачити положення цього тіла в будь-який інший момент часу t. Такий рух називають *механічним.*

Фізична теорія, яка вивчає рух макроскопічних тіл зі швидкостями, набагато меншими за швидкість розповсюдження світла у вакуумі, базується на законах Ньютона. Тому її ще називають *ньютонівською механікою*.

Закономірності руху тіл зі швидкостями, близькими до швидкості світла у вакуумі, вивчає релятивістська механіка, основою якої є спеціальна (окрема) теорія відносності Ейнштейна. Обидві ці теорії відповідають вимозі однозначності, експериментальної обґрунтованості та кількісної визначеності. Детермінованість об'єднує їх у *класичну механіку,* але часто класичною називають лише ньютонівську механіку.

Закономірності руху мікрочастинок вивчає квантова (хвильова) механіка. Це недетермінована теорія. Цю та інші теорії, побудовані на основі квантової механіки, називають *сучасною фізикою.*

Постулати та принципи ньютонівської механіки

1. Простір є неперервним, однорідним та ізотропним. Це означає, що всі точки простору та всі напрямки в ньому еквівалентні. Він описується геометрією Евкліда та має три виміри.

2. Час є абсолютним, неперервним, однорідним та анізотропним (асиметричним). Він плине лише в одному напрямку, від минулого до майбутнього.

3. Матерія дискретна (атомістичний погляд).

4. Енергія неперервна, тобто вона може набувати будь-яких значень.

5. Усі тіла в природі взаємодіють. Взаємодія тіл розповсюджується миттєво, тобто зі швидкістю $\upsilon = \infty$.

6. Виконується принцип собітотожності, тобто тіло (частинка), яке рухається, не змінює жодних своїх властивостей унаслідок руху, залишається самим собою.

7. У механіці, як і в усій фізиці, виконується принцип причинності. Подія, що відбувається «тут» і «зараз», є наслідком іншої події, яка вже відбулася «тут» або відбувається в іншому місці, і причиною події, яка ще відбувається «тут» або відбувається «десь».

Фундаментальні взаємодії

У сучасній фізиці розрізняють такі чотири види фундаментальних взаємодій.

1. *Сильна взаємодія.* Зв'язок нуклонів у ядрі. Радіус її дії $r = 10^{-15}$ м. Характерний час $\tau \approx 10^{-23}$ с.

2. *Електромагнітна взаємодія.* Вона слабкіша за сильну на два порядки. Радіус її дії $r = \infty$. Характерний час $\tau \approx 10^{-21}$ с.

3. *Слабка взаємодія.* Відповідає за всі види β-*розпаду* та взаємодію нейтрино з речовиною. Вона слабкіша за сильну на 14 порядків. Радіус її дії $r = 10^{-15}$ м. Характерний час $\tau \approx 10^{-9}$ с.

4. *Гравітаційна взаємодія.* Вона слабкіша за сильну на 39 порядків. Радіус її дії $r = \infty$. Характерний час $\tau \approx 3 \cdot 10^{8}$ років.

Фундаментальні взаємодії не можна звести до інших, більш простих взаємодій.

Класична фізика розглядає гравітаційну та електромагнітну взаємодії. Вона складається з трьох основних розділів: кінематики, динаміки та статики.

1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Кінематика математично описує різноманітні види упорядкованого (механічного) руху, не звертаючи уваги на причини, які забезпечують наявність кожного конкретного руху. Кінематика — це геометрія руху.

1.1. Основні поняття та визначення

Для того, щоб описати рух тіла в залежності від умов конкретних задач у кінематиці, використовують різні *фізичні моделі.*

Матеріальна точка

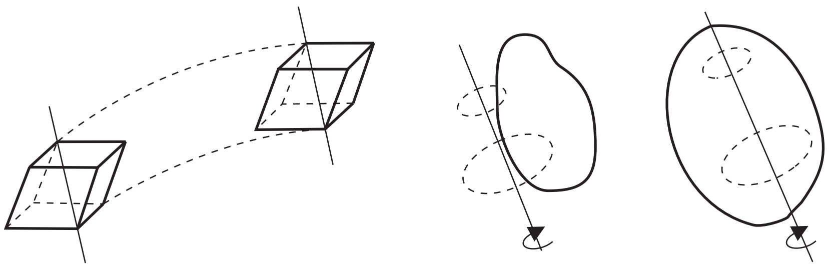
Найпростішою моделлю є *матеріальна точка* — тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати, тобто вважати, що вся матерія зосереджена в одній точці. Поняття матеріальної точки абстрактне, але його введення полегшує розв'язання практичних задач. Наприклад, вивчаючи рух планет по орбітах навколо Сонця, можна вважати їх матеріальними точками.

Довільне макроскопічне тіло або систему тіл можна уявити як суму великої кількості дрібних частинок (матеріальних точок), що взаємодіють між собою. В такому разі вивчення руху довільної системи тіл можна звести до вивчення системи матеріальних точок.

Абсолютно тверде тіло

У процесі взаємодії тіл одне з одним вони можуть деформуватися, тобто змінювати свою форму та розміри. Фізичною моделлю тіла є *абсолютно тверде тіло* — тіло, деформаціями якого за умов даної задачі можна знехтувати, тобто тіло, яке не деформується за жодних взаємодій.

Будь-який рух твердого тіла можна уявити як накладання двох видів руху: поступального та обертального. *Поступальний рух* — це рух, при якому будь-яка пряма пов'язана з тілом, що рухається, залишається паралельною самій собі (рис. 1.1, *а*). *Обертальний рух* — це рух, при якому всі точки тіла описують концентричні кола в площині, перпендикулярній осі обертання. Вісь обертання може знаходитися як усередині тіла, так і за його межами (рис. 1.1, *б*).



а *б*

Рис. 1.1

Тіло відліку. Система відліку

Положення тіла (матеріальної точки) в просторі можна визначити тільки по відношенню до інших тіл, тобто положення тіла відносне. Тіло, відносно якого розглядається положення даного тіла, називається *тілом відліку.* Тіло відліку, пов'язана з ним система координат та прилади для вимірювання відстані й часу (лінійка та годинник) складають *систему відліку.*

У фізиці використовується декілька систем координат: прямокутна (ортогональна) декартова, полярна та сферична. У переважній більшості задач найзручнішою є прямокутна декартова (найчастіше права) система координат. У цій системі положення будь-якої точки M (рис. 1.2) визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, який з'єднує початок координат з точкою M.

Траєкторія

Положення матеріальної точки, що рухається, визначається положенням її в просторі та моментом часу перебування її в цій точці.

У процесі руху матеріальна точка описує в просторі *траєкторію* — геометричне місце точок, які вона послідовно займає. В загальному випадку траєкторія матеріальної точки являє собою лінію у просторі, взагалі кажучи, криву.

1.2. Способи задання руху та основні кінематичні характеристики поступального руху матеріальної точки

Рух матеріальної точки можна задати одним із трьох способів: векторним, координатним та природним.

Векторний спосіб визначення руху

Положення точки, яка рухається поступально, в будь-який момент часу визначається радіусом-вектором $\vec{r}$ (рис. 1.2).

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки має вигляд:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Вектор переміщення матеріальної точки $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.3):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

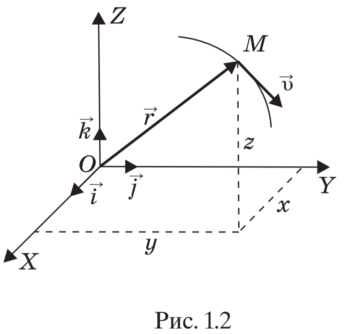


Рис. 1.2

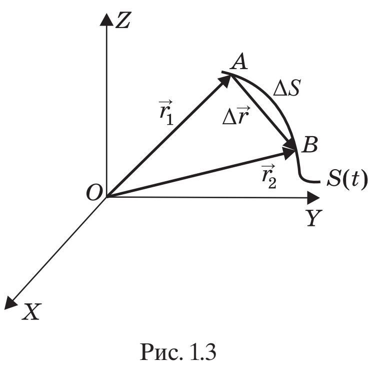


Рис. 1.3

Середня швидкість:

$$\vec{\upsilon}_{\text{сер}} = \langle \vec{\upsilon}_{\text{сер}} \rangle = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Напрямок вектора $\vec{\upsilon}_{\text{сер}}$ збігається з напрямком вектора переміщення матеріальної точки $\Delta \vec{r}$.

Миттєва швидкість:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Вектор миттєвої швидкості спрямований по дотичній до траєкторії в даній точці (рис. 1.2).

Якщо миттєва швидкість стала (не змінюється з часом), то рух *рівномірний*. Якщо ж вона є функцією від часу $(\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t))$, то рух *нерівномірний*.

$$[\upsilon] = 1\ \text{м/с} = 1\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$$

Середнє прискорення:

$$\vec{a}_{\text{сер}} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Якщо точка рухається з постійним прискоренням, рух *рівнозмінний*.

Координатний спосіб визначення руху

Якщо радіус-вектор $\vec{r}$ точки виразити через складові на осях декартових координат, то положення точки, яка рухається, в будь-який момент часу визначається трьома пов’язаними між собою змінними x, y, z (рис. 1.2).

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

переходить у *три параметричні рівняння,* які мають вигляд:

$$x = x(t);$$

$$y = y(t);$$

$$z = z(t).$$

Миттєва швидкість:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори (орти).

Модуль вектора швидкості:

$$|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Прискорення:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Модуль вектора прискорення.

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Природний спосіб визначення руху матеріальної точки

Рух точки можна описати скалярною функцією $S(t)$, яка дорівнює довжині дуги траєкторії від початку відліку (рис. 1.3).

Рівняння руху матеріальної точки має вигляд:

$$S = S(t),$$

де $S(t)$ — дугова координата.

Уявимо собі траєкторію руху матеріальної точки. A — початкове положення точки, B — кінцеве. Початок координат зв'яжемо з точкою O. Тоді $\vec{r}_1$ — радіус-вектор точки A, $\vec{r}_2$ — радіус-вектор точки B. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — вектор переміщення, ΔS — зміна дугової координати (шлях) — скалярна величина.

Взагалі $\Delta S \neq |\Delta\vec{r}|$; ($\Delta S > |\Delta\vec{r}|$). Але якщо Δr дуже мале, тоді на границі $|\Delta\vec{r}|$ і ΔS збігаються.

Визначимо одиничний вектор $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta S > 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Вектор $\vec{\tau}$ напрямлений по дотичній до траєкторії (дугової координати, звідки випливає:

$$d\vec{r} = dS \cdot \vec{\tau}.$$

Середня шляхова швидкість:

$$\upsilon_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{\Delta t},$$

$\upsilon_{\text{сер}}$ — скалярна величина.

Взагалі середня шляхова швидкість не дорівнює модулю середньої швидкості точки на тій же ділянці траєкторії:

$$\upsilon_{\text{сер}} \geq \left|\vec{\upsilon}_{\text{сер}}\right|.$$

Знак рівності відповідає прямолінійній ділянці траєкторії.

Миттєва швидкість:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ або } \vec{\upsilon} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau} = \upsilon_\tau \vec{\tau},$$

де $\upsilon_\tau = \dfrac{dS}{dt}$ — модуль вектора миттєвої швидкості; $\vec{\tau}$ — одиничний вектор, що вказує напрямок вектора миттєвої швидкості.

Миттєва швидкість напрямлена по дотичній до траєкторії (рис. 1.2).

У загальному випадку траєкторія руху є кривою лінією, при цьому швидкість змінює не тільки свою величину, а й напрямок (рис. 1.4).

Середнє прискорення нерівномірного руху:

$$\vec{a}_{\text{сер}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

З урахуванням

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\tau \vec{\tau}$$

маємо:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\upsilon_\tau \vec{\tau}) = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\upsilon_t = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Перший доданок $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau}$ — дотичне, або тангенціальне, прискорення, спрямоване по дотичній до вектора швидкості і відповідає за зміну швидкості за величиною.

Другий доданок $\vec{a}_n = \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\upsilon_\tau$ — доцентрове, або нормальне, прискорення, визначає зміну швидкості за напрямком.

Розглянемо докладно другий доданок $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\upsilon_\tau$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right|; \quad \left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\Delta t}; \quad \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta S} = \frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right| = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta S\to 0}}\left|\frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right|; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \upsilon_\tau,$$

а $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta\varphi} = R$ — радіус кривини траєкторії руху.

Якщо $\Delta\varphi$ прямує до нуля $(\Delta\varphi \to 0)$, то $\Delta\vec{\tau}$ стає перпендикулярним самому вектору $\vec{\tau}$, тобто має напрямок нормалі $\vec{n}$ до вектора швидкості.

Тоді

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon_\tau}{R}\vec{n},$$

а $\vec{a}_n = \dfrac{\upsilon_\tau^2}{R}\vec{n}$ — нормальне прискорення.

Повне прискорення в загальному випадку криволінійного руху (рис. 1.5):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon_\tau^2}{R}\vec{n},$$

а його модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

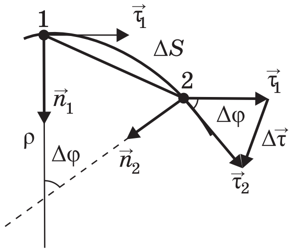


Рис. 1.4

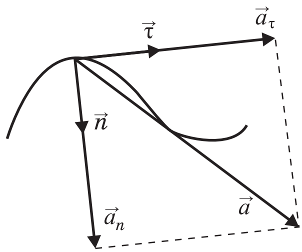


Рис. 1.5

Залежно від тангенціального та нормального прискорення рух можна класифікувати таким чином:

- $a_\tau = 0, a_n = 0$ — точка рухається прямолінійно рівномірно;
- $a_\tau = \text{const}, a_n = 0$ — точка рухається прямолінійно рівноприскорено (або рівносповільнено).
- $a_\tau = f(t), a_n = 0$ — точка рухається прямолінійно зі змінним прискоренням;
- $a_\tau = 0, a_n = \text{const}$ — точка рівномірно рухається по колу;

- $a_\tau = 0, a_n \neq 0$ — точка рівномірно рухається по кривій;
- $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$ — точка рухається по кривій рівноприскорено (або рівносповільнено);
- $a_\tau = f(t), a_n \neq 0$ — точка рухається по кривій зі змінним прискоренням.

Слід мати на увазі, що

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

але

$$|\vec{a}| \neq \left|\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right| \neq \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|.$$

$$[a] = 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

1.3. Кінематика обертального руху твердого тіла

Рух абсолютно твердого тіла, при якому одна із його точок лишається нерухомою, називається *обертанням навколо нерухомої точки* (*центра*). Рух, у процесі якого лишаються нерухомими дві його точки, називається *обертанням навколо прямої осі*, що проходить через ці точки. Обертання навколо центра (точки) можна уявити як обертання навколо миттєвої осі. При обертальному русі навколо осі всі точки абсолютно твердого тіла рухаються по колах, центри яких лежать на осі обертання.

Кутове переміщення

Положення точки, що рухається по колу радіуса R, визначається значенням кута повороту $d\varphi$ (рис. 1.6).

Кутове переміщення $d\vec{\varphi}$ — вектор, довжина якого дорівнює величині кута повороту $d\varphi$, а напрямок збігається з віссю обертання й визначається за правилом правого гвинта (рис. 1.6).

Вектори, напрямки яких пов'язують з напрямком обертання, називають *псевдовекторами* або *аксіальними векторами.* Ці вектори не мають визначених точок прикладання: вони можуть відкладатися від будь-якої точки осі обертання. Найчастіше за точку прикладання псевдовектора вибирають початок координат системи відліку. Кутове переміщення $d\vec{\varphi}$ — псевдовектор.

Поняття вектора кута обертання $d\vec{\varphi}$ можна ввести тільки для нескінченно малих кутів обертання.

Кутова швидкість

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ (рис. 1.7) — вектор, чисельно рівний зміні кута за одиницю часу і який збігається за напрямком з вектором кутового переміщення.

Середня кутова швидкість:

$$\vec{\omega}_{\text{сер}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

Миттєва кутова швидкість:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}.$$

Кутова швидкість характеризує обертання тіла навколо осі. Вектор $\vec{\omega}$ — псевдовектор, напрямлений уздовж осі обертання тіла.

Якщо $\vec{\omega} = \text{const}$ — обертання рівномірне, а якщо $\vec{\omega} \neq \text{const}$ — обертання нерівномірне. $[\omega] = 1$ рад/с $= 1$ рад$\cdot$с$^{-1}$.

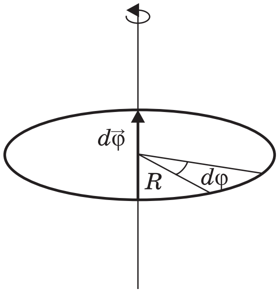


Рис. 1.6

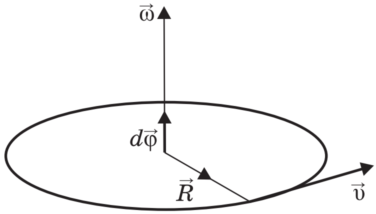


Рис. 1.7

Період обертання. Частота обертання

Якщо обертання рівномірне, то його можна охарактеризувати періодом обертання.

Період обертання T — час, за який тіло здійснює один повний оберт (обертається на кут 2π):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота обертання ν — число обертів, яке тіло здійснює за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

$$[T] = 1 \text{ с}, \ [\nu] = 1/\text{с} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Кутове прискорення

Середнє кутове прискорення:

$$\vec{\beta}_{\text{сер}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Миттєве кутове прискорення (рис. 1.8):

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}.$$

Кутове прискорення характеризує швидкість зміни кутової швидкості обертання. Вектор $\vec{\beta}$ — псевдовектор, спрямований уздовж осі обертання. Якщо рух прискорений, напрямки $\vec{\omega}$ та $\vec{\beta}$ збігаються (рис. 1.8,*а*), якщо рух уповільнений, то напрямки $\vec{\omega}$ та $\vec{\beta}$ спрямовані по осі обертання назустріч один одному (рис. 1.8,*б*).

$$[\beta] = 1\ \text{рад/с}^2 = 1\ \text{рад} \cdot \text{с}^{-2}.$$

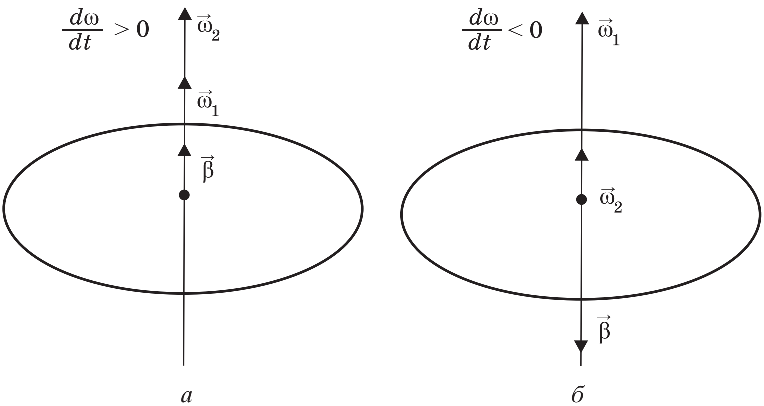


Рис. 1.8

Зв'язок між кутовою та лінійною швидкостями

Положення точки *M*, що рухається по колу (рис. 1.9), визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним із початку координат *O*, що міститься на осі початку обертання, в точку *M*.

У випадку, коли точки 1 та 2 нескінченно близькі одна до одної вектор лінійного переміщення:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}].$$

Модуль переміщення:

$$|d\vec{r}| = |d\vec{\varphi}| R,$$

де $d\varphi$ — модуль кутового переміщення (кут повороту); R — модуль вектора $\vec{R}$, ортогональний до осі обертання й проведений від неї до точки M:

$$R = r\sin\alpha.$$

Тоді

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\times\vec{r}] = [\vec{\omega}\times\vec{r}].$$

Лінійна швидкість точки M (рис. 1.9):

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\times\vec{r}].$$

Модуль лінійної швидкості:

$$|\vec{\upsilon}| = \omega r\sin\alpha = \omega R.$$

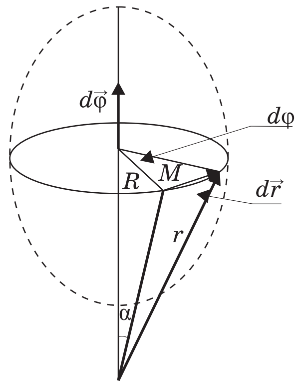


Рис. 1.9

Повне прискорення при криволінійному русі

Лінійне прискорення будь-якої точки M тіла, що обертається:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\times\vec{r}] = [\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}] + [\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\beta}\times\vec{r}] + [\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

При обертанні від $\vec{\beta}$ до $\vec{r}$ тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ спрямоване по дотичній (рис. 1.10); нормальне (доцентрове) прискорення спрямоване по R до центра (рис. 1.11).

Модуль тангенціального прискорення:

$$|\vec{a}_\tau| = |[\vec{\beta}\times\vec{r}]| = \beta r\sin\alpha = \beta R.$$

Модуль нормального прискорення:

$$|\vec{a}_n| = |[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}]| = \omega\upsilon\sin\alpha = \omega\upsilon\sin 90^\circ = \omega\upsilon = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

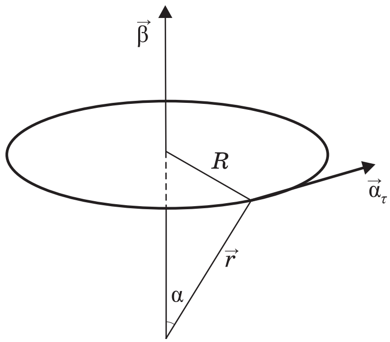


Рис. 1.10

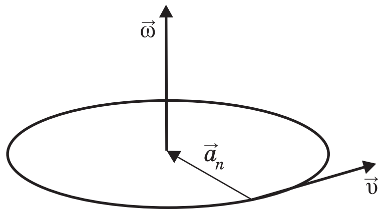


Рис. 1.11

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Що таке матеріальна точка? Абсолютно тверде тіло? Чому в механіці вводять такі моделі?
2. Що таке система відліку?
3. Що таке вектор переміщення? Чи завжди модуль вектора переміщення дорівнює відрізку шляху, що пройшла точка?
4. Який рух називають поступальним? Який обертальним?
5. Які існують способи задання руху?
6. Записати рівняння руху при векторному, координатному та природному способах задання руху.
7. Дати визначення вектора середньої та миттєвої швидкості, середнього та миттєвого прискорення при векторному способі завдання руху; які їх напрямки? Дати визначення швидкості та прискорення при координатному способі задання руху.
8. Що характеризує тангенціальне прискорення? Нормальне прискорення? Чому дорівнюють їхні модулі?
9. Чи можливий рух, коли відсутнє нормальне прискорення? Тангенціальне прискорення? Наведіть приклади.
10. Що таке кутова швидкість? Кутове прискорення? Як визначається їхній напрямок?
11. Пояснити зв’язок між лінійними та кутовими величинами.

Завдання для експрес-контролю

1. Середня та миттєва швидкості в загальному випадку мають різне значення. За яких умов вони можуть бути однакові?

2. Чи можлива ситуація, коли швидкість і прискорення мають однакові знаки? Протилежні знаки? Наведіть приклади та побудуйте графіки залежності швидкості від часу за цих умов.

3. Автомобіль рухається на захід. Чи може в цьому випадку прискорення бути напрямленим на схід? Якщо швидкість автомобіля зменшується, то може прискорення бути додатним (позитивним)?

4. Швидкість частинки нульова, чи може прискорення відрізнятись від нуля? Поясніть.

5. За яких умов при нульовому прискоренні частинки швидкість може відрізнятися від нуля? Поясніть.

6. Середня швидкість частинки за деякий інтервал часу дорівнює нулю. Що можна сказати відносно переміщення частинки за цей час?

7. Два автомобілі рухаються паралельно вздовж траси. В деякий момент часу швидкість автомобіля *A* стає більшою ніж швидкість автомобіля *B*. Чи означає це, що прискорення автомобіля *A* більше ніж автомобіля *B*?

8. Яблуко падає з дерева на землю. Нехтуючи опором повітря, оцініть збільшення швидкості яблука кожної секунди за час падіння. Як відносяться відстані, що пролетить яблуко за сусідні однакові проміжки часу?

9. Чи може об’єкт рухатись з прискоренням, якщо його швидкість стала величина? Поясніть.

10. Тіло рухається по колу. Нарисуйте та поясніть, як змінюється вектор швидкості та повного прискорення в таких випадках: а) швидкість — стала величина; б) рух сповільнений зі сталим тангенціальним прискоренням; в) рух прискорений зі сталим тангенціальним прискоренням.

11. Камінь кидають униз з деякої висоти зі швидкістю υ_0. В той самий момент, з тієї самої висоти з такою самою швидкістю кидають м’яч горизонтально. Яке з тіл матиме більшу швидкість, коли досягне землі?

12. У кінці дуги коливань (у крайньому положенні) швидкість маятника дорівнює нулю. Чому дорівнює прискорення маятника в цій точці?

13. Чому дорівнює кутова швидкість секундної стрілки годинника? Як вона буде напрямлена, якщо на годинник дивитись вертикально зверху?

14. Колесо обертається в площині *xy* проти годинникової стрілки. Вкажіть напрямок кутової швидкості. Який напрямок має кутове прискорення, коли кутова швидкість зменшується?

Приклади розв'язання задач

1. Радіус-вектор матеріальної точки змінюється залежно від часу за законом $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$. Визначити: 1) швидкість $\vec{\upsilon}$; 2) прискорення $\vec{a}$; 3) модуль швидкості в момент часу $t = 2$ с.

Розв'язання

Задано закон руху матеріальної точки:

$$\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}.$$

За цим законом необхідно визначити інші параметри руху — швидкість та прискорення. Це *пряма задача* кінематики. Знаходимо компоненти радіуса-вектора $\vec{r}(t)$:

$$x(t) = 4\,t^2,\ y(t) = 3\,t,\ z(t) = 2.$$

Вектори швидкості $\vec{\upsilon}$ і вектор прискорення $\vec{a}$ визначаються через відповідні похідні:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

У даній задачі

$$\vec{\upsilon} = 8t\vec{i} + 3\vec{j},\ \ \vec{a} = 8\vec{i}.$$

Модуль вектора швидкості:

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2},$$

тому що $\upsilon_z = 0$.

У момент часу $t = 2$ с модуль вектора швидкості

$$\upsilon = \sqrt{(8t)^2 + 3^2} = 16{,}3 \text{ м/с}.$$

2. Рівняння руху точки по прямій має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = 0{,}2$ м/с^3.

Знайти положення точки в моменти часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с; середню швидкість за час, що минув між цими моментами; миттєві швидкості в указані моменти часу, середнє прискорення за вказаний проміжок часу, миттєві прискорення в ці моменти часу.

Розв'язання

Запропонована задача є прикладом прямої задачі кінематики. Кінематичне рівняння руху надано в координатному вигляді $x = A +$

$+\ Bt + Ct^3$. Якщо ми маємо це рівняння, то можемо знайти різні фізичні величини, які характеризують рух матеріальної точки.

Положення точки, що рухається прямолінійно, у деякий момент часу визначається відстанню x точки від початку відліку. Щоб знайти цю відстань, треба у рівняння руху підставити замість часу t задане значення часу

$$x_1 = 4 + 2\cdot 2 + 0{,}2\cdot 2^3 = 9{,}6\ \text{м};$$
$$x_2 = 4 + 2\cdot 5 + 0{,}2\cdot 5^3 = 39\ \text{м}.$$

Модуль середньої швидкості за означенням дорівнює

$$<\upsilon> = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

де Δx — зміна відстані x за проміжок часу Δt.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 39 - 9{,}6 = 29{,}4\ \text{м};$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 2 = 3\ \text{с};$$
$$<\upsilon> = \frac{29{,}4}{3} = 9{,}8\ \text{м/с}.$$

Загальний вираз вектора миттєвої швидкості знайдемо, коли продиференціюємо за часом рівняння руху

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = (B + 3Ct^2)\,\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення сталих B та C, а також значення часу, матимемо:

$$\vec{\upsilon}_1 = (2 + 3\cdot 0{,}2\cdot 2^2)\,\vec{i}\ \text{м/с};$$
$$\vec{\upsilon}_2 = (2 + 3\cdot 0{,}2\cdot 5^2)\,\vec{i}\ \text{м/с}.$$

Модуль середнього прискорення за означенням дорівнює

$$<a> = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t},$$

де $\Delta\upsilon$ — зміна швидкості υ за час Δt.

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = 17 - 4{,}4 = 12{,}6\ \text{м/с},$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 2 = 3\ \text{с},$$

Загальний вираз для вектора миттєвого прискорення матимемо, коли від швидкості візьмемо диференціал за часом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{i}\,\frac{d\upsilon}{dt} = 6Ct\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення C та задані значення часу, матимемо

$$\vec{a}_1 = 6\cdot 0{,}2\cdot 2\vec{i} = 2{,}4\vec{i}\ \text{м/с}^2,$$

$$\vec{a}_2 = 6\cdot 0{,}2\cdot 5\vec{i} = 6\vec{i}\ \text{м/с}^2.$$

3. Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = 6t\vec{i} + 6\vec{j}$. Знайти закон руху матеріальної точки, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходиться в початку координат ($x = 0$, $y = 0$) та має швидкість $\upsilon_0 = 0$.

Розв'язання

За заданим параметром руху — прискоренням — треба визначити закон руху матеріальної точки. Це *обернена задача* кінематики.

Знаходимо компоненти прискорення $\vec{a}(t)$.

$$\vec{a} = 6t\vec{i} + 6\vec{j},$$

звідси $a_x = 6t$, $a_y = 6$, $a_z = 0$.

Вектор швидкості $\vec{\upsilon}(t)$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}.$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt};$$

$$d\upsilon_x = a_x\cdot dt = 6tdt, \text{ звідки } \upsilon_x = 6\int_0^t tdt = 3t^2 + C_1;$$

$$d\upsilon_y = a_y dt = 6dt, \text{ звідки } \upsilon_y = 6\int_0^t dt = 6t + C_2.$$

З урахуванням початкових умов ($\upsilon_x = 0$, $\upsilon_y = 0$ при $t = 0$) знаходимо значення довільних констант $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$.

Далі із системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 6t$$

знаходимо компоненти $x(t)$ та $y(t)$ радіуса-вектора $\vec{r}(t)$:

$$dx = 3t^2dt, \; x = 3\int_0^t t^2dt = t^3 + C_3;$$

$$dy = 6\int tdt = 3t^2 + C_4,$$

де C_3 і C_4 — довільні константи. З урахуванням початкових умов ($x = 0$, $y = 0$ при $t = 0$) знаходимо, що $C_3 = 0$ і $C_4 = 0$.

Закон руху має вигляд:

$$\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}.$$

4. Автомобіль рухається по закругленню шосе, що має радіус кривини $R = 50$ м. Рівняння руху автомобіля — $S = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Знайти швидкість автомобіля, його потенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Розв'язання

У даній задачі відома залежність шляху S від часу, тобто відомо кінематичне рівняння руху $S(t)$. Використовується природний спосіб визначення руху.

Перш за все знаходимо загальний вираз для швидкості автомобіля. Відомо, що

$$\vec{\upsilon} = \vec{\tau}\upsilon = \vec{\tau}\frac{ds}{dt},$$

де $\vec{\tau}$ — одиничний вектор, напрямлений по дотичній до траєкторії руху.

Взявши похідну за часом від заданого рівняння шляху S, матимемо

$$\upsilon = B + 2Ct.$$

Підставивши сюди значення сталих B і C, а також задане значення часу, знайдемо модуль швидкості

$$\upsilon = 10 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 5 = 5 \text{ м/с}.$$

Вектор швидкості, напрямлений по дотичній до траєкторії, в даний момент часу

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = 5\vec{\tau} \text{ м/с}.$$

Тепер знаходимо загальний вираз для тангенціального прискорення. З теорії відомо, що

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}.$$

Взявши похідну за часом від загального виразу швидкості і підставивши значення сталої C та часу, матимемо:

$$\vec{a}_\tau = 2C\vec{\tau} = -\vec{\tau} \text{ м/с}^2.$$

Отриманий вираз для тангенціального прискорення не містить часу. Це означає, що тангенціальне прискорення стале за величиною; вектор $\vec{a}_\tau$ — протилежний напрямку вектора швидкості, модуль цього вектора дорівнює $\vec{a}_\tau = 1$ м/с^2.

Модуль нормального прискорення знайдемо, підставивши в загальне рівняння його відомі значення швидкості та радіуси кривини траєкторії

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{5^2}{50} = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення буде геометричною сумою взаємно перпендикулярних тангенціального і нормального прискорень

$$a = \sqrt{a^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0,25} = 1,12 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора повного прискорення можна визначити, якщо знайти кут, утворений повним прискоренням з напрямом радіуса або з напрямком нормального прискорення

$$\cos(\widehat{a, a_n}) = \frac{a_n}{a} = \frac{0,5}{1,12} = 0,446,$$

$$(\widehat{a, a_n}) = 63°30'.$$

5. Матеріальна точка рухається згідно з рівняннями: $x = b_1 t + d_1 t^3$, $y = b_2 t + c_2 t^2$, $z = 0$, де $b_1 = 27$ м/с; $d_1 = -1$ м/с^3; $b_2 = 32$ м/с; $c_2 = -8$ м/с^2. Знайти тангенціальне, нормальне прискорення та радіус кривини траєкторії в момент часу $t_1 = 2$ с.

Розв'язання

За умовою задачі координата $z = 0$, тобто рух відбувається в площині xOy.

Тангенціальне і нормальне прискорення можна знайти, якщо відомі модулі та напрямки векторів $\vec{a}$ та $\vec{\upsilon}$ в заданий момент часу. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{\upsilon}$ можна знайти по їх проекціях на координатні осі. Проекції векторів $\vec{a}$ і $\vec{\upsilon}$ можна одержати послідовним диференціюванням $x(t)$ та $y(t)$:

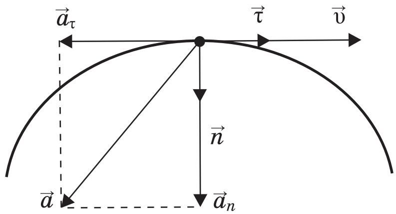


Рис. 1

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n},$$

де $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори (орти), спрямовані по дотичній і нормалі до траєкторії відповідно (рис. 1).

Проекції швидкості:

$$\upsilon_x = b_1 + 3d_1 t^2, \; \upsilon_y = b_2 + 2c_2 t.$$

Проекції прискорення:

$$a_x = 6d_1 t, \; a_y = 2c_2.$$

У момент часу $t = 2$ с:

$$\upsilon_x = 27 + 3 \cdot 4 \cdot (-1) = 15 \text{ м/с},$$
$$\upsilon_y = 32 - 32 = 0.$$

Отже, в момент часу $t = 2$ с вектор швидкості спрямовано по горизонталі $|\vec{\upsilon}| = \upsilon_x$.

Прискорення в момент часу $t = 2$ с дорівнюють:

$$a_x = 6 \cdot (-1) \cdot 2 = -12 \text{ м/с}^2,$$
$$a_y = 2 \cdot (-8) = -16 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $\upsilon_y = 0$, то $a_x = a_\tau, \; a_y = a_n$.

Таким чином $a_\tau = -12$ м/с^2, $a_n = -16$ м/с^2.

Радіус кривини r визначаємо з виразу для нормального прискорення:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow r = \frac{\upsilon^2}{a_n} = 14 \text{ м}.$$

6. Диск, радіус якого $R = 10$ см, обертається навколо осі, що проходить через його центр мас. Залежність кута повороту радіуса диска від часу задається рівнянням

$$\varphi = A + Bt^3,$$

де $A = 2$ рад, $B = 4$ рад/с^3. Для точок на ободі визначити: 1) нормальне прискорення a_n у момент часу $t = 2$ с; 2) тангенціальне прискорення для того ж самого моменту; 3) кут повороту φ_1, при якому кут між повним прискоренням та радіусом колеса $\alpha = 45°$.

Розв'язання

Рівняння руху диска

$$\varphi = A + Bt^3.$$

Знайдемо кутові швидкість та прискорення:

$$\omega = 3Bt^2, \; \beta = 6Bt.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \omega^2 R = (3Bt^2)^2 R = 9B^2 t^4 R.$$

Тангенціальне прискорення пов'язане з кутовим прискоренням:

$$a_\tau = \beta R = 6BtR.$$

Знайдемо час, при якому кут між повним прискоренням і радіусом колеса дорівнює $\alpha = 45°$. Із рис. 1 видно, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_\tau}{a_n}$. За умови задачі $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45° = 1$. Звідси випливає, що при $\alpha = 45°$ $a_n = a_\tau$, тоді $9B^2t^4R = 6BtR$, а $t^3 = \dfrac{2}{3B}$.

Кут повороту φ_1 при цьому дорівнюватиме:

$$\varphi_1 = A + B\frac{2}{3B} = A + \frac{2}{3}.$$

Підставимо числові значення та одержимо результат.

$$a_n = 9\cdot 16\cdot 10\cdot 10^{-2} \approx 230 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau = 6\cdot 4\cdot 2\cdot 10\cdot 10^{-2} = 4{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$\varphi_1 = 2 + \frac{2}{3} = 2{,}67 \text{ рад.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. Визначити модуль швидкості матеріальної точки в момент часу $t = 2$ с, якщо точка рухається за законом $\vec{r} = At^2\vec{i} + B\sin(\pi t)\vec{j}$, де $A = 5$ м/с^2, $B = 6$ м.

Відповідь: $\upsilon \approx 27{,}5$ м/с.

1.2. Матеріальна точка рухається за законом $\vec{r} = \alpha\sin(5t)\vec{i} + \beta\cos^2(5t)\vec{j}$, де $\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м. Визначити траєкторію руху матеріальної точки.

Відповідь: $y = 3 - \dfrac{3}{4}x^2$.

1.3. У момент часу $t = 0$ частинка вийшла із початку координат в додатному напрямку осі x. Швидкість частинки з часом змінюється за законом $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right)$, де $\vec{\upsilon}_0$ — вектор початкової швидкості, модуль якого $\upsilon_0 = 1$ м/с, $\tau = 50$ с. Знайти координату частинки в моменти часу 5, 10 і 20 с.

Відповідь: 4,75; 9; 16 м.

1.4. Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = \alpha t^2\vec{i} - \beta\vec{j}$, де $\alpha = 3$ м/с^4, $\beta = 3$ м/с^2. Визначити, на якій відстані від початку координат вона знаходитиметься в момент часу $t = 1$ с, якщо $\vec{\upsilon}_0 = 0$, $\vec{r} = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $r = 1{,}5$ м.

1.5. Потяг рухається рівномірно зі швидкістю $\upsilon_0 = 50$ м/с. Раптово на шляху виникає перешкода і машиніст вмикає гальма. З цього моменту швидкість поїзду змінюється за законом $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t^2$, де $\alpha =$ $= 1$ м/с^3. Знайти гальмувальний шлях потягу. Через який проміжок часу потяг зупиниться?

Відповідь: $x \approx 230$ м; $t \approx 7$ с.

1.6. Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 0{,}02$ м. Залежність шляху від часу задано рівнянням: $S = Ct^3$, де $C = 10^{-3}$ м/с^3. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення точки в момент часу, коли лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 0{,}3$ м/с.

Відповідь: $a_n = 4{,}5$ м/с^2; $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2.

1.7. Залежність від часу шляху, який пройшло тіло, що прямолінійно рухалося, визначається рівнянням: $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ де $C = 0{,}14$ м/с^2, $D = 0{,}01$ м/с^3. У який момент часу τ прискорення тіла a дорівнюватиме 1 м/с^2? Знайти середнє прискорення тіла за проміжок часу від t до $t = \tau$.

Відповідь: $\tau = 12$ с; $\langle a \rangle = 0{,}64$ м/с^3.

1.8. По дузі кола радіусом $R = 10$ м рухається точка. В деякий момент часу нормальне прискорення точки $a_n = 4{,}9$ м/с^2, вектори повного і нормального прискорення у цей час утворюють кут $\alpha = 60°$. Знайти лінійну швидкість υ і тангенціальне прискорення a_τ точки.

Відповідь: $\upsilon = 7$ м/с; $a_\tau = 8{,}5$ м/с^2.

1.9. Рух точки по кривій задано рівняннями: $x = A_1 t^3$ та $y = A_2 t$, де $A_1 = 1$ м/с^3, $A_2 = 2$ м/с. Знайти рівняння траєкторії точки, її швидкість υ і повне прискорення a в момент часу $t = 0{,}8$ с.

Відповідь: $y^3 - 8x = 0$; $a = 4{,}8$ м/с^2; $\upsilon = 2{,}77$ м/с.

1.10. Рух точки, що обертається по колу радіусом $R = 4$ м, задано рівнянням: $S = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ м; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2. Знайти тангенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: $a_\tau = 2$ м/с^2; $a_n = 1$ м/с^2; $a = 2{,}24$ м/с^2.

1.11. За заданим рівнянням руху ліфта $S = bt + at^2$ побудувати графік залежності його миттєвої швидкості від часу; $b = 14$ м/с, $a = 2$ м/с^2.

1.12. Залежність шляху, який пройшло тіло, від часу визначається рівнянням $S = at^4 - bt^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла. Побудувати графік залежності швидкості від часу за перші п'ять секунд руху, якщо $a = 0{,}25$ м/с^4, $b = 9$ м/с^2.

Відповідь: $\upsilon_{\min} = -29{,}3$ м/с.

1.13. За час τ швидкість тіла змінилась за законом $\upsilon = at^2 + bt$ ($0 \le t \le \tau$). Яка його середня швидкість за проміжок часу τ?

Відповідь: $\bar{\upsilon} = \dfrac{a\tau^2}{3} + \dfrac{b\tau}{2}$.

1.14. Рух матеріальної точки задано рівнянням: $x = At + Bt^2$, де $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Визначити момент часу, в який швидкість точки $\upsilon = 0$. Знайти координату та прискорення в цей момент. Побудувати графіки залежностей координати, шляху, швидкості та прискорення від часу для цього руху.

Відповідь: $t = 40$ с; $x = 80$ м; $a = -0{,}1$ м/с^2.

1.15. Залежність пройденого тілом шляху S від часу t визначається рівнянням $S = A - Bt + Ct^2$, де $A = 6$ м, $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2. Знайти середню швидкість і середнє прискорення тіла в проміжку часу від 1 с до 4 с. Побудувати графіки шляху, швидкості та прискорення для $0 \le t \le 5$ с через 1 с.

Відповідь: $\langle \upsilon \rangle = 7$ м/с; $\langle a \rangle = 4$ м/с^2.

1.16. Залежність радіуса-вектора частинки від часу описується законом $\vec{r} = (3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k})$ м. Знайти швидкість $\vec{\upsilon}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки, модуль швидкості υ в момент $t = 1$ с.

Відповідь: $\vec{\upsilon} = (6t\vec{i} + 2\vec{j})$ м/с; $\vec{a} = 6\vec{i}$ м/с^2; $\upsilon = 6{,}3$ м/с.

1.17. Компоненти швидкості частинки змінюються з часом відповідно до законів $\upsilon_x = \alpha\cos\omega t$, $\upsilon_y = \alpha\sin\omega t$, $\upsilon_z = 0$, де α і ω — константи. Знайти модулі швидкості υ і прискорення α, а також кут φ між векторами $\vec{\upsilon}$ і $\vec{a}$. На підставі одержаних результатів зробити висновок про характер руху частинки.

Відповідь: $\upsilon = \alpha$; $a = \alpha\omega$; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Частинка рухається рівномірно по колу радіусом $R = \frac{\alpha}{\omega}$.

1.18. Спостерігач, що стоїть на платформі, побачив, що перший вагон електропоїзда, який наближається до станції, пройшов повз нього за 4 с, а другий — за 5 с. Після цього передній край поїзда зупинився на відстані 75 м від спостерігача. Вважаючи рух поїзда рівносповільненим, визначити його прискорення.

Відповідь: $a = -0{,}25$ м/с^2.

1.19. Точка рухається по колу радіусом $R = 2$ см. Залежність шляху від часу задано рівнянням $S = ct^3$, де $c = 0{,}1$ см/с^3. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення в момент, коли лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 0{,}3$ м/с.

Відповідь: $a_n = 4{,}5$ м/с^2; $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2.

1.20. Шлях, який пройшла точка по колу радіусом $R = 2$ м, виражено рівнянням $S = At^2 + Bt$. Знайти нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки через $t = 0{,}5$ с від початку руху, якщо $A = 3$ м/с^2, $B = 1$ м/с.

Відповідь: 6 м/с^2; 8 м/с^2; 10 м/с^2.

1.21. Колесо, обертаючись рівносповільнено, під час гальмування зменшило свою швидкість за 1 хв з 300 об/хв до 180 об/хв. Знайти кутове прискорення колеса і кількість обертів, зроблених ним за цей час.

Відповідь: $\beta = -0{,}21$ рад/с^2; $N = 240$ об.

1.22. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\beta = 2$ рад/с^2. Через $t = 0{,}5$ с від початку руху повне прискорення колеса дорівнює $a = 13{,}6$ м/с^2. Знайти радіус колеса.

Відповідь: $R = 6{,}1$ м.

1.23. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3. Знайти радіус колеса, якщо відомо, що на кінець другої секунди руху нормальне прискорення точок, які лежать на ободі колеса, дорівнювало $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

Відповідь: $R = 1{,}2$ м.

1.24. Визначити у скільки разів тангенціальне прискорення точки, що лежить на ободі колеса, яке обертається, більше її нормального прискорення для того моменту, коли вектор повного прискорення цієї точки утворює кут 30° з вектором її лінійної швидкості.

Відповідь: 1,7.

1.25. Колесо радіусом $R = 0{,}1$ м обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^3$, де B = 2 рад/с і C = 1 рад/с^3. Для точок, що лежать на ободі колеса, знайти через 2 с від початку руху такі величини: 1) кутову швидкість; 2) лінійну швидкість; 3) кутове прискорення; 4) тангенціальне прискорення; 5) нормальне прискорення.

Відповідь: 14 с$^{-1}$; 1,4 м/с; 12 с$^{-2}$; 1,2 м/с^2; 19,6 м/с^2.

1.26. Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут φ його обертання змінюється з часом згідно з рівнянням: $\varphi = Bt^2$, де B = = 0,20 рад/с^2. Знайти повне прискорення точки A на ободі колеса до кінця другої секунди, якщо лінійна швидкість точки A в цей момент $\upsilon = 0{,}65$ м/с.

Відповідь: a = 0,7 м/с^2.

1.27. Тверде тіло обертається навколо осі згідно з рівнянням: $\varphi = At - Bt^3$, де A = 3 рад/с, B = 1 рад/с^3.

Знайти:

а) середнє значення кутової швидкості та кутового прискорення за проміжок часу від t = 0 до зупинки;

б) кутове прискорення в момент зупинки тіла.

Відповідь: а) $<\omega> = 2$ рад/с, $<\beta>$ = 3 рад/с; б) β = 6 рад/с^2.

1.28. Тверде тіло починає обертатись навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = At$, де $A = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через який час після початку обертання кут між векторами повного прискорення будь-якої точки тіла та його швидкістю складатиме 60°?

Відповідь: t = 5,56 с.

1.29. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутова швидкість залежить від кута повороту φ згідно з рівнянням $\omega = \omega_0 - A\varphi$, де ω та A — додатні сталі. В момент часу $t = 0$, кут $\varphi = 0$. Знайти залежність від часу: а) кута повороту; б) кутової швидкості.

Відповідь: а) $\varphi = (1 - e^{-At}) \cdot \omega_0 / A$; б) $\omega = \omega_0 e^{-At}$.

1.30. Тверде тіло рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с навколо горизонтальної осі OO'. У момент часу t = 0 вісь OO' почала обертатися навколо вертикалі з постійним кутовим прискоренням $\beta_0 = 0,2$ рад/с^2. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення тіла через t = 7 с.

Відповідь: $\omega = 1,48$ рад/с; $\beta = 0,73$ рад/с^2.

1.31. Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 \cos\varphi$, де $\vec{\beta}_0$ — сталий вектор, φ — кут повороту від початку обертання. Знайти кутову швидкість тіла як функцію кута φ. Побудувати графік цієї залежності.

Відповідь: $\omega_z = \pm\sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}$.

1.32. Тверде тіло обертається з кутовою швидкістю згідно з рівнянням $\vec{\omega} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$, де A = 5 рад/с^2, B = 0,6 рад/с^3, $\vec{i}, \vec{j}$ — орти осей x та y. Знайти модулі кутової швидкості та кутового прискорення в момент часу t = 10 с.

Відповідь: $\omega = 78$ рад/с; $\beta = 13$ рад/с^2 .

1.33. Куля, радіус якої R = 10 см, котиться без ковзання по горизонтальній площині так, що її центр рухається з постійним прискоренням a = 2 см/с^2. Через t = 2 с, після початку руху її положення відповідає рис. 2. Знайти: а) швидкість точок A, B та O; б) прискорення цих точок.

Відповідь: а) $\upsilon_A = 8$ см/с, $\upsilon_B = 5,65$ см/с, $\upsilon_O = 0$;

б) a_A = 4,3 см/с^2; a_B = 2,04 см/с^2; a_O = 1,6 см/с^2.

1.34. Циліндр котиться без ковзання по горизонтальній площині. Радіус циліндра дорівнює r. Знайти радіуси кривини траєкторії точок A та B (рис. 2), якщо r = 1 м.

Відповідь: R_A = 4 м; R_B = 2,82 м.

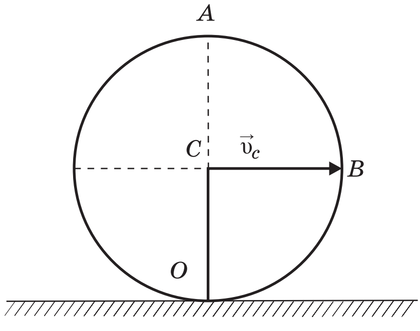


Рис. 2

1.35. Циліндр котиться без ковзання із швидкістю $\upsilon = 2$ м/с (рис. 3). Знайти швидкості точок A, B та C, виразити їх через орти координатних осей.

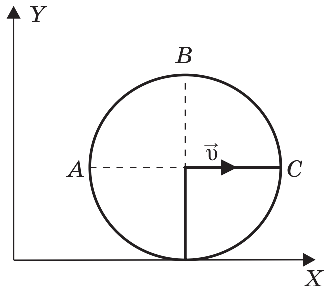


Рис. 3

Відповідь:
$\upsilon_A = 2\sqrt{2}$ м/с, $\upsilon_B = 4$ м/с, $\upsilon_C = 2\sqrt{2}$ м/с;

$\vec{\upsilon}_A = \upsilon(\vec{i} + \vec{j})$, $\upsilon_B = 2\upsilon\vec{i}$, $\vec{\upsilon}_C = \upsilon(\vec{i} - \vec{j})$.

2. ДИНАМІКА

2.1. Закони динаміки матеріальної точки

Динаміка вивчає механічній рух тіл у зв'язку з тими причинами (взаємодіями між тілами), які обумовлюють той чи інший характер руху. В її основі лежить система законів Ньютона. Ці закони жодним чином не можна довести. Люди підгледіли їх у природі внаслідок тисячорічного досвіду та чисельних дослідів, починаючи з Галілея й до наших днів. Величезна кількість експериментів, поставлених спеціально для перевірки цієї системи законів, жодного разу не дала негативного результату. Близькими до установлення законів руху були: Галілей, Гюйгенс, Гук, але тільки Ньютон зміг чітко сформулювати їх як систему фундаментальних законів.

Перший закон Ньютона

Будь-яке тіло (частинка) зберігає свій стан спокою або прямолінійного рівномірного руху доти, доки взаємодія з іншими матеріальними об'єктами (тілами, полями) не змусить його змінити цей стан.

Цей закон стверджує, що для підтримання спокою або рівномірного й прямолінійного руху тіло не потребує жодних зовнішніх впливів, що стан спокою й рівномірного прямолінійного руху — динамічно еквівалентні.

Тіло, яке не зазнає ніяких зовнішніх впливів, називають *вільним,* а рух такого тіла — *вільним рухом* або рухом за інерцією.

Властивість тіл зберігати свій стан руху називають *інертністю*. Системи відліку, в яких вільні тіла рухаються за інерцією, називають *інерціальними*, а перший закон Ньютона іноді називають *законом інерції*. Будь-яка система відліку, що рухається відносно деякої інерціальної системи відліку прямолінійно та рівномірно, також буде інерціальною.

Суть першого закону Ньютона полягає у двох твердженнях: по-перше, всім тілам властива інертність і, по-друге, існують інерціальні системи відліку.

Як свідчать досліди, швидкість тіла не можна змінити миттєво. Тіло протидіє спробі змінити стан його руху. Ця властивість тіл називається *інертністю*.

Маса тіла

Маса — міра інертності, міра гравітаційних властивостей тіла та міра енергії тіла ($E = mc^2$). Визначити масу тіла можна методом порівняння з еталоном маси при взаємодії тіл. У механіці Ньютона маса є величиною:

• скалярною,
• додатною ($m > 0$),
• адитивною ($m = \Sigma m_i$),
• сталою (m = const — закон збереження мас).

$[m]$ = 1 кг.

Сила

Сила — векторна величина, яка характеризує міру взаємодії між тілами або тілом і полем. Сила повністю визначена, якщо задані її модуль (величина), напрямок дії в просторі та точка прикладання. Пряма, вздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*.

Взаємодія, яка змінює стан механічного руху або деформує тіло, може мати різну природу та здійснюватися як при безпосередньому контакті тіл (тертя, тиск одного тіла на інше), так і між віддаленими тілами (притягання планет до Сонця, взаємодія заряджених тіл).

Одночасно дія на матеріальну точку (тіло) декількох сил еквівалентна дії однієї сили, яка є геометричною сумою всіх сил і називається *рівнодіючою силою*:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i.$$

$[F]$ = 1 Н (ньютон).

Імпульс

Стан руху матеріальної точки в інерціальній системі відліку характеризується двома фізичними величинами: швидкістю ($\vec{\upsilon}$) та здатністю зберігати цю швидкість — інертністю, мірою якої є маса (m). Але зручніше кількісно характеризувати рух однією більш універсальною величиною, яка називається *кількістю руху* або *імпульсом* $\vec{p}$:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{\upsilon}_i,$$

де m_i — маса матеріальної точки; $\vec{\upsilon}_i$ — її швидкість.

Імпульс — векторна величина за визначенням. Його напрямок збігається з напрямком вектора швидкості $\vec{\upsilon}$, а його модуль у m разів більший за модуль швидкості.

Імпульс системи, яка складається із n матеріальних точок, дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх матеріальних точок, що входять до системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

У зв'язку з тим, що маса адитивна і не залежить від швидкості руху,

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_C,$$

де $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — маса цієї системи; υ_C — швидкість центра мас (центра інерції) системи.

$[p] = 1$ кг·м/с.

Другий закон Ньютона

Швидкість, з якою змінюється імпульс матеріальної точки (тіла) дорівнює силі $\vec{F}$, що діє на цю точку (тіло) з боку інших тіл чи полів.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{або} \quad \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Отже, швидкість зміни імпульсу матеріальної точки може бути мірою її взаємодії з іншими тілами.

Якщо на матеріальну точку(тіло) на відрізку часу Δt діє сила $\vec{F}$, то це призводить до зміни імпульсу:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t.$$

Величина $\vec{F}\Delta t$ називається *імпульсом сили.*

Якщо на інтервалі часу $\Delta t = t_2 - t_1$ на матеріальну точку діє змінна за часом сила $\vec{F}(t)$, то її імпульс змінюється за цей час на $\Delta\vec{p}$:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{\text{сер}} \cdot \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt,$$

де $\vec{F}_{\text{сер}} = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt}{t_2 - t_1}.$

У зв'язку з тим, що маса не залежить від швидкості й від часу, другий закон Ньютона можна записати так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} = \vec{F}, \text{ або } \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}.$$

Відповідне формулювання *другого закону Ньютона:*
прискорення вільної матеріальної точки ($\vec{a}$) є результатом дії на неї зовнішньої сили $\vec{F}$ і пропорційне цій силі та збігається з нею за напрямком.

Коефіцієнт пропорційності є величина, зворотна масі.

Принцип незалежності дії сил

У механіці виконується ***принцип незалежності дії сил:*** *якщо на матеріальну точку діють одночасно декілька сил, то кожна з цих сил за другим законом Ньютона надає матеріальній точці таке прискорення, як і за відсутності дії інших сил.*

Тобто

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i,$$

де $\vec{a}_i = \dfrac{\vec{F}_i}{m}$.

На рис. 2.1 діюча сила $\vec{F}$ має дві компоненти: тангенціальну силу $\vec{F}_\tau$, що спрямована по дотичній до траєкторії, та нормальну силу $\vec{F}_n$, що спрямована по нормалі до траєкторії і напрямлена до центра траєкторії.

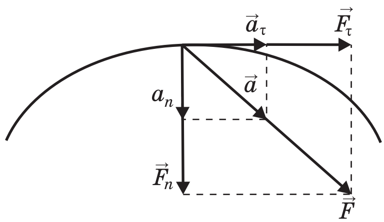


Рис. 2.1

У зв'язку з тим, що $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, а $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, а також $\upsilon = \omega R$, можна записати:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt};$$

$$F_n = ma_n = m\frac{\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Тобто, якщо на матеріальну точку діють одночасно декілька сил, то згідно з принципом незалежності дії сил під $\vec{F}$ у другому законі Ньютона розуміють рівнодіючу силу.

Рівняння руху

Другий закон Ньютона, записаний у вигляді диференціального рівняння, є *рівнянням руху*:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Це диференціальне рівняння другого порядку. Воно описує рух у даній точці простору і в даний момент часу.

У проекціях на декартові осі координат це рівняння руху має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x;\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y;\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

або
$$m\ddot{x} = F_x;\ m\ddot{y} = F_y;\ m\ddot{z} = F_z,$$

де x, y, z — координати точки, що рухається.

Третій закон Ньютона

Сили, з якими діють одне на одне тіла, що взаємодіють, дорівнюють одна одній за величиною, протилежні за напрямком та діють уздовж прямої, яка з'єднує ці тіла:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

тобто всякій дії є протидія.

Третій закон Ньютона стверджує, що сили виникають парами і є силами однієї природи. Вони прикладені до різних матеріальних точок (тіл), тому не врівноважують одна одну (рис. 2.2):

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{N}\right|,$$

де $\vec{P}$ — вага тіла (або сила нормального тиску $\vec{F}_{\text{н.т}}$), прикладена до опори; $\vec{N}$ — сила нормальної реакції опори.

Із третього закону Ньютона випливає, що в будь-якій механічній системі геометрична сума всіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik} = 0.$$

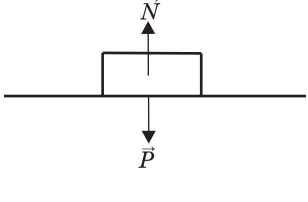


Рис. 2.2

2.2. Перетворення Галілея. Принцип відносності Галілея — Ньютона

Перетворення Галілея — це правила зміни координат та часу при переході від однієї інерціальної системі відліку $K(x, y, z, t)$ до іншої, також інерціальної системи відліку $K'(x', y', z', t')$, яка рухається відносно системи K рівномірно та прямолінійно зі швидкістю V. Ці перетворення базуються на двох аксіомах. *Перша* стверджує, що хід часу (відповідно й проміжок часу між двома будь-якими подіями) однаковий в усіх інерційних системах відліку. *Друга* стверджує те, що розміри тіла не залежать від швидкості його руху відносно системи відліку.

Якщо в початковий момент часу ($t = t' = 0$) початку координат O і O' збігалися й осі координат попарно паралельні (рис. 2.3), координати точки M у системах відліку K' і K пов'язані співвідношеннями:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t;$$
$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t;$$
$$t = t',$$

або

$$x' = x - V_x t; \qquad y' = y - V_y t; \qquad z' = z - V_z t;$$
$$t = t',$$
$$x = x' + V_x t; \qquad y = y' + V_y t; \qquad z = z' + V_z t,$$

де V_x, V_y, V_z — проекції швидкості системи K' на осі координат системи K.

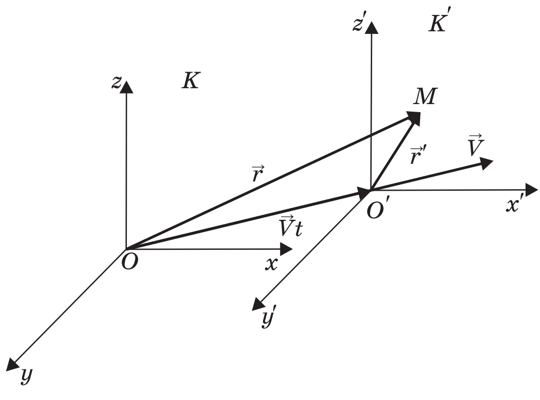


Рис. 2.3

Наслідки з перетворень Галілея

1. Із перетворення координат та часу випливає ***закон перетворення швидкостей***:

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V},$$

де $\vec{\upsilon}'$ — швидкість точки в системі K';

$\vec{\upsilon}$ — швидкість точки в системі K;

$\vec{V}$ — швидкість системи K' відносно системи K.

Проекції швидкостей на відповідні осі координат пов'язані співвідношеннями:

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - V_x; \quad \upsilon'_y = \upsilon_y - V_y; \quad \upsilon'_z = \upsilon_z - V_z.$$

2. Оскільки V = const, то прискорення точки M у системі K' — $\vec{a}'$ і в системі K — $\vec{a}$ дорівнюють одне одному:

$$\vec{a}' = \vec{a}.$$

Прискорення матеріальної точки не залежить від вибору інерціальної системи відліку. Інакше кажучи, прискорення *інваріантне* відносно перетворення Галілея.

3. Із аксіоми про абсолютність відрізків довжини випливає, що *відстань між двома точками M_1 та M_2 не залежить від вибору системи відліку*, тобто інваріантна відносно перетворень Галілея:

$$\vec{r}\,'_{21} = \vec{r}_{21},$$

де $\vec{r}\,'_{21}$ та $\vec{r}_{21}$ — вектор, проведений із точки M_2 у точку M_1 в системі K' та K відповідно.

4. Із перетворення Галілея випливає інваріантність швидкості відносного руху будь-яких двох точок M_1 і M_2:

$$\vec{\upsilon}\,'_2 - \vec{\upsilon}\,'_1 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1.$$

5. Взаємне розташування та швидкість відносного руху будь-яких матеріальних точок не залежить від вибору інерціальної системи відліку. Оскільки взаємодія двох матеріальних точок визначається їх взаємним розташуванням та взаємною швидкістю, які інваріантні відносно перетворень Галілея, то *інваріантними будуть і сили, що діють на матеріальну точку*:

$$\vec{F}' = \vec{F}.$$

6. *Рівняння руху*, які виражають другий закон Ньютона, *інваріантні відносно перетворень Галілея*, тобто не змінюють свій вигляд при перетвореннях координат та часу.

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{ (у системі } K) \ \vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki},$$

$$m'\vec{a}' = \vec{F}' \text{ (у системі } K') \ \vec{F}'_{ik} = -\vec{F}'_{ki},$$

де $m' = m$ — маса точки, що є однаковою в усіх системах відліку.

Таким чином, закони механіки однакові в усіх інерціальних системах відліку, тобто *в різних інерціальних системах відліку всі механічні процеси за однакових умов відбуваються однаково*. Це і є механічний принцип відносності, або принцип відносності Галілея — Ньютона. Він свідчить про те, що в механіці всі інерціальні системи рівноправні, немає жодної системи відліку, відносно якої рух можна вважати абсолютним.

2.3. Сили в механіці

У класичній механіці мають справу з гравітаційними та електромагнітними силами, які є фундаментальними, а також з пружними силами та силами тертя, які за своєю природою можуть бути віднесені до електромагнітних.

Фундаментальні сили не можна звести до інших простіших.

Гравітаційні сили. Закон всесвітнього тяжіння

Між будь-якими матеріальними точками (тілами) діють сили взаємного притягання, які називаються силами тяжіння, або *гравітаційними силами*. Використавши закони руху планет (закони Кеплера) та основні закони динаміки Ньютон відкрив загальний ***закон всесвітнього тяжіння: між будь-якими двома матеріальними точками діє сила взаємного притягання, прямо пропорційна масам цих точок і обернено пропорційна квадрату відстані між ними*** (рис. 2.4)

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

де m_1 і m_2 — маси точок; $\vec{r}$ — радіус-вектор, проведений із точки 1 в точку 2; $\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ — одиничний вектор; $|\vec{r}|$ — відстань між точками, що взаємодіють.

Сили $\vec{F}_{12}$ та $\vec{F}_{21}$ дорівнюють одна одній за модулем, протилежні за напрямком та прикладені до різних тіл

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

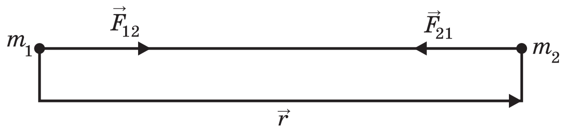


Рис. 2.4

Коефіцієнт пропорційності G називають *гравітаційною сталою*. Експериментально встановлено, що:

$$G = 6{,}6732131 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Гравітаційна взаємодія — це найслабкіша взаємодія з усіх типів взаємодій, але вона є визначальною в русі великих електромагнітних мас (планет та їх супутників, планетних систем, зірок, тощо).

Пружні сили. Закон Гука

У природі не існує абсолютно твердих тіл, тому що всі реальні тіла під дією сил змінюють свою форму та розміри, тобто *деформуються*.

Сили пружності, що виникають внаслідок деформації твердого тіла, підпорядковуються ***закону Гука***: *при малих деформаціях величина деформуючої сили прямо пропорційна величині деформації* (рис. 2.5):

$$F = -kx,$$

тут $x = l - l_0 = \Delta l$ — величина деформації; k — коефіцієнт пружності, або жорсткість.

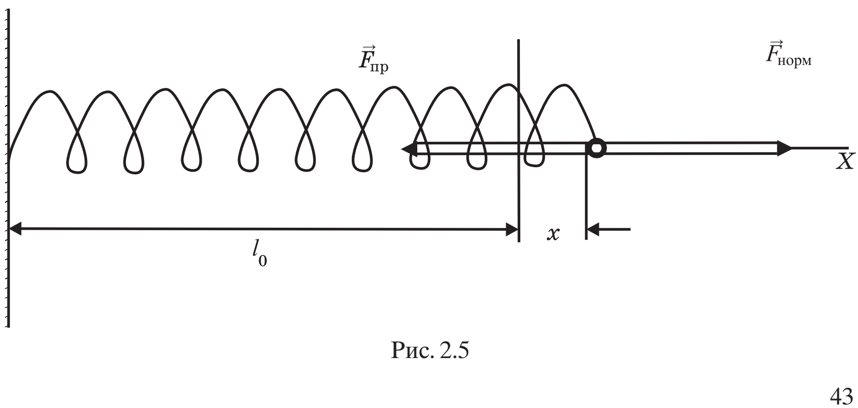


Рис. 2.5

Експериментально встановлено, що відносне подовження при пружних деформаціях прямо пропорційне нормальній складовій сили, що припадає на одиницю площі перерізу тіла:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \frac{F}{S},$$

де α — коефіцієнт, що характеризує пружні властивості матеріалу; S — площа перерізу тіла; $\frac{F}{S}$ — нормальна (механічна) напруга. Виявилося, що зручніше користуватися величиною, оберненою α:

$$E = \frac{1}{\alpha},$$

де E — модуль пружності першого роду (модуль Юнга).

Механічна напруга

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

тоді

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

а

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Звідси випливає, що модуль Юнга дорівнює такій механічній напрузі, при якій відносне подовження дорівнювало б одиниці.

$$\frac{\Delta l}{l_0} = 1, \text{ або } \Delta l = l_0.$$

Тобто довжина досліджуваного зразка збільшилася би вдвічі.

Сили тертя

Будь-яке тіло, що рухається по горизонтальній поверхні іншого тіла за відсутності дії на нього інших тіл, згодом уповільнює свій рух і зрештою зупиняється. Це можна пояснити існуванням *сили тертя*, яка перешкоджає ковзанню тіл, що стикаються одне відносно одного.

Тертя, яке виникає при відносному переміщенні тіл, що стикаються, має назву *зовнішнього* (або сухого) *тертя*. Тертя, що виникає між частинами того самого суцільного тіла (наприклад, рідини чи газу), має назву *внутрішнього тертя*.

Стосовно зовнішнього тертя розрізняють тертя ковзання та тертя кочення. У зв'язку з тим, що у випадку сухого тертя сила тертя виникає не тільки при ковзанні однієї поверхні по іншій, а й при намаганні викликати таке ковзання, можна говорити й про силу тертя спокою.

Сила тертя спокою змінюється від нуля до максимального значення, що дорівнює силі тертя ковзання. Якщо тверде тіло котиться по поверхні без просковзування, то в точці дотику до поверхні швидкість дорівнює нулю, а сила тертя спокою напрямлена протилежно до напряму можливого переміщення.

Максимальна сила тертя спокою (а також сила тертя ковзання) не залежить від площі зіткнення тіл, що труться, а виявляється пропорційною величині сили нормального тиску $F_{\text{н.т}}$, яка притискує поверхні тіл одна до одної. Ця сила прикладена до поверхні опори і за третім законом Ньютона дорівнює силі нормальної реакції опори $\vec{N}$, що діє на тіло з боку опори.

$$F_{\text{тер}} \sim F_{\text{н.т}}, \qquad \left|\vec{F}_{\text{н.т}}\right| = \left|\vec{N}\right|, \qquad F_{\text{тер}} \sim N, \qquad \text{або } F_{\text{тер}} = \mu N,$$

де μ — коефіцієнт тертя, який залежить від природи та стану поверхонь, що труться.

Якщо напрямок сили тяги збігається з напрямком переміщення:

$$N = mg,$$
$$\text{а } F_{\text{тер}} = \mu mg.$$

Якщо сила тяги $F_{\text{т}}$ складає з напрямком переміщення кут α:

$$N = mg \mp F_T \sin\alpha,$$
$$\text{а } F_{\text{тер}} = \mu\left(mg \mp F_T \sin\alpha\right).$$

Якщо тіло рухається вздовж похилої площини:

$$N = mg\cos\alpha, \text{ а } F_{\text{тер}} = \mu mg\cos\alpha.$$

Коефіцієнт тертя при цьому $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

Тертя спокою проявляється в момент, коли тіло, що перебуває у стані спокою, починає рухатися. Коефіцієнт тертя спокою μ_0 значно більший за коефіцієнт тертя ковзання ($\mu_0 >> \mu$).

Тертя кочення проявляється у момент, коли тіло котиться по опорі, воно значно менше тертя ковзання та підпорядковується закону:

$$F_{\text{тер}} = \mu' \frac{N}{r},$$

де r — радіус тіла, що скочується; μ' — коефіцієнт тертя кочення, який менший за коефіцієнт тертя сковзання ($\mu' << \mu$).

2.4. Рух центра мас

Центр мас системи

Центр мас (центр інерції) системи матеріальних точок (рис. 2.6) — це точка, положення якої задається радіусом-вектором $\vec{r}$ і визначається за формулою:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_{21} + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i,$$

де m_i, r_i, M — маси, радіуси-вектори матеріальних точок та маса всієї системи відповідно.

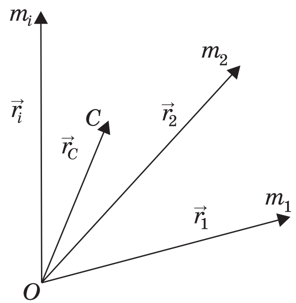


Рис. 2.6

Для суцільного тіла, тобто для тіла з неперервним розподілом мас, центр мас:

$$\vec{r}_C = \frac{\int \rho\vec{r}dV}{M},$$

де ρ — густина; $\vec{r}$ — радіус-вектор елементарного об'єму dV; M — маса тіла.

Координати центра мас:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Для тіла з неперервним розподілом маси координати центра мас:

$$x_C = \frac{\int \rho x dV}{M}, \quad y_C = \frac{\int \rho y dV}{M}, \quad z_C = \frac{\int \rho z dV}{M}.$$

Рівняння руху центра мас

Швидкість центра мас:

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{\upsilon}_i}{M}.$$

Звідки випливає:

$$\sum m_i \vec{\upsilon}_i = M\vec{\upsilon}_C, \text{ або } \vec{p}_C = M\vec{\upsilon}_C.$$

Імпульс системи матеріальних точок дорівнює добутку маси тіла на швидкість центра мас.

Із другого та третього законів Ньютона випливає, що перша похідна по часу t від імпульсу $\vec{p}_C$ механічної системи дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему.

$$\frac{d\vec{p}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Це рівняння відбиває закон зміни імпульсу системи.

Закон *руху центра мас механічної системи має вигляд*:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{\upsilon}_C) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{зовн}}$$

або

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{зовн}},$$

де $\vec{a}_C = \frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt}$ — *прискорення центра мас*.

Таким чином, центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діють зовнішні сили.

2.5. Закон збереження імпульсу

Механічна система

Сукупність матеріальних точок (тіл), що розглядається як єдине ціле, має назву *механічної системи*. Сили, що є наслідком взаємодії матеріальних точок механічної системи, — *внутрішні*. Сили, з якими зовнішні тіла діють на матеріальні точки механічної системи, — *зовнішні*.

Механічна система тіл, на яку не діють зовнішні сили, — *замкнена система*.

У системі тіл, що взаємодіють, координати швидкості та прискорення тіл постійно змінюються. Але існують три фізичні величини, які в замкненій системі завжди лишаються незмінними. Такими величинами є: енергія, імпульс та момент імпульсу. Закони збереження цих величин обумовлені основними властивостями простору та часу.

Закон збереження імпульсу та однорідність простору

Розглянемо довільну систему n матеріальних точок, які взаємодіють між собою та з тілами, що не входять до цієї системи. Нехай маса і швидкість матеріальних точок відповідно дорівнюють $m_1, m_2, \ldots, m_n$; $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, …, $\vec{\upsilon}_n$, а $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, …, $\vec{F}_n'$ — рівнодіюча всіх внутрішніх сил, що діють на кожну із точок та $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_n$ — рівнодіюча зовнішніх сил.

Другий закон Ньютона для кожної з матеріальних точок механічної системи має вигляд:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\upsilon}_1) = \vec{F}_1' + \vec{F}_1$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{\upsilon}_2) = \vec{F}_2' + \vec{F}_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dt}(m_n\vec{\upsilon}_n) = \vec{F}_n' + \vec{F}_n$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_n\vec{\upsilon}_n) = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \ldots + \vec{F}_n' + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n.$$

За третім законом Ньютона геометрична сума всіх внутрішніх сил механічної системи дорівнює нулю. Тоді

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_n\vec{\upsilon}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

або

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{зовн}},$$

тобто імпульс системи змінюється лише внаслідок зміни зовнішніх сил.

Якщо система замкнена

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{зовн}} = 0, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

звідси випливає:

$$\vec{p} = \text{const}.$$

Це твердження складає зміст закону збереження імпульсу.

Імпульс замкненої системи матеріальних точок (тіл) у процесі руху не змінюється. Він може лише *перерозподілятися*.

Зауважимо, що імпульс залишається незмінним і для незамкненої системи за умови, що зовнішні сили $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{зовн}} = 0.$ У випадку, коли сума зовнішніх сил не дорівнює нулю, але проекція цієї суми на деякий напрямок дорівнює нулю, зберігається проекція імпульсу на цей напрямок. Закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору. Вона проявляється в тому, що фізичні властивості замкненої системи та закону її руху не залежать від вибору положення початку координат системи відліку.

2.6. Рух тіла змінної маси. Реактивний рух

У механіці Ньютона термін «змінна маса» запроваджується у випадках, коли мова йде про повільний рух тіла, маса якого змінюється лише внаслідок приєднання до тіла або відокремлення від нього частинок речовини, що складає це тіло. Наприклад, маса поливальної машини зменшується за рахунок витікання води; маса ракети зменшується за рахунок витікання газів, що утворюються при згорянні палива.

У цих випадках говорять про рух зі *змінною масою.* Рівняння руху тіл зі змінною масою не містять у собі нічого нового порівняно з законами Ньютона, а є їх наслідками.

Рівняння Мещерського

Одержимо рівняння руху матеріальної точки на прикладі руху ракети.

Принцип дії ракети дуже простий. Ракета з великою швидкістю викидає речовину (гази). Викинуті гази з тією самою, але протилежно напрямленою силою, в свою чергу, діють на ракету й надають їй прискорення, протилежно спрямоване. Якщо зовнішні сили не діють, то ракета разом з викинутою речовиною складає замкнену систему. Імпульс такої системи з часом не змінюється. Доцільно узагальнити задачу, припустивши, що на ракету діють зовнішні сили. Такими силами можуть бути сила земного тяжіння, гравітаційне притягання Сонця та планет, а також сила опору середовища, в якому рухається ракета.

Нехай M — маса ракети в будь-який момент часу t, а $\vec{\upsilon}$ — її швидкість у той же момент. Імпульс ракети в цей час дорівнюватиме:

$$\vec{p} = M\vec{\upsilon}.$$

Від тіла за час dt відокремлюється частинка масою dM, яка має швидкість $\vec{\upsilon}_1$ відносно Землі. Ракета в момент часу $(t + dt)$ має імпульс:

$$\vec{p}_2 = (M - dM)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}).$$

Зміна імпульсу всієї системи за час dt:

$$d\vec{p} = (M - dM)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) - M\vec{\upsilon} + dM\vec{\upsilon}_1$$

або

$$d\vec{p} = Md\vec{\upsilon} + dM(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}).$$

За другим законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \text{ або } M\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dM}{dt}(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_1),$$

де $\vec{F}$ — геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на ракету.

Якщо $\vec{u}$ — відносна швидкість відокремленої частинки, то $\vec{\upsilon} + \vec{u} = \vec{\upsilon}_1$, або $\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_1 = -\vec{u}$, тому

$$M\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dM}{dt}.$$

Записане рівняння носить назву *рівняння Мещерського*. Це основне рівняння руху тіла змінної маси.

Реактивна сила $\frac{dM}{dt}\vec{u}$ — сила, що діє на ракету з боку викинутого струменя газу.

Реактивна сила напрямлена протилежно швидкості, з якою відокремлені частини відділяються від тіла.

Формула Ціолковського

Якщо на ракету не діють ніякі зовнішні сили ($\vec{F}^{\text{зовн}} = 0$), рівняння її руху набуває вигляду:

$$M\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{u}\frac{dM}{dt}, \quad \text{або} \quad Md\vec{\upsilon} = \vec{u}dM.$$

У скалярній формі це буде проекція на напрямок руху ракети: $Md\upsilon = -udM$.

Після інтегрування цього рівняння за умови, що при $t = 0$, $\upsilon = 0$, $M = M_0$, маємо:

$$\upsilon = u\ln\frac{M_0}{M}, \text{ або } \frac{M_0}{M} = \exp\left(\frac{\upsilon}{u}\right).$$

Це *формула Ціолковського*. Вона дає можливість розрахувати запас палива, необхідний для того, щоб ракета досягала заданої швидкості.

2.7. Рух у неінерціальних системах відліку

Закони механіки Ньютона виконуються лише в інерціальних системах відліку. Перехід від однієї інерціальної системи до іншої здійснюється за допомогою правил перетворень Галілея. Відстань між точками в просторі та інтервали часу інваріантні відносно цих перетворень. Сила також є функцією інваріантних величин: різниці координат і різниці швидкостей матеріальних точок (тіл), що взаємодіють. У зв'язку з тим, що прискорення інваріантне при переході від однієї інерціальної системи до іншої, а маса є величиною сталою, рівняння руху, що виражає другий закон Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \text{ або } m\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{F},$$

інваріантне відносно перетворень Галілея.

На практиці нерідко доводиться мати справу з *неінерціальними системами* відліку, тобто системами, які рухаються прискорено відносно інерціальних систем відліку.

Перетворення кінематичних величин при переході до неінерціальної системи відліку

Встановимо правила перетворення швидкостей та прискорень при переході від інерціальної системи відліку до будь-якої неінерціальної системи відліку. Вважатимемо інерціальну систему відліку K нерухомою. Рух точки чи тіла спостерігається в системах K і K' одночасно. Рух у інерціальній системі K умовно називають *абсолютним*, у неінерціальній — відносним, а рух системи K' відносно K — *переносним.*

Положення матеріальної точки M (рис. 2.7) у нерухомій системі відліку K задається радіусом-вектором $\vec{R}$, у рухомій K' — радіусом-вектором $\vec{R}'$, тоді $\vec{R}_0'$ — радіус-вектор початку координат O' рухомої системи відліку K' відносно нерухомої системи K.

Радіуси-вектори $\vec{R}$, $\vec{R}_0$ та $\vec{R}'$ у кожний момент часу пов'язані співвідношенням:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0(t) + \vec{R}'(t),$$

причому

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{R}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'; \quad \vec{R}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ та $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ — орти систем K і K' відповідно.

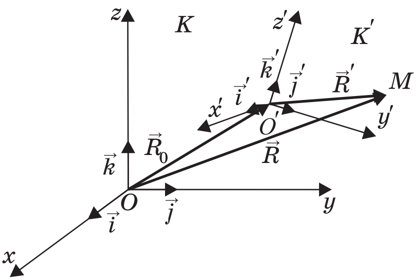


Рис. 2.7

Абсолютна швидкість матеріальної точки M:

$$\vec{\upsilon}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

тобто

$$\vec{\upsilon}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{R}'}{dt}.$$

Оскільки система K' рухається довільно, то:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right).$$

Перший доданок правої частини цієї рівності є швидкість точки M у системі K' — *відносна* швидкість $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$:

$$\vec{\upsilon}_{\text{відн}} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'.$$

У загальному випадку рухома система відліку K' рухається цілком довільно відносно нерухомої системи K. Цей рух можна уявити як суму двох рухів: *прискореного поступального руху* початку координат O' та обертального руху осей координат системи O' навколо миттєвої осі, що проходить через O' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, яка може змінювати як свою величину, так і напрямок.

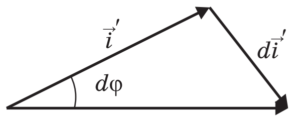


Рис. 2.8

Оскільки $\dfrac{d\vec{i}'}{dt}$, $\dfrac{d\vec{j}'}{dt}$, $\dfrac{d\vec{k}'}{dt}$ являють собою лінійні швидкості кінців ортів $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ при обертальному русі системи відліку, то з рис. 2.8 видно, що $di' = i'd\varphi = i'\omega dt$ ($d\varphi$ — кут повороту системи K' за час dt). Так само:

$$dj = j'\omega dt\ ,\ dk' = k'\omega dt.$$

Тоді можна записати:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{i}']\ ,\ \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{j}'],\ \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{k}'].$$

Другий доданок набуває вигляду:

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}\times x'\vec{i}'] + [\vec{\omega}\times y'\vec{j}'] + [\vec{\omega}\times z'\vec{k}'] =$$
$$= [\vec{\omega}\times(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')] = [\vec{\omega}\times\vec{R}'].$$

Таким чином:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{\upsilon}_{\text{відн}} + [\vec{\omega}\times\vec{R}'].$$

Абсолютна швидкість матеріальної точки M набуває вигляду:

$$\vec{\upsilon}_{\text{абс}} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_{\text{відн}} + [\vec{\omega}\times\vec{R}'],$$

де
$$\vec{\upsilon}_0 = \frac{d\vec{R}_0}{dt}.$$

Сума $\vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{R}'] = \vec{\upsilon}_{\text{пер}}$ має назву *переносної швидкості* і може бути інтерпретована як абсолютна швидкість, яку мала б точка *M,* якби вона перебувала в неінерціальній системі відліку K' у стані спокою. Переносна швидкість складається з двох частин: швидкості $\vec{\upsilon}_0$, з якою рухається початок координат O', та швидкості $[\vec{\omega}\times\vec{R}']$, що виникає внаслідок обертання системи K' навколо цього початку координат.

Абсолютна швидкість точки *M* дорівнює геометричній сумі відносної та переносної швидкостей:

$$\vec{\upsilon}_{\text{абс}} = \vec{\upsilon}_{\text{відн}} + \vec{\upsilon}_{\text{пер}}.$$

Для визначення абсолютного прискорення знайдемо *диференціал* від абсолютної швидкості

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{\upsilon}_{\text{абс}}}{dt}.$$

З урахуванням виразу для $\vec{\upsilon}_{\text{абс}}$ маємо:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_{\text{відн}} + \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{R}']\right) =$$

$$= \frac{d\vec{\upsilon}_{\text{відн}}}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt} + [\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R}'] + [\vec{\omega}\times\frac{d\vec{R}'}{dt}].$$

Користуючись виразом для $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$, запишемо:

$$\frac{d\vec{\upsilon}_{\text{відн}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) =$$

$$= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right).$$

Перший доданок цієї рівності є відносне прискорення матеріальної точки *M* відносно неінерціальної (рухомої) системи відліку *K′*

$$\vec{a}_{\text{відн}} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'.$$

Другий доданок цієї рівності подамо в такому вигляді:

$$\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}].$$

Тоді

$$\frac{d\vec{\upsilon}_{\text{відн}}}{dt} = \vec{a}_{\text{відн}} + [\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}].$$

Оскільки

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{\upsilon}_{\textit{відн}} + [\vec{\omega}\times\vec{R}'],$$

абсолютне прискорення набуває вигляду:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{відн}} + [\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}] + [\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R}'] + \left[\vec{\omega}\times[\vec{\upsilon}_{\text{відн}}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']]\right] =$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{відн}} + [\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}] + [\vec{\beta}\times\vec{R}'] + [\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}] + \left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right] =$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{відн}} + 2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}] + [\vec{\beta}\times\vec{R}'] + \left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right] =$$

$$= \vec{a}_0 + [\vec{\beta}\times\vec{R}'] + \left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right] + 2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}] + \vec{a}_{\text{відн}}.$$

Надамо цьому результату вигляду:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{к}} + \vec{a}_{\text{відн}},$$

де $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_0 + [\vec{\beta}\times\vec{R}'] + \left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right]$ — переносне прискорення; $\vec{a}_{\text{к}} = 2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\text{відн}}]$ — коріолісове прискорення.

Рівність для абсолютного прискорення разом з виразами для окремих його складових виражає зміст так званої *теореми Коріоліса*, згідно з якою абсолютне прискорення дорівнює векторній сумі переносного, коріолісового та відносного прискорень.

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}$ залежить лише від руху системи K' відносно нерухомої системи K. Таке прискорення мала б точка M, якби вона перебувала в стані спокою в неінерціальній системі відліку K'.

Більш детальний розгляд структури переносного прискорення свідчить, що $\vec{a}_0$ — це переносне прискорення, яке є наслідком поступального прискореного руху неінерціальної (рухомої) системи K'; величина $[\vec{\beta}\times\vec{R}']$ — частина переносного прискорення, що виникає внаслідок нерівномірності обертання рухомої системи. Якщо $\vec{\omega} = 0$, цей доданок зникає. Величина $\left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right] = \vec{a}_{\text{доц}}$ є *доцентровим прискоренням*. Вектор $\vec{a}_{\text{доц}}$ напрямлений до миттєвої осі обертання.

Коріолісове прискорення $\vec{a}_{\text{к}}$ зумовлене рухом матеріальної точки відносно рухомої системи K', яка перебуває в обертальному русі. Воно складається з двох однакових складових. Перша виникає внаслідок обертання вектора $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ навколо нерухомої осі обертання з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$; друга є результатом приросту переносної швидкості $\vec{\upsilon}_{\text{пер}}$, що виникає внаслідок наближення точки M до осі обертання або віддалення від неї. Це прискорення максимальне, коли вектори $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ та $\vec{\omega}$ взаємно перпендикулярні, й дорівнює нулю, коли кут між ними дорівнює 0 або π.

Отже, при переході від інерціальної до неінерціальної системи відліку швидкості й прискорення змінюються за правилом:

$$\vec{\upsilon}_{\text{абс}} = \vec{\upsilon}_{\text{відн}} + \vec{\upsilon}_{\text{пер}},$$

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{відн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Сили інерції

Знайдемо рівняння руху матеріальної точки *M* відносно рухомої (неінерціальної) системи відліку. Перепишемо теорему Коріоліса у вигляді:

$$\vec{a}_{\text{відн}} = \vec{a}_{\text{абс}} - \vec{a}_{\text{пер}} - \vec{a}_{\text{к}}.$$

Нехай m — маса матеріальної точки. Тоді:

$$m\vec{a}_{\text{відн}} = m\vec{a}_{\text{абс}} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{к}},$$

де $m\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{F}$ — це «дійсна сила», що реально існує в обох системах K і K' як результат взаємодії тіл.

Два інших доданки правої частини цього рівняння лише формально можна вважати за деяку силу, що діє на матеріальну точку в рухомій системі відліку K'. Складові $-m\vec{a}_{\text{пер}}$ та $-m\vec{a}_{\text{к}}$ є не результатом взаємодії тіл, а наслідком прискореного руху системи K'. Їх називають фіктивними силами або *силами інерції*.

Переносна сила інерції має вигляд:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_0 - m[\vec{\beta}\times\vec{R}'] - m\left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right].$$

Вона складається із трьох доданків. Перший доданок $-m\vec{a}_0$ — *поступальна сила* інерції, яка виникає внаслідок прискореного руху початку координат O'. Другий доданок $-m[\vec{\beta}\times\vec{R}']$ виникає через нерівномірність обертання системи відліку. Третій доданок $-m\left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right]$ — *відцентрова сила інерції*. Вектор цієї сили перпендикулярний до осі обертання системи K' (до вектора $\vec{\omega}$) та спрямований від цієї осі. Дії відцентрової сили, наприклад, зазнає пасажир у рухомому автобусі на поворотах. Відцентрова сила інерції діє лише в неінерціальних системах відліку, що обертаються. Вона зникає при переході до інерціальних систем відліку.

Коріолісова сила інерції має вигляд:

$$\vec{F}_{\text{к}} = -m\vec{a}_{\text{к}} = 2m[\vec{\upsilon}_{\text{відн}}\times\vec{\omega}].$$

Вона виникає лише при обертанні неінерціальної (рухомої) системи відліку K'. Матеріальна точка *M* при цьому *рухається відносно цієї системи*. Коріолісова сила залежить від відносної швидкості $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ та завжди перпендикулярна до неї.

Коли $\vec{\upsilon}_{\text{відн}} = 0$, то і $F_{\text{к}} = 0$.

Сили інерції та маса тіла

Характерною властивістю сил інерції є пропорційність їх масі тіла. Завдяки цій властивості сили інерції аналогічні силі тяжіння. Нехай тіло, маса якого m, знаходиться в закритій кабіні ліфта (рис. 2.9), що рухається вгору з прискоренням $\vec{g}$.

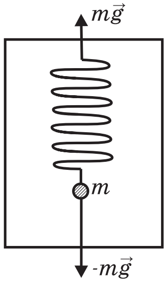


Рис. 2.9

Тоді це тіло поводить себе так, якби на нього діяла сила інерції $-m\vec{g}$. Пружина, до якої прикріплено це тіло, розтягнеться так, що пружна сила зрівноважить силу інерції $-m\vec{g}$. Але таке ж саме явище спостерігається й у випадку, коли кабіна ліфта нерухома та знаходиться поблизу поверхні Землі. Не маючи можливості виглянути за межі кабіни, ніякими дослідами, які проводили б усередині кабіни, не можна було б встановити, чим обумовлена сила $-m\vec{g}$ — прискореним рухом кабіни чи дією гравітаційного поля Землі. На цій підставі кажуть про *еквівалентність* сил інерції та *гравітації*. Ця еквівалентність лежить в основі теорії відносності Ейнштейна.

Відцентрова сила інерції

У системах відліку, які рівномірно обертаються зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, тіло може перебувати як у стані спокою, так і в стані руху відносно цієї системи.

Розглянемо випадок, коли тіло перебуває в спокої відносно неінерціальної системи відліку. Прикладом такої системи відліку може бути диск, який обертається навколо перпендикулярної до нього вертикальної осі z' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 2.10).

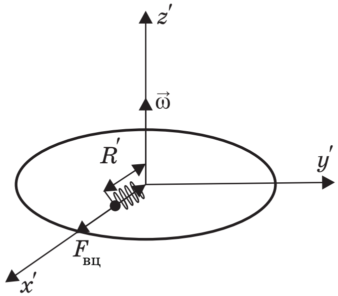


Рис. 2.10

Разом з диском обертається насаджена на шпицю кулька, що з’єднана з центром диска пружиною.

В інерціальній системі відліку, спостерігаючи за рухом диска разом з кулькою, можна зробити висновок, що на кульку повинна діяти *доцентрова сила* $F = m\omega^2 R$, величина якої дорівнює пружній силі розтягнутої пружини.

Відносно неінерціальної системи відліку, пов’язаної з диском, кулька перебуває в стані спокою. Це формально можна пояснити тим, що на кульку діє сила, напрямлена по радіусу від центра і яка зрівноважує пружну силу розтягнутої пружини. Це *відцентрова сила інерції* (переносна):

$$\vec{F}_{\text{вц}} = \vec{F}_{\text{пер}} = -m\left[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{R}']\right].$$

Напрямлена відцентрова сила інерції вздовж радіуса R' від центра.

Сила Коріоліса

Розглянемо випадок, коли тіло рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ відносно неінерціальної системи відліку, що обертається.

Наступний дослід демонструє прояв коріолісової сили інерції.

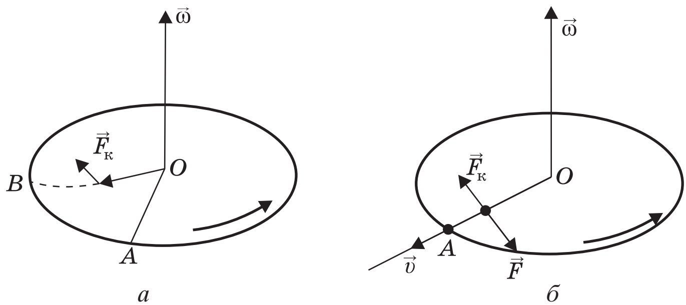


Рис. 2.11

На горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, накреслимо радіальну пряму OA (рис. 2.11, *а*). Якщо диск нерухомий, то запущена в напрямку від O до A кулька зі швидкістю $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ котитиметься вздовж накресленої прямої OA. Якщо кулька рухається у тому ж напрямку по диску, який обертається, то траєкторією руху кульки буде дуга OB. При цьому швидкість її відносно диска $\vec{\upsilon}_{\text{відн}}$ змінюватиме свій напрямок. Отже, по відношенню до рухомої системи відліку кулька поводить себе так, якби на неї діяла сила $\vec{F}_к$, перпендикулярна до швидкості $\vec{\upsilon}_{відн}$. Для того, щоб змусити кульку котитися вздовж прямої *OA* при рівномірному обертанні диска, на кульку слід подіяти силою $\vec{F}$, яка за величиною дорівнює коріолісовій силі $\vec{F}_к$ та протилежна їй за напрямком (рис. 2.11, *б*).

У зв'язку з тим, що у неінерціальних системах відліку діють сили інерції, які завжди є зовнішніми по відношенню до будь-якого тіла, стає очевидним, що в неінерціальних системах відліку не існує замкнених систем. Як наслідок у таких системах не виконуються закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулювати перший закон Ньютона.
2. Які системи відліку називаються інерціальними?
3. Дати визначення маси, сили, імпульсу.
4. Сформулювати другий закон Ньютона.
5. Записати другий закон Ньютона у вигляді рівняння руху.
6. У чому суть принципу незалежності дії сил?
7. Сформулювати третій закон Ньютона.
8. Що таке вага тіла? Сила тяжіння?
9. У чому полягає фізична суть механічного принципу відносності (принцип відносності Галілея)?
10. Записати закон перетворення швидкостей у класичній механіці.
11. Навести приклади відомих вам фундаментальних сил.
12. Що таке сила пружності? Сформулюйте закон Гука.
13. Які сили називають силами тертя?
14. Що таке коефіцієнт тертя спокою? Коефіцієнт тертя ковзання? Від чого залежать їх величини?
15. Що таке центр мас системи матеріальних точок?
16. Як рухається центр мас системи матеріальних точок?
17. Дати визначення механічній системі, замкненій системі.
18. Сформулювати закон збереження імпульсу.
19. Яка властивість простору обумовлює закон збереження імпульсу?
20. Що таке «змінна маса» в механіці Ньютона?
21. Що таке реактивна сила? Куди вона напрямлена?
22. Запишіть рівняння Мещерського.
23. Які можливості надає формула Ціолковського?
24. Коли і навіщо треба розглядати сили інерції?
25. Що таке сили інерції? Чим вони відрізняються від сил, що діють у інерціальних системах відліку?
26. Як напрямлені відцентрова сила інерції та сила Коріоліса? Коли вони проявляються? Від чого залежать?
27. Сформулюйте та поясніть принцип еквівалентності Ейнштейна.

Завдання для експрес-контролю

1. Чи можливий рух за відсутності сили? Чи можлива за відсутності руху дія сили?

2. Який зв'язок між рівнодіючою сил, що діють на тіло, та напрямком його руху?

3. Бусина рухається рівномірно без тертя за криволінійною траєкторією (рис. 1). Нарисуйте сили, які діють на бусину в точках *a*, *b*, *c*. Дайте пояснення.

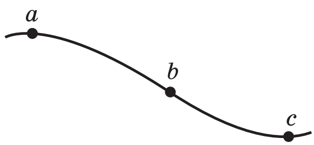


Рис. 1

4. На дерев'яній похилій площині знаходиться дерев'яний брусок. Кут нахилу похилої площини збільшується до значення $\alpha = 20°$, при якому брусок починає ковзати по площині з прискоренням. Чому дорівнює коефіцієнт тертя?

5. При якій швидкості $\vec{\upsilon}$ вага людини, що робить «мертву» петлю на літаку, дорівнюватиме половині його ваги за звичайних умов? Відповідь запишіть через g і R (радіус кола).

6. Одержіть вираз для гравітаційної сталої G через середню густину Землі ρ, її радіус $R_З$ та прискорення вільного падіння g.

7. Космічній корабель складається з двох відсіків, з'єднаних переходом довжиною $l = 20$ м. Скільки обертів за секунду навкруги осі, що проходить через центр мас корабля, повинен здійснювати такий корабель для підтримки в пасажирів нормальної ваги?

8. Дві кульки однакового розміру масами m_1 і m_2 ($m_2 < m_1$) зв'язані між собою ниткою, довжина якої набагато більше радіусів кульок. Кульки одночасно скинули з великої висоти. Визначте натяг нитки під час падіння кульок у повітрі через досить великий час після скидання кульок.

9. Чому куля, що вилетіла з рушниці, не може відкрити двері, а лише пробиває в ній отвір, тоді як тиском пальця відкрити двері легко, але зробити отвір неможливо?

10. Тіло, маса якого m, рухається в площині xy за законом: $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, де A, B та ω — деякі сталі. Визначте модуль сили, що діє на тіло.

11. Снаряд, маса якого m, вилетів з гармати. У верхній точці траєкторії він мав швидкість υ і розірвався на два осколки, більший із яких полетів у зворотному напрямку зі швидкістю υ_1. Визначте швидкість і напрямок руху меншого осколка.

12. З вершини похилої площини, довжина якої l, а висота h, починає ковзати невелике тіло. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ. Визначте прискорення, з яким рухається тіло.

13. Тіло кинуто під кутом до обрію. Чи зберігаються: а) імпульс тіла; б) проекція імпульсу на будь-який напрямок?

14. Коли ви йдете по деревині, що пливе по воді, вона рухається в протилежному напрямку. Чому це відбувається?

Приклади розв'язання задач

1. На похилій площині розташований вантаж масою $m_1 = 5$ кг, зв'язаний ниткою, перекинутою через блок, з іншим вантажем масою $m_2 = 2$ кг (рис. 1). Коефіцієнт тертя між першим вантажем та площиною $\mu = 0{,}1$, кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 37°$. Знайти прискорення вантажів та силу натягу нитки. Тертям у блоці знехтувати.

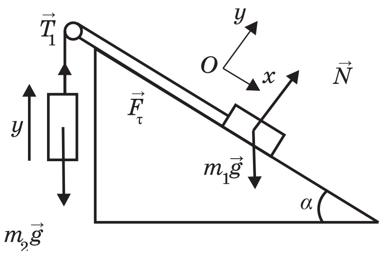


Рис. 1

Розв'язання

У задачі розглядаються два тіла, зв'язані ниткою, які рухаються поступально і рівноприскорено. Таким чином, необхідно розв'язати головну задачу динаміки; для цього використовується другий закон Ньютона. Зважаючи на те, що нитка нерозтяжна (невагома і блок невагомий), прискорення цих тіл та сили натягу ниток рівні за модулем:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a; \ |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T. \qquad (1)$$

На вантаж маси m_1 діє сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила нормальної реакції опори $\vec{N}$, сила натягу нитки $\vec{T}$ і сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. Уявимо собі, що вантаж m_1 рухається вниз по похилій площині. Якщо це припущення невірне, тоді прискорення матиме від'ємне значення, тобто рух вантажів відбувається у зворотному напрямку.

Для першого тіла другий закон Ньютона у векторній формі має вигляд:

$$m_1\vec{g}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_{\text{тер}}=m_1\vec{a}. \quad (2)$$

На вантаж m_2 діє тільки сила тяжіння $m_2\vec{g}$ та сила натягу нитки:

$$m_2\vec{g}+\vec{T}=m_2\vec{a}. \quad (3)$$

Для кожного тіла виберемо свою інерціальну систему відліку. Для першого вантажу пов'яжемо її з похилою площиною, коли вісь Ox напрямлена вниз по схилу, а вісь Oy перпендикулярно Ox вгору. Тоді другий закон Ньютона для першого тіла у проекціях на осі Ox та Oy має вигляд:

$$m_1 g\sin\alpha - T - F_{\text{тер}} = m_1 a; \quad (4)$$

$$-m_1 g\cos\alpha + N = 0. \quad (5)$$

Для другого тіла інерціальну систему відліку пов'язуємо з рухом цього тіла вгору, тобто вісь y спрямована вгору.

Тоді рівнянням (3) одержимо проекцію на вісь y:

$$T - m_2 g = m_2 a. \quad (6)$$

Сила тертя дорівнює

$$F_{\text{тер}} = N\mu. \quad (7)$$

Якщо враховувати рівняння (5) та (7), рівняння (4) та (6) перетворяться на систему:

$$\begin{cases} m_1 g\sin\alpha - T - \mu m_1 g\cos\alpha = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо прискорення та силу натягу нитки.

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1+\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2},$$

$$a = 0{,}84 \text{ м/с}^2, \;\; T = 21{,}3 \text{ Н}.$$

2. Бак у тендері паровоза має довжину $l = 4$ м (рис. 2). Яка різниця Δl рівнів води біля переднього і заднього кінців бака при русі поїзда з прискоренням $a = 0{,}5$ м/с^2?

Розв'язання

У даному випадку зручно вибрати неінерціальну систему відліку (НСВ), яка рухається рівноприскорено разом з паровозом. У відповідності до принципу Даламбера для виконання законів Ньютона в НСВ до води слід додатково прикласти силу інерції $\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{a}$. В даному випадку на воду діятиме зі сторони бака сила реакції $\vec{N}$, перпендикулярна поверхні води.

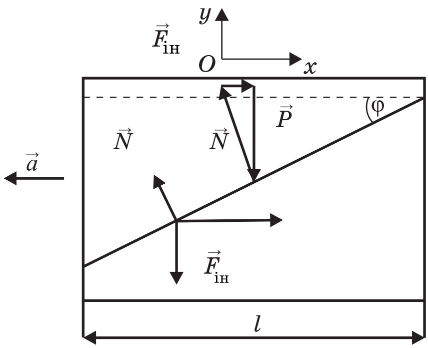


Рис. 2

Оскільки в НСВ вода і бак нерухомі, то стан води в ній може бути описаний законами статики: рівнодіюча всіх сил дорівнює нулю

$$\vec{p} + \vec{F}_m + \vec{N} = 0.$$

Вибираємо осі: Ox — горизонтальну й Oy — вертикальну. Записуємо рівняння в проекціях на вісь x:

$$mg - N\sin\varphi = 0,$$

$$N\cos\varphi - mg = 0.$$

Із системи рівнянь маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{g} = \frac{\Delta l}{l}; \quad l\frac{a}{g} = \Delta l = 0{,}204 \text{ м}.$$

3. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху S від часу t дається рівнянням

$$S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3,$$

де C = 5 м/с^2 і D = 1 м/с^3. Знайти силу, що діє в кінці першої секунди руху.

Розв'язання

Згідно з другим законом Ньютона $F = ma$ відомо, що $a = d\upsilon/dt$. У нашому випадку $\upsilon = \frac{dS}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$. Таким чином, $a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2C - - 6Dt$.

Тоді $F = ma = m(2C - 6Dt)$,

$F = 0{,}5$ кг$\cdot(2\cdot 5$ м/с$^2 - 6\cdot 1$ м/с$^3\cdot 1$ с$) = 2$ Н.

4. Парашутист масою $m = 100$ кг виконує затяжний стрибок з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 0$ (рис. 3). Знайти закон зміни його швидкості до розкриття парашута та закон руху парашутиста. Взяти то уваги, що сила опору повітря пропорційна швидкості руху парашутиста: $\vec{F_0} = -k\vec{\upsilon}$, де $k = 20$ кг/с.

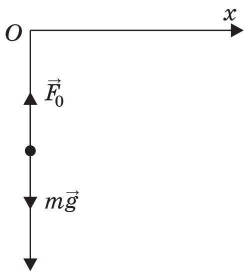


Рис. 3

Розв'язання

У даній задачі необхідно знайти один з кінематичних параметрів руху тіла — його швидкість як функцію часу. Це основна задача динаміки, яка означає, що можна застосувати другий закон Ньютона. Початок координат інерціальної системи відліку розташовано у точці O (рис. 3), з якої починається рух парашутиста. Вісь Oy спрямовано вертикально вниз.

На парашутиста діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{F_0} = -k\vec{\upsilon}$. Тоді другий закон в цьому випадку має вигляд $m\vec{g} + \vec{F}_0 = m\vec{a}$. Його можна уявити у вигляді диференціального рівняння для невідомої функції $\upsilon(t)$.

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon.$$

Розділивши змінні, знайдемо:

$$-\frac{d\upsilon}{\frac{mg}{k} - \upsilon} = -\frac{k}{m}at, \quad \frac{d(\frac{mg}{k} - \upsilon)}{\frac{mg}{k} - \upsilon} = -\frac{k}{m}dt.$$

Після інтегрування одержуємо:

$$\ln(\frac{mg}{k} - \upsilon) = -\frac{k}{m}t + C. \tag{11}$$

Довільну сталу C визначаємо з початкових умов ($\upsilon = \upsilon \cdot 0 = 0$ при $t = 0$): $C = \ln\frac{mg}{k}$. Підставляючи значення сталої C в рівняння (11), знаходимо закон зміни швидкості парашутиста

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+\ln\frac{mg}{k}\quad \upsilon=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

З цього рівняння виходить, що при $t\to\infty$ швидкість прямує до свого максимального значення $\upsilon_{\max}=\dfrac{mg}{k}$, яке дорівнює 50 м/с.

Якщо закон зміни швидкості відомий, то, вирішуючи зворотну задачу кінематики, можна знайти закон руху парашутиста:

$$dy=\upsilon(t)dt;$$

$$y(t)=\int_0^1\upsilon(t)dt;$$

$$y=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Кут похилої площини з горизонтом α дорівнює 20°, маси тіл $m_1=200$ г і $m_2=150$ г. Вважаючи нитку і блок нерухомими та нехтуючи силами тертя, знайти прискорення, з яким рухатимуться тіла, якщо тіло m_2 опускається.

Відповідь: a = 2,29 м/с^2.

2.2. До системи блоків (рис. 4) підвішені тягарці масами $m_1=200$ г і $m_2=500$ г. Припустивши, що тягарець m_1 піднімається, а рухомий блок з m_2 опускається, визначити:

1) силу натягу нитки T; 2) прискорення, з якими рухаються тягарці. Вважати нитку й тягарці невагомими, а сили тертя відсутніми.

Відповідь: 1) T = 2,26 Н; 2) a_1 = 1,5 м/с^2; a_2 = 0,75 м/с^2.

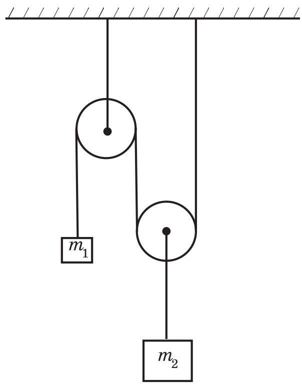


Рис. 4

2.3. Вагон масою $m=1$ т спускається по канатній залізниці з ухилом $\alpha=15°$ до горизонту. Визначити силу натягу каната при гальмуванні вагона в кінці спуску, якщо швидкість вагона перед гальмуванням $\upsilon_0 = 2,5$ м/с, а час гальмування $t = 6$ с. Коефіцієнт тертя вважати рівним $\mu = 0,05$.

Відповідь: $T = 2,48$ кН.

2.4. На тіло, що знаходиться на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 20°$, діє горизонтально напрямлена сила $F = 8$ Н. Нехтуючи тертям, визначити: 1) прискорення тіла; 2) силу, з якою тіло тисне на площину. Маса тіла $m = 10$ кг.

Відповідь: 1) $a = 4,11$ м/с^2; 2) $N = 89,4$ Н.

2.5. З похилої площини, кут нахилу якої до горизонту $\alpha = 30°$, ковзає тіло. Визначити швидкість тіла в кінці другої секунди від початку руху, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,15$.

Відповідь: $\upsilon = 7,26$ м/с.

2.6. Естакада на перехресті вулиць має радіус кривизни $R = 1$ км. У верхню частинку естакади в дорожнє покриття вмонтовано датчики, що реєструють силу тиску на естакаду. Яку силу тиску F показуватиме прилад, що відзначає цю силу, в той час, коли по естакаді їде зі швидкістю $\upsilon = 60$ км/год автомобіль, маса якого $m = 1$ т?

Відповідь: $F = 9520$ Н.

2.7. На похилу площину з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 30°$ поклали дошку масою $m_2 = 1$ кг, а на дошку брусок масою $m_1 = 0,5$ кг. Коефіцієнт тертя між бруском і дошкою $\mu_1 = 0,05$, а між дошкою та площиною $\mu_2 = 0,1$. Визначити: 1) прискорення бруска; 2) прискорення дошки; 3) коефіцієнт тертя μ', при якому дошка не рухатиметься.

Відповідь: 1) $a_1 = 4,48$ м/с^2; 2) $a_2 = 3,84$ м/с^2; 3) $\mu' \geq 0,4$.

2.8. Через блок перекинуто нерозтяжну нитку, до кінців якої підвішено тягарці масами m_1 та m_2 ($m_1 > m_2$). Блок підіймають угору з прискоренням a_0 відносно Землі. Припустивши, що нитка ковзає по блоку без тертя, знайти силу натягу нитки, силу тиску на вісь блоку та прискорення тягарців m_1 і m_2 відносно Землі. Знайти результат при $m_1 = 0,2$ кг, $m_2 = 0,1$ кг, $a_0 = 1$ м/с^2.

Відповідь: $T = 1,44$ Н; $N = 2,88$ Н; $a_1 = 2,6$ м/с^2; $a_2 = 4,6$ м/с^2.

2.9. Знайти прискорення тягарця масою $m = 1$ кг і силу натягу ниток у системі, наведеній на рис. 5. Масою блоків і ниток, а також тертям знехтувати.

Відповідь: $a = g$, $T = 0$.

2.10. Два тіла, маси яких $m_1 = 5$ кг і $m_2 = 10$ кг, лежать на гладенькій горизонтальній поверхні столу. Тіла з'єднані шнурком, маса якого $m = 1$ кг. Яку мінімальну силу F треба прикласти до тіла масою m_1 (до тіла масою m_2) для того, щоб шнурок розірвався? Відомо, що прикріплений до нерухомої стіни шнурок розривається при дії сили $T_0 = 400$ Н.

Відповідь: $F_{\min} = 582$ Н; $F'_{\min} = 1067$ Н.

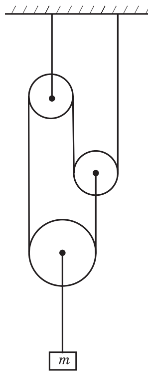


Рис. 5

2.11. З вершини клину з кутом $\alpha = 45°$ при основі з висоти $H = 20$ см починає ковзати тіло, маса якого $m = 0{,}5$ кг. Клин лежить на абсолютно гладенькій поверхні. Визначити, на яку відстань пересунеться клин, коли тіло виявиться біля його основи. Маса клину $M = 1{,}5$ кг.

Відповідь: $S = 0{,}05$ м.

2.12. Два хлопчики, маси яких $m_1 = 40$ кг та $m_2 = 48$ кг, стоять на ковзанах на льоду один проти одного. Перший кидає другому вантаж, маса якого $m = 2$ кг, зі швидкістю, горизонтальна складова якої $\upsilon = 5$ м/с відносно Землі. Знайти швидкість υ_1 першого хлопчика після того, як він кинув вантаж, та швидкість другого υ_2, після того, як він спіймав вантаж. Тертям знехтувати.

Відповідь: $\upsilon_1 = 0{,}25$ м/с; $\upsilon_2 = 0{,}2$ м/с.

2.13. Два пасажири однакової маси $m = 70$ кг знаходяться на платформі, що стоїть нерухомо на рейках. Маса платформи $M = 280$ кг. Кожний із пасажирів починає бігти зі швидкістю $u = 6$ м/с. Яку швидкість υ здобуде платформа, якщо пасажири зістрибнуть: а) в один бік й одночасно; б) у різні боки одночасно; в) в один бік послідовно; г) у різні боки послідовно?

Відповідь: а) $\upsilon = 2$ м/с; б) $\upsilon = 0$; в) $\upsilon = 2{,}2$ м/с; г) $\upsilon = -0{,}2$ м/с.

2.14. Гімнаст, маса якого $M = 60$ кг, стрибає, тримаючи в руках вантаж масою $m = 6$ кг, під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту зі швидкістю $\upsilon_0 = 5$ м/с. У найвищій точці траєкторії він кидає вантаж горизонтально назад зі швидкістю відносно Землі $\upsilon = 3$ м/с. Наскільки збільшиться дальність стрибка гімнаста?

Відповідь: $\Delta S = 0{,}11$ м.

2.15. Визначити, у скільки разів зменшиться швидкість кулі, що рухається зі швидкістю υ_1 при її зіткненні з нерухомою кулею, маса якої в n разів більше за масу кулі, що на неї налітає. Удар вважати центральним та абсолютно пружним.

Відповідь: $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{1+n}{1-n}$.

2.16. Встановити зв'язок сили тяги двигуна ракети з витратою палива, якщо швидкість витікання газу відносно ракети дорівнює u.

Відповідь: $F_t = u\frac{\Delta m}{\Delta t}$.

2.17. Тіло, маса якого m = 0,2 кг, ковзає без тертя по жолобу, висота якого H = 2 м. Початкова швидкість υ_0 тіла дорівнює нулю. Знайти зміну Δp імпульсу тіла та імпульс p, отриманий жолобом, при русі тіла.

Відповідь: $\Delta p = 1{,}25$ Н · с; p = –1,25 Н · с.

2.18. Швидкість стаціонарного руху тіла, що знаходилось на великій відстані від Землі, дорівнює $\upsilon = 80$ м/с. Знайти час τ упродовж якого швидкість становитиме 0,5υ. Силу опору повітря вважати пропорційною швидкості тіла.

Відповідь: τ = 5,66 с.

2.19. Двигун гальмувальної системи розвиває силу тяги, пропорційну часу: $F = -kt$, де k = 500 Н/с. Нехтуючи тертям, визначити, через який час від моменту вмикання двигуна тіло масою $m = 10^4$ кг, на якому встановлено цей двигун, зупиниться. В момент вмикання двигуна швидкість тіла дорівнювала $\upsilon_0 = 10^3$ м/с. Маса двигуна значно менша за масу тіла.

Відповідь: t = 200 с.

2.20. Парашутист масою m = 70 кг виконує затяжний стрибок. Вважаючи силу опору повітря пропорційною швидкості, визначити, через який проміжок часу Δt швидкість парашутиста становитиме 0,8 від максимальної швидкості його руху. Коефіцієнт опору k = 20 кг/с. Початкова швидкість $\upsilon_0 = 0$.

Відповідь: Δt = 5,63 с.

2.21. Швидкість кулі масою m = 10 г змінилась від $\upsilon_0 = 600$ м/с до $\upsilon = 150$ м/с. Вважаючи, що сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості, коефіцієнт опору k = 10 кг/с, знайти проміжок часу, за який швидкість зменшилась. Дією сили тяжіння знехтувати.

Відповідь: $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$ с.

2.22. Човен масою m = 2 т починає свій рух під дією постійної сили тяги F = 1,03 кН. Вважаючи силу опору повітря і води пропорційною швидкості ($F_0 \approx k\upsilon$, де k = 100 кг/с), знайти швидкість човна в спокійній воді через $\tau = 10$ с після початку руху.

Відповідь: $\upsilon = 4$ м/с.

2.23. Вітрильник розвив швидкість $\upsilon_0 = 10$ м/с, потім вітрило було спущене. Вважаючи силу опору руху човна пропорційною швидкості $F_0 = -r\upsilon$, де r = 10 кг/с, знайти залежність швидкості та шляху човна від часу, якщо його маса m = 500 кг.

Відповідь: $\upsilon = 10e^{-0{,}02t}$; $S = 500(1 - e^{-0{,}02t})$.

2.24. З гелікоптера, який завис на деякій відстані від земної поверхні, скинуто вантаж масою m = 400 кг. Вважаючи силу опору повітря пропорційною швидкості, знайти той проміжок часу, через який прискорення вантажу становитиме 0,5 від прискорення вільного падіння. Коефіцієнт опору k = 20 кг/с.

Відповідь: $\Delta t = 13{,}86$ с.

2.25. Парашутист масою m = 100 кг знаходиться під дією сили опору повітря, яка змінюється згідно з рівнянням: $F_0 = -k\upsilon$, де k = 20 кг/с. Вважаючи, що парашут було розкрито в момент часу t = 0, $\upsilon = 0$, знайти залежність швидкості та шляху від часу.

Відповідь: $\upsilon = 50(1 - e^{-0{,}2t})$; $S = 50\left[t + 5(e^{-0{,}2t} - 1)\right]$.

2.26. Куля пробиває дерево товщиною h = 40 см, швидкість кулі при цьому зменшується від 400 м/с до $\upsilon = 200$ м/с. Визначити час руху кулі в дереві, прийнявши силу опору руху кулі пропорційною квадрату швидкості.

Відповідь: $t = 14{,}4 \cdot 10^{-4}$ с.

2.27. Моторний човен масою m = 2 т рухається по озеру зі швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с. У момент часу t = 0 його двигун, потужність якого N = 40 кВт, вимкнули. Прийнявши силу опору води руху човна пропорційною квадрату швидкості, знайти час, за який човен після вимкнення двигуна матиме вдвічі меншу швидкість.

Відповідь: t = 20 с.

3. РОБОТА, ПОТУЖНІСТЬ, ЕНЕРГІЯ. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ

3.1. Робота, потужність

Робота сили

Поняття роботи в механіці пов'язано з поняттям сили й переміщення. Якщо частинка під дією сили переміщується по деякій траєкторії так, що переміщення дорівнює $d\vec{r}$, то елементарною роботою δA сили $\vec{F}$ (сила не змінюється) називається скалярний добуток:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\alpha = F_r dr,$$

де α — кут між векторами $d\vec{r}$ і $\vec{F}$; F_r — проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$ (рис. 3.1).

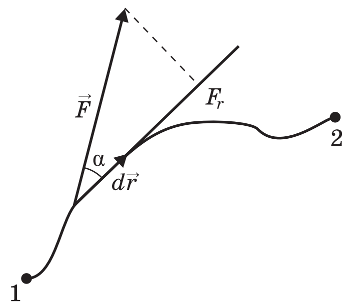


Рис. 3.1

Величина δA — алгебраїчна (скалярна); якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то δA — додатна величина; при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ елементарна робота від'ємна (робота сил опору); коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta A = 0$ (в цьому випадку $\vec{F} \perp d\vec{r}$) (випадок, коли сила відіграє роль доцентрової сили).

Робота на ділянці траєкторії 1–2 дорівнює інтегралу:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F\cos\alpha dr = \int_1^2 F_r dr. \tag{3.1}$$

У координатній формі запису:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \; d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz. \tag{3.2}$$

Геометричний смисл роботи

Поняттю роботи можна надати геометричний смисл. Якщо зобразити графік залежності F_r від положення частинки r на траєкторії 1–2 (рис. 3.2), то елементарна робота δA дорівнює площі заштрихованої смужки.

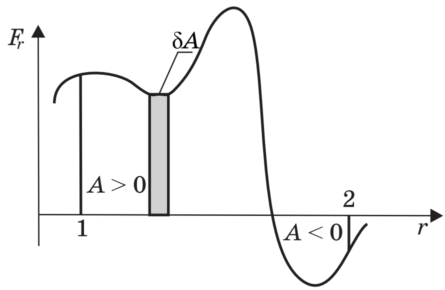


Рис. 3.2

Зауважимо, що відрізки dr повинні бути настільки малими, щоб у межах цих відрізків силу можна було вважати сталою. Робота A_{12} на ділянці траєкторії 1–2 дорівнює площі фігури, обмеженої кривою $F_r(r)$, ординатами 1 і 2 та віссю r. При цьому площа фігури над віссю r береться зі знаком плюс (додатна робота), а площа під віссю r — зі знаком мінус (від'ємна робота).

Одиницею роботи в системі СІ є джоуль. Робота в один джоуль — це робота, що виконується силою в один ньютон на переміщенні один метр.

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

Потужність

Для характеристики швидкості, з якою виконується робота, застосовується фізична величина *потужність — це величина роботи, виконаної за одиницю часу*

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Якщо потужність з часом змінюється, то інтенсивність виконання роботи характеризується *миттєвою потужністю*:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}.$$

Тобто миттєва потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор миттєвої швидкості, з якою рухається частинка. Як і робота, потужність — величина алгебраїчна. Знаючи потужність сили, можна знайти роботу, яку здійснює сила за проміжок часу t:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_0^t \vec{F}\vec{\upsilon} dt = \int_0^t P dt.$$

Одиницею потужності в СІ є ват (Вт). Потужність в один ват — це така величина потужності, коли сила F за 1 секунду виконує роботу в один джоуль:

1 Вт = 1 Дж/1 с.

На практиці нерідко користуються такими одиницями, як гектоват, кіловат, мегават. Зв'язок між наведеними одиницями такий: 1 гВт = 10^2 Вт, 1 кВт = 10^3 Вт, 1 МВт = 10^6 Вт.

3.2. Енергія. Кінетична енергія. Теорема про зміну кінетичної енергії

Енергія

Рух — невід'ємний стан матерії. У фізиці вводять поняття *енергії — скалярної фізичної величини, яка є кількісною характеристикою різних форм руху матерії і відповідних їй взаємодій. Енергія є одним із фундаментальних понять.*

З різними формами руху матерії пов'язані *різні види енергії — механічна, теплова, енергія магнітного поля, хімічна, ядерна та ін.*

Поняття кінетичної енергії

У механіці кількісною мірою механічного руху даної системи, а також механічної взаємодії тіл між собою і з зовнішніми тілами є *механічна енергія, яка складається з кінетичної та потенціальної енергії.*

Нехай частинка масою m рухається під дією деякої сили $\vec{F}$. Беручи до уваги, що

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt,$$

елементарна робота цієї сили на переміщенні $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = m\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}.$$

Скалярний добуток $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \upsilon(d\vec{\upsilon})_\upsilon$, де $(d\vec{\upsilon})_\upsilon$ — проекція вектора $d\vec{\upsilon}$ на напрямок вектора $\vec{\upsilon}$. Ця проекція дорівнює $d\upsilon$ — приросту модуля вектора швидкості, тому $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \upsilon d\upsilon$ і елементарна робота:

$$\delta A = m\upsilon d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Очевидно, що за рахунок роботи результуючої сили відбувається приріст деякої величини, яка має назву *кінетичної енергії і пов'язана зі швидкістю тіла:*

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Таким чином:

$$dW_k = \delta A, \tag{3.3}$$

а при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = m\int_1^2 \upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = W_{k2} - W_{k1},\ \ W_{k2} - W_{k1} = A_{12}. \tag{3.4}$$

Теорема про зміну кінетичної енергії

Тобто *приріст кінетичної енергії частинки на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт, виконаних усіма силами, які діють на цю частинку. Це і є формулюванням теореми про зміну кінетичної енергії.*

Якщо $A_{12} > 0$, тоді $W_{k2} > W_{k1}$, кінетична енергія збільшується; коли $A_{12} < 0$, кінетична енергія зменшується.

Природно, що одиницею вимірювання енергії, як і роботи, є джоуль.

Рівняння (3.3) можна записати у вигляді:

$$\frac{\delta A}{dt} = \frac{dW_k}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} = P. \tag{3.5}$$

Це означає, що швидкість зміни кінетичної енергії визначається потужністю результуючої сили $\vec{F}$, яка діє на частинку.

Оскільки кінетична енергія залежить від швидкості частинок, а швидкість визначається відносно певної системи відліку, то і *кінетична енергія також залежить від вибору системи відліку.*

Рівняння (3.4) і (3.5) прийнятні як у інерціальних, так і в неінерціальних системах відліку. В останніх, крім сил, що діють на частинку з боку інших тіл (сил взаємодії), необхідно врахувати також сили інерції. Тому робота (потужність) у цих формулах є алгебраїчною сумою робіт (потужностей) як сил взаємодії, так і сил інерції.

3.3. Силове потенціальне поле. Консервативні та неконсервативні сили

Стаціонарне силове поле

Якщо на частинку в кожній точці простору діє сила, яка змінюється у просторі за деяким законом, то це означає, що частинка перебуває у полі сили, наприклад, у полі сили тяжіння Землі або в полі сил опору в потоці рідини (газу). За умов, коли *сила в кожній точці силового поля не залежить від часу, це поле називають стаціонарним*. У цьому випадку сила залежить тільки від положення частинки. Очевидно, що силове поле, стаціонарне в одній системі відліку, в іншій може виявитись нестаціонарним.

Потенціальне поле. Консервативні та неконсервативні сили

Робота, яку виконують сили поля при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2, в загальному випадку залежить від шляху. Але серед стаціонарних силових полів є такі, в яких робота не залежить від шляху, а залежить лише від положення цих точок. Такі поля називають *потенціальними*, а сили — *консервативними*. Якщо ця умова не виконується, то поле *непотенціальне*, а сили поля *неконсервативні.*

До останніх належать *дисипативні сили* (сила тертя, сила опору, які з'являються, коли тіло рухається у рідині або у газі) та *гіроскопічні сили*, які завжди залежать від швидкості і діють перпендикулярно швидкості (сила Лоренца, сила Коріоліса).

У потенціальному полі роботу консервативних сил по замкненому шляху можна поділити на дві довільні частини: 1*a*2 і 2*b*1 (рис. 3.3).

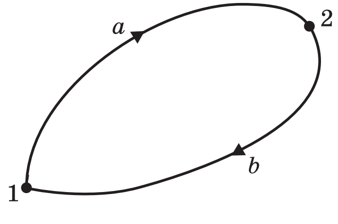


Рис. 3.3

Зважаючи на те, що поле потенціальне, $A_{1a2} = A_{1b2}$. З іншого боку, $-A_{1a2} = A_{2b1}$, звідки $A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$. Якщо робота сил поля по замкненому шляху дорівнює нулю, то робота цих сил на шляху між довільними точками 1 і 2 не залежить від форми шляху — поле потенціальне. Таким чином, *для консервативних сил можна навести два визначення: як сил, робота яких не залежить від форми траєкторії частинки, а залежить лише від початкового і кінцевого її положення; як сил, робота яких по замкненому шляху дорівнює нулю.*

3.4. Потенціальна енергія частинки

Нехай у стаціонарному полі консервативних сил частинка переміщується з різних точок B_i у точку O (рис. 3.4).

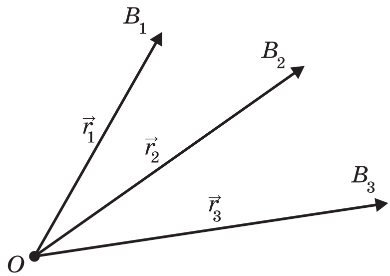


Рис. 3.4

Зважаючи на те, що сили консервативні, робота не залежить від форми траєкторії, тобто робота є деякою функцією радіуса-вектора точки $\vec{r}_i$. Ця функція має назву потенціальної енергії частинки в даному полі:

$$A_{BO} = \int_B^O \vec{F} d\vec{r} = W_p(r). \tag{3.6}$$

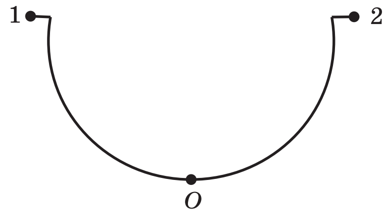


Рис. 3.5

Знайдемо роботу з переміщення частинки з т. 1 у т. 2. Нехай траєкторія пройде через точку O (рис. 3.5). Тоді роботу на шляху $1O2$ можна записати у вигляді: $A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. Враховуючи (3.6), маємо:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p. \tag{3.7}$$

Зв'язок роботи консервативних сил зі зміною потенціальної енергії

Робота консервативних сил при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2 дорівнює зміні потенціальної енергії зі знаком мінус.

$$A_{12} = -\Delta W_p = -\left(W_{p2} - W_{p1}\right).$$

Треба розрізняти поняття *зміни або приросту потенціальної енергії, коли* $\Delta W_p = W_{p2} - W_{p1}$, і поняття *зменшення потенціальної енергії*, коли $W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p$.

Отже, потенціальна енергія — це енергія, пов'язана з розташуванням частинки, тобто з координатами, і не залежить від її швидкості і траєкторії руху.

Значення потенціальної енергії залежить від вибору початкового положення системи. При заміні одного початку відліку на інший потенціальна енергія змінюється на сталу величину, тобто вона визначається не однозначно, а з точністю до довільної сталої. Однак слід зауважити, що звичайно нас цікавить не абсолютне значення потенціальної енергії, а тільки її різниця в різних станах, і в цьому випадку наявність довільної сталої не має значення.

Потенціальна енергія частинки в полі центральних сил

Знайдемо *потенціальну енергію частинки, яка перебуває у полі центральних сил.* Центральні сили залежать лише від відстані між взаємодіючими частинками і направлені вздовж прямої, яка з'єднує ці частинки. *Прикладом таких сил є гравітаційна сила, створена гравітаційним полем, та кулонівська сила.*

Нехай у точці O знаходиться нерухома частинка масою m_2 (рис. 3.6), що створює гравітаційне поле, в якому рухається частинка масою m_1. Гравітаційна сила взаємодії цих двох частинок дорівнює

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}. \tag{3.7}$$

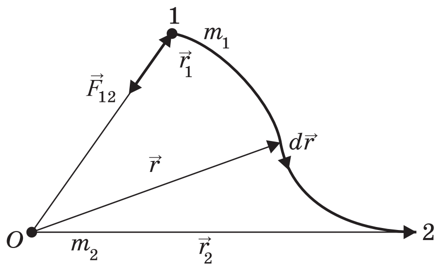


Рис. 3.6

Розрахуємо роботу гравітаційної сили при переміщенні частинки масою m_1 з точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -Gm_1 m_2 \int_1^2 \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{r} = -Gm_1 m_2 \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_1}\right) + G\left(\frac{m_1 m_2}{r_2}\right).$$

Тут враховано, що $\vec{r} d\vec{r} = r dr$. З (3.7) випливає, що потенціальна енергія частинки m_1 у гравітаційному полі, створеному частинкою m_2, дорівнює

$$W_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенціальна енергія частинки в полі пружних сил

Знайдемо *потенціальну енергію частинки в полі пружних сил.*

Пружна сила $\vec{F} = -k\vec{r}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор частинки; k — характеристика пружності.

Робота переміщення частинки по довільному шляху з точки 1 в точку 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\int_1^2 k\vec{r} d\vec{r} = -\int_1^2 kr dr = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}.$$

З урахуванням (3.7) потенціальна енергія частинки в полі пружних сил:

$$W_p(r) = \frac{kr^2}{2}.$$

Якщо пружна сила діє тільки в напрямку осі x, тоді: $W_p(x) = \dfrac{kx^2}{2}$.

Потенціальна енергія частинки в полі тяжіння

Потенціальну енергію частинки масою m в однорідному полі сил тяжіння поблизу поверхні Землі визначимо аналогічно попереднім двом прикладам.

Сила тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ ($\vec{g}$ — прискорення вільного падіння) має однакову величину і напрямок у будь-якій точці між висотами h_1 і h_2 (рис. 3.7).

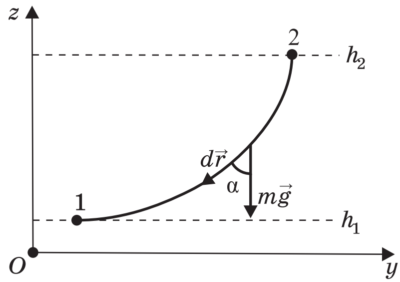


Рис. 3.7

Проекція сили тяжіння на вісь Oz, яка напрямлена вгору, дорівнює $F_z = -mg$, тоді $\delta A = -mgdr\cos\alpha = -mgdz$ ($dr\cos\alpha = dz$).

Робота сили тяжіння на шляху від точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = -\int_{h_1}^{h_2} mgdz = mg(h_1 - h_2).$$

Тоді потенціальна енергія частинки $W_p = mgh$, де h — висота підйому тіла над поверхнею Землі, енергія відраховується від поверхні Землі, де $W_p = 0$.

3.5. Взаємозв'язок сили та потенціальної енергії

Нехай частинка здійснила переміщення $d\vec{r}$ під дією сили $\vec{F}$. Робота цієї сили дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r}; \quad \delta A = -dW_p; \quad \vec{F}d\vec{r} = -dW_p.$$

Якщо записати роботу через проекції вектора сили і переміщення, то:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dW_p.$$

Беремо до уваги, що координати точки x, y, z — незалежні змінні. Якщо зафіксувати координати y, z, то одержимо $F_x = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\right)$, аналогічно для $x, z = \text{const}$ маємо $F_y = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial y}\right)$, для $x, y = \text{const}$ $F_z = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial z}\right)$, тоді:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{3.8}$$

Тобто, *якщо відома потенціальна енергія W_p (x, y, z), для визначення сили необхідно знайти частинні похідні потенціальної енергії від координат.*

Вектор у дужках (3.8) називається *градієнтом функції* W_p і позначається grad W_p:

$$\vec{F} = -\text{grad}W_p.$$

Нерідко цю формулу записують у вигляді:

$$\vec{F} = -\nabla W_p;$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

де ∇ — оператор Гамільтона.

Отже, *сила, яка діє на частинку в потенціальному полі, дорівнює взятому зі знаком мінус градієнту потенціальної енергії цієї частинки в даній точці поля.*

Знак «мінус» вказує на те, що напрямки сили і градієнта потенціальної енергії протилежні. *Вектор сили напрямлений у бік максимального зменшення потенціальної енергії.*

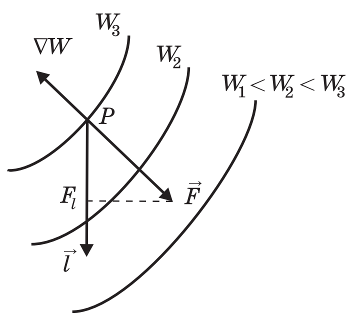


Рис. 3.8

Смисл градієнта стане більш зрозумілим, якщо ввести поняття *еквіпотенціальної поверхні — поверхні, у всіх точках якої потенціальна енергія має одне і те ж значення.* Кожному значенню потенціальної енергії відповідає своя еквіпотенціальна поверхня (рис. 3.8).

Напрямок сили $\vec{F}$ збігається з напрямком максимальної зміни (зменшення) потенціальної енергії, він нормальний до еквіпотенціальних поверхонь. У довільному напрямку $\vec{l}$ проекція сили в точці P на цей напрям $\vec{l}$ дорівнюватиме:

$$F_l = -\frac{\partial W_p}{\partial l}.$$

3.6. Повна механічна енергія частинки і системи частинок. Закон збереження механічної енергії системи

Закон збереження механічної енергії в полі консервативних сил

Нехай на частинку діють тільки консервативні сили, тоді робота, здійснена над частинкою, з одного боку, дорівнює зменшенню потенціальної енергії (3.7). З іншого боку, за теоремою про зміну кінетичної енергії, вона дорівнює зміні кінетичної енергії (3.4). Тоді

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{k2} - W_{k1}, \quad W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2}. \tag{3.9}$$

Сума кінетичної і потенціальної енергій $W_k + W_p = W$ має назву повної механічної енергії частинки. З (3.9) випливає:

$$W_k + W_p = W = \text{const}, \qquad W_1 = W_2 .$$

Тобто одержуємо *закон збереження механічної енергії для частинки: енергія частинки, яка перебуває в полі консервативних сил, залишається сталою і є інтегралом руху.*

Розглянемо тепер систему, яка складається з N частинок, що не взаємодіють між собою та перебувають у полі консервативних сил. Кожна з них має кінетичну енергію $W_{ki} = (m_i \upsilon_i^2)/2$ і потенціальну $W_{pi} = W_{pi}(x_i, y_i, z_i)$.

Для кожної частинки виконується закон збереження енергії:

$$W_i = W_{ki} + W_{pi} = \text{const}.$$

Після підсумування за всіма частинками одержимо:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} W_{ki} + \sum_{i=1}^{N} W_{pi} = W_k + W_p = \text{const},$$

де $W_k = \sum_{i=1}^{N} W_{ki}$, $W_p = \sum_{i=1}^{N} W_{pi}$ — сумарні кінетична та потенціальна енергія системи частинок відповідно.

Повна механічна енергія — адитивна величина, яка для замкненої системи не взаємодіючих частинок, на які діють лише консервативні сили, залишається сталою величиною — це закон збереження енергії для даної системи.

Закон збереження енергії в загальному випадку

Розглянемо загальний випадок, коли система складається з N взаємодіючих тіл, між якими діють консервативні і неконсервативні сили, також на систему діють зовнішні сили (консервативні і неконсервативні).

Якщо кожне тіло — матеріальна точка масою m_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), то для кожного тіла можна записати другий закон Ньютона:

$$m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{конс}} + \vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{неконс}} + \vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{конс}} + \vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{неконс}},$$

де $\vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{конс}} = \sum \vec{F}_{ik}^{\,\text{конс}}$ — сума внутрішніх консервативних сил, що діють на i-те тіло; $\vec{F}_{ik}^{\,\text{конс}}$ — сила, діюча на i-те тіло з боку k-го тіла; $\vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{неконс}}$ — сума внутрішніх неконсервативних сил, діючих на i-те тіло; $\vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{конс}}$ — сума зовнішніх консервативних і $F_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{неконс}}$ — неконсервативних сил, що діють на i-те тіло. Завдяки цим силам кожне з тіл системи за час dt зміщується на $d\vec{r}_i$.

Помножимо кожне i-те рівняння на $d\vec{r}_i = \vec{\upsilon}_i dt$ і додамо всі N рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \vec{\upsilon}_i dt =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{конс}} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{неконс}} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{конс}} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{неконс}} d\vec{r}_i. \qquad (3.10)$$

Ліва частина рівняння (3.10) дорівнює зміні кінетичної енергії системи:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i = d\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = dW_k.$$

Перший доданок правої частини дорівнює роботі консервативних сил, тобто зменшенню потенціальної енергії взаємодії частинок між собою:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{конс}}\,d\vec{r}_i=-dW_{p\,\text{вз}}.$$

Другий доданок — це робота внутрішніх неконсервативних сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\,\text{внутр}}^{\,\text{неконс}}\,d\vec{r}_i=A_{\text{внутр}}^{\text{неконс}}.$$

Згідно з (3.7) третій доданок (3.10) — зменшення потенціальної енергії системи в зовнішньому полі консервативних сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{конс}}d\vec{r}_i=-dW_{p\,\text{зовн}}.$$

Нарешті, останній доданок дорівнює роботі неконсервативних зовнішніх сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\,\text{зовн}}^{\,\text{неконс}}\,d\vec{r}_i=dA_{\text{зовн}}^{\text{неконс}}.$$

Тепер рівняння (3.10) можна записати так:

$$d\left(W_k+W_{p\text{вз}}+W_{p\,\text{зовн}}\right)=dA_{\text{зовн}}^{\text{неконс}}+dA_{\text{внутр}}^{\text{неконс}}.$$

Величина $W_k+W_{p\text{вз}}+W_{p\text{зовн}}$ називається повною механічною енергією системи. *Якщо неконсервативні сили відсутні, повна енергія системи залишається сталою. Повна механічна енергія системи тіл, на які діють лише консервативні сили, залишається сталою — закон збереження механічної енергії.*

Для замкненої системи тіл, коли $F_{\text{зовн}}=0$

$$W=W_k+W_{p\,\text{вз}}=\text{const}.$$

Закон збереження механічної енергії системи можна сформулювати так: *повна механічна енергія замкненої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається сталою*.

Якщо в замкненій системі, крім консервативних сил, діють і неконсервативні сили, то повна механічна енергія системи не зберігається. Її зміна дорівнює роботі неконсервативних сил:

$$dW=d(W_k+W_{p\,\text{вз}})=dA_{\text{внутр}}^{\text{неконс}},$$

$$W_2-W_1=A_{12}^{\text{неконс}}.$$

Оскільки робота неконсервативних сил (сил опору) завжди від'ємна, то механічна енергія цієї системи зменшується, відбувається дисипація енергії, пов'язана з перетворенням механічної енергії в інші форми.

Закон збереження і перетворення енергії є одним із основних законів природи і носить *характер заборони*: неможливі процеси, під час яких порушується цей закон, неможливе створення вічного двигуна першого роду, який постійно виконував би роботу без споживання енергії ззовні.

Цей закон пов'язаний з *однорідністю часу*, тобто незалежно від моменту початку процесу всі механічні процеси відбуваються однаково.

Зауважимо, що потенціальна енергія не змінюється при переході від однієї інерціальної системи до іншої. В той же час значення кінетичної енергії залежить від інерціальної системи. Тому повна енергія, що дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії, має різне значення в різних інерціальних системах відліку. Але закон збереження механічної енергії виконується в будь-якій інерціальній системі відліку.

3.7. Зіткнення двох тіл

Яскравим прикладом застосування законів збереження є процес зіткнення двох тіл.

1. *Абсолютно пружний удар* — удар, при якому механічна енергія тіл, що стикаються, зберігається, тобто вона не перетворюється в інші види енергії. Нехай дві абсолютно пружні кулі масами m_1 і m_2 рухаються до удару поступально зі швидкостями $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$, направленими по осі x, що проходить через центри куль (рис. 3.9).

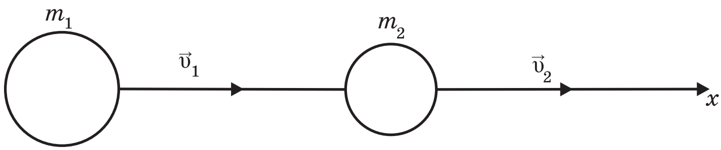


Рис. 3.9

Визначимо швидкості куль після зіткнення $\vec{\upsilon}_1'$ і $\vec{\upsilon}_2'$ за умови, що до удару $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

У процесі зіткнення система тіл може вважатися замкненою і консервативною, тобто виконуються закони збереження енергії й імпульсу. Потенціальна енергія системи до і після зіткнення однакова і може бути прирівняна до нуля.

У цьому випадку *закон збереження енергії* має вигляд:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_1'^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}. \qquad (3.11)$$

Закон збереження імпульсу:

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2=m_1\vec{\upsilon}_1'+m_2\vec{\upsilon}_2'.$$

Проекція цього рівняння на вісь x дорівнює:

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2' \qquad (3.12)$$

(вважаємо, що кулі після зіткнення рухаються в тому самому напрямку).

Після перетворення рівнянь (3.11) і (3.12) одержуємо:

$$m_1(\upsilon_1^2-\upsilon_1'^2)=m_2(\upsilon_2'^2-\upsilon_2^2);$$

$$m_1(\upsilon_1-\upsilon_1')=m_2(\upsilon_2'-\upsilon_2).$$

Поділимо ці рівняння одне на одне:

$$\upsilon_1+\upsilon_1'=\upsilon_2'+\upsilon_2;$$

$$\upsilon_1'=\upsilon_2'+\upsilon_2-\upsilon_1. \qquad (3.13)$$

Підставимо (3.13) в (3.12) і одержимо:

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon_2'+m_1\upsilon_2-m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2'.$$

Швидкості куль після удару:

$$\upsilon_1'=\frac{2m_2\upsilon_2+(m_1-m_2)\upsilon_1}{m_1+m_2}; \quad \upsilon_2'=\frac{2m_1\upsilon_1+(m_2-m_1)\upsilon_2}{m_1+m_2}. \qquad (3.14)$$

Розглянемо окремі випадки:

а) $m_1=m_2$; $\upsilon_2'=\upsilon_1$; $\upsilon_1'=\upsilon_2$ — кулі однакової маси обмінюються швидкостями;

б) $m_1=m_2$; $\upsilon_2=0$; $\upsilon_1'=0$; $\upsilon_2'=\upsilon_1$ — друга куля до удару була нерухома, після удару перша куля зупинилась, а друга рухатиметься в тому ж напрямку, що і перша до удару;

в) $m_2>>m_1$; $\upsilon_1'=2\upsilon_2-\upsilon_1$; $\upsilon_2'\approx\upsilon_2$ — друга куля практично не змінила свою швидкість;

г) $m_2>>m_1$; $\upsilon_2=0$; $\upsilon_1'=-\upsilon_1$, $\upsilon_2'=0$ — перша куля відбивається від нерухомої масивної кулі і рухається в зворотному напрямку з початковою швидкістю.

2. *Абсолютно непружний удар* — зіткнення двох тіл, у результаті якого вони об'єднуються і рухаються далі як єдине ціле. При цьому частина механічної енергії переходить у внутрішню при деформації. Закон збереження механічної енергії не виконується. Зберігається сумарна енергія — механічна і внутрішня.

Закон збереження імпульсу при взаємодії двох тіл, що створюють замкнену систему, має вигляд:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

в скалярному виді $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u,$

де u — швидкість системи після взаємодії:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.15}$$

Зміна кінетичної енергії тіл до і після удару:

$$\Delta W_k = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \Delta W_{\text{вн}}. \tag{3.16}$$

Зменшення механічної енергії системи двох куль супроводжується зростанням внутрішньої енергії цієї системи $\Delta W_{\text{вн}}$.

$$\Delta W_{\text{вн}} = -\Delta W_k.$$

З урахуванням (3.15) з (3.16) одержимо:

$$\Delta W_{\text{вн}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2. \tag{3.17}$$

3.8. Умови рівноваги механічної системи

На основі закону збереження механічної енергії можна сформулювати загальні умови рівноваги тіла або системи тіл.

Нехай тіло (частинка) рухається в одновимірному стаціонарному полі, де її потенціальна енергія має вигляд (рис. 3.10). За умов відсутності зовнішніх і неконсервативних сил повна механічна енергія частинки W є величиною сталою.

Повна енергія частинки дорівнює $W = W_k + W_p$, її кінетична енергія не може бути від'ємною, тобто повна енергія повинна бути більшою за потенціальну (або дорівнювати їй): $W \geq W_p$ (знак рівності буде при $W_k = 0$). Якщо частинка рухається у потенціальному полі $W_p(x)$, графік якого зображений на рис. 3.10, а її повна енергія дорівнює W, то вона може перебувати в областях із координатами $x_1 \leq x \leq x_3$ (здійснює коливання) та $x \geq x_5$. Але ця частинка не може потрапити

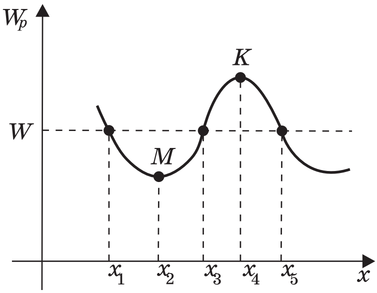


Рис. 3.10

в області $0 \le x \le x_1$ та $x_3 \le x \le x_5$, які називаються *потенціальними бар'єрами*. У випадку, коли частинка рухається в обмеженій області поля, це означає, що вона замкнена в *потенціальній ямі* (в нашому випадку між x_1 і x_3). Оскільки $W_p = W_p(x)$, то можна одержати величину сили, що діє на частинку в залежності від координати:

$$F = -\frac{dW_p}{dx}.$$

Відомо, що похідна від функції дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої. Тоді сила $F = 0$ в точках з координатами x_2 та x_4 (точках екстремумів). Якщо частинка знаходиться в точці M з координатою x_2, то її стан відповідає *стійкій рівновазі*. В цьому положенні значення потенціальної енергії мінімальне. Стан у точці K з координатою x_4 — *стан нестійкої рівноваги*. В цьому випадку потенціальна енергія теж має екстремум, але він відповідає її максимуму.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Яка фізична величина називається механічною роботою? Запишіть роботу сили на малому та нескінченно малому переміщенні.
2. Запишіть вирази для роботи при різних формах задання руху.
3. Яка фізична величина називається потужністю? Середньою потужністю? Миттєвою потужністю?
4. Як миттєва потужність пов'язана із діючою силою і швидкістю руху?
5. Чи може сила, завдяки якій тіло набуває доцентрового прискорення, виконувати роботу?
6. Чи залежить робота, що здійснюється над тілом, від вибору системи відліку?

7. Який зв'язок кінетичної енергії системи з роботою діючих на систему сил?
8. Чи може кінетична енергія бути від'ємною? А зміна кінетичної енергії? Поясніть.
9. Чим характеризуються консервативні і неконсервативні сили? Чим вони відрізняються?
10. Від чого залежить потенціальна енергія механічної системи?
11. Який зв'язок між потенціальною силою, що діє на матеріальну точку, і потенціальною енергією цієї точки?
12. Як потенціальна енергія пов'язана з роботою консервативних сил?
13. Як розрахувати роботу сили пружності?
14. Визначте роботу сили гравітаційної взаємодії двох точкових тіл.
15. Розрахуйте роботу сили тяжіння. Як вона пов'язана з потенціальною енергією?
16. Яка система називається замкненою?
17. Сформулюйте закон збереження механічної енергії в загальному випадку, а також при дії тільки консервативних сил.
18. Що таке абсолютно пружний, абсолютно непружний і частково пружний удари? Які закони збереження виконуються в кожному з цих випадків?

Завдання для експрес-контролю

1. Тіло масою $m = 0{,}5$ кг кидають зі швидкістю $\upsilon_0 = 10$ м/с під кутом $\alpha = 30°$ до обрію. Визначити кінетичну, потенціальну і повну енергію тіла в найвищій точці траєкторії. Опором повітря знехтувати.

2. Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с. Визначити, на якій висоті потенціальна енергія дорівнює кінетичній. Опором повітря знехтувати.

3. Куля масою 10 г підлітає до дошки зі швидкістю $\upsilon_0 = 500$ м/с і, пробивши її, вилітає зі швидкістю $\upsilon = 300$ м/с. Знайти середню силу опору, якщо товщина дошки $d = 1$ см.

4. Знайдіть роботу, яку треба виконати, щоб збільшити швидкість руху тіла масою 1 кг з 2 м/с до 6 м/с на шляху довжиною 10 м. На всьому шляху діє стала сила тертя, яка дорівнює 0,2 Н.

5. Нехай тіло масою m розташоване у потязі, що рухається зі швидкістю u. Далі тіло кидають зі швидкістю υ відносно потягу в напрямку його руху. Чому дорівнює кінетична енергія тіла відносно Землі і відносно потягу?

6. Два автомобілі з двигунами потужністю P_1 і P_2 можуть рухатись зі швидкостями υ_1 і υ_2 відповідно. Чому дорівнюватиме швидкість автомобілів, якщо їх жорстко з'єднати?

7. Діюча на частинку сила збільшується пропорційно квадрату відстані до початкового положення $F = kx^2$. Наскільки зміниться потенціальна енергія частки при її переміщенні з точки $x_1 = 0$ в точку $x_2 = x$?

8. Як рухатимуться дві однакові кульки після центрального абсолютно пружного удару за відсутності зовнішніх сил, якщо одна з них до удару не рухалась?

9. Тіло масою m кинули вниз з висоти h над поверхнею води зі швидкістю υ_0. Знайдіть роботу, яку виконала сила опору повітря, якщо тіло впало на поверхню води зі швидкістю υ.

10. У брусок масою M, що лежить на ідеально гладкій поверхні, вдаряється і прилипає кулька з пластиліну масою m, яка летить горизонтально зі швидкістю υ. Яка кількість теплоти виділяється при ударі?

Приклади розв'язання задач

1. Залежність сили від координати має вигляд $\vec{F} = (-kx + ax^2 + bx^4)\vec{i}$. Чи буде ця сила консервативною? Якщо ця сила консервативна, то визначте вид функції потенціальної енергії.

Розв'язання

Робота консервативної сили не залежить від шляху, по якому рухається тіло, а залежить тільки від положення початкової і кінцевої точок.

Розрахуємо роботу сили:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} d x\vec{i} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx + ax^2 + bx^4) dx = \left(-\frac{kx^2}{2} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^5}{5} \right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \left[-\frac{k(x_2^2 - x_1^2)}{2} + \frac{a(x_2^3 - x_1^3)}{3} + \frac{b(x_2^5 - x_1^5)}{5} \right].$$

Очевидно, що робота сили залежить тільки від положення точок x_1 і x_2, тобто сила є консервативною.

У цьому випадку можна розрахувати потенціальну енергію, яка для сили, що залежить від однієї координати, має вигляд:

$$W_p(x) = -\int F(x) dx;$$

$$W_p(x) = -\int (-kx + ax^2 + bx^4) dx = \frac{kx^2}{2} - \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^5}{5} + \text{const}.$$

2. Потенціальна енергія частинки в центральному силовому полі задана рівнянням

$$W_p(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r},$$

де $A = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж·м^2; $B = 3 \cdot 10^{-4}$ Дж·м; r — відстань від центра поля до будь-якої точки поля. Знайти ті значення r, при яких потенціальна енергія і сила, що діє на частинку, мають екстремальні значення; знайти ці екстремальні значення; побудувати графіки залежності $W_p(r)$ та $F_r(r)$, де F_r — проекція вектора $\vec{F}$ на напрямок радіуса-вектора $\vec{r}$.

Розв'язання

Частинка знаходиться у потенціальному полі. Потенціальна енергія частинки в цьому полі — задана функція однієї координати r. Проекція сили на напрямок радіуса-вектора $\vec{r}$:

$$F_r = -\frac{dW_p}{dr}.$$

Для заданої функції $W_p(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$

$$F_r = 2\frac{A}{r^3} - \frac{B}{r^2}.$$

Оскільки A та B — додатні величини, то перший член відповідає силі відштовхування; другий — силі притягання.

Щоб знайти екстремальні значення потенціальної енергії, необхідно знайти такі значення r, при яких перша похідна $\frac{dW_p}{dr} = 0$, тобто

$$\frac{dW_p}{dr} = -2\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2},$$

$$-2\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2} = \frac{1}{r^3}(-2A + Br) = 0.$$

Звідси $\frac{dW_p}{dr} = 0$, при $r = r_1 = \frac{2A}{B} = 4 \cdot 10^{-2}$ м, $W_{p1} = W_p(r_1) = -3{,}8 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Очевидно, що $\frac{dW_p}{dr} > 0$ при r не набагато більшим за r_1.

Отже, знайдене екстремальне значення $W_p = W_{p_{\min}}$ і при $r = r_1$ дана частинка перебуває в стані рівноваги.

При $W_p(r) = 0$ (крім $r \to \infty$):

$$\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} = 0\,; \qquad \frac{1}{r^2}(A - Br) = 0$$

при $r = r_0 = \dfrac{A}{B} = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $W_p(r_0) = 0.$

Графік $W_p(r)$ наведений на рис. 1, *а*.

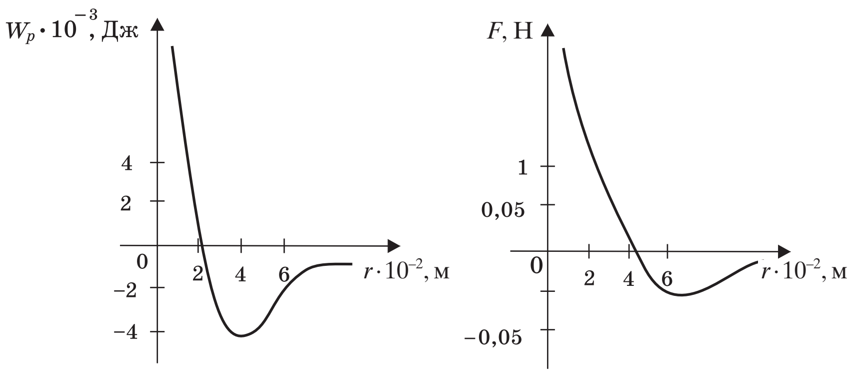
Аналогічно для $F_r(r)$ знайдемо такі r, при яких $\dfrac{dF_r}{dr} = 0$:

$$\frac{dF_r}{dr} = -\frac{6A}{r^4} + \frac{2B}{r^3} = \frac{2}{r^4}(-3A + Br),$$

$$\frac{2}{r^4}(-3A + Br) = 0,$$

звідки $\dfrac{dF_r}{dr} = 0$ при $r = r' = \dfrac{3A}{B} = 6 \cdot 10^{-2}$ м. При цьому $F_r(r') = -0{,}028$ Н. Знак «–» показує, що при $r = r'$ на частинку діють сили притягання.

Значення r, при яких $F_r = 0$, вже відомі; $F_r = 0$ при $r \to \infty$ і при $r = r_1$. Графік $F_r(r)$ наведено на рис. 1, *б*.



а *б*

Рис. 1

3. Невелике тіло масою m піднімається без початкової швидкості з поверхні Землі під дією двох сил: сили $\vec{F}$, що змінюється з висотою підйому як $\vec{F} = -2m\vec{g}(1 - ay)$, де a — стала величина, $a > 0$, і сили тяжіння $m\vec{g}$. Знайти роботу сили $\vec{F}$ на першій половині шляху підйому і відповідний приріст потенціальної енергії в полі тяжіння Землі.

Розв'язання

Виберемо початок координат і нульовий рівень потенціальної енергії на поверхні Землі. Вісь *y* напрямлена вертикально вгору.

Спочатку знайдемо, на яку висоту *h* піднялось тіло. На початку і в кінці руху швидкість дорівнює нулю, що означає, що зміна кінетичної енергії $W_{k_2} - W_{k_1}$, а отже, і робота A, яка дорівнює алгебраїчній сумі робіт сили $\vec{F}$ і сили тяжіння $m\vec{g}$, теж дорівнює нулю:

$$W_{k_2} - W_{k_1} = A_F + A_{mg} = 0.$$

$$A = \int_0^h (\vec{F} + m\vec{g})\vec{j}dy = \int_0^h (F_y - mg)dy = mg\int_0^h (1-2ay)dy = mgh(1-ah) = 0,$$

звідки $1 - ah = 0$, тобто $h = \dfrac{1}{a}$.

($\vec{j}$ — одиничний вектор у напрямку осі *y*.)

Робота сили $\vec{F}$ на першій половині шляху підйому дорівнює

$$A_F = \int_0^{h/2} F_y dy = 2mg\int_0^{h/2} (1-ay)dy = 2mg\left(y - \frac{ay^2}{2}\right)\Bigg|_0^{h/2} = 2mg\left(\frac{h}{2} - \frac{ah^2}{8}\right).$$

Якщо $h = \dfrac{1}{a}$, то $A = \dfrac{3mg}{4a}$.

Відповідний приріст потенціальний енергії $\Delta W_p = mg\dfrac{h}{2} = \dfrac{mg}{2a}$.

4. Камінь масою *m* кинули з поверхні Землі з початковою швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ під кутом α до обрію (рис. 2). Нехтуючи опором повітря, визначити потужність сили тяжіння через *t* секунд після початку руху, а також роботу цієї сили за перші *t* секунд руху.

Розв'язання

Швидкість каменя через *t* секунд після початку руху дорівнює

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t.$$

Потужність, яку розвиває сила тяжіння в цей момент

$$P = m\vec{g}\vec{\upsilon} = m(\vec{g}\vec{\upsilon}_0 + g^2t).$$

Але $\vec{g}\vec{\upsilon}_0 = g\upsilon_0\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ $= -g\upsilon_0\sin\alpha$, як наслідок

$$P = mg(gt - \upsilon_0\sin\alpha).$$

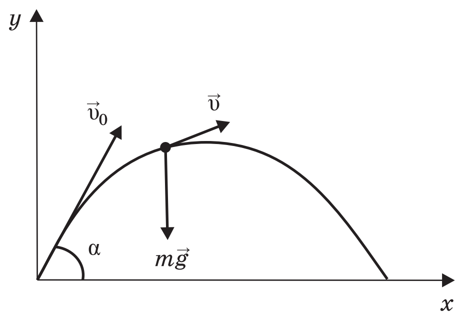


Рис. 2

Очевидно, що при $t < t_0 = \frac{\upsilon_0}{g}\sin\alpha$ потужність $P < 0$, а при $t > t_0$ навпаки — $P > 0$. (У момент часу $t_0 = t$ камінь досяг максимальної висоти, де $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt = 0$.)

Робота сили тяжіння за перші t секунд

$$A = \int_0^t P dt = mg\int_0^t (gt - \upsilon_0 \sin\alpha)dt = mgt(\frac{gt}{2} - \upsilon_0 \sin\alpha)$$

5. Куля масою m = 2,6 кг падає без початкової швидкості з висоти h = 55 см на вертикально поставлену пружину, яка при ударі стискається (рис. 3).

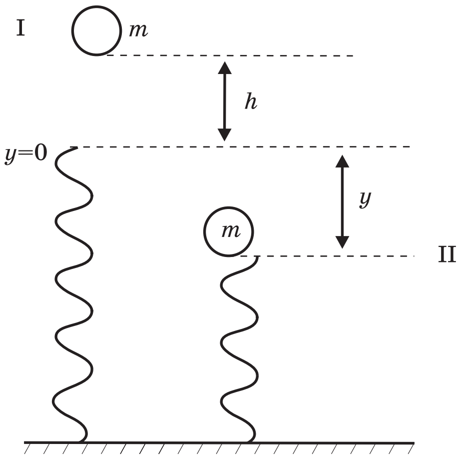


Рис. 3

Якщо у пружини коефіцієнт пружності $k = 72$ Н/м, то на яку максимальну довжину y стискається пружина? Всі відстані вимірюються від точки стикання кулі з недеформованою пружиною (це нульовий рівень потенціальної енергії).

Розв'язання

У системі існують тільки консервативні сили (сили пружності і гравітаційні сили), тому виконується закон збереження механічної енергії $W_1 = W_2$.

Нехай максимальна величина деформації дорівнює y. Повна енергія системи «куля — пружина» в початковому стані (I) дорівнює потенціальній енергії кулі:

$$W_1 = mgh.$$

При максимальному стисканні пружини повна енергія системи (стан II)

$$W_2 = \frac{ky^2}{2} - mgy,$$

де $\frac{ky^2}{2}$ — потенціальна енергія стиснутої пружини; mgy — потенціальна енергія кулі.

Згідно з законом збереження енергії

$$mgh = \frac{ky^2}{2} - mgy;$$

$$\frac{ky^2}{2} - mgy - mgh = 0,$$

звідки $y = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k} = -0{,}36$ м.

Беремо корінь зі знаком мінус, тому що y повинно бути менше нуля ($y < 0$).

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Залежність потенціальної енергії частинки від r має вигляд: $W_p = B/r$, де $r = 10^{-2}$ м — відстань від центра поля до цієї частинки; $B = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж·м. Знайти силу F, що діє на цю частинку, та роботу, яка здійснюється над частинкою при її переміщенні з точки $(1, 2, 3)$ в точку $(2, 3, 4)$.

Відповідь: $F = 2$ Н; $A = 16{,}4$ мкДж.

3.2. Залежність потенціальної енергії частинки від r має вигляд: $W_p = Br^2/2$, де $r = 10^{-2}$ м — відстань від центра поля до цієї частинки; $B = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж/м^2 ($B > 0$). Знайти силу F, яка діє на частинку, та роботу A, яка здійснюється над частинкою при її переміщенні із точки $(1, 2, 3)$ в точку $(2, 3, 4)$.

Відповідь: $|F| = 2 \cdot 10^{-6}$ Н; $A = -1{,}5$ мДж.

3.3. Залежність потенціальної енергії частинки від r має вигляд: $W_p = \frac{B}{r^3} - \frac{C}{r^2}$, де B і C — додатні константи; $B = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж·м^3; $C = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж·м^2. Побудувати графік залежності W_p від r.

3.4. Залежність потенціальної енергії частинки від r має вигляд: $U = \frac{B}{r^2} - \frac{C}{r}$, де $B = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж·м², $C = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж·м. Чи має ця частинка стан рівноваги по відношенню до зміщення в радіальному напрямку? Якщо так, то чому при цьому дорівнює r?

Відповідь: так, при $r = 6 \cdot 10^{-2}$ м.

3.5. Електрон рухається по колу в полі центральної сили, яка обернено пропорційна квадрату відстані від ядра. В якому співвідношенні перебувають у цьому випадку кінетична W_k, потенціальна W_p та повна W енергії електрона?

Відповідь: $W_p = -2W_k$; $W = -W_k$; $W = W_p/2$.

3.6. Залежність потенціальної енергії частинки від r має вигляд: $W_p = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$, де $A = 2 \cdot 10^{-6}$ Дж·м²; $B = 4 \cdot 10^{-4}$ Дж·м; r — відстань від центра поля до цієї частинки. Знайти, при якому r_0 частинка перебуватиме у рівновазі.

Відповідь: $r_0 = 10^{-2}$ м.

3.7. Залежність потенціальної енергії частинки від r має вигляд: $W_p = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$, де $A = 2 \cdot 10^{-6}$ Дж·м²; $B = 4 \cdot 10^{-4}$ Дж·м; $r = 10^{-2}$ м — відстань від центра поля до місця знаходження цієї частинки. Знайти максимальне значення сили притягання, побудувати графіки залежностей $W_p(r)$ та $F_r(r)$ — проекції сили на радіус-вектор.

Відповідь: $F_{\max} = \frac{16}{27}$ Н.

3.8. Електрон в атомі водню рухається еліптичною орбітою. Сила притягання електрона до ядра дорівнює $F = B/r^2$, де $B = 2{,}3 \cdot 10^{-28}$ Н·м²; r — відстань від ядра до електрона. Ядро знаходиться в одному із фокусів еліпса, більша піввісь еліпса $a = 2{,}1 \cdot 10^{-10}$ м. Знайти повну енергію електрона в атомі водню.

Відповідь: $W = -5{,}5 \cdot 10^{-17}$ Дж.

3.9. Парашутист масою $m = 100$ кг перебуває під дією сили опору повітря, яка змінюється згідно з рівнянням: $F_0 = -k\upsilon$, де $k = 20$ кг/с. Парашут було розкрито в момент часу $t = 0$, $\upsilon = 0$. Визначити роботу сили опору повітря, що діє на парашутиста за перші 3 секунди його руху.

Відповідь: $A \approx 10^4$ Дж.

3.10. Двигун гальмувальної системи розвиває силу тяги, пропорційну часу: $F = -kt$, де $k = 500$ Н/с. Нехтуючи тертям, визначити, через який час від моменту вмикання двигуна тіло масою $m = 10^4$ кг, на якому встановлено цей двигун, зупиниться. В момент вмикання двигуна швидкість тіла дорівнювала $\upsilon_0 = 10^3$ м/с. Маса двигуна значно менша за масу тіла. Визначити роботу гальмувального двигуна за першу секунду його роботи.

Відповідь: $A \approx 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж, $t = 200$ с.

3.11. Тіло, що перебувало у стані спокою в точці з координатами (2, 4, 6) м, перемістилось у точку з координатами (3, 6, 9) м під дією сили $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Знайти кінетичну енергію в кінцевій точці.

Відповідь: $W_k = 14$ Дж.

3.12. Потенціальна енергія тіла дорівнює $W_p = a(x^2 + y^2 + z^2)$, де $a > 0$ — стала величина. Тіло починає рухатися з точки з координатами (3, 3, 3) м. Знайти кінетичну енергію тіла в точці з координатами $(1, 1, 1)$ м.

Відповідь: $W_k = 14a$ Дж.

3.13. На тіло масою m діє сила F. Встановити залежність кінетичної енергії тіла від часу, якщо при $t = 0$ $\upsilon_0 = 0$.

Відповідь: $W_k = \dfrac{F^2 t^2}{2m}$.

3.14. Тіло масою m рухається без початкової швидкості з похилої площини. Знайти залежність потужності сили тертя, що діє на тіло, від швидкості. Кут нахилу площини α, коефіцієнт тертя μ.

Відповідь: $P(t) = -mg\mu\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)gt$.

3.15. На гладенькій горизонтальній поверхні лежать два тіла різної маси, з’єднані між собою стиснутою пружиною. Потенціальна енергія пружини $W_p = 80$ Дж. Після того, як пружину відпустили, кінетична енергія тіла меншої маси досягла значення $W_k = 60$ Дж.

Визначити співвідношення мас тіл.

Відповідь: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{3}$.

3.16. Куля, рухаючись із швидкістю $\upsilon_0 = 900$ м/с, пробиває стінку товщиною 50 см і вилітає з неї зі швидкістю $\upsilon = 350$ м/с. Знайти час руху кулі в стінці, вважаючи силу опору стінки пропорційною кубу швидкості руху кулі.

Відповідь: $t = 1 \cdot 10^{-3}$ с.

3.17. Визначити роботу A, яку здійснюють сили гравітаційного притягання Землі, якщо тіло масою m = 1 кг впаде на поверхню Землі: а) з висоти h, що дорівнює радіусу Землі; б) з нескінченно віддаленої точки. Радіус Землі і прискорення вільного падіння на її поверхні вважати відомими.

Відповідь: $A_1 = 31{,}2$ МДж; $A_2 = 62{,}4$ МДж.

3.18. Тіло починає ковзати з початковою швидкістю υ_0 вгору по похилій площині, яка має довжину l і висоту h. Коефіцієнт тертя μ. Який шлях S пройде тіло до зупинки?

Відповідь: $S = \dfrac{\upsilon_0^2 l}{2g(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2})}$.

3.19. Тіло зісковзує з похилої площини висотою h = 2 м та кутом нахилу до обрію $\alpha = 45°$. Визначити коефіцієнт тертя між тілом і площиною, якщо відомо, що біля основи похилої площини швидкість тіла дорівнювала $\upsilon = 6$ м/с. Яка величина коефіцієнта корисної дії похилої площини?

Відповідь: $\mu = 0{,}082$; $\eta = 0{,}92$.

3.20. Санчата з'їжджають з гори висотою h = 15 м і кутом нахилу $\alpha = 30°$. Коефіцієнт тертя санчат лінійно зростає від $\mu_1 = 0$ на вершині гори до $\mu_2 = 0{,}4$ біля основи. Яку швидкість матимуть санчата внизу?

Відповідь: $\upsilon = 14$ м/с.

3.21. З верхньої точки похилої площини довжиною l = 16 см, що створює з обрієм кут $\alpha = 30°$, зісковзує тіло. Далі воно падає на гладку горизонтальну поверхню, що знаходиться на відстані h = 20 см від нижнього краю похилої площини. На яку найбільшу висоту H від горизонтальної поверхні підніметься тіло після абсолютно пружного удару?

Відповідь: H = 22 см.

3.22. Цирковий артист, розігнавшись по горизонтальному жолобу на мотоциклі, в'їжджає в вертикальну петлю радіусом R. Визначити мінімальну швидкість υ_0, з якою він повинен в'їхати в петлю, щоб благополучно завершити номер. Перед в'їздом у петлю артист вимикає двигун мотоцикла.

Відповідь: $\upsilon_0 = \sqrt{5gR}$.

3.23. Невелике тіло без тертя зісковзує вниз з вершини напівсфери радіусом $R = 1{,}5$ м. На якій висоті h від вершини тіло відірветься від поверхні?

Відповідь: $h = 0{,}5$ м.

3.24. Дві кулі масами m_1 і m_2 підвішені на нитках однакової довжини так, що вони торкаються одна одної. Одну кулю відводять у площині ниток на кут α_0 і відпускають. Відбувається центральний удар куль. На які кути α_1 і α_2 відносно вертикальної лінії відхиляться кулі після абсолютно пружного удару (кути вважати малими)? На який кут β відхиляться кулі, якщо удар непружний?

Відповідь: $\alpha_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\alpha_0}{m_1 + m_2}$; $\alpha_2 = \dfrac{2m_1\alpha_0}{m_1 + m_2}$; $\beta = \dfrac{m_1\alpha_0}{m_1 + m_2}$.

3.25. Два тіла масами m і $3m$ рухаються у взаємно перпендикулярних напрямках. Після співудару тіло масою m зупинилось. Яку частину його енергії складає тепло, що виділилось під час удару?

Відповідь: $\dfrac{Q}{W_{k_1}} = \dfrac{2}{3}$.

3.26. Шайба масою $m = 50$ г зісковзує без початкової швидкості з похилої площини, кут якої з обрієм складає $\alpha = 30°$, і після проходження по горизонтальній площині відстані $l = 50$ см зупиняється. Визначити роботу сил тертя на всьому шляху, якщо вважати коефіцієнт тертя всюди однаковим і рівним $\mu = 0{,}15$.

Відповідь: $A_{\text{тер}} = -0{,}05$ Дж.

3.27. Ланцюжок масою $m = 0{,}8$ кг і довжиною $l = 1{,}5$ м лежить на столі так, що один його кінець звисає зі столу. Ланцюжок починає зісковзувати сам, коли його звисаюча частина складає $\eta = \dfrac{1}{3}$ повної довжини. Яку роботу здійснює сила тертя, що діє на ланцюжок, при його повному зісковзуванні зі столу?

Відповідь: $A = -(1-\eta)\eta mgl/2 = -1{,}3$ Дж.

3.28. Куля масою m, що летіла горизонтально, влучила в тіло масою M, що підвішене на двох однакових нитках довжиною l. У результаті нитки відхилились на кут α. Вважаючи, що $m << M$, знайти: а) швидкість кулі перед потраплянням у тіло; б) відносну частку початкової кінетичної енергії кулі, що перейшла у внутрішню енергію.

Відповідь: а) $\upsilon = \left(\frac{2M}{m}\right)\sqrt{gl}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; б) $\eta \approx 1 - \frac{m}{M}$.

3.29. Після пружного зіткнення частинки 1 з частинкою 2, що покоїлась, обидві частинки розлетілись симетрично відносно початкового напрямку руху частинки 1, кут між їх напрямками руху $\varphi = 60°$. Знайти відношення мас цих частинок.

Відповідь: $\frac{m_1}{m_2} = 1 + 2\cos\varphi = 2$.

3.30. Снаряд, що летів зі швидкістю $\upsilon = 500$ м/с, розривається на три однакових осколки так, що кінетична енергія системи збільшується в $\eta = 1{,}5$ рази. Яку максимальну швидкість може мати один із осколків?

Відповідь: $\upsilon_{max} = \upsilon(1 + \sqrt{2(\eta - 1)}) = 1$ км/с.

4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1. Момент імпульсу частинки і системи частинок відносно точки й осі. Момент сили. Рівняння моментів

У першому розділі були розглянуті кінематичні характеристики і кінематичні рівняння для поступального й обертального руху матеріальної точки та абсолютно твердого тіла.

Розглянемо тепер динамічні характеристики тіла, що обертається.

Абсолютно тверде тіло можна уявити як систему матеріальних точок, відстань між якими в процесі руху не змінюється.

Момент імпульсу частинки і системи частинок відносно точки

Розглянемо частинку масою m_i, швидкість якої дорівнює $\vec{\upsilon}_i$, відповідно її імпульс $\vec{p}_i = m_i\vec{\upsilon}_i$. Її положення відносно нерухомої точки O, що вважається *полюсом*, або початком, характеризується радіусом-вектором $\vec{r}_i$. Тоді *моментом імпульсу частинки відносно точки O* (рис. 4.1) називається вектор $\vec{L}_i$, що дорівнює векторному добутку векторів $\vec{r}_i$ і $\vec{p}_i$

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]. \tag{4.1}$$

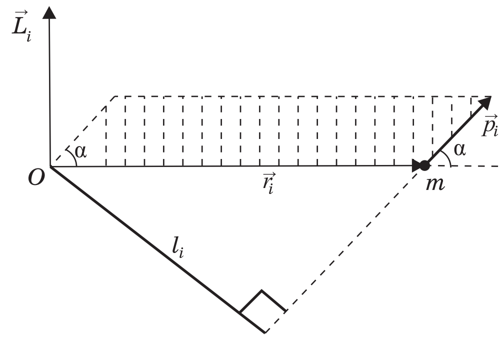


Рис. 4.1

$\vec{L}_i$ — аксіальний вектор, напрямок якого змінюється при зміні напрямку імпульсу $\vec{p}_i$.

Модуль цієї величини:

$$L_i = r_i p_i \sin\alpha = l_i p_i,$$

де α — кут між векторами $\vec{r}_i$ і $\vec{p}_i$ (вектори повинні виходити з однієї точки; їх можна переносити тільки вздовж лінії їх дії); $l_i = r_i \sin\alpha$ — довжина перпендикуляра, спущеного з точки O на лінію подовження напрямку імпульсу $\vec{p}$

$$[L] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

Модуль моменту імпульсу чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{r}_i$ і $\vec{p}_i$ як на сторонах.

Моментом імпульсу системи матеріальних точок відносно точки O називається векторна сума моментів імпульсів частинок, які входять до системи, відносно тієї ж точки:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_\text{i}, \vec{p}_i]. \tag{4.2}$$

Момент імпульсу частинки і системи матеріальних частинок відносно осі

Нехай частинка масою m_i обертається навколо осі, її імпульс напрямлений за дотичною до кола, по якому рухається частинка (рис. 4.2).

Моментом імпульсу частинки відносно осі z (L_{iz}) називається проекція цього вектора на дану вісь:

$$L_{iz} = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]_z. \tag{4.3}$$

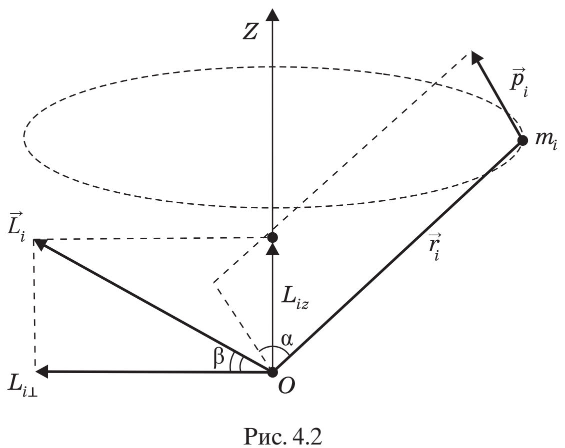


Рис. 4.2

У загальному випадку вектор $\vec{L}_i$ напрямлений перпендикулярно площині, в якій лежать вектори $\vec{r}_i$ та $\vec{p}_i$ розташований під кутом до осі обертання і має проекції (рис. 4.2):

$$L_{iz} = L_i \sin\beta;$$

$$L_{i\perp} = L_i \cos\beta.$$

Моментом імпульсу системи матеріальних точок відносно осі називається сума проекцій моментів імпульсів матеріальних точок, що входять у систему, на дану вісь:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i]_z. \tag{4.4}$$

Момент сили відносно нерухомої точки й осі

Якщо на матеріальну точку масою m діє сила $\vec{F}$ (рис. 4.3), то *моментом сили $\vec{F}$ відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, що проведений з початку O до точки, в якій розташована частинка масою* m (тобто до точки прикладання сили $\vec{F}$) на саму цю силу:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{4.5}$$

Вектор $\vec{M}$ напрямлений перпендикулярно площині векторів $\vec{r}$ і $\vec{F}$ за правилом правого гвинта. Модуль моменту сили:

$$M = Fr\sin\alpha = Fl,$$

де α — кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$; $l = r\sin\alpha$ — *плече сили* дорівнює довжині перпендикуляра, що опущений з точки O на лінію дії сили.

$$[M] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

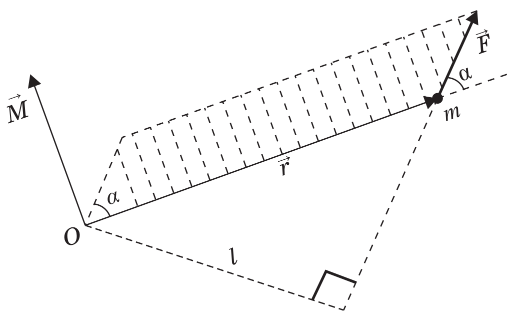


Рис. 4.3

Якщо на частинку діє кілька сил, то результуючий момент усіх сил відносно точки O дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно тієї ж точки:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$\left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}_2\right];$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Для n сил $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]$.

Проекції вектора $\vec{M}$ на осі x, y, z з центром у т. O (центр обертання) пов'язані з проекціями на ці осі векторів $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ і $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$ такими співвідношеннями:

$$M_x = yF_z - zF_y,\ M_y = zM_x - xF_z,\ M_z = xF_y - yF_z.$$

Момент сили $\vec{F}$ відносно нерухомої осі z — це скалярна величина M_z, яка є проекцією на цю вісь моменту сили $\vec{M}$, визначеного відносно довільної точки на осі z:

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z. \tag{4.6}$$

Пара сил

Розглянемо випадок, коли на тіло діють дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що однакові за величиною, паралельні, але мають протилежні напрямки, та їх лінії дії не збігаються (рис. 4.4). Такі сили називаються *парою сил*.

Знайдемо момент пари сил відносно довільної точки O. Сумарний момент сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ буде:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{F}_2\right], \tag{4.7}$$

де $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ — радіуси-вектори точок прикладання сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. З рисунка маємо:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}. \tag{4.8}$$

Якщо підставити (4.8) у (4.7), одержимо:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_1, \vec{F}_2\right] + \left[\vec{r}_{12}, \vec{F}_2\right].$$

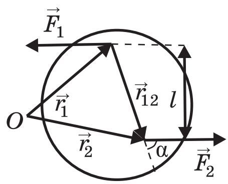


Рис. 4.4

Зауважимо, що $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ і $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F$, тоді:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_{12}, \vec{F}\right].$$

Модуль моменту пари сил:

$$M = r_{12} F \sin\alpha.$$

Оскільки $r_{12}\sin\alpha = l$ — плече пари сил, то маємо:

$$M = Fl.$$

Момент пари сил перпендикулярний до площини, в якій лежать сили (в даному випадку цей момент напрямлений до нас), і чисельно дорівнює добутку однієї з сил на плече пари. Оскільки векторна сума пари сил дорівнює нулю, то при її дії на тіло центр мас тіла залишається у спокої або прямолінійно і рівномірно рухається. Тому пара сил, незалежно від того, де вона прикладена до тіла, намагатиметься обертати тіло навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини, в якій лежать сили.

Рівняння моментів

Моменти імпульсу і сили пов'язані між собою важливим співвідношенням. Припустимо, що нерухома точка O — початок координат. Момент імпульсу матеріальної точки з імпульсом $\vec{p}$ відносно O:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

У першому доданку $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ — швидкість руху матеріальної точки, але цей вектор паралельний вектору імпульсу $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$, тобто перший доданок дорівнює нулю:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] = 0.$$

У другому доданку, згідно з основним рівнянням динаміки, маємо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

тобто $[\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$ — момент сили, що діє на цю точку відносно початку O.

Тоді одержуємо *рівняння моментів: похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого початку дорівнює моменту діючої сили відносно того ж початку:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{4.9}$$

4.2. Основне рівняння динаміки обертального руху для системи матеріальних точок

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо закріпленої точки O. Його можна уявити як систему N матеріальних точок, на які діють як внутрішні $\vec{F}_{ik}$, так і зовнішні $\vec{F}_{i\text{зовн}}$ сили.

Розглянемо рівняння руху для N частинок:

Закон зміни моменту імпульсу механічної системи

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum\limits_k \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{1\text{зовн}}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\vec{p}_N}{dt} = \sum\limits_k \vec{F}_{Nk} + \vec{F}_{N\text{зовн}}. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Помножимо (векторно зліва) кожне з рівнянь на відповідний радіус-вектор:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[\vec{r}_1, \vec{p}_1] = \sum\limits_k \left[\vec{r}_1, \vec{F}_{1k}\right] + \left[\vec{r}_1, \vec{F}_{1\,\text{зовн}}\right]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}[\vec{r}_N, \vec{p}_N] = \sum\limits_k \left[\vec{r}_N, \vec{F}_{N1}\right] + \left[\vec{r}_N, \vec{F}_{N\text{зовн}}\right]. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Додамо ліві і праві частини рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_{\substack{i \\ i\neq k}}\sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{i\text{зовн}}\right]. \qquad (4.12)$$

Ліва частина рівняння (4.12) є похідною за часом від векторної суми моментів імпульсу для кожної частинки $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$; а $\sum\limits_i \vec{L}_i = \vec{L}$ — момент імпульсу механічної системи відносно початку.

Перший доданок правої частини рівняння (4.12) дорівнює сумі моментів внутрішніх сил:

$$\sum_{\substack{i \\ i\neq k}}\sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] = \sum_i \vec{M}_{i\,\text{внутр}}.$$

Внутрішні сили взаємодії між окремими частинками, за третім законом Ньютона, однакові за величиною і напрямлені вздовж однієї прямої в протилежні напрямки $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Моменти цих сил відносно однієї і тієї ж точки теж однакові за величиною і протилежні за напрямком $\vec{M}_{ik} = -\vec{M}_{ki}$. Тому сума моментів усіх внутрішніх сил відносно точки O для будь-якої системи частинок дорівнює нулю:

$$\sum_i \vec{M}_{i\,\text{внутр}} = 0.$$

Другий доданок у правій частині рівняння (4.12) дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно нерухомої точки O:

$$\sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{i\,\text{зовн}}\right] = \sum_i \vec{M}_{i\,\text{зовн}} = \vec{M}_{\text{зовн}}, \tag{4.13}$$

тобто $\vec{M}_{\text{зовн}}$ *— головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O.*

Нарешті, з (4.12) одержимо закон зміни моменту імпульсу для системи матеріальних точок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}. \tag{4.14}$$

Похідна за часом від моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно довільного нерухомого початку дорівнює геометричній сумі моментів всіх зовнішніх сил відносно того ж початку.

Для проекцій рівняння (4.14) на осі прямокутної декартової системи координат з початком у точці O одержимо:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{x\,\text{зовн}}; \qquad \frac{dL_y}{dt} = M_{y\,\text{зовн}}; \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_{z\,\text{зовн}}. \tag{4.15}$$

З (4.15) очевидно, що *похідна за часом від моменту імпульсу механічної системи відносно нерухомої осі дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно цієї ж осі.*

Слід зауважити, що значення моментів імпульсу $\vec{L}$ і сили $\vec{M}$ відносно точки O (початку) залежать від її положення на осі, але значення проекцій моменту імпульсу і сили на цю вісь ніяк не залежать від положення точки O на осі.

Рівняння (4.14) одержане відносно нерухомої точки O. Розглянемо випадок, коли точка O рухається і збігається з центром мас C системи. Тоді одержимо:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_{C\,\text{зовн}}. \tag{4.16}$$

Похідна за часом від моменту імпульсу механічної системи відносно її центра мас дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно тієї ж точки.

4.3. Закон збереження моменту імпульсу

Якщо головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки О дорівнює нулю, то момент імпульсу системи матеріальних точок відносно тієї ж точки залишається сталим з часом:

$$\vec{M}_{\text{зовн}} = 0; \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \qquad \vec{L} = \text{const}. \tag{4.17}$$

Момент імпульсу системи не змінюється внаслідок дії моментів внутрішніх сил, які можуть викликати тільки зміну моментів імпульсу окремих тіл, але повний момент імпульсу системи залишається незмінним.

Закон збереження моменту імпульсу пов'язаний з ізотропністю простору.

4.4. Динаміка твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо обертання твердого тіла під дією сили $\vec{F}$ відносно закріпленої осі z, орієнтація якої у просторі зафіксована підшипниками (рис. 4.5). Абсолютно тверде тіло можна уявити як систему матеріальних точок, тому запишемо закон динаміки обертального руху для системи матеріальних точок відносно осі (4.15)

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{x\text{зовн}}; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_{y\text{зовн}}; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_{z\text{зовн}}.$$

Проекції моментів сил $M_{x\,\text{зовн}}$ і $M_{y\,\text{зовн}}$ не можуть призвести до обертання тіла навколо осей x і y, бо воно закріплене на осі z, реакція підшипників компенсує перпендикулярну до осі складову моменту сили. Тобто нескомпенсованою залишається тільки проекція моменту сили на вісь z. $M_{z\,\text{зовн}} \neq 0$.

Розглянемо обертальний рух однієї матеріальної точки m_i твердого тіла навколо осі z. Як точку відліку візьмемо точку O на осі z. Радіус-вектор матеріальної точки $\vec{r}_i$, її імпульс напрямлений по дотичній до кола радіусом R_i, а момент імпульсу $\vec{L}_i$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}_i$ і $\vec{p}_i$.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_i, m_i \vec{\upsilon}_i] = m_i [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i].$$

Візьмемо до уваги, що кут між радіусом-вектором $\vec{r}_i$ і швидкістю $\vec{\upsilon}_i$ дорівнює 90°, тому модуль моменту імпульсу дорівнює

$$L_i = m_i r_i \upsilon_i .$$

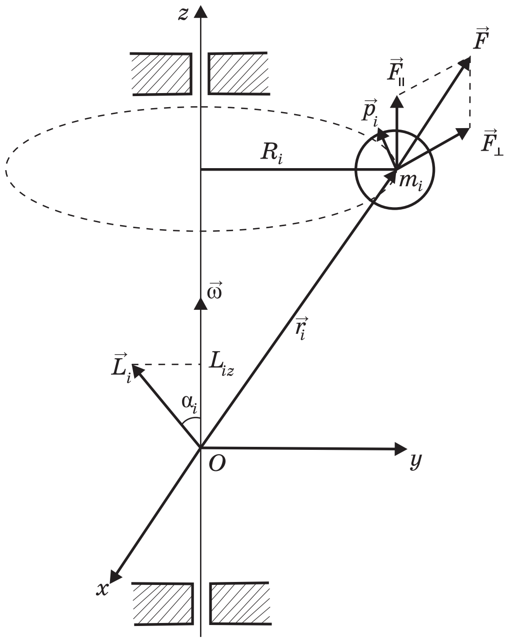


Рис. 4.5

Лінійна швидкість точки $\vec{\upsilon}_i$ пов'язана з кутовою швидкістю (що однакова для всіх точок твердого тіла і напрямлена вздовж осі z) співвідношенням $\upsilon_i = \omega R_i$.

Проекція моменту імпульсу $\vec{L}_i$ на вісь z є такою:

$$L_{iz} = L_i \cos\alpha_i = m_i r_i \upsilon_i \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cdot \cos\alpha_i = m_i \omega R_i r_i \cos\alpha_i = m_i R_i^2 \omega_z .$$

Момент інерції матеріальної точки відносно осі

Введемо нову характеристику тіла для обертального руху. *Величина J_i, що дорівнює добутку маси матеріальної точки m_i на квадрат найкоротшої відстані цієї точки до осі, називається моментом інерції матеріальної точки відносно осі:*

$$J_i = m_i R_i^2 . \tag{4.18}$$

Момент інерції твердого тіла відносно осі

Момент інерції — величина адитивна, тому *момент інерції твердого тіла відносно осі дорівнює сумі добутків елементарних мас на квадрат їх відстані до осі:*

$$J = \sum_i J_i = \sum_i m_i R_i^2 . \tag{4.19}$$

Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла

З урахуванням (4.19) і (4.4) одержимо момент імпульсу твердого тіла відносно осі:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega_z \sum m_i R_i^2 = J\omega_z;$$
$$L_z = J\omega_z. \tag{4.20}$$

Тоді рівняння (4.15) для проекції на вісь z можна переписати у вигляді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{z\text{зовн}}; \qquad \frac{d}{dt}(J\omega_z) = M_{z\text{зовн}}; \qquad J\frac{d\omega_z}{dt} = M_{z\text{зовн}}. \tag{4.21}$$

Зважаючи на те, що $\frac{d\omega_z}{dt} = \beta_z$ — проекція кутового прискорення на вісь обертання z, одержимо:

$$J\beta_z = M_{z\text{зовн}}. \tag{4.22}$$

Формула (4.22) аналогічна формулі для другого закону Ньютона для поступального руху $ma_z = F_x$, тобто можна вважати, що *момент інерції тіла відносно осі є мірою інертності тіла при його обертанні відносно тієї ж осі.*

Основне рівняння обертального руху для симетричних тіл

У загальному випадку для тіла будь-якої форми момент імпульсу твердого тіла $\vec{L}$ відносно точки на осі напрямлений під кутом до осі і рухається за твірною конуса (рис. 4.6). Для однорідного тіла, симетричного відносно осі обертання, момент імпульсу $\vec{L}$ відносно точки O, що лежить на осі обертання, збігається за напрямком з напрямком кутової швидкості $\vec{\omega}$. У цьому випадку:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}};$$

$$\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}; \quad J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\beta}; \tag{4.23}$$

$$J\vec{\beta} = \vec{M}_{\text{зовн}}. \tag{4.24}$$

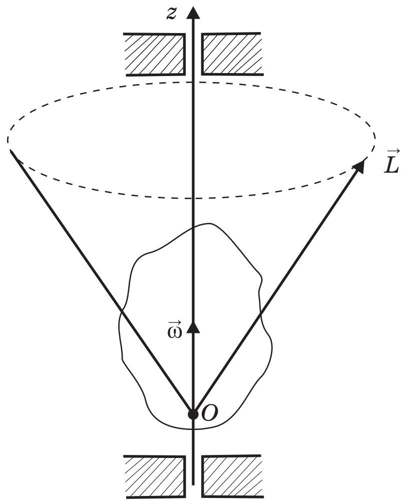


Рис. 4.6

Рівняння (4.24) *є основним рівнянням обертального руху для симетричних тіл, що обертаються навколо осі симетрії.*

Вільні осі обертання

У випадку обертання навколо нерухомої осі однорідного симетричного тіла відсутня сила бокового тиску підшипників на вісь. Їх можна видалити, і за відсутності сили тяжіння вісь зберігала б своє положення у просторі. Така вісь має назву *вільної осі обертання тіла.* В загальному випадку, якщо тіло, що обертається, несиметричне, для збереження з часом положення його осі обертання застосовують підшипники, які утримують вісь.

Але для тіла будь-якої форми з довільним розподілом маси існує три взаємно перпендикулярні осі, які проходять через центр мас тіла, можуть бути вільними осями і мають назву *головних осей симетрії тіла.*

Моменти інерції відносно головних осей називаються *головними моментами інерції тіла.* Наприклад, головні осі інерції однорідного прямокутного паралелепіпеда проходять через центри протилежних граней. Це приклад *асиметричної дзиґи* ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$).

Для однорідного циліндра одна з головних осей збігається з віссю циліндра, а дві інші перпендикулярні одна одній, перпендикулярні осі циліндра і проходять через його центр мас $J_1 \neq J_2 = J_3$ — *симетрична дзиґа.*

Куля з будь-якими трьома взаємно перпендикулярними головними осями, що проходять через центр мас, є прикладом *кулястої дзиґи.*

Якщо на тіло, яке обертається, немає впливу зовні, то стійким є обертання навколо головних осей, відповідних максимальному і мінімальному значенням моменту інерції.

Якщо є зовнішній вплив, наприклад, з боку нитки, за яку підвішене тіло, що обертається, то стійким буде тільки обертання навколо головної осі, яка відповідає найбільшому значенню моменту інерції.

Якщо в умовах, коли $\sum_i \vec{M}_{i\text{зовн}} = 0$, здійснюється перерозподіл маси, тобто змінюється момент інерції, то згідно з законом збереження моменту імпульсу виконується рівність:

$$\vec{L} = \text{const}; \quad J_1\vec{\omega}_1 = J_2\vec{\omega}_2,$$

що означає, що змінюється кутова швидкість.

4.5. Приклади розрахунку моментів інерції тіл різної форми

Момент інерції твердого тіла

$$J = \sum_i m_i R_i^2.$$

У випадку неперервного розподілу маси маємо:

$$J = \int r^2 dm,$$

де r — довжина перпендикуляра, проведеного від точки з елементарною масою dm до осі обертання, $dm = \rho dV$. Тут ρ — густина матеріалу тіла, dV — елементарний об'єм, тоді

$$J = \int_V \rho r^2 dV. \qquad (4.25)$$

Розрахуємо моменти інерції деяких простих тіл.

Момент інерції тонкого диска

Розглянемо однорідний диск радіусом R і масою m і розрахуємо його момент інерції відносно осі O, що проходить через центр диска перпендикулярно його площині (рис. 4.7).

Розіб'ємо диск на концентричні циліндричні кільця шириною dr, товщиною h. Маса такого кільця

$$dm = \rho dV,$$

де $\rho = \dfrac{m}{\pi R^2 h}$ — густина речовини диска;

$dV = 2\pi r h dr$ — об'єм кільця.

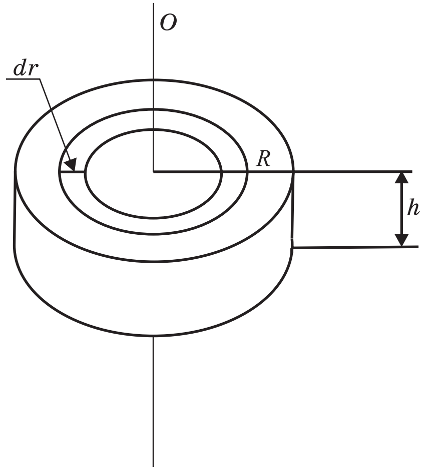


Рис. 4.7

З (4.25) маємо

$$J=\int \rho r^2 dV=\int\limits_0^R \frac{m}{\pi R^2 h} r^2 2\pi r h dr=\frac{2m}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr=\frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4}=\frac{mR^2}{2}\,.$$

Отже, *момент інерції тонкого диска відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно площині диска, дорівнює*

$$J=\frac{mR^2}{2}\,.$$

Момент інерції стрижня

Розрахуємо момент інерції стрижня довжиною l і масою m відносно осі O, що проходить через його центр перпендикулярно стрижню (рис. 4.8).

Розіб'ємо його на елементарні частини масою dm і об'ємом dV.

$$dm=\rho dV=\frac{m}{lS}Sdx=\frac{m}{l}dx,$$

де S — площа поперечного перерізу стрижня.

Тоді

$$J=\int x^2 dm=\int x^2 \rho dV=\frac{m}{l}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx=\frac{m}{l}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{ml^2}{12};$$

$$J=\frac{1}{12}ml^2\,.$$

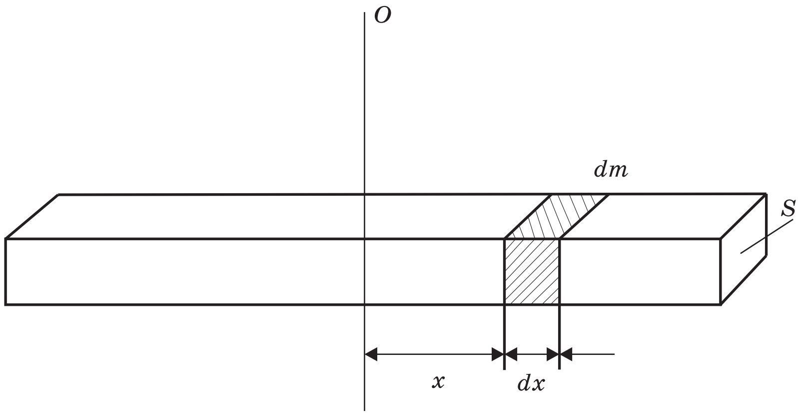


Рис. 4.8

Момент інерції кулі

Розрахуємо момент інерції однорідної твердої кулі радіусом R і масою m відносно осі O, що проходить через її центр.

Розіб'ємо кулю на нескінченно малі диски висотою dy (рис. 4.9).

Кожний такий диск має радіус

$$r = \sqrt{R^2 - y^2}$$

і масу

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dy = \rho\pi(R^2 - y^2)\,dy.$$

Тобто момент інерції такого нескінченно тонкого диска можна записати таким чином:

$$dJ = \frac{1}{2}dm \cdot r^2 = \frac{\rho\pi}{2}(R^2 - y^2)^2 dy = \frac{\rho\pi}{2}(R^4 - 2R^2y^2 + y^4)\,dy.$$

Проінтегруємо момент інерції по всіх таких дисках:

$$J = \int dJ = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left(R^4y - \frac{2}{3}R^2y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{8}{15}\rho\pi R^5. \qquad (4.26)$$

Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тоді її густина $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$.

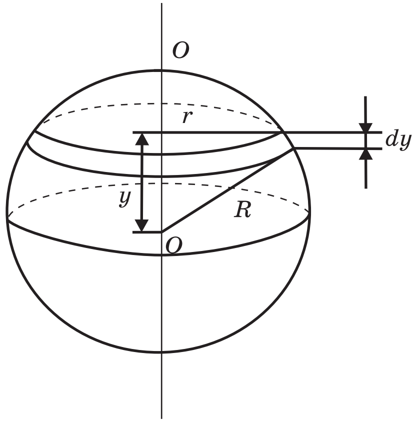


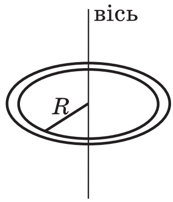
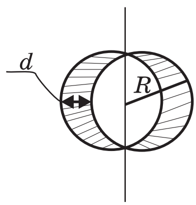
Рис. 4.9

Тоді з (4.26) одержимо *момент інерції кулі*

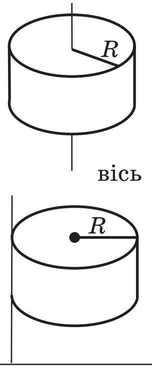
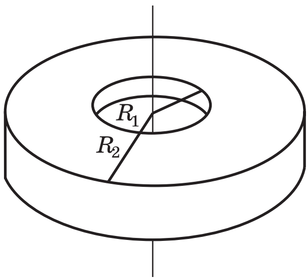
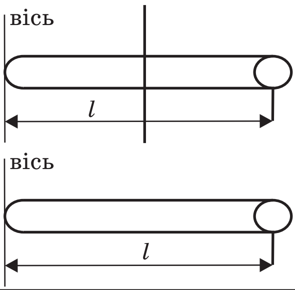
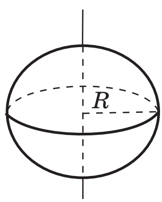
$$J = \frac{2}{5} mR^2.$$

Таблиця 4.1

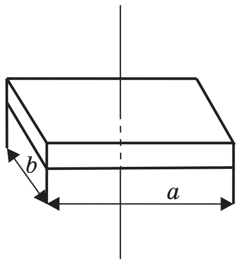
Моменти інерції різних тіл правильної форми (маса тіла *m*)

Тіло		Момент інерції
1	2	3
1. Тонке кільце радіусом R		mR^2
2. Тонке кільце радіусом R і шириною d		$\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}md^2$

Продовження табл. 4.1

1	2	3
3. Суцільний циліндр (диск) радіусом R		$\frac{1}{2}mR^2$ $\frac{3}{2}mR^2$
4. Циліндр із внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім R_2		$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
5. Тонкий стрижень довжиною l		$\frac{1}{12}ml^2$ $\frac{1}{3}ml^2$
6. Тверда куля радіусом R		$\frac{2}{5}mR^2$

Закінчення табл. 4.1

1	2	3
7. Сферична оболонка радіусом R		$\frac{2}{3}mR^2$
8. Тонка прямокутна пластина довжиною a і шириною b		$\frac{1}{12}\left(a^2+b^2\right)$

Теорема Штейнера

Нерідко виникає потреба розрахувати момент інерції тіла відносно осі, що не проходить через центр мас. У цьому випадку зручно застосувати *теорему про паралельний перенос осі обертання — теорему Штейнера:*

момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі: моменту інерції J_C тіла відносно осі, паралельній даній, що проходить через центр мас, і добутку маси тіла на квадрат відстані a між осями.

$$J = J_C + ma^2. \qquad (4.27)$$

Доведемо цю теорему.

Розглянемо тіло довільної форми (рис. 4.10).

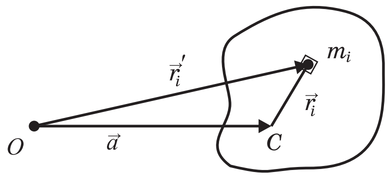


Рис. 4.10

Візьмемо дві паралельної осі, одна з яких проходить через центр мас тіла C, друга через точку O. Осі паралельні одна одній і перпендикулярні площині рисунка. Відстань між осями дорівнює a. Виділимо в твердому тілі елементарну масу m_i і проведемо до неї від осі C вектор $\vec{r}_i$ перпендикулярно осі. Вектор $\vec{r}_i'$ також проведений до маси m_i, але від осі O, перпендикулярно цій осі. Вектор $\vec{a}$, модуль якого дорівнює відстані між осями, перпендикулярний обом осям. З рис. 4.10 очевидно, що

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a}.$$

Момент інерції елементарної маси m_i, яку можна вважати матеріальною точкою, дорівнює

$$J_i = m_i \vec{r}_i'^2 = m_i \left(\vec{r}_i + \vec{a}\right)^2 = m_i r_i^2 + 2m_i \vec{r}_i \vec{a} + m_i a^2.$$

Для всього тіла момент інерції знайдемо як суму моментів інерції окремих матеріальних точок

$$J = \sum_i J_i = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i 2m_i \vec{r}_i \vec{a} + \sum_i m_i a^2 =$$

$$= \sum_i m_i r_i^2 + 2\vec{a} \sum_i m_i \vec{r}_i + a^2 \sum m_i. \quad (4.28)$$

Перший доданок — момент інерції тіла відносно осі C: $J_C = \sum\limits_i m_i r_i^2$.

Сума елементарних мас — це маса тіла $\sum m_i = m$, тому третій доданок дорівнює ma^2.

Сума $\sum\limits_i m_i \vec{r}_i$ дорівнює добутку маси тіла на вектор $\vec{R}_C$, що проведений від осі C до центра мас тіла, але центр мас лежить на осі C, тобто вектор $\vec{R}_C$, а з ним і другий доданок у виразі (4.28) дорівнює нулю. Таким чином,

$$J = J_C + ma^2.$$

4.6. Кінетична енергія та робота при обертальному процесі

Кінетична енергія твердого тіла при обертанні навколо осі

Розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомої осі z (рис. 4.11). Тверде тіло розглядаємо як систему матеріальних точок з масами m_i. Кінетична енергія елементарної маси дорівнює

$$W_{k_i} = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},$$

де $\vec{\upsilon}_i$ — лінійна швидкість руху матеріальної точки m_i, напрямлена за дотичною до кола радіусом R_i, по якому обертається ця точка.

Лінійна швидкість руху пов'язана з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ співвідношенням $\upsilon_i = R_i\omega$ (*див.* розділ 1).

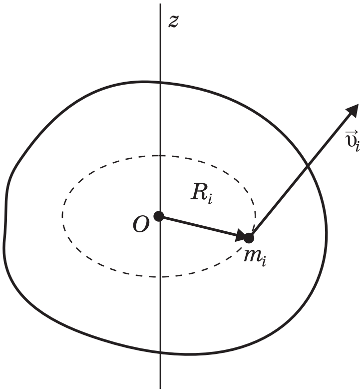


Рис. 4.11

Кінетична енергія — величина адитивна, тому для всього тіла:

$$W_k = \sum_i W_{ki} = \sum_i \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2}.$$

$\sum m_i R_i^2 = J$ — момент інерції твердого тіла відносно осі z. Тоді

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}.$$

• Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої точки O з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то його кінетична енергія дорівнює (без доказу):

$$W_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L},$$

де $\vec{L}$ — момент імпульсу тіла відносно точки O, що вважається початком координат.

Робота при обертанні твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі завдяки дії сили $\vec{F}$ (рис. 4.12).

Цю силу можна розкласти на дві складові $\vec{F}_{\parallel}$, що паралельна осі обертання, і $\vec{F}_{\perp}$ — перпендикулярну осі обертання. Останню силу також можна розкласти на дві складові: $\vec{F}_n$ — сила, напрямок якої збігається з напрямком радіуса $\vec{R}$

кола, по якому обертається точка K, і $\vec{F}_\tau$ — сила, напрямлена по дотичній до того ж кола, тобто $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$. Момент сили $\vec{F}$ відносно початку координат точки O дорівнює:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\vec{r}, \left(\vec{F}_\parallel + \vec{F}_n + \vec{F}_\tau\right)\right].$$

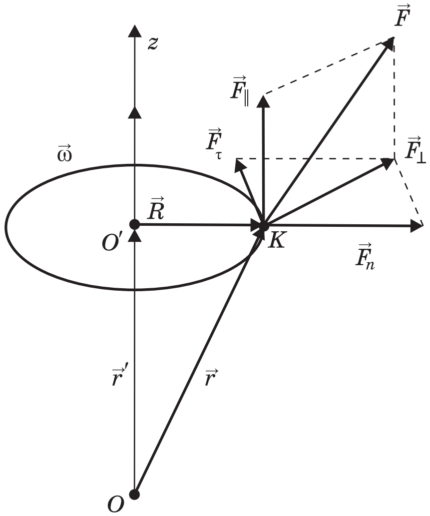


Рис. 4.12

З рис. 4.12 маємо $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$, тобто

$$M = \left[(\vec{r}' + \vec{R}), (\vec{F}_\parallel + \vec{F}_n + \vec{F}_\tau)\right] =$$

$$= \left[\vec{r}', \vec{F}_\parallel\right] + \left[\vec{R}, \vec{F}_n\right] + \left[\vec{R}, \vec{F}_\parallel\right] + \left[\vec{r}', \vec{F}_n\right] + \left[\vec{r}', \vec{F}_\tau\right] + \left[\vec{R}, \vec{F}_\tau\right]. \qquad (4.29)$$

Перші два доданки (4.29) дорівнюють нулю, бо у них множники — паралельні вектори; наступні три доданки — це вектори, напрямлені перпендикулярно осі обертання тіла, а останній — вектор, напрямлений по осі z. Тобто момент сили $\vec{F}$ відносно осі z дорівнює:

$$M_z = \left[\vec{R}, \vec{F}_\tau\right]_z = R \cdot F_\tau,$$

де R — відстань від осі до точки прикладання сили K. За час dt ця точка переміститься на

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt,$$

де $\vec{\upsilon}$ — лінійна швидкість точки K,

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right].$$

$\vec{\omega}$ — кутова швидкість обертання тіла навколо осі z.

$\vec{\omega} dt = d\vec{\varphi}$ — елементарне кутове переміщення точки K за час dt, звідки

$d\vec{r} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right] dt = \left[\vec{\omega} dt, \vec{R}\right] = \left[d\vec{\varphi}, \vec{R}\right]$, або $dr = R d\varphi$, тому що $\vec{R} \perp d\vec{\varphi}$ (напрямок $d\vec{\varphi}$ збігається з напрямком $\vec{\omega}$).

Елементарна робота, яку виконує сила $\vec{F}$, що прикладена до тіла, дорівнює

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_\tau dr = R F_\tau d\varphi = M_z d\varphi = \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

Робота зовнішніх сил дорівнює:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi}. \qquad (4.30)$$

4.7. Плоский рух твердого тіла

Миттєва вісь обертання

Будь-який складний рух твердого тіла можна розглядати як поступальний рух центра мас цього тіла з певною швидкістю та обертальний рух навколо деякої осі, на якій лежать центри кіл, що описують усі точки твердого тіла. В загальному випадку ця вісь зазнає переміщення як у тілі, так і в просторі і має назву *миттєвої осі обертання* на відміну від нерухомої осі, яка зберігає своє положення в тілі і в просторі.

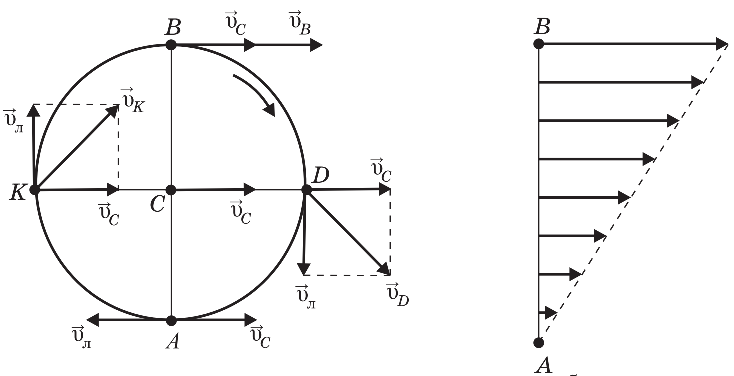


Рис. 4.13

Миттєва вісь призначена для описання миттєвого розподілу швидкостей частинок твердого тіла. Це можна легко зрозуміти, якщо розглянути кочення диска на площині без ковзання (рис. 4.13, *а*). Рух диска розглядатимемо як поступальний рух центра мас (точка *C*) зі швидкістю $\vec{\upsilon}_C$ і обертальний рух навколо миттєвої точки обертання, яка збігається з точкою *A* (перпендикулярно площині рисунка). Миттєва швидкість будь-якої точки дорівнює векторній сумі двох швидкостей: лінійної швидкості точок на краю диска $\vec{\upsilon}_л$ і швидкості руху центра мас $\vec{\upsilon}_C$. Зважаючи на те, що кочення відбувається без ковзання, миттєва швидкість точки *A* дорівнює нулю, $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_л = 0$; тобто лінійна швидкість будь-якої точки на краю диска дорівнює швидкості центра мас $\upsilon_л = \upsilon_C$. Виходячи з цього маємо, що миттєва швидкість точок *B*, *K*, *D* дорівнює:

$$\upsilon_B = 2\upsilon_C; \quad \upsilon_K = \upsilon_D = \upsilon_C\sqrt{2}.$$

На рис. 4.13, *б* показано миттєвий розподіл швидкостей, що лежать на прямій *AB*.

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість і кутове прискорення, які для будь-яких точок тіла є величинами сталими.

Кінетична енергія поступально-обертального руху твердого тіла

Кінетична енергія поступально-обертального руху твердого тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху тіла зі швидкістю його центра мас υ_C

$$W_{k\,пост} = \frac{m\upsilon_C^2}{2}$$

і кінетичної енергії обертання тіла з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо миттєвої осі, що проходить через центр мас:

$$W_{k\,оберт} = \frac{J_C\omega^2}{2},$$

де J_C — момент інерції тіла відносно миттєвої осі. В результаті

$$W_k = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}.$$

Умови рівноваги твердого тіла

Як уже було зазначено, описати рух твердого тіла можна за допомогою двох рівнянь:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_{зовн}; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовн},$$

де перше описує рух центра мас твердого тіла, а друге характеризує його обертальний рух.

Тіло перебуватиме в стані спокою за умови, коли векторна сума зовнішніх сил і векторна сума моментів зовнішніх сил дорівнюватиме нулю:

$$\vec{F}_{\text{зовн}} = 0 \quad \text{і} \quad \vec{M}_{\text{зовн}} = 0.$$

У таблиці 4.2 зіставлені формули механіки поступального та обертального руху. З цього порівняння очевидно, що роль маси відіграє момент інерції, роль сили — момент сили, роль імпульсу — момент імпульсу.

Таблиця 4.2

Поступальний рух	**Обертальний рух**
S — шлях	φ — кут повороту
$d\vec{r}$ — переміщення	$d\vec{\varphi}$ — кутове переміщення
$\vec{\upsilon}$ — лінійна швидкість	$\vec{\omega}$ — кутова швидкість
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ — лінійне прискорення	$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ — кутове прискорення
$S = \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ — рівнозмінний рух	$\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\beta t^2}{2}$
m — маса	J — момент інерції
$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ — імпульс	$\vec{L} = J\vec{\omega}$ — момент імпульсу
$\vec{F}$ — сила	$\vec{M}$ — момент сили
$\vec{F} = m\vec{a}$ — другий закон Ньютона	$\vec{M} = J\vec{\beta}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ — основне рівняння динаміки поступального руху	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ — основне рівняння динаміки обертального руху
$\delta A = \vec{F}d\vec{r}$ — елементарна робота $A = \int \vec{F}d\vec{r}$ — робота	$\delta A = \vec{M}d\vec{\varphi} = M_\omega d\varphi$ $A = \int \vec{M}d\vec{\varphi} = \int M_\omega d\varphi$
$W_k = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ — кінетична енергія	$W_k = \dfrac{J\omega^2}{2}$

4.8. Взаємозв'язок законів збереження з властивостями симетрії простору і часу

Для замкнених механічних систем існують функції координат і швидкостей, які зберігаються під час руху. Такі функції мають назву інтегралів руху. Адитивних інтегралів руху три: імпульс, момент імпульсу та енергія.

Усі закони збереження, що вже були отримані (імпульсу, моменту імпульсу, енергії), виводились на основі другого і третього законів динаміки Ньютона. Але виявляється, що їх можна одержати, спираючись тільки на другий закон Ньютона, і такі властивості простору і часу, як однорідність і ізотропність простору та однорідність часу.

Однорідність простору виявляється в тому, що для замкненої системи просторове переміщення початку координат не впливає на її закони руху і фізичні властивості. Тобто змінити стан руху за рахунок вибору початку координат неможливо. З цією властивістю пов'язаний *закон збереження імпульсу*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = \mathrm{const}.$$

Ізотропність простору виявляється в тому, що фізичні властивості і закони руху замкненої системи не можна змінити, якщо її як ціле повернути в просторі на будь-який кут, тобто вони не залежать від вибору напрямків осей координат інерціальної системи відліку.

З цією властивістю пов'язаний *закон збереження моменту імпульсу*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \mathrm{const}.$$

Однорідність часу виявляється в тому, що закони руху замкненої системи не залежать від вибору початку відліку часу. З цією властивістю часу пов'язаний *закон збереження енергії:*

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad W = \mathrm{const}.$$

Слід зробити ще одне зауваженя відносно *симетрії рівнянь класичної механіки відносно напрямку ходу часу.* Формально це випливає з інваріантності рівнянь механіки до заміни змінної часу t на $-t$, тобто до зміни напрямку ходу часу разом із зміною напрямку руху тіла на протилежний.

Ця симетрія рівнянь класичної механіки свідчить про *оборотність механічних процесів:*

якщо механічна система здійснює якийсь рух, то вона під впливом тих же сил може рухатись і в протилежному напрямку, і при цьому ця система проходитиме через ті самі проміжні стани в зворотному порядку.

4.9. Гіроскопи

Властивість вільних осей зберігати своє положення в просторі широко застосовується в техніці. У зв'язку з цим найцікавішими є *гіроскопи* — масивні симетричні однорідні тіла, що обертаються з великою кутовою швидкістю навколо своєї осі симетрії, що є вільною віссю і може змінювати свою орієнтацію у просторі.

Розглянемо поведінку гіроскопа на прикладі симетричної дзиґи масою m (рис. 4.14).

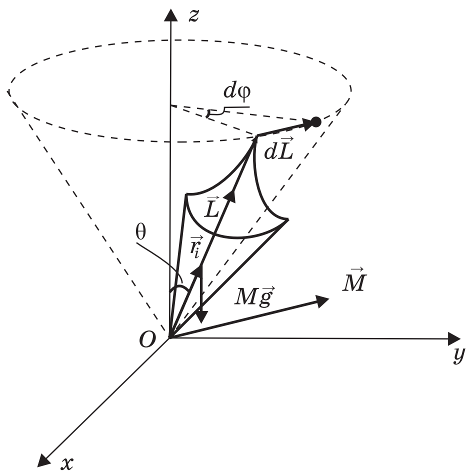


Рис. 4.14

При обертанні дзиґа опирається на горизонтальну площину xy в точці O, яка вибирається за початок координат. Якщо вісь обертання дзиґи складає кут θ з віссю z, то ця вісь описує в просторі конус, вісь якого збігається з вертикаллю (на рисунку зображений пунктиром). Цей рух має назву *прецесії* з кутовою швидкістю $\omega_{\text{пр}}$. У цьому випадку момент зовнішніх сил $\vec{M}$, що діють на гіроскоп (наприклад момент сили тяжіння), з часом не змінюється за величиною, а повертається разом з віссю обертання гіроскопа, утворюючи з нею весь час кут 90°.

Це явище можна пояснити на основі застосування рівняння

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Коли дзиґа обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ відносно осі симетрії, її момент імпульсу $\vec{L}$ напрямлений вздовж осі обертання дзиґи. Момент сили тяжіння $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$ перпендикулярний як вектору $\vec{r}$, так і вектору $m\vec{g}$ (рис. 4.14). Зміна моменту імпульсу за цей час дорівнює $d\vec{L} = \vec{M}dt$.

Зміна $d\vec{L}$ перпендикулярна вектору $\vec{L}$, який за величиною не змінюється, а змінюється лише його напрямок. Момент імпульсу $\vec{L}$ завжди направлений вздовж осі обертання дзиґи, тому при зміні його напрямку вісь дзиґи переміщуватиметься праворуч (рис. 4.14), тобто верхній кінець осі рухається в горизонтальному напрямку, перпендикулярно вектору $\vec{L}$. Вектори $\vec{M}$ и $d\vec{L}$ також повертаються, залишаючись горизонтальними і перпендикулярними вектору $\vec{L}$.

З рис. 4.14 очевидно:

$$dL = L\sin\theta\, d\varphi.$$

Кутова швидкість прецесії:

$$\omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt},$$

звідки

$$\omega_{пр} = \frac{1}{L\sin\theta}\frac{dL}{dt} = \frac{M}{L\sin\theta}.$$

Візьмемо до уваги, що $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}] = rmg\sin\theta$, $(\sin(\pi - \theta) = \sin\theta)$.

Тоді кутова швидкість прецесії дорівнює:

$$\omega_{пр} = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{J\omega}.$$

Таким чином, швидкість прецесії не залежить від кута нахилу дзиґи θ, вона обернено пропорційна моменту імпульсу дзиґи. Чим швидше обертається дзиґа, тим більше L і тим повільніше вона прецесує.

Властивість гіроскопа зберігати незмінний напрям своєї осі обертання використовується для автоматичного управління рухом ракет, кораблів, літаків тощо. Широко застосовуються на кораблях гіроскопічні компаси.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Чому дорівнює момент імпульсу частинки і системи матеріальних частинок відносно точки й осі?
2. Як записується момент сили відносно точки й осі?
3. Який фізичний смисл має рівняння моментів?
4. Чому дорівнює і який фізичний смисл має момент інерції тіла відносно осі?
5. Коли застосовується теорема Штейнера? Сформулюйте і доведіть її.
6. Сформулюйте основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.
7. Чи може менша сила створити більший момент сили?
8. Якщо сила $\vec{F}$ діє на тіло таким чином, що її плече дорівнює нулю, то чи впливатиме вона на рух тіла?
9. Відносно якої з осей обертання тіло матиме найменший момент інерції?
10. Що таке вільні осі обертання? Які з них є стійкими?
11. Чому дорівнює кінетична енергія обертального руху твердого тіла?
12. Напишіть рівняння руху твердого тіла у випадку плоского руху.
13. Чому дорівнює робота зовнішніх сил при обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі?
14. У чому полягає фізична суть закону збереження моменту імпульсу? За яких умов він виконується?
15. Які властивості симетрії простору і часу обумовлюють справедливість законів збереження моменту імпульсу, імпульсу, енергії?

Завдання для експрес-контролю

1. Момент імпульсу частинки відносно деякої точки змінюється з часом за законом $\vec{L}(t) = \vec{a} + \vec{b}t$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — деякі сталі вектори; $\vec{a} \perp \vec{b}$. Знайти момент сили $\vec{M}$, що діє на частинку, якщо кут між векторами $\vec{L}$ і $\vec{M}$ дорівнює 45°.

2. Невелике тіло масою m підвішене на нитці і рівномірно рухається по горизонтальному колу під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили натягу нитки (конічний маятник). Який напрямок мають момент імпульсу і момент сили тяжіння відносно точки підвісу та відносно осі, навколо якої обертається тіло?

3. Чому дорівнює відношення енергії поступального й обертального руху суцільної кулі, що скочується з похилої площини без ковзання?

4. З похилої площини з одного рівня одночасно починають скочуватись суцільні циліндр і куля однакової маси й однакового радіусу. Визначити, чому дорівнює відношення швидкостей циліндра і кулі на деякому заданому рівні.

5. До обода однорідного суцільного диска радіусом $R = 0{,}5$ м прикладена стала дотична сила $F = 100$ Н. При обертанні диска на нього діє момент сил тертя $M = 2$ Н·м. Визначити масу m диска за умови, що його кутове прискорення стале і дорівнює $\beta = 12$ рад/с^2.

6. Припустимо що на тверде тіло діють дві зовнішні сили, однакові за величиною, але протилежно напрямлені. За яких умов тіло обертатиметься?

7. Металеве кільце розташоване в площині *xy.* У якому випадку робота з розкручування кільця від стану спокою до кутової швидкості ω більше: а) якщо обертання відбувається навколо нерухомої осі *z,* що проходить через центр кільця, б) якщо обертання відбувається навколо осі, паралельної осі *z,* що переходить через точку *P* на ободі кільця?

8. Частинка рухається прямолінійно і момент сили відносно довільної точки дорівнює нулю. Чи справедливе буде твердження: а) сила, що діє на частинку, дорівнює нулю; б) швидкість частинки повинна бути сталою? Дайте пояснення.

Приклади розв'язання задач

1. В однорідному диску, маса якого $m = 1$ кг, радіус $r = 30$ см, зроблено круглий отвір діаметром $d = 20$ см, центр якого знаходиться на відстані $l = 15$ см від осі диска. Знайти момент інерції J тіла відносно осі, яка проходить перпендикулярно площині диска через його центр.

Розв'язання

Момент інерції тіла:

$$J = J_0 - J_{\text{отв}},$$

де J_0 — момент інерції диска без отвору відносно осі O; $J_{\text{отв}}$ — момент інерції вирізаного диска.

Момент інерції вирізаного диска відносно осі O знайдемо згідно з теоремою Штейнера:

$$J_{\text{отв}} = J' + m_{\text{отв}} \cdot l^2,$$

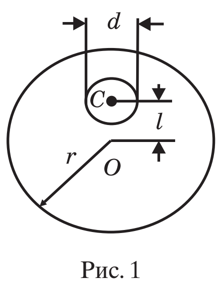


Рис. 1

де $J' = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$ — момент інерції вирізаного диска радіусом $r_1 = \dfrac{d}{2}$ відносно осі, що проходить через його центр мас C; m_1, r_1 — маса і радіус цього диска.

Маси вирізаного диска та заданого відносяться як їх площі:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{S}{S_1}; \; \frac{m}{m_1} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 4}{\pi \cdot d^2} \Rightarrow m_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4\pi \cdot r^2} m,$$

тобто $m_1 = \dfrac{d^2}{4r^2} m$.

Момент інерції диска з отвором дорівнюватиме:

$$J = \frac{mr^2}{2} - \left(\frac{d^2 m \cdot d^2}{4r^2 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{d^2 m}{4r^2} l^2 \right) = \frac{mr^2}{2} - \frac{d^2 m}{32r^2}(d^2 + 8l^2) =$$

$$= 4{,}19 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Маховик, маса якого m = 5 кг рівномірно розподілена по ободу радіуса r = 20 см, вільно обертається навколо горизонтальної осі, яка проходить через його центр інерції з частотою ν = 720 хв$^{-1}$.

Через Δt = 20 с маховик зупиняється. Визначити гальмувальний момент та кількість обертів, які маховик зробив до повної зупинки.

Розв'язання

За основним законом обертального руху:

$$J \Delta \vec{\omega} = \vec{M} \Delta t, \tag{1}$$

де $\Delta \vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$ — зміна кутової швидкості за інтервал Δt; $\vec{M}$ — гальмувальний момент.

Векторному рівнянню (1) відповідає скалярне рівняння

$$J \Delta \omega = M \Delta t, \tag{2}$$

де $\Delta\omega$ та M — модулі відповідних векторів.

З умови задачі випливає, що:

$$\Delta\omega = |\omega - \omega_0| = \omega_0 = 2\pi \cdot \nu; \quad J = mr^2. \tag{3}$$

Після підстановки виразу (3) в (2) одержуємо:

$$mr^2 \cdot 2\pi \cdot \nu = M \Delta t.$$

Звідси $M = \dfrac{2\pi \cdot \nu \cdot mr^2}{\Delta t} = 0{,}75$ Н $\cdot$ м.

Вектори $\vec{M}$ і $\Delta\vec{\omega}$ напрямлені в бік, протилежний вектору $\vec{\omega}_0$.

Кутове переміщення, яке маховик пройшов до зупинки:

$$\Delta\varphi = \frac{\beta \Delta t^2}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}.$$

Оскільки $\Delta\varphi = 2\pi N$, а $\omega_0 = 2\pi \cdot \nu$, то $N = \dfrac{\nu \Delta t}{2} = 120$ обертів.

3. Через блок, закріплений на горизонтальній осі, перекинута нитка, до кінців якої прикріплені тягарці масою $m_1 = 0{,}2$ кг і $m_2 = 0{,}5$ кг. Маса блока $m = 0{,}3$ кг. Визначити лінійне прискорення тягарців і сили натягу ниток, якщо величина сили тертя в блоці $F_{\text{тер}} = 1$ Н. Блок вважати однорідним диском.

Розв'язання

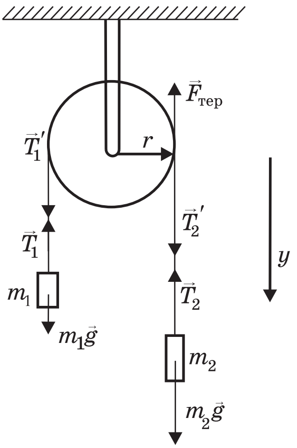


Рис. 2

На кожен з тягарців діють дві сили: сила тяжіння $m_i\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_i$ (рис. 2). За другим законом Ньютона рівняння руху цих тягарців

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}, \tag{1}$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a} \tag{2}$$

(вісь y напрямлена вниз).

На блок діють моменти сил натягу ниток: $\vec{M}_1 = \left[\vec{r}_1, \vec{T}_1'\right]$, напрямлений перпендикулярно площині рисунка «до нас»; $\vec{M}_2 = \left[\vec{r}_2, \vec{T}_2'\right]$ — напрямлений «від нас» і момент сили тертя в блоці $\vec{M}_{\text{тер}} = \left[\vec{r}, \vec{F}_{\text{тер}}\right]$, також напрямлений «до нас». Для блока основне рівняння динаміки обертального руху має вигляд:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{\text{тер}} = J\vec{\beta}, \tag{3}$$

кутове прискорення блока $\vec{\beta}$ пов'язане з лінійним $\beta = \dfrac{a}{r}$, $J = \dfrac{mr^2}{2}$ — момент інерції блока (диска) відносно осі обертання.

Вектор кутового прискорення напрямлений перпендикулярно площині рисунка «від нас». Цей напрямок для обертального руху вважаємо додатним. Тоді напрямок моменту сили натягу $\vec{T}_2'$ вважаємо додатним, інші два моменти сили $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_{\text{тер}}$ — від'ємні.

Нитка нерозтяжна, тому можна вважати $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1'\right| = T_1$, $\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right| = T_2$.

У результаті проекції рівнянь (1), (2), (3) на відповідні осі матимуть вигляд:

$$\begin{gathered} m_1 g - T_1 = -m_1 a; \\ m_2 g - T_2 = m_2 a; \\ -rT_1 + rT_2 - rF_{\text{тер}} = J\beta. \end{gathered} \tag{4}$$

Розв'язавши систему рівнянь (4), одержимо вираз для тангенціального прискорення

$$a=\frac{(m_2-m_1)g-F_{\text{тер}}}{m_1+m_2+\dfrac{m}{2}}; \qquad a=2{,}28\ \text{м/с}^2;$$

$$T_1=m_1(g+a); \qquad T_1=2{,}42\ \text{Н};$$

$$T_2=m_2(g-a); \qquad T_2=3{,}76\ \text{Н}.$$

4. На суцільний циліндр масою m = 10 кг і радіусом R = 10 см, який знаходиться на горизонтальному столі, намотана невагома та нерозтяжна нитка. До вільного кінця нитки, яка перекинута через легкий блок, що знаходиться на краю столу, прикріплено тягарець такою ж масою m. Знайти прискорення тягарця та силу тертя між циліндром та столом, якщо циліндр котиться без просковзування.

Розв'язання

На циліндр діють такі сили: сила натягу нитки $\vec{F}_{\text{н}}$; сила тяжіння $m\vec{g}$, сила реакції поверхні $\vec{N}$ (вони взаємно зрівноважені) та сила тертя спокою $\vec{F}_{\text{тер}}$. На тягарець діють сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}_{\text{н}}$. Пов'язуючи інерціальну систему відліку з Землею, виберемо напрям координатних осей таким, як показано на рис. 3.

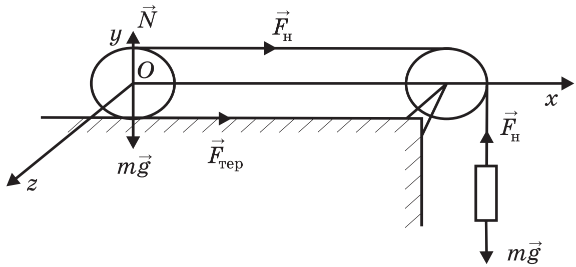


Рис. 3

Центр мас циліндра рухається прямолінійно, циліндр обертається відносно осі, яка паралельна осі Oz. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для поступального руху тягарця, рівняння руху центра мас та основне рівняння обертального руху для циліндра

$$m\vec{g}+\vec{F}_{\text{н}}=m\vec{a};$$

$$\vec{F}_{\text{н}}+\vec{F}_{\text{тер}}=m\vec{a}_C;$$

$$\vec{M}_{\text{н}}+\vec{M}_{\text{тер}}=J\vec{\beta}.$$

У проекціях на відповідні координатні осі маємо:

$$\begin{cases} mg - F_{н} = ma; \\ F_{н} + F_{тер} = ma_C; \\ (F_{н} - F_{тер})R = J\beta, \end{cases} \qquad (1)$$

де a_C — прискорення центра мас циліндра; $J = \dfrac{mR^2}{2}$ — момент інерції циліндра; β — кутове прискорення циліндра.

При обертанні циліндра без просковзування швидкість нижньої точки відносно Землі дорівнює нулю. Це означає, що швидкість поступального руху центра мас υ_C дорівнює лінійній швидкості обертального руху $\upsilon_C = \omega R$. А швидкість верхньої точки циліндра υ дорівнює сумі швидкості центра мас та лінійної швидкості обертального руху (рис. 4). Для визначення прискорення верхньої точки циліндра (це прискорення тягарця, прикріпленого до нитки) та прискорення центра мас знаходимо похідні від швидкості $\upsilon = \upsilon_C + \omega R$; $\upsilon_C = \omega R$:

$$\begin{cases} a = a_C + R\beta; \\ a_C = R\beta. \end{cases} \qquad (2)$$

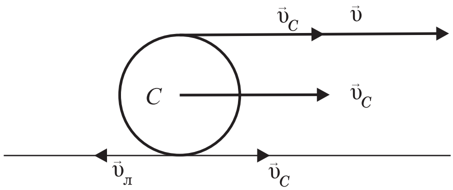


Рис. 4

Розв'язуючи систему рівнянь (1) та (2), знаходимо

$$a = \frac{8}{11}g, \quad F_{тер} = \frac{1}{11}mg.$$

Зверніть увагу на те, що в даній задачі сила тертя $F_{тер}$ — це сила тертя спокою, вона може приймати будь-яке значення в проміжку $0 \le F_{тер} \le \mu N$, де μ — коефіцієнт тертя ковзання. Умовою відсутності ковзання буде $F_{тер} \le \mu mg$, або $(1/11)mg \le \mu mg$; $\mu \ge 1/11$.

5. На горизонтальній платформі сидить людина і тримає у простягнених руках вантажі по 10 кг кожний.

Відстань від кожного вантажу до осі обертання платформи $l_1 =$ $= 50$ см. Платформа обертається з частотою $\nu_1 = 1$ с$^{-1}$. Як зміниться частота обертання платформи і яку роботу виконає людина, якщо вона зведе руки так, що відстань від кожного вантажу до осі зменшиться до $l_2 = 20$ см? Момент інерції платформи разом з людиною відносно осі обертання складає $J_0 = 2{,}5$ кг $\cdot$ м^2. Вісь обертання проходить через центр мас людини і платформи.

Розв'язання

Система, що складається із платформи, людини та вантажів, замкнена. Оскільки всі тіла системи здійснюють тільки обертальний рух навколо однієї й тієї ж осі обертання, то слід розглядати закон збереження моменту імпульсу цієї системи:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2, \text{ або } J_1\vec{\omega}_1 = J_2\vec{\omega}_2, \tag{1}$$

де $J_1\vec{\omega}_1$ та $J_2\vec{\omega}_2$ — моменти імпульсу системи до і після зближення вантажів відповідно. Рівняння (1) в скалярному вигляді є таким:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \tag{2}$$

До зближення вантажів момент інерції всієї системи:

$$J_1 = J_0 + 2ml_1^2,$$

після зближення:

$$J_2 = J_0 + 2ml_2^2,$$

де m — маса кожного вантажу.

Оскільки $\omega = 2\pi \cdot \nu$, то $(J_0 + 2ml_1^2)\nu_1 = (J_0 + 2ml_2^2)\nu_2$.

Звідси $\nu_2 = \dfrac{\nu_1(J_0 + 2ml_1^2)}{(J_0 + 2ml_2^2)} = 2{,}3$ с$^{-1}$.

Робота, яку виконала людина:

$$A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Зауважуючи, що $\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_1}{J_2}$, маємо:

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}(J_1 - J_2),$$

$$A = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2} \cdot 2\pi^2\nu^2 \cdot 2m(l_1^2 - l_2^2) = 190 \text{ Дж}.$$

6. Диск 1 обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_1. На нього падає диск 2, що обертається зі швидкістю ω_2. Внаслідок тертя між ними обидва диски через деякий час починають обертатись як одне ціле. Знайти приріст кінетичної енергії обертання цієї системи, якщо моменти інерції дисків відносно осі обертання дорівнюють відповідно J_1 і J_2.

Розв'язання

Знайдемо кутову швидкість обертання двох дисків. За законом збереження моменту імпульсу відносно осі z випливає:

$$J_1\omega_{1z} + J_2\omega_{2z} = (J_1 + J_2)\omega_z,$$

звідки

$$\omega_z = \frac{J_1\omega_{1z} + J_2\omega_{2z}}{J_1 + J_2}. \tag{1}$$

Візьмемо до уваги, що ω_{1z}, ω_{2z}, ω_z — величини алгебраїчні. Якщо виявиться, що $\omega_z > 0$, то це означатиме, що напрямок відповідного вектора $\vec{\omega}$ збігається з додатним напрямком осі z, і навпаки.

Приріст кінетичної енергії обертання цієї системи:

$$\Delta W_k = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega_z^2 - \frac{1}{2}(J_1\omega_{1z}^2 + J_2\omega_{2z}^2). \tag{2}$$

Підставимо значення ω_z (1) і одержимо:

$$\Delta W_k = -\frac{J_1 J_2}{2(J_1 + J_2)}(\omega_{1z} - \omega_{2z})^2.$$

Знак «мінус» показує, що кінетична енергія системи зменшилась.

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Знайти момент інерції J тонкого однорідного стрижня довжиною l = 40 см і масою m = 200 г відносно осі, що перпендикулярна стрижню і проходить через точку, яка знаходиться на відстані $l_1 = \frac{1}{4}l$ від кінця стрижня.

Відповідь: $J = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг · м^2.

4.2. Знайти момент інерції J тонкого однорідного стрижня довжиною l = 40 см і масою m = 100 г відносно осі, що перпендикулярна стрижню і проходить на відстані a = 20 см від одного із його кінців.

Відповідь: $J = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$ кг · м^2.

4.3. Знайти момент інерції J кільця масою m = 100 г і радіусом R = = 20 см відносно осі, що лежить в площині кільця і дотична до нього.

Відповідь: $J = 3 \cdot 10^{-3}$ кг · м^2.

4.4. Знайти момент інерції J однорідної кулі радіусом $R = 5$ см і масою $m = 1$ кг відносно осі, що проходить через її центр.

Відповідь: $J = 10^{-3}$ кг·м^2.

4.5. Знайти момент інерції однорідної прямокутної пластинки масою $m = 0{,}2$ кг, довжиною $a = 30$ см, шириною $b = 40$ см відносно осі, що перпендикулярна до неї і проходить через її центр.

Відповідь: $J = 4 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

4.6. Прийняти за початкові умови задачі 4.5.

Вісь проходить через одну з вершин пластинки.

Відповідь: $J = 1{,}66 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

4.7. Знайти момент інерції J однорідного прямого циліндра масою $m = 2$ кг, радіуса $R = 50$ см відносно осі циліндра.

Відповідь: $J = 0{,}25$ кг·м^2.

4.8. Знайти момент інерції диска діаметром $d = 40$ см, масою $m = 400$ г відносно осі, що проходить через середину одного із радіусів перпендикулярно до площини диска.

Відповідь: $J = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

4.9. Знайти момент інерції J плоскої однорідної прямокутної пластинки масою $m = 400$ г відносно осі, яка збігається з однією із сторін, довжина другої сторони $a = 20$ см.

Відповідь: $J = 5{,}33 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

4.10. В однорідному диску масою $m = 0{,}5$ кг і радіусом $R = 40$ см зроблено круглий отвір з удвічі меншим радіусом (рис. 5). Знайти момент інерції J отриманого тіла відносно осі, що проходить через центр мас диска перпендикулярно до нього.

Відповідь: $J = 3{,}25 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

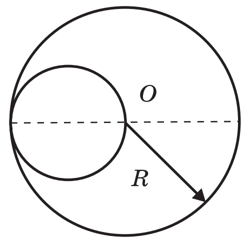


Рис. 5

4.11. У тонкому диску масою $m = 1$ кг і радіусом $R = 1$ м вирізано 10 круглих отворів радіусом $r = 0{,}1$ м, центри яких лежать на рівних відстанях $a = 0{,}5$ м від центра диска. Визначити момент інерції диска відносно осі, що проходить через центр диска перпендикулярно його площині.

Відповідь: $J = 0{,}475$ кг·м^2.

4.12. Виведіть формулу для моменту інерції пустотілої кулі відносно осі, що проходить через її центр. Маса кулі дорівнює m, внутрішній радіус r, зовнішній R.

Відповідь: $J = \dfrac{2}{5} m \dfrac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$.

4.13. Через блок у вигляді суцільного диска масою m = 100 г перекинуто тонку гнучку нитку, до кінців якої підвішені вантажі масами m_1 = 200 г та m_2 = 300 г. Знайти прискорення вантажів, якщо дати їм змогу рухатися. Тертям та масою нитки знехтувати.

Відповідь: a = 1,78 м/с^2.

4.14. Дві гирі різної маси з'єднані ниткою, яка перекинута через блок, момент інерції якого J = 50 кг·м^2 і радіус R = 20 см. Момент сил тертя блока при його обертанні $M_{\text{тер}}$ = 100 Н·м. Знайти різницю сил натягу $T_1 - T_2$ по різні сторони блока, якщо відомо, що блок обертається з постійним кутовим прискоренням β = 2 рад/с^2. Блок має форму диска.

Відповідь: $T_1 - T_2$ = 1000 Н.

4.15. Через нерухомий блок масою m = 0,2 кг перекинуто шнур, до кінців якого підвішені вантажі m_1 = 0,3 кг та m_2 = 0,5 кг. Маса блока рівномірно розподілена по ободу. Визначити сили T_1 та T_2 натягу шнура по різні боки блока під час руху вантажів.

Відповідь: T_1 = 3,53 Н; T_2 = 3,92 Н.

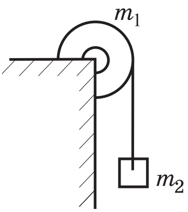


Рис. 6

4.16. Циліндр масою m_1 = 5 кг насаджено на горизонтальну вісь. На циліндр намотано шнур, до вільного кінця якого підвішена гиря масою m_2 = = 1 кг (рис. 6). Знайти прискорення гирі, якщо їй дати змогу рухатися.

Відповідь: a = 2,8 м/с^2.

4.17. Вантаж масою m_1 = 0,5 кг прив'язано до шнура, що намотано на барабан, радіус якого R = = 20 см, маса m_2 = 4 кг. Вантаж знаходиться від долівки на відстані h = = 1 м. Знайти: а) через який час після початку обертання вантаж досягне долівки; б) кінетичну енергію вантажу в момент досягання долівки; в) силу натягу шнура. Тертям знехтувати. Барабан має форму циліндра.

Відповідь: t = 1 с; W_k = 0,98 Дж; T = 3,92 Н.

4.18. Тіло із стану спокою починає обертатись навколо горизонтальної осі за допомогою падаючого вантажу, з'єднаного з мотузкою, що була попередньо намотана на вісь. Визначити момент інерції тіла, якщо вантаж масою m = 2 кг за час t = 12 с спускається на відстань h = 1 м. Радіус осі r = 8 мм. Силою тертя знехтувати.

Відповідь: J = 0,092 кг·м^2.

4.19. На пустотілий циліндр з тонкими стінками масою m намотана нитка, вільний кінець якої закріплений на стелі. Циліндр рухається вниз під дією власної ваги і змотується з нитки. Знайти прискорення циліндра і силу натягу нитки.

Відповідь: $a = \frac{g}{2}$; $T = \frac{mg}{2}$.

4.20. Маховик, момент інерції якого J = 300 кг·м^2, обертається з частотою 20 об/с. Через хвилину після того, як на колесо вже не діє обертальний момент, воно зупиняється. Знайти: а) момент сил тертя; б) кількість обертів, які зробило колесо до повної його зупинки після завершення дії сил.

Відповідь: 1) M = 628 Н·м; 2) N = 600.

4.21. Тонкий однорідний стрижень масою m = 300 г, довжиною l = = 40 см обертається з кутовим прискоренням β = 4 рад/с^2 навколо осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його середину. Знайти обертальний момент M.

Відповідь: M = 1,6·10^{-2} Н·м.

4.22. Знайти момент сили, який необхідно прикласти до блока, який обертається з частотою 12 об/с, щоб він зупинився через Δt = = 8 с. Діаметр блока D = 0,3 м. Масу блока m = 6 кг вважати рівномірно розподіленою по ободу.

Відповідь: M = 1,27 Н·м.

4.23. Куля, радіус якої R = 15 см, маса m = 5 кг, обертається навколо нерухомої осі, що проходить через її центр. Рівняння обертання кулі має вигляд: $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де B = 4 рад/с^2, C = –1 рад/с^3. Знайти момент сил M, що діють на кулю в момент часу t = 2 с після початку обертання.

Відповідь: M = –0,18 Н·м.

4.24. По дотичній до шківа маховика у вигляді диска діаметром D = 50 см і масою m = 40 кг прикладена сила F = 0,5 кН. Визначити кутове прискорення β та частоту обертання n через $t = 10$ с після початку дії сили. Радіус шківа $r = 10$ см. Силою тертя знехтувати.

Відповідь: $\beta = 40$ рад/с^2; $n = 63{,}7$ об/с.

4.25. Горизонтальний диск, маса якого $M = 250$ кг, радіус $R = 1$ м, може обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. На краю диска знаходиться мавпа, маса якої $m = 20$ кг. Спочатку диск та мавпа нерухомі. Потім мавпа починає йти по краю диска із швидкістю $\upsilon = 1$ м/с. Знайти швидкість ω обертання диска.

Відповідь: $\omega = 0{,}14$ рад/с.

4.26. Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи й, обігнувши її, повернеться в вихідну точку? Маса платформи $m_1 = 300$ кг, маса людини $m = 80$ кг.

Відповідь: $\varphi = 0{,}51\pi$.

4.27. Диск масою $m = 20$ кг та радіусом $R = 1$ м спочатку обертався навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 0{,}4$ рад/с. Під дією зовнішніх сил диск зупиняється. Чому дорівнює робота зовнішніх сил A?

Відповідь: $A = -0{,}8$ Дж.

4.28. Однорідний циліндр масою $m = 25$ кг і радіусом $R = 0{,}5$ м обертається навколо своєї осі. Кутова швидкість циліндра змінюється за проміжок часу $\Delta t = 5$ с від значення $\omega_1 = 50$ рад/с до $\omega_2 = 80$ рад/с. Яку середню потужність P розвивають сили, що діють на циліндр?

Відповідь: $\langle P \rangle = 1220$ Вт.

4.29. Куля котиться без ковзання по горизонтальній поверхні. Повна кінетична енергія кулі $W_k = 28$ Дж. Знайти кінетичну енергію поступального W_1 та обертального W_2 руху кулі.

Відповідь: $W_1 = 20$ Дж; $W_2 = 8$ Дж.

4.30. Два однакові вантажі масою m підвішені до вертикальної осі на нитках довжиною l. Визначити їх кінетичну енергію, якщо вони при обертанні відхилились на кут α.

Відповідь: $W_k = mgl \sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

4.31. До обода однорідного суцільного диска масою 10 кг, закріпленого на осі, прикладена по дотичній постійна сила $F = 30$ Н. Визначити кінетичну енергію через $t = 4$ с після початку дії сили.

Відповідь: $W_k = 1{,}44$ кДж.

4.32. До обода однорідного суцільного диска радіусом $R = 0{,}5$ м прикладена по дотичній постійна сила $F = 100$ Н. При обертанні диска на нього діє момент сил тертя $M_{\text{тер}} = 2$ Н·м. Визначити масу m диска, за умови, що він має постійне кутове прискорення $\beta = 16$ рад/с^2.

Відповідь: $m = 24$ кг.

4.33. З похилої площини скочується без ковзання однорідний диск. Знайти прискорення диска і силу тертя, якщо кут нахилу площини до обрію $\alpha = 30°$, а маса диска $m = 0{,}5$ кг.

Відповідь: $a = 3{,}9$ м/с^2; $F_{\text{тер}} = 0{,}98$ Н.

4.34. Кулька масою m закріплена на кінці нитки й обертається по колу на гладкій (без тертя) поверхні столу. Другий кінець нитки протягнутий через отвір у столі. Спочатку кулька обертається з лінійною швидкістю $\upsilon_1 = 2{,}4$ м/с по колу радіусом $R_1 = 0{,}8$ м. Далі нитку повільно протягують крізь отвір так, що радіус зменшується до значення $R_2 = 0{,}48$ м. Чому дорівнює швидкість кульки υ_2?

Відповідь: $\upsilon_2 = 4$ м/с.

4.35. Дерев'яний стрижень масою $M = 0{,}5$ кг та довжиною $l = 1$ м може обертатися у вертикальній площині відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O (рис. 7). У кінець стрижня влучає куля масою $m = 10$ г, що летить із швидкістю $\upsilon_0 = 2 \cdot 10^3$ м/с, спрямованою перпендикулярно стрижню та осі і застрягає в ньому. Визначити кінетичну енергію стрижня після удару.

Відповідь: $W_k = 1200$ Дж.

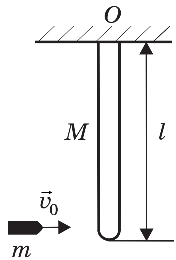


Рис. 7

4.36. Горизонтально розташований стрижень масою $M = 0{,}8$ кг та довжиною $l = 1{,}8$ м може обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через його середину. В кінець стрижня влучає і застрягає куля масою $m = 3$ г, що летить перпендикулярно до осі та до стрижня із швидкістю $\upsilon = 50$ м/с. Визначити кутову швидкість ω, з якою починає обертатися стрижень.

Відповідь: $\omega = 0{,}62$ рад/с.

4.37. Олівець, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову та лінійну швидкість матиме в кінці падіння: а) верхній його кінець; б) середина олівця? Довжина олівця 20 см.

Відповідь: $\omega_1 = \omega_2 = 12{,}12$ рад/с; а) $\upsilon_1 = 2{,}42$ м/с; б) $\upsilon_2 = 1{,}21$ м/с.

4.38. Тонкий прямий стрижень довжиною l = 1 м прикріплено до горизонтальної осі, що проходить через один із його кінців. На який кут φ треба відвести стрижень від положення рівноваги, щоб у момент проходження ним цього положення лінійна швидкість його нижнього кінця становила υ = 4 м/с?

Відповідь: $\varphi = 63°$.

4.39. Платформа, що має форму диска масою m = 80 кг та радіусом R = 1 м, обертається з частотою 20 об/хв. У центрі платформи стоїть людина і тримає у розкинутих руках вантажі. Яке число обертів за хвилину робитиме платформа, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від 2,94 кг·м^2 до 0,98 кг·м^2?

Відповідь: n = 21 об/хв.

4.40. Тверда куля масою M і радіусом R скочується без ковзання з похилої площини висотою H зі стану спокою. Чому дорівнює швидкість цієї кулі у основи похилої площини?

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{10}{7} gH}$.

4.41. Однорідна куля радіусом r починає скочуватись без проковзування з вершини сфери радіусом R. Знайти кутову швидкість кулі ω після відриву від поверхні сфери.

Відповідь: $\omega = \sqrt{10g(R+r)/17r^2}$.

4.42. Однорідний диск радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω та обережно поклали на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск обертатиметься на поверхні, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ?

Відповідь: $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$.

4.43. На гладенькій горизонтальній поверхні лежить однорідний диск радіусом R. На нього обережно опустили інший такий же диск, що обертався із кутовою швидкістю ω_0. Через який час обидва диски обертатимуться з однаковою кутовою швидкістю, якщо коефіцієнт тертя між дисками дорівнює μ?

Відповідь: $t = \dfrac{3R\omega_0}{8\mu g}$.

4.44. На гладенькій горизонтальній поверхні лежить дошка масою m_1, а на ній знаходиться однорідна куля масою m_2. До дошки прикладена постійна горизонтальна сила F. З яким прискоренням рухатимуться дошка та центр кулі за умов відсутності проковзування між ними?

Відповідь: $a_1 = F/(m_1 + 2m_2/7)$; $a_2 = 2a_1/7$.

4.45. Маятник у вигляді однорідної кулі жорстко скріплений з тонким стрижнем, довжина якого дорівнює радіусу кулі, може коливатись навколо горизонтальної осі, що проходить через кінець стрижня. В кулю, перпендикулярно до її поверхні, влучила і застрягла кулька масою $m = 10$ г, що летіла горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 800$ м/с. Маса кулі $M = 10$ кг, радіус $R = 15$ см. На який кут α відхилиться маятник у результаті удару кулі? Масою стрижня знехтувати.

Відповідь: $\cos\alpha = 0,9$; $\alpha = 26°$.

5. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ (ОКРЕМОЇ) ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Класична механіка припускає, що всі процеси відбуваються в абсолютних просторі й часі (можна вибрати одну, «найправильнішу» систему координат).

Абсолютний простір — тривимірний, нескінченний, неперервний, пустий (без матерії), однорідний, ізотропний.

Абсолютний час не залежить від простору й матерії, одновимірний, однорідний, єдиний у всьому Всесвіті.

Абсолютний простір і час не пов'язані між собою, що призводить до визнання *миттєвої взаємодії* тіл.

Ньютонівська механіка справедлива для тіл, які рухаються зі швидкостями, значно меншими за швидкість поширення світла ($\upsilon << c$). Всі механічні процеси підкоряються принципу відносності Галілея: рівняння руху інваріантні щодо перетворень Галілея для інерціальних систем відліку. Всі інерціальні системи відліку еквівалентні.

Але наприкінці XIX століття з'ясувалося, що висновки класичної механіки вступають у протиріччя з результатами деяких експериментів. Наприклад, при вивченні руху швидких заряджених частинок виявилося, що їхній рух не підпорядковується законам ньютонівської механіки. Далі виникли труднощі, коли вчені спробували застосувати механіку Ньютона для пояснень розповсюдження світла. Відомо, що механічні хвилі розповсюджуються вздовж шнура, по поверхні води; звукові хвилі — в повітрі та інших середовищах. У зв'язку з тим, що фізика XIX сторіччя розглядала Всесвіт з точки зору законів ньютонівської механіки, було природним припущення про те, що світло розповсюджується у якомусь середовищі. Це середовище назвали *ефіром,* і було припущено, що ефір заповнює весь простір.

Згідно з класичною механікою, виходить, що, якщо джерело та приймач світла рухаються один відносно одного рівномірно й прямолінійно, то вимірювана швидкість повинна залежати від відносної швидкості їхнього руху.

Американські вчені Майкельсон і Морлі здійснили спробу виявити рух Землі відносно ефіру (*ефірний вітер*). Сутність їхнього експерименту полягала у вимірюванні швидкості світла в різних напрямках. Вони сподівалися виявити різницю в швидкостях світла залежно від орієнтації їхньої експериментальної установки відносно ефіру. Подібно до того, як човен має різні швидкості відносно Землі залежно від того, рухається він за течією чи проти неї, або поперек течії, так і світло повинно було б розповсюджуватися з різною швидкістю залежно від швидкості обтікання ефіром Землі. Як не дивно, але ніякої різниці в швидкості світла вченим виявити не вдалося.

Експерименти «вперто» показували, що швидкість світла в двох системах, що рухаються одна відносно одної, однакові.

Разом з цим було виявлено протиріччя між класичною теорією й рівняннями Максвелла, які лежать в основі розуміння світла як електромагнітної хвилі.

Ця кризова ситуація була подолана Ейнштейном. У роботі «До електродинаміки середовищ, які рухаються» ним були закладені основи спеціальної теорії відносності. Ця теорія вивчає взаємозв'язок властивостей простору й часу, коли не враховується гравітаційне поле (точне врахування гравітаційного поля та його впливу на властивості простору–часу містить загальна теорія відносності).

Теорія відносності заперечує існування введених Ньютоном понять абсолютних простору й часу, які ні з чим не взаємодіють і ні від чого не залежать. Незмінних явищ у природі немає, і сама назва *теорія* свідчить про те, що існують тільки відносні рухи й відносні характеристики.

Ейнштейн поширив принцип відносності Галілея на всі явища природи в тому розумінні, що всі фізичні явища (електричні, магнітні, атомно-ядерні) однаково відбуваються у всіх інерціальних системах відліку.

Спеціальна (окрема) теорія відносності — це сучасна фізична теорія простору та часу. Її ще називають *релятивістською теорією*, а специфічні явища, які вона описує — *релятивістськими ефектами*. Ці ефекти проявляються, коли швидкість руху тіл (частинок) близька за величиною до швидкості розповсюдження світла у вакуумі ($c \approx 2{,}997925 \cdot 10^8$ м/с). Такі швидкості називають *релятивістськими*.

Релятивістська механіка — це механіка руху з релятивістськими швидкостями, в основі якої лежить спеціальна теорія відносності. У релятивістській механіці, як і в механіці Ньютона, простір неперервний, однорідний та ізотропний, а час неперервний та однорідний.

5.1. Постулати спеціальної теорії відносності

Фундаментом теорії відносності є два постулати.

Принцип відносності

1. ***У будь-яких інерціальних системах відліку всі фізичні явища за одних і тих же умов відбуваються однаково.***

Тобто ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні), проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, перебуває ця система в стані спокою чи рухається рівномірно й прямолінійно.

Перший постулат Ейнштейна є загальнофізичним. Він узагальнює механічний принцип відносності Галілея на будь-які фізичні процеси та стверджує, що всі фізичні закони незалежні (інваріантні) відносно вибору інерціальної системи відліку. Рівняння, які виражають ці закони, мають однакову форму в усіх інерціальних системах відліку. Однакові за величиною й фізичні константи, які входять до цих рівнянь.

Згідно з цим постулатом, усі інерціальні системи відліку цілком рівноправні, тобто явища (механічні, електродинамічні, оптичні та інші) в усіх інерціальних системах відліку відбуваються однаково.

Принцип інваріантності швидкості світла

2. ***Швидкість поширення світла у вакуумі не залежить ні від швидкості руху джерела світла, ні від швидкості руху спостерігача й однакова в усіх інерціальних системах відліку.***

Другий постулат Ейнштейна стверджує, що всі взаємодії в природі поширюються з певною кінцевою швидкістю. Найбільшою, граничною швидкістю розповсюдження будь-яких взаємодій (сигналів) та руху тіл є швидкість поширення світла в вакуумі. Це одна з найважливіших фізичних констант.

Ці специфічні закономірності процесу поширення світла в вакуумі дозволяють використовувати цей реальний фізичний процес для *хронометризації системи відліку,* тобто *для синхронізації годинників,* які розміщені в різних точках простору та рухаються разом з системою відліку, що розглядається.

5.2. Перетворення Лоренца

Із постулатів спеціальної теорії відносності та однорідності й ізотропності простору, а також однорідності часу випливає, що співвідношеннями між координатами й часом тієї ж самої події в двох інерціальних системах відліку не можуть бути перетворення Галілея. Згідно з принципом відносності та наведеними вище властивостями симетрії простору й часу нові перетворення повинні бути лінійними.

Такі перетворення були запропоновані голландським фізиком Лоренцем ще до появи теорії відносності як перетворення, відносно яких рівняння Максвелла інваріантні. Але ці перетворення майже не використовувалися у фізиці доти, доки Ейнштейн не зрозумів усю важливість їх для опису фізичних явищ.

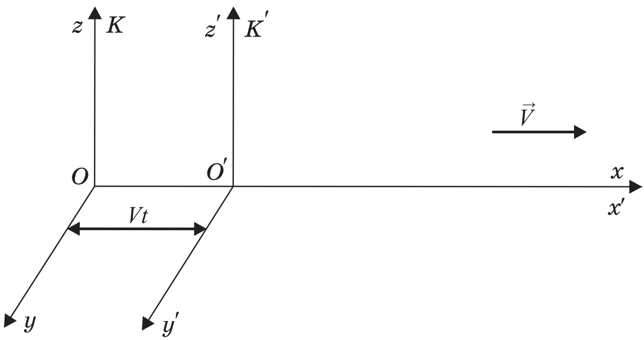


Рис. 5.1

Розглянемо дві інерціальні системи відліку. Вважатимемо, що в початковий момент часу початки координат нерухомої системи K і системи K', що рухається зі швидкістю V, збігаються, а годинники систем K і K' синхронізовані так, що $t_0 = t'_0 = 0$.

Завдяки однорідності та ізотропності простору системи K та K' можна зорієнтувати так, щоб осі координат були попарно паралельні, а рух системи K' здійснювався б у напрямку осі x (рис. 5.1). У такому разі перетворення координат та часу при переході від однієї системи до іншої (*перетворення Лоренца*) запишуться так:

$$K \to K' \qquad\qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases}$$

де c — швидкість поширення світла в вакуумі; V — швидкість руху системи K' відносно системи K; $\beta = \dfrac{V}{c}$. Час вимірюється в секундах.

Із порівняння цих рівнянь випливає, що вони симетричні й відрізняються лише знаком при V. Це зрозуміло, бо якщо швидкість руху системи K' відносно системи K дорівнює V, то швидкість руху системи K відносно системи K' дорівнює $-V$.

Із перетворень Лоренца можна зробити два висновки.

1. При малих швидкостях ($V << c$) перетворення Лоренца переходять у класичні перетворення Галілея.

2. Відстані й проміжки часу між двома подіями змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Тобто дві події, що відбуваються в одній системі відліку одночасно в різних місцях, можуть відбуватися не одночасно в іншій системі відліку, тоді як у рамках перетворень Галілея ці величини є абсолютними і не змінюються при переході від системи до системи.

5.3. Наслідки із перетворень Лоренца

Відносність просторових проміжків

Нехай у системі K' у стані спокою перебуває якийсь матеріальний об'єкт (наприклад, стрижень) довжиною l_0 (рис. 5.2):

$$l_0 = x_2' - x_1',$$

де x_1' і x_2' — координати початку та кінця стрижня, що не змінюються з часом t', а індекс 0 вказує на те, що в системі відліку K' стрижень перебуває в стані спокою.

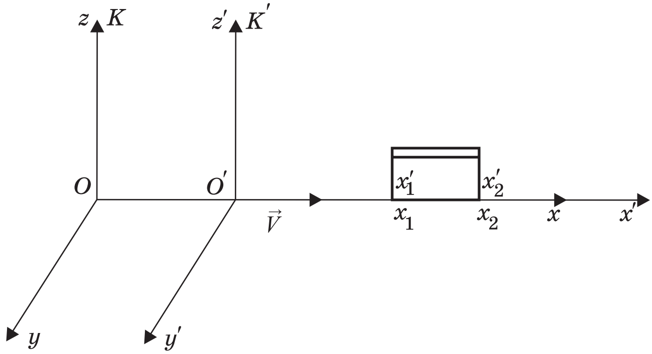


Рис. 5.2

Знайдемо довжину цього стрижня в системі K, відносно якої він рухається зі швидкістю V. Для цього необхідно зафіксувати координати початку й кінця стрижня *в один і той же момент часу*. Їхня різниця й дасть довжину стрижня в системі K:

$$l = x_2 - x_1.$$

Використаємо перетворення Лоренца й одержимо:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

тобто $l_0 = \dfrac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$, тоді $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$.

Звідси випливає, що лінійний розмір (l) тіла, що рухається відносно інерціальної системи відліку, зменшується в напрямку руху в $\sqrt{1-\beta^2}$ разів. Ця зміна подовжнього розміру тіла має назву *лоренцевого скорочення довжини*. Воно тим більше, чим більша швидкість руху.

Із другого та третього рівнянь перетворень Лоренца випливає, що

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1 \text{ та } z_2' - z_1' = z_2 - z_1,$$

тобто поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху й однакові в усіх інерціальних системах відліку.

Таким чином, лінійні розміри тіла відносні. Вони максимальні в тій інерціальній системі відліку, відносно якої тіло перебуває в стані спокою. Ці розміри тіла називають його *власними розмірами.* l_0 — власна довжина стрижня в системі K', де він перебуває у спокої.

Відносність часових проміжків

Припустимо, що в інерціальній системі відліку K' в точці з координатою x' відбувається деяка подія. Початок цієї події характеризується часом t_1', кінець — t_2'. Тривалість цієї події

$$\Delta t' = t_2' - t_1'.$$

Знайдемо тривалість цієї ж події в системі K, відносно якої згадувана точка рухається з тією самою швидкістю V, що й система K'.

У системі K подія відбувається в різних точках простору з координатами x_1 та x_2, причому

$$x_2 - x_1 = V\Delta t,$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$ — тривалість події в системі відліку K.

Із перетворень Лоренца випливає:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

тоді $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$, де $\beta = \dfrac{V}{c}$.

Час $\Delta t'$, виміряний за допомогою годинника, який рухається разом з системою відліку, називається *власним часом системи* K'.

Проміжок часу Δt вимірюється за допомогою годинника системи відліку K, відносно якої рухається система відліку K'.

Розглянута залежність між проміжками часу $\Delta t'$ та Δt свідчить про існування релятивістського ефекту *уповільнення плинності часу* в інерціальній системі відліку, що рухається, порівняно з нерухомою системою відліку.

Очевидно, що

$$\Delta t' < \Delta t.$$

Отже, можна стверджувати, що годинник, який рухається, враховує час повільніше, ніж нерухомий, у $1/\sqrt{1-\beta^2}$ разів. У відповідності з принципом відносності всі фізичні процеси в системі відліку, що рухається, відбуваються повільніше, ніж у нерухомій.

Зрозуміло, що уповільнення плинності часу стає помітним лише при швидкостях, близьких до швидкості світла в вакуумі.

У зв'язку з виявленням релятивістського ефекту уповільнення плинності часу свого часу виникла проблема «парадокса часу» (або «парадокса близнюків»). Уявімо собі, що здійснюється фантастичний космічний політ до зірки, що знаходиться на відстані 500 світлових років, зі швидкістю, близькою до швидкості світла ($\sqrt{1-\beta^2}=0{,}001$).

Годинник на Землі відрахує час 1000 років (час руху до зірки й назад до Землі). Годинник космонавта відрахує лише 1 рік.

Таким чином, космонавт повернеться до Землі в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ разів молодшим за свого брата-близнюка, що залишався на Землі. У цьому явищі, яке одержало назву *«парадокса близнюків»*, в дійсності ніякого парадокса немає. Справа в тому, що принцип відносності стверджує рівноправність не будь-яких систем відліку, а лише інерціальних. Системи відліку, в яких знаходяться близнюки, не є еквівалентними: земна система інерціальна (умовно), а корабельна — неінерціальна, тому принцип відносності до них застосувати не можна.

Релятивістський ефект уповільнення плинності часу існує реально і має експериментальне підтвердження. Наприклад, у 1971 році протягом місяця атомний годинник, який здійснював коливання з частотою $\nu = 10^{10}$ с$^{-1}$, знаходився в польоті на реактивному літаку. Інший, такий самий годинник знаходився на Землі. Годинник, що був у польоті, відстав від земного на 203 нс.

Відносність одночасності подій

Припустимо, що в системі K', яка рухається, відбуваються дві події, які мають різні координати.

Початку першої події в цій системі відповідає координата x'_1 та момент часу t'_1.

Початку другої події в цій системі відповідає координата x'_2 та момент часу t'_2.

Часовий проміжок між двома подіями:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Просторовий проміжок між цими подіями:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1.$$

Нехай t_1 — початок першої події в нерухомій системі K, t_2 — початок другої події в системі K.

Часовий проміжок в системі K:

$$\Delta t = t_2 — t_1.$$

Знайдемо зв'язок між часовими проміжками в системах K та K'.

Скористаємося формулами перетворень Лоренца, згідно з якими

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{а} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

та одержимо:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\left(t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2\right) - \left(t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

або

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Нехай у системі відліку K' події відбуваються в один і той же момент часу $t'_1 = t'_2$, $\Delta t' = 0$, тоді

$$\Delta t = \frac{\frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Події є одночасними ($\Delta t = \Delta t'$), якщо вони відбуваються в один і той же момент часу і в одній і тій же точці простору. Інакше події не будуть одночасними.

Якщо $\Delta x' = 0, \Delta t = 0$ — події одночасні.

Якщо $\Delta x' > 0, \Delta t > 0$ — події 1 і 2 принципово можуть мати причинно-наслідковий зв'язок. 1) причина $\rightarrow$ 2) наслідок.

Якщо $\Delta x' < 0, \Delta t < 0$ — події 1 і 2 принципово не можуть бути пов'язані між собою. Це незалежні події.

Релятивістський закон складання швидкостей

Швидкості $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\upsilon}'$ матеріальної точки в двох інерціальних системах відліку K і K' визначаються таким чином:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\ ; \quad \vec{\upsilon}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}' + \frac{dy}{dt}\vec{j}' + \frac{dz}{dt}\vec{k}',$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ і $\vec{r}' = x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}'$ — радіуси-вектори точки в системах K і K'. Проекції швидкостей $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\upsilon}'$ на осі декартових координат визначаються такими співвідношеннями:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt};$$

$$\upsilon'_x = \frac{dx'}{dt}, \quad \upsilon'_y = \frac{dy'}{dt}, \quad \upsilon'_z = \frac{dz'}{dt}.$$

Якщо відповідні осі декартових координат систем відліку K і K' попарно паралельні та система K' рухається відносно K зі швидкістю V, напрямленою вздовж осі X (рис. 2.3), причому в момент початку відліку часу в K і K' ($t = 0$ та $t' = 0$) початки координат O і O' в цих системах збігаються, то справедливі перетворення Лоренца:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

Тоді:

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - \dfrac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$dx=\frac{dx'+Vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',\quad dt=\frac{dt'+\dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Звідси випливає зв'язок між проекціями швидкостей точки на осі декартових координат в системі K':

$$\upsilon'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{(dx-Vdt)\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)}=\frac{dx-Vdt}{dt-\dfrac{V}{c^2}dx}=\frac{\upsilon_x-V}{1-\dfrac{V\upsilon_x}{c^2}};$$

$$\upsilon'_y=\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)}=\frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{V\upsilon_x}{c^2}};$$

$$\upsilon'_z=\frac{dz'}{dt'}=\frac{dz\sqrt{1-\beta^2}}{\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)}=\frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{V\upsilon_x}{c^2}}$$

і в системі K:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\frac{(dx'+Vdt')\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}\left(dt'+\dfrac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{dx'+Vdt'}{dt'+\dfrac{V}{c^2}dx'}=\frac{\upsilon'_x+V}{1+\dfrac{V\upsilon'_x}{c^2}};$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{\left(dt'+\dfrac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\upsilon'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{V\upsilon'_x}{c^2}};$$

$$\upsilon_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\beta^2}}{\left(dt'+\dfrac{V}{c^2}dx'\right)}=\frac{\upsilon'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{V\upsilon'_x}{c^2}}.$$

Таким чином, проекції швидкостей точки на осі декартових координат у системах K і K' пов'язані співвідношеннями:

- $K'\to K$ $\quad \upsilon'_x=\dfrac{\upsilon_x-V}{1-\dfrac{V\upsilon_x}{c^2}};\quad \upsilon'_y=\dfrac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{V\upsilon_x}{c^2}};\quad \upsilon'_z=\dfrac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{V\upsilon_x}{c^2}};$

• $K \to K'$ $\quad \upsilon_x = \dfrac{\upsilon'_x + V}{1 + \dfrac{V\upsilon'_x}{c^2}}$; $\quad \upsilon_y = \dfrac{\upsilon'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{V\upsilon'_x}{c^2}}$; $\quad \upsilon_z = \dfrac{\upsilon'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{V\upsilon'_x}{c^2}}$.

Ці співвідношення виражають *закон складання швидкостей* у релятивістській кінематиці. При $c \to \infty$ цей закон перетворюється у звичайний закон складання швидкостей у класичній механіці:

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - V,\ \ \upsilon'_y = \upsilon_y,\ \ \upsilon'_z = \upsilon_z,\ \ \vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V}.$$

Із релятивістського закону складання швидкостей випливає, що якщо $\vec{\upsilon}' = c$, то і $\upsilon = c$, та навпаки. Тобто, якщо швидкість частинки відносно будь-якої інерціальної системи відліку дорівнює швидкості світла в вакуумі, то вона повинна бути такою самою за величиною й відносно будь-якої іншої інерціальної системи відліку незалежно від швидкості відносного руху цих систем відліку V. Інакше кажучи, сума двох швидкостей, з яких одна дорівнює c, завжди дорівнює c. У цій закономірності, яка виявляється під час руху таких елементарних частинок, як фотони, виявляється граничний характер швидкості світла в вакуумі.

Якщо швидкість частинки відносно будь-якої інерціальної системи відліку менша за c, то й відносно будь-якої іншої інерціальної системи відліку її швидкість буде менша за c (наприклад, якщо $\upsilon < c$, то і $\upsilon' < c$, і навпаки). Звідси випливає, що якими близькими б не були до швидкості c швидкості двох частинок, їх відносна швидкість завжди менша за c.

5.4. Просторово-часовий інтервал

Сталість швидкості поширення світла призводить до того, що простір та час виявляються взаємопов'язаними, створюючи єдиний чотиривимірний простір — «*простір – час*».

У цьому просторі 3 осі — просторових координат x, y, z, 4-та вісь — час, тобто часова координата ct.

Будь-яка подія визначається точкою простору, в якій вона відбулася і координати якої x, y, z, та часом t, коли вона відбулася. В чотиривимірному просторі подію зображує точка, яку називають *світовою точкою*. Руху чи спокою довільної частинки відповідає в чотиривимірному просторі лінія, яку називають *світовою лінією.*

У тривимірному (евклідовому) просторі відстань між двома точками дорівнює:

$$\Delta l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

При перетворенні координат ця величина змінюється, тобто не є інваріантом відносно перетворень координат.

У чотиривимірному просторі, в якому кожна подія характеризується чотирма координатами (x, y, z, ct), такою фізичною величиною є *інтервал* між двома подіями:

$$\Delta S = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Введемо позначення $\Delta t = t_2 - t_1$, одержимо:

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}\,.$$

Покажемо, що інтервал між двома подіями незмінний у всіх інерціальних системах відліку.

Квадрат інтервалу між двома подіями в системі K можна записати у вигляді:

$$(\Delta S)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

Тоді квадрат інтервалу між тими самими подіями в системі K' має вигляд:

$$(\Delta S')^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2\,.$$

Згідно з перетвореннями Лоренца:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{V\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Якщо підставити ці значення у формулу для $(\Delta S')^2$, то після елементарних перетворень одержимо співвідношення:

$$(\Delta S')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

тобто

$$(\Delta S')^2 = (\Delta S)^2,$$

а звідси випливає, що

$$\Delta S' = \Delta S.$$

Узагальнюючи одержані результати, можна зробити висновок про те, що *інтервал*, який визначає *просторово-часові* співвідношення між подіями, є *інваріантом* при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Інваріантність інтервалу означає, що, незважаючи на відносність довжин та проміжків часу, перебіг події має об'єктивний характер і не залежить від системи відліку.

Класифікація інтервалу

Інтервал у вигляді $\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}$ може бути дійсним, уявним і навіть дорівнювати нулю.

• Якщо $(\Delta S)^2 > 0$, тобто S — дійсне число, інтервал *часоподібний* і його називають *τ-інтервалом*.

• Якщо $(\Delta S)^2 < 0$, тобто S — уявне число, інтервал *простороподібний* і його називають *σ-інтервалом*.

• Якщо $(\Delta S)^2 = 0$, тобто $S = 0$, інтервал *світлоподібний.*

Якщо інтервал часоподібний, то це означає, що відстань у часі між подіями більша за відстань у просторі, тому

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1-\beta^2} \ .$$

У такому разі $\Delta t'$ є *власним часом*.

Із інваріантності інтервалу ΔS по відношенню до вибору інерціальної системи відліку K' випливає, що в усіх системах відліку K' значення $\Delta t'$ та $\Delta l'$ задовольняють рівнянню гіперболи.

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta l')^2 = (\Delta S)^2.$$

Якщо $(\Delta S)^2 > 0$ (*τ-інтервал*), то гіпербола має дві гілки: I і II (рис. 5.3).

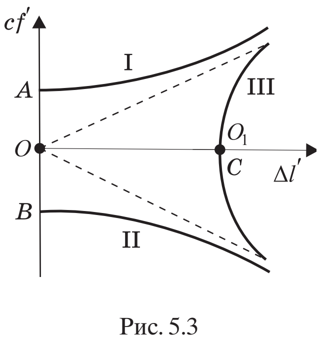


Рис. 5.3

Це означає, що коли дві події пов'язані τ-інтервалом, то знак $\Delta t'$ не залежить від системи відліку (абсолютний). В усіх інерціальних системах K', що рухаються, подія 2 відбувається або пізніше події 1 $\Delta t' > 0$ (гілка I), або раніше $\Delta t' < 0$ (гілка II). Відстань між подіями $\Delta l'$ відносна. Є така система відліку K', у якій $\Delta l' = 0$ (точки A і B на гілках гіперболи I і II). Тобто всі події відбуваються в одній точці простору.

Двом подіям, які пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, завжди відповідає τ-*інтервал* або в крайньому випадку — *світлоподібний* ($S = 0$). Це обумовлено тим, що сигнал, за допомогою якого подія-причина викликає подію-наслідок, не може розповсюджуватися зі швидкістю, яка б перевищувала швидкість світла у вакуумі $\Delta l' \le c\Delta t'$.

У випадку, коли події пов'язані *просторовоподібним* інтервалом ($(\Delta S)^2 < 0$), знак $\Delta t'$ — відносний. В одних системах відліку K' $\Delta t' > 0$ (верхня частина гіперболи III на рис. 5.3), в інших системах відліку $\Delta t' < 0$ (нижня частина гіперболи III). Точка C відповідає системі відліку K', у якій $\Delta t' = 0$, тобто події відбуваються одночасно.

5.5. Основи релятивістської динаміки

Із принципу відносності Ейнштейна, який встановлює інваріантність усіх законів при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, випливає умова інваріантності рівнянь фізичних законів відносно перетворень Лоренца.

Основний закон класичної динаміки Ньютона для матеріальної точки має вигляд:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{або} \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \vec{F},$$

у якому маса точки m — стала величина та однакова в усіх інерціальних системах відліку. Це рівняння неінваріантне відносно перетворень Лоренца, тому цей закон не може бути основою релятивістської динаміки.

Релятивістська маса

У спеціальній теорії відносності маса m тіла залежить від значення його швидкості $\vec{\upsilon}$ відносно інерціальної системи відліку:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 — маса тіла, що розглядається при $\Delta\upsilon' = 0$, тобто виміряна в інерціальній системі відліку, відносно якої це тіло перебуває в стані спокою. Це *маса спокою* тіла, а m — *маса тіла*, *що рухається*, або *релятивістська маса*.

На рис. 5.4 показано хід залежності $\frac{m}{m_0}$ від $\frac{\upsilon}{c}$.

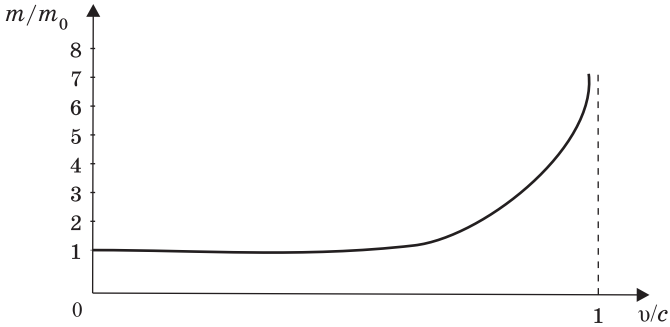


Рис. 5.4

Відношення $\frac{m}{m_0}$ помітно відрізняється від одиниці тільки при швидкостях υ, близьких до c. Наведену залежність маси від швидкості можна одержати за умови, якщо в релятивістській механіці виконується *закон збереження імпульсу*: ***при будь-яких процесах, що відбуваються у замкненій системі, її імпульс (тобто геометрична сума добутків релятивістських мас усіх частин цієї системи на їхні швидкості) не змінюється.***

Основний закон релятивістської динаміки

Основне рівняння релятивістської динаміки має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{F} \text{ або } \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F},$$

де $\vec{p}=m\vec{\upsilon}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}$ — *імпульс тіла* (матеріальної точки) *в релятивістській механіці*.

Можна показати, що основне рівняння релятивістської динаміки задовольняє вимогам лоренц-інваріантності, якщо при переході від однієї інерціальної системи до іншої перетворювати компоненти сили уздовж осей координат за таким законом:

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{V}{c^2}\vec{F}'\vec{\upsilon}'}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}; \; F_y = \frac{F'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}; \; F_z = \frac{F'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}},$$

де υ' — швидкість частинки в системі K', V — швидкість системи K' відносно K.

Проаналізуємо залежність імпульсу від швидкості руху тіла (рис. 5.5).

При малих швидкостях ($\upsilon << c$) маса практично дорівнює масі спокою ($m \approx m_0$), а імпульс зростає за рахунок чисельника, тобто зумовлюються тільки швидкістю. Величина υ^2/c^2 мала, і знаменник приблизно дорівнює одиниці.

При великих швидкостях ($\upsilon \approx c$) чисельник зростає дуже повільно й імпульс різко зростає за рахунок знаменника, що наближається до нуля. Тобто зміна імпульсу визначається в основному зміною релятивістської маси.

Якби маса не залежала від швидкості, то тіло можна було б розігнати до будь-якої швидкості (пунктирна лінія на рис. 5.5).

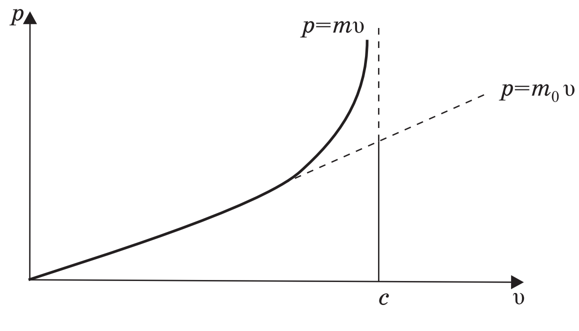


Рис. 5.5

Усі реальні сили скінченні за величиною, а їхня дія на тіло обмежена в часі. Вони не можуть надати тілу нескінченно великий імпульс. Таким чином, ***швидкість тіла по відношенню до будь-якої інерціальної системи відліку не може дорівнювати швидкості світла в вакуумі, а завжди менша за неї.***

Це твердження справедливе для атомів, молекул та всіх елементарних частинок, за винятком фотонів, нейтрино та антинейтрино, маса спокою яких дорівнює нулю. Тому їхня швидкість не може відрізнятися від швидкості світла в вакуумі c.

Кінетична енергія релятивістської частинки

Знайдемо кінетичну енергію матеріальної точки в релятивістській механіці. Відомо, що приріст кінетичної енергії матеріальної точки на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ дорівнює роботі сили на цьому переміщенні:

$$dT = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{\upsilon}dt = \frac{d\vec{p}}{dt}\vec{\upsilon}dt = \vec{\upsilon}d\vec{p} = \vec{\upsilon}d(m\vec{\upsilon}) =$$
$$= \upsilon^2 dm + m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \upsilon^2 dm + m\upsilon d\upsilon,$$

де υ — швидкість точки, а $\vec{\upsilon}\vec{\upsilon} = \upsilon^2$, $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \upsilon d\upsilon$.

Релятивістська маса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Звідси:

$$m^2 - m^2\frac{\upsilon^2}{c^2} = m_0^2;\; m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2$$

або

$$m^2c^2 = m^2\upsilon^2 + m_0^2c^2.$$

Від обох частин цієї рівності візьмемо похідну та одержимо:

$$2mdmc^2 = 2mdm\upsilon^2 + m^2 2\upsilon d\upsilon$$

або

$$c^2dm = \upsilon^2dm + m\upsilon d\upsilon.$$

Права частина цієї рівності співпадає з правою частиною виразу для приросту кінетичної енергії dT.

Таким чином, при зміні швидкості матеріальної точки прирости її кінетичної енергії та релятивістської маси пропорційні одне одному:

$$dT = c^2dm.$$

Кінетична енергія точки, що перебуває в стані спокою ($\upsilon = 0$), дорівнює нулю, а її релятивістська маса дорівнює m_0.

Проінтегруємо останнє рівняння за m від m_0 до m, одержимо вираз для кінетичної енергії матеріальної точки:

$$T = c^2(m - m_0) = m_0 c\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - 1\right].$$

Кінетична енергія релятивістської частинки залежить від маси m (від швидкості υ).

Скористаємося розкладенням у ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \left[1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^4 + \ldots.$$

Якщо $\upsilon \ll c$, можна обмежитися першими двома членами цього ряду.

$$T = m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m_0\upsilon^2}{2}.$$

Таким чином, при малих швидкостях руху матеріальної точки її кінетична енергія, обчислена за релятивістською формулою, переходить у формулу для кінетичної енергії ньютонівської механіки.

Повна енергія релятивістської частинки

Із формули для кінетичної енергії

$$T = c^2(m - m_0)$$

випливає:

$$T = mc^2 - m_0c^2$$

або

$$mc^2 = m_0c^2 + T.$$

Член m_0c^2 визначається масою спокою m_0, і тому його назвали *енергією спокою.*

Член mc^2 — це сума енергії спокою і кінетичної енергії, тобто енергії руху. Ця енергія має назву *повної енергії.*

Таким чином: *повна енергія E дорівнює сумі енергії спокою та кінетичної енергії:*

$$E = m_0c^2 + T.$$

Закон взаємозв'язку релятивістської маси й енергії

Ейнштейн узагальнив положення про пропорційність приросту кінетичної енергії релятивістської частинки її масі, припустивши, що воно справедливе й для повної енергії:

$$\Delta E = c^2\Delta m.$$

Будь-яка зміна маси Δm супроводжується зміною повної енергії матеріальної точки, і навпаки***, якщо повна енергія E тіла (або системи) збільшується на ΔE, то й релятивістська маса m цього тіла (або системи тіл) збільшується на***

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Звідси випливає:

$$E = mc^2.$$

Це рівняння виражає *закон взаємозв'язку* (пропорційності) *маси й енергії:* ***повна енергія системи дорівнює добутку релятивістської маси системи на квадрат швидкості світла в вакуумі.***
Через *однорідність часу* в релятивістській механіці, як і в ньютонівській, виконується *закон збереження енергії*: ***повна енергія замкненої системи зберігається, тобто не змінюється з часом.***

Зв'язок між повною енергією частинки та її імпульсом

При зміні маси частинки змінюється як повна енергія, так і імпульс. Знайдемо зв'язок між повною енергією та релятивістським імпульсом. Повна енергія:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}.$$

Поділимо обидві частинки цього рівняння на c і піднесемо до квадрата:

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_0 c^2}{1 - \upsilon^2/c^2}.$$

Релятивістський імпульс:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}},$$

а його квадрат:

$$p^2 = \frac{m_0^2 \upsilon^2}{1 - \upsilon^2/c^2}.$$

Віднімемо від E^2/c^2 квадрат імпульсу p^2, одержимо:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m_0^2 c^2 - m_0^2 \upsilon^2}{1 - \upsilon^2 / c^2} = m_0^2 c^2$$

або

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

Права частина цього рівняння є сталою величиною, вона не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тобто є *інваріантом*.

Таким чином, при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, яка рухається відносно першої, швидкість частинки, її релятивістська маса, імпульс та повна енергія змінюються.

Запитання та завдання для самоконтролю та експрес-контролю

1. У чому полягає фізична сутність механічного принципу відносності?
2. Записати правило складання швидкостей у класичній механіці.
3. Сформулювати причини виникнення спеціальної теорії відносності.
4. Чи залежить від швидкості руху системи відліку швидкість тіла?
5. Сформулювати постулати теорії відносності.
6. Записати та прокоментувати перетворення Лоренца.
7. За яких умов перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея?
8. Які висновки про простір і час можна зробити на підставі перетворень Лоренца?
9. Чи одночасні події в системі K', якщо в системі K вони відбуваються в одній точці та одночасні?
10. Чи одночасні події в системі K', якщо в системі K події відокремлені, але одночасні?
11. Які наслідки випливають із спеціальної теорії відносності для розмірів тіл та тривалостей подій у різних системах відліку?
12. У чому полягає «парадокс близнюків». Як він вирішується?
13. Записати релятивістський закон складання швидкостей.
14. Покажіть, що релятивістський закон складання швидкостей перебуває в узгодженні з постулатами Ейнштейна.
15. Як визначається інтервал між подіями? Доведіть, що він є інваріантом при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.
16. Запишіть основний закон релятивістської динаміки матеріальної точки. В чому він різниться з основним законом ньютонівської механіки?
17. У чому полягає закон збереження релятивістського імпульсу?
18. Записати вираз для кінетичної енергії в релятивістській механіці.
19. За яких умов релятивістська кінетична енергія переходить у класичну?
20. Сформулюйте та запишіть закон взаємозв’язку маси та енергії. В чому полягає його фізична сутність?

21. Як пов'язані між собою повна енергія релятивістської частинки та її імпульс?
22. Скільки часу пройде на Землі, якщо в ракеті, що рухається зі швидкістю $V = 0{,}99c$ відносно Землі, пройде 10 років?
23. Яку швидкість повинно мати тіло, що рухається, якщо його поздовжні розміри зменшилися вдвічі?
24. Порівняти час приймання світлового сигналу, посланого з ракети, якщо: а) ракета віддаляється від спостерігача; б) ракета наближається до спостерігача.
25. Елементарна частинка нейтрино рухається зі швидкістю світла c. Спостерігач рухається назустріч нейтрино зі швидкістю V. Яка швидкість нейтрино відносно спостерігача?

Приклади розв'язання задач

1. Спостерігач, що знаходиться в системі відліку K, вимірює довжину стрижня, який в системі K' перебуває у стані спокою. Швидкість системи K' відносно системи K складає $0{,}7c$. Яку довжину стрижня одержить спостерігач, якщо в системі K' довжина стрижня становила $l_0 = 1$ м?

Розв'язання

Спостерігач у системі K повинен по одному й тому ж годиннику виміряти моменти t_1 та t_2 проходження обох кінців стрижня, тоді:

$$l = \upsilon_0 \Delta t, \tag{1}$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$; $\upsilon_0 = 0{,}7c$.

Якщо в системі K годинник знаходиться в точці з координатою x, то в системі K' у момент часу t_1 їй відповідає координата x'_2, в момент часу t_2 — x'_1, причому $x'_2 - x'_1 = l_0$.

З перетворень Лоренца:

$$x'_2 = \frac{x - \upsilon_0 t_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}; \qquad x'_1 = \frac{x - \upsilon_0 t_2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}},$$

де x — координата точки, в якій знаходиться годинник спостерігача в системі K'.

$$x'_2 - x'_1 = \frac{\upsilon_0 \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}.$$

Тоді $$l = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}} = 0{,}71 \text{ м}.$$

2. Знайти швидкість мезона, якщо його повна енергія у 10 разів більша за енергію спокою.

Розв'язання

Повна енергія мезона складається із кінетичної енергії мезона W_1 та власної енергії мезона W_2 (енергія спокою).

При цьому:

$$W_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \tag{1}$$

та

$$W_2 = m_0 c^2.$$

Тоді повна енергія W:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Згідно з умовою задачі:

$$\frac{W}{W_2} = 10, \quad \text{тобто} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10.$$

Звідси $\beta = \dfrac{\upsilon}{c} = 0{,}995$, а $\upsilon = 2{,}985 \cdot 10^8$ м/с.

3. Протон і α-частинка проходять однакову прискорюючу різницю потенціалів U, після чого маса протона склала третину маси α-частинки. Визначити різницю потенціалів, а також швидкості протона й α-частинки.

Розв'язання

Оскільки повна енергія частинки пропорційна її масі, то

$$W_p = \frac{1}{3} W_\alpha, \tag{1}$$

де W_p і W_α — повні енергії протона та α-частинки.

Але

$$W_p = eU + m_p c^2, \tag{2}$$

$$W_\alpha = eU + m_\alpha c^2. \tag{3}$$

Підставивши (2) та (3) в (1), отримаємо

$$eU + m_p c^2 = \frac{1}{3}(eU + m_\alpha c^2).$$

Звідси

$$U = \frac{(m_\alpha - 3m_p)c^2}{2e}.$$

Зробивши обчислення за цією формулою, отримаємо

$$U = 461 \text{ МВ}.$$

Швидкість протона знайдемо із співвідношення

$$eU = m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_p c^2}{eU + m_p c^2} = 0,6709;$$

$$\beta = \frac{\upsilon_p}{c} = 0,7416; \;\; \upsilon_p = c\beta = 0,7416 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,22 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Для α-частинки

$$eU = m_\alpha c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right);$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_\alpha c^2}{eU + m_\alpha c^2} = 0,8902;$$

$$1 - \beta^2 = 0,7925; \;\; \beta = 0,4555;$$

$$\upsilon_\alpha = c\beta = 0,4555 \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 1,37 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. Стрижень рухається в подовжньому напрямку. Швидкість його руху υ постійна відносно інерціальної системи відліку K. При якому значенні швидкості довжина стрижня в цій системі відліку буде на $k = 0,5$ % менша за власну довжину?

Відповідь: $\upsilon = 0,1c$.

5.2. Власна довжина стрижня $l = 1,08$ м, у лабораторній системі відліку його швидкість $\upsilon = \frac{c}{2}$, довжина $l = 1$ м. Знайти кут між стрижнем і напрямком руху.

Відповідь: $\alpha = 45°$.

5.3. Яку подовжню швидкість υ треба надати стрижню для того, щоб його довжина дорівнювала половині довжини, яку він має в стані спокою?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}866c$.

5.4. З якою швидкістю рухався годинник у системі відліку K, якщо за $t = 15$ с (у цій системі) він відстав від годинника цієї системи на $\Delta t = 0{,}5$ с?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}78 \cdot 10^8$ м/с.

5.5. З якою швидкістю υ повинна летіти частинка відносно системи K, для того щоб відрізок власного часу $\Delta\tau$ був у 10 разів меншим відрізка Δt, відрахованого за годинником у системі K?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}995c$.

5.6. Знайти відношення релятивістського та ньютонівського імпульсів для швидкості, яка дорівнює: а) $0{,}1c$; б) $0{,}5c$; в) $0{,}9c$.

Відповідь: а) 1,005; б)1,155; в) 2,29.

5.7. Енергія спокою частинки дорівнює $E_0 = 0{,}51$ МеВ. Чому дорівнює повна енергія частинки в системі відліку, в якій імпульс частинки $p = 4{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с?

Відповідь: $E = 1{,}62 \cdot 10^{-13}$ Дж.

5.8. Знайти імпульс p релятивістської частинки (в одиницях m_0c), якщо її кінетична енергія дорівнює енергії спокою.

Відповідь: $p = 1{,}73\ m_0c$.

5.9. На скільки відсотків зміниться поздовжній розмір протона й електрона після проходження ними різниці потенціалів $U = 10^6 B$?

Відповідь: $\eta_e = 66{,}1\ \%$; $\eta_p = 0{,}1\ \%$.

5.10. Протон рухається з імпульсом $p = 0{,}53$ кг/м·с. На скільки відсотків відрізняється швидкість цього протона від швидкості світла c?

Відповідь: $\dfrac{c-\upsilon}{c} = 0{,}44\%$.

5.11. З якою швидкістю υ рухається частинка, якщо її релятивістська маса втричі більше маси спокою?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}943c$.

5.12. Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}8c$. Визначити релятивістський імпульс електрона.

Відповідь: $p = 2{,}05 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

5.13. Яка енергія міститься в 1 г піску? Порівняйте її з 7000 калоріями, що виділяється при згоранні 1 г вугілля (1 кал = 4,18 Дж).

Відповідь: $E = 9 \cdot 10^{13}$ Дж; $n = 3{,}1 \cdot 10^{9}$ разів.

5.14. Повна енергія тіла зросла на $\Delta E = 1$ Дж. Наскільки при цьому змінюється маса тіла?

Відповідь: $\Delta m = 11{,}1$ кг.

5.15. Визначити, наскільки повинна збільшитися повна енергія тіла, щоб його релятивістська маса зросла на $\Delta m = 1$ г?

Відповідь: 90 ТДж.

5.16. Кінетична енергія електрона дорівнює 10 МеВ. У скільки разів його релятивістська маса більше маси спокою?

Відповідь: $n_1 = 20{,}6$; $n_2 = 1{,}01$.

5.17. Кінетична енергія частинки виявилася рівною її енергії спокою. Яка швидкість частинки?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}866c$.

5.18. Яка відносна похибка буде зроблена при обчисленні кінетичної енергії релятивістської частинки, якщо замість релятивістського виразу $T = (m - m_0)c^2$ скористуватися класичним $T = \dfrac{1}{2}m_0\upsilon^2$? Обчислювання виконати для двох випадків: $\upsilon_1 = 0{,}2c$; $\upsilon_2 = 0{,}8c$.

Відповідь: $\varepsilon_1 = 0{,}03$; $\varepsilon_2 = 0{,}52$.

5.19. Кінетична енергія частинки виявилася рівною її енергії спокою. У скільки разів зросте імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться у 4 рази?

Відповідь: $n = 2{,}82$.

5.20. Імпульс p релятивістської частинки дорівнює m_0c. Під дією зовнішньої сили імпульс частинки збільшився вдвічі. У скільки разів зросте при цьому енергія частинки: кінетична та повна?

Відповідь: $n_1 = 2{,}98$; $n_2 = 1{,}58$.

6. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

6.1. Характеристика коливань

Коливальний рух поряд з поступальним та обертальним є найбільш розповсюдженим видом руху в природі.

Коливання — це обмежений рух або процес, що характеризується певним повторенням стану та параметрів фізичної системи з часом.

Коливання завжди відбуваються відносно мінімуму потенціальної енергії системи $W_p(r)$, що збігається зі станом стійкої рівноваги. В цьому стані рівнодіюча всіх сил, що діють на систему, дорівнює нулю $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$. Зважаючи на зв'язок сили з потенціальною енергією $F_r = -\dfrac{dW_p}{dr}$ і з урахуванням, що $F_r = 0$, маємо $W_p(r) = \min$.

Залежно від фізичної природи процесу існують коливання механічні, електромагнітні, електромеханічні та інші. Наприклад, коливальним є рух різних маятників; атоми та іони в твердих тілах коливаються біля вузлів кристалічної решітки. Електричні та магнітні коливання досліджуються в електродинаміці. Всі оптичні й акустичні явища пов'язані з коливаннями і розповсюдженням хвиль. Але незважаючи на різне походження, суттєвим є те, що всі ці процеси описуються аналогічними характеристиками і рівняннями.

Коливання можуть і задавати шкоду, що виявляється при коливаннях незбалансованих роторів турбін, електродвигунів, при роботі на токарних верстатах тощо.

Характер впливу зовнішнього середовища на коливальну систему дозволяє розрізняти вільні (або власні) коливання, вимушені коливання, автоколивання та параметричні коливання.

Вільні коливання

Вільні, або власні, коливання відбуваються за відсутності зовнішнього впливу. Система спочатку виводиться із стану рівноваги, а далі вона коливається під впливом внутрішніх сил.

Вільні коливання — *незатухаючі*, коли нехтується тертям та силою опору середовища, де відбуваються коливання.

У загальному випадку всі вільні коливання *затухаючі*.

Вимушені коливання

Вимушені коливання (незатухаючі) характеризуються наявністю зовнішньої сили, що періодично діє на систему, яка є незамкненою. Вимушені коливання можуть виникати за різних умов.

Автоколивання

При *автоколиваннях* відбувається передача енергії коливальній системі від постійно діючого зовнішнього джерела в певні моменти часу. Це джерело постійно компенсує зменшення енергії в системі внаслідок затухання. Прикладом такої системи є механічні годинники, в яких джерелом енергії є стиснута пружина або підняті гирі.

Автоколивальна система складається з трьох елементів: тіла, що коливається (в годиннику це маятник); стаціонарного джерела енергії (піднята гиря або пружина); пристрою, який регулює передання енергії від її джерела до коливальної системи (анкерний механізм). Коли енергія, яка передається від джерела до тіла, що коливається, за певний час (період коливань), дорівнює енергії, що витрачена тілом за цей же проміжок часу на подолання сил опору та тертя, то в системі встановлюються незатухаючі коливання зі сталою амплітудою — *автоколивання*.

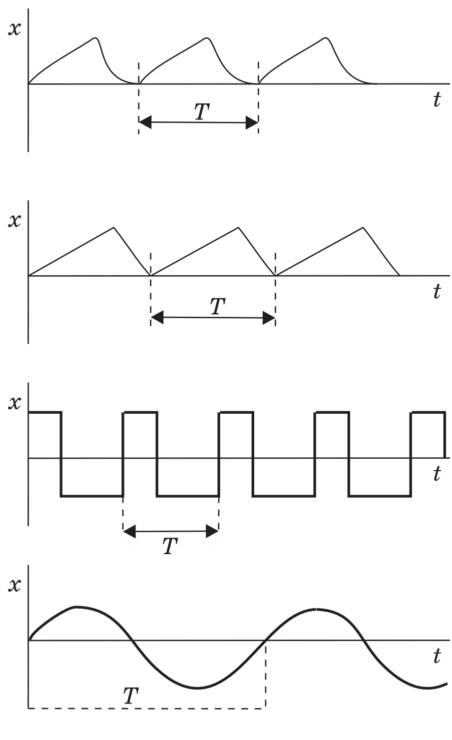


Рис. 6.1

Параметричні коливання

Параметричні коливання виникають при зміні власних параметрів системи. Наприклад, у випадку маятника можна змінювати довжину нитки за заданим законом $l = l(t)$, або змінювати прискорення вільного падіння, піднімаючи маятник в неоднорідному полі тяжіння. Коливальні системи, у яких фізичні параметри (коефіцієнт пружності та опору середовища, електроопір, ємність та індуктивність коливального контуру) з часом не змінюються, називаються *лінійними коливальними системами*. Коливальні системи, параметри яких залежать від стану системи, називаються *нелінійними*.

Періодичні коливання

Коливання періодичні, якщо значення всіх фізичних величин, що характеризують коливальну систему і змінюються при її коливаннях, повторюються через рівні проміжки часу, що мають назву *періоду коливань*. Період T — це час, за який здійснюється одне повне коливання.

$$x(t) = x(t + T) = x(t + 2T) = \ldots = x(t + nT), \quad n = 1, 2, 3...$$

Кількість коливань за час t дорівнює $N = \dfrac{t}{T}$.

На рис. 6.1 зображено приклади різних за формою періодичних коливань.

Частота коливань ν (або f) визначається як кількість повних коливань за одну секунду.

$$\nu = \frac{1}{T}; \; T = \frac{1}{\nu}.$$

Частота вимірюється в герцах (Гц): $[\nu]$ = Гц.

6.2. Гармонічні коливання

Найпростішим і найпоширенішим типом (за формою) періодичних коливань є гармонічні коливання. Коливання називаються *гармонічними*, якщо величина, яка коливається (x), змінюється за законом косинуса або синуса

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{6.1}$$

або

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1); \quad (\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

де A, ω та φ_0 — сталі величини.

$A = x_{0x}$ — амплітуда коливань — максимальне значення величини, що коливається;

$\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ — циклічна або кругова частота гармонічних коливань, одиниці вимірювання — радіан за секунду $[\omega]$ = рад/с;

$\omega t + \varphi_0 = \varphi(t)$ — фаза коливань, φ_0 — початкова фаза визначається значенням величини, що коливається, в початковий момент часу $t = 0$ (рис. 6.2).

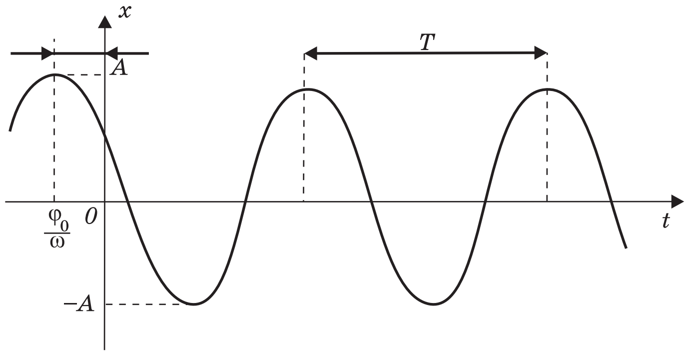


Рис. 6.2

Швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях

Перша і друга похідні від (6.1) за часом є швидкістю і прискоренням величини, яка коливається:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = \upsilon_0\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}); \quad (6.2)$$

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = a_0\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi), \quad (6.3)$$

де $\upsilon_0 = A\omega$ і $a_0 = A\omega^2$ — амплітуда швидкості та прискорення.

З (6.2) та (6.3) бачимо, що швидкість та прискорення величини, яка коливається, також змінюється за гармонічним законом з тією ж частотою, але швидкість υ випереджає зміщення x за фазою на $\dfrac{\pi}{2}$, а прискорення — на π (рис. 6.3). Окрім того, з (6.3) одержимо, що

$$a(t) = -\omega^2 x(t),$$

тобто прискорення пропорційне зміщенню з протилежним знаком. Цей зв'язок є ознакою гармонічних коливань.

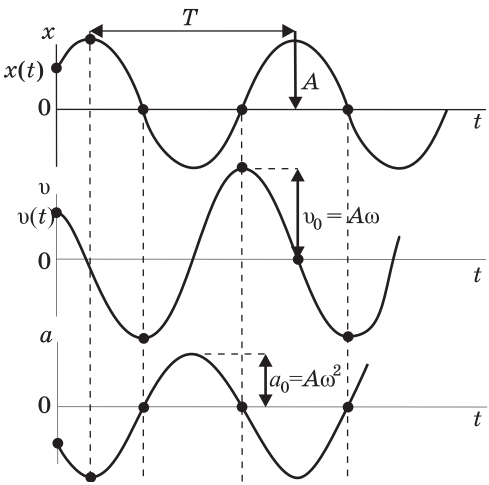


Рис. 6.3

Розрахунок початкової фази й амплітуди коливань

Припустимо, що в початковий момент $t = 0$ значення величини x дорівнює:

$$x_i = A\cos\varphi_0, \tag{6.4}$$

початкова швидкість:

$$\upsilon_i = -A\omega\sin\varphi_0. \tag{6.5}$$

Якщо поділити (6.5) на (6.4), одержимо *значення початкової фази* φ_0:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\upsilon_i}{\omega x_i}; \qquad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\upsilon_i}{\omega x_i}\right). \tag{6.6}$$

Тепер рівняння (6.4) і (6.5) піднесемо у квадрат, вираз для υ_i^2 розділимо на ω^2 і додамо обидва рівняння:

$$x_i^2 + \left[\frac{\upsilon_i}{\omega}\right]^2 = A^2\cos^2\varphi_0 + A^2\sin^2\varphi_0,$$

звідки одержимо амплітуду коливань:

$$A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{\upsilon_i}{\omega}\right)^2}. \qquad (6.7)$$

6.3. Зв'язок гармонічних коливань з рівномірним рухом по колу

Векторна діаграма

Гармонічні коливання можна зобразити за допомогою векторної діаграми.

З початку координат 0 на площині xy проводять вектор $\vec{A}$, модуль якого дорівнює амплітуді коливань $A = x_0$. Вектор $\vec{A}$, що в початковий момент складає кут φ_0 (початкова фаза) з віссю x (рис. 6.4, *а*), обертається по колу з кутовою швидкістю ω. У будь-який момент часу кут між вектором $\vec{A}$ і віссю x дорівнює

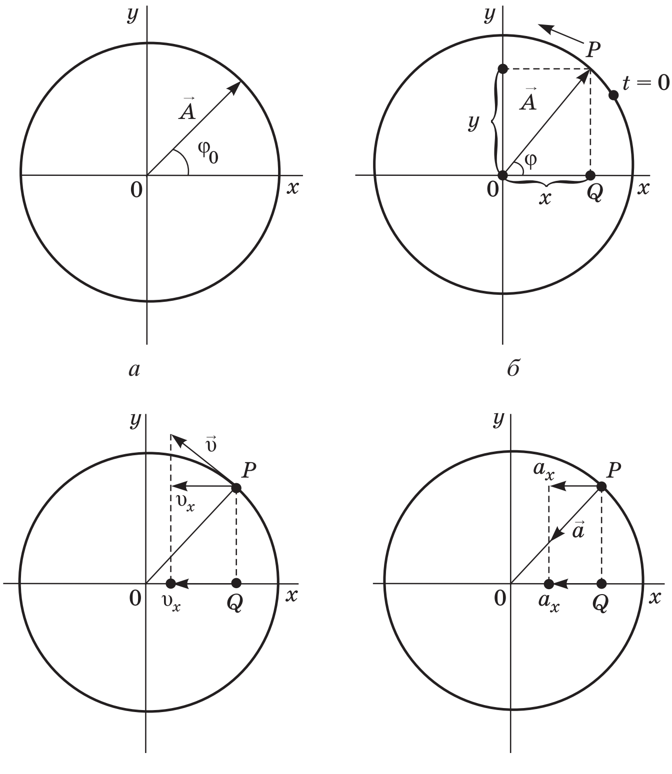


Рис. 6.4

фазі коливань $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (рис. 6.4, *б*), а проекції вектора $\vec{A}$ на осі *x* та *y* змінюються за гармонічним законом:

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0);$$
$$y = A\sin\varphi = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Таким чином, рівномірний рух точки (*P*) траєкторією кола можна розглядати як комбінацію двох гармонічних рухів: один — вздовж осі *x*, другий — вздовж осі *y* (рис. 6.4, *б*).

Лінійна швидкість руху точки *P* по колу $\vec{\upsilon}$ — величина стала, в той час як її проекція на вісь *x* змінюється за гармонічним законом від нуля до максимального значення υ_0 (рис. 6.4, *в*).

Прискорення точки *P* — доцентрове (стале), а його проекція на вісь *x* теж змінюється за гармонічним законом (рис. 6.4, *г*).

6.4. Гармонічний осцилятор

Нехай матеріальна точка масою *m* коливається навколо стану рівноваги, який вважається початком координат. Оскільки матеріальна точка рухається з прискоренням (6.3), то це означає, що за другим законом Ньютона на точку діє сила:

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x; \quad F = -kx, \tag{6.8}$$

де $k = m\omega^2$ — стала, що характеризує коливальний процес.

Диференціальне рівняння гармонічних коливань

Отже, сила пропорційна зміщенню матеріальної точки від стану рівноваги і напрямлена протилежно зміщенню (до стану рівноваги). Тоді з (6.8) одержимо диференціальне рівняння гармонічних коливань:

$$F_x = ma_x; \quad -kx = ma; \quad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2};$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0;$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{6.9}$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — період вільних, або власних, коливань.

Звернемо увагу на те, що *період коливань* T_0 *і частота* $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ *не залежать від амплітуди коливань.* Ця властивість коливань називається *ізохронністю* і є характерною рисою всіх лінійних коливальних систем. При порушенні цієї умови коливання нелінійні.

Розв'язком рівняння (6.9) є $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, що можна перевірити підстановкою в (6.9). Амплітуду і початкову фазу коливань не можна визначити з диференціального рівняння (6.9), а тільки з початкових умов, за яких виникли коливання.

Слід зауважити, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку (6.9) описує гармонічні лінійні коливання будь-якого походження (механічні — коливання маятника, електромагнітні — коливання заряду та ін.). При цьому в коливальній системі не обов'язково повинна діяти пружна сила, досить щоб сила змінювалась за законом (6.8). Така сила називається *квазіпружною*, а коливальна система має узагальнену назву *гармонічного осцилятора*.

Енергія гармонічного осцилятора

Повна енергія осцилятора W складається з кінетичної W_k і потенціальної W_p. Кінетична енергія осцилятора з урахуванням виразу (6.2):

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0 + \pi)] \quad (6.10)$$

Потенціальну енергію знаходимо, використовуючи формулу зв'язку потенціальної енергії W_p з силою:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}W_p, \quad F_x = -\frac{dW_p}{dx}, \quad W_p = -\int_0^x F_x dx = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2};$$

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Враховуючи, що $k = m\omega_0^2$:

$$W_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)] =$$

$$= \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2\left[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)\right]. \quad (6.11)$$

З виразів (6.10) та (6.11) випливає, що кінетична і потенціальна енергія коливальної системи змінюються також періодично, але з циклічною частотою $2\omega_0$, вдвічі більшою ніж частота коливань, та із зсувом фази між W_k і W_p, який дорівнює π (рис. 6.5, *а*).

При вільних коливаннях виконується закон збереження енергії (квазіпружна сила консервативна), тому повна енергія залишається сталою:

$$W = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \text{const}. \tag{6.12}$$

Оскільки середні значення функцій $\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ і $\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ за період дорівнюють 1/2, то з (6.10) і (6.11) одержимо, що середні значення кінетичної і потенціальної енергії за період однакові і кожне з них дорівнює половині величини повної енергії вільних коливань (рис. 6.5, *б*):

$$\langle W_k \rangle = \langle W_p \rangle = \frac{1}{2}W = \frac{1}{4}m\omega_0{}^2 A^2. \tag{6.13}$$

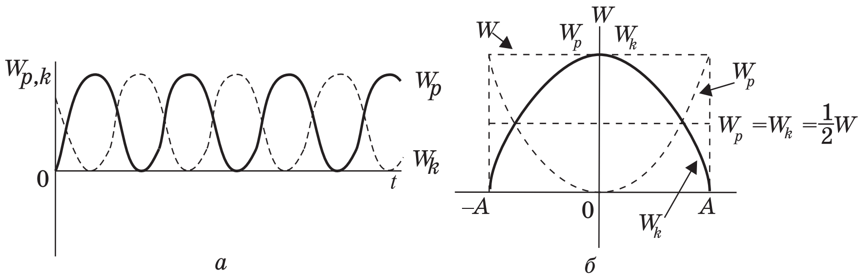


Рис. 6.5

6.5. Вільні незатухаючі коливання пружного, фізичного та математичного маятників

Пружний маятник

Одним із прикладів лінійного осцилятора є *пружний маятник* — матеріальна точка маси m, закріплена на пружині (рис. 6.6).

Масою пружини і тертям нехтуємо. У стані рівноваги тіла пружина недеформована. Цей стан виберемо за початок координат, а вісь Ox спрямуємо вправо. Якщо під дією зовнішньої сили $\vec{F}_{\text{зовн}}$ тіло зміщується від стану рівноваги на відстань x (рис. 6.6), на нього, за законом Гука, діє сила пружності $F_{\text{пр}} = -kx$, де k — коефіцієнт пружності пружини.

За другим законом Ньютона: $ma = -kx$;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{6.14}$$

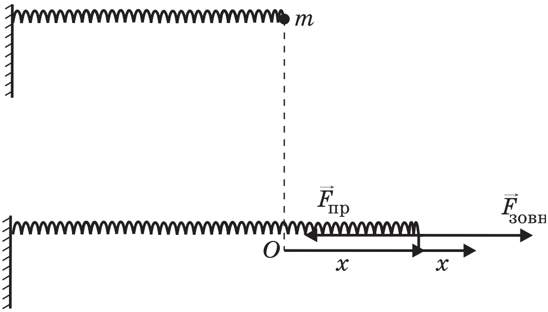


Рис. 6.6

Порівнюючи рівняння (6.14) з (6.9), робимо висновок, що пружний маятник здійснює вільні гармонічні коливання за законом $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, що є розв'язком рівняння (6.14), з циклічною частотою $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ та періодом $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Період коливань і частота не залежать від амплітуди.

Рівняння (6.14) можна записати у вигляді: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Аналогічний характер мають коливання тіла, підвішеного до пружини. Потенціальна енергія цієї коливальної системи

$$W_p = \frac{1}{2}kx^2,$$

а повна енергія $W = \dfrac{kA^2}{2}$.

Фізичний маятник

Фізичний маятник — абсолютно тверде тіло довільної форми масою m, яке коливається у полі сили тяжіння навколо осі z, яка не проходить через центр тяжіння C.

На рис. 6.7 вісь обертання z напрямлена перпендикулярно площині рисунка, центр тяжіння розташований у точці C на відстані R осі z. Згідно з основним законом динаміки обертального руху тіла з нерухомою віссю обертання, рівняння руху маятника при відхиленні його від положення рівноваги на кут α має вигляд:

$$J\beta_z = M_z,$$

де $M_z = -mgR\sin\alpha$ — обертальний момент сили тяжіння відносно осі z; J — момент інерції маятника відносно осі z; $\beta_z = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ — кутове прискорення.

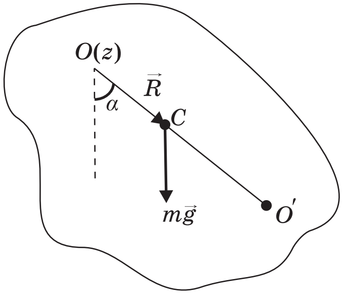


Рис. 6.7

Тоді

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \quad mgR\sin\alpha. \qquad (6.15)$$

Знак мінус вказує на те, що напрям моменту сили тяжіння та кутового прискорення протилежні. Для малих кутів відхилення $\sin\alpha \approx \alpha$, $\alpha \approx 5 \div 7^\circ$ і рівняння (6.15) набуває вигляду:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgR\alpha,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgR}{J}\alpha = 0. \qquad (6.16)$$

За виглядом рівняння (6.16) збігається з рівнянням (6.9), якщо замінити x на α та позначити $\frac{mgR}{J} = \omega_0^2$. Таким чином, за відсутності тертя малі коливання фізичного маятника є гармонічними:

$$\alpha = \alpha_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgR}{J}}$ — циклічна частота.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgR}}$ — період власних коливань фізичного маятника. (6.17)

Математичний маятник

Математичний маятник — матеріальна точка масою m, закріплена на кінці невагомої нерозтяжної нитки довжиною l, яка коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 6.8).

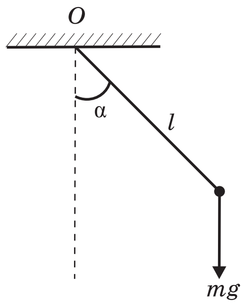


Рис. 6.8

Математичний маятник — граничний випадок фізичного маятника. При цьому момент інерції цього маятника відносно осі O $J = ml^2$, а відстань центра тяжіння до осі дорівнює довжині нитки $R = l$.

Циклічна частота і період коливань такого маятника дорівнюють

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}};\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Малі коливання фізичного та математичного маятників з невеликою амплітудою *ізохронні*, тобто їх частоти і періоди не залежать від амплітуди α_0. У загальному випадку період коливань фізичного маятника залежить від амплітуди α_0:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgR}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha_0}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha_0}{2}+\cdots\right].$$

При малих кутах відхилення доданками $\approx \sin^2\frac{\alpha_0}{2}$ та більш високими степенями можна знехтувати, то і одержуємо вираз (6.17). Зауважимо, що зміна періоду T_0 при збільшенні φ_0 до 15° не перевищує 0,5 %.

Зведена довжина фізичного маятника

Якщо математичний та фізичний маятники мають однакові періоди коливань, то в цьому випадку довжина математичного маятника $l_{зв} = \frac{J}{mR}$ має назву *зведеної довжини фізичного маятника*. Завжди $l_{зв} > l = R$ — відстань до центра мас, тому що за теоремою Штейнера момент інерції маятника відносно точки підвісу O дорівнює

$$J_0 = J_C + mR^2,$$

де J_C — момент інерції маятника відносно осі C, яка паралельна осі O та проходить через центр мас тіла.

$$l_{зв} = \frac{J}{mR} = \frac{J_0}{mR} + R > R.$$

Точка O', що знаходиться на лінії OC (рис. 6.7) на відстані $l_{зв}$ від точки O, називається *точкою коливань*, або *центром коливань фізичного маятника*. Точка підвісу фізичного маятника O і його центр коливань O' *є взаємними*, або *спряженими*. Якщо в точці O' підвісити фізичний маятник, то його період коливань не зміниться, а центр коливань перейде в точку O. Ця властивість використовується в оборотних маятниках, які застосовуються для визначення з великою точністю прискорення вільного падіння в різних точках Землі.

Маятники широко застосовуються у годинниках, у приладах для визначення прискорення рухомих тіл та вивчення коливань земної кори (сейсмографах); у гіроскопічних приладах, у приладах для експериментального визначення моментів інерції тіл, для дослідження механічних властивостей твердих тіл за різних фізичних умов.

6.6. Додавання коливань

Додавання коливань одного напрямку з однаковою частотою

Нехай тіло бере участь у двох коливаннях одного напряму з однаковою частотою

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

За допомогою методу векторних діаграм можна зробити висновок, що результуюче зміщення тіла у будь-який момент часу дорівнює сумі незалежних зміщень: $x = x_1 + x_2$. Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються навколо точки O з однаковими кутовими швидкостями ω, то зсув фаз між ними $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ з часом не змінюється, і вектор $\vec{A}$ також обертатиметься з кутовою швидкістю ω.

Тоді результуюче коливання гармонічне, його рівняння має вигляд

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi),$$

де A — амплітуда і φ — початкова фаза результуючого коливання.

З рис. 6.9 одержимо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \tag{6.18}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \tag{6.19}$$

З (6.18) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань.

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то $A = A_1 + A_2$.

При $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ складові коливання відбуваються в протилежних фазах, а результуюча амплітуда $A = A_2 - A_1$ (амплітуда — завжди додатна величина).

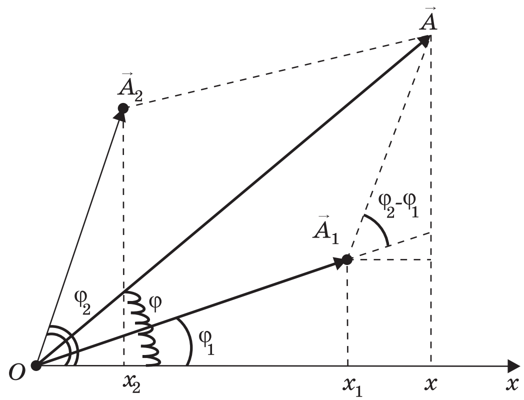


Рис. 6.9

Зважаючи на те, що енергія коливання пропорційна квадрату амплітуди, одержимо:

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

тобто повна енергія результуючого коливання W також залежить від різниці фаз складових з енергіями W_1 і W_2.

Биття

Якщо складати коливання з різними, але близькими частотами

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

то вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з різними кутовими швидкостями, кут між ними та амплітуда змінюватимуться з часом — коливання будуть негармонічними.

Для спрощення вважаємо, що $A_1 = A_2 = A_0$ і початкові фази дорівнюють нулю. Тоді

$$x_1 = A_0\cos\omega_1 t,\ x_2 = A_0\cos\omega_2 t.$$

Сумарне коливання:

$$x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A_0\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right).$$

Якщо $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$, то $x = \left(2A\cos\dfrac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega_1 t$, тобто амплітуда (вираз у дужках) змінюється з часом періодично: $T_A = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Другий множник змінюється швидко, в результаті ми одержуємо коливання з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, амплітуда яких змінюється за періодичним законом з періодом $T_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ (рис. 6.10). Такі коливання мають назву *«биття»*.

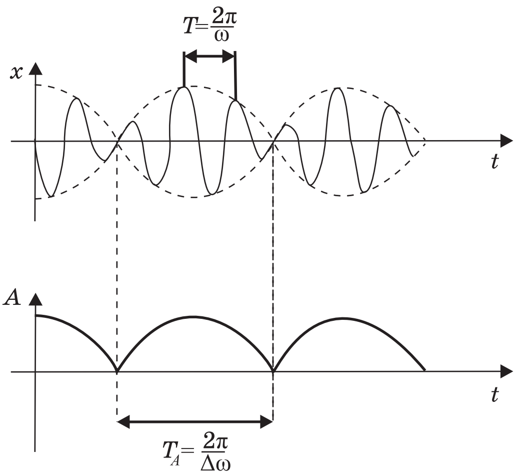


Рис. 6.10

Складні періодичні коливання можна подати як суперпозицію одночасних гармонічних коливань з різними амплітудами, початковими фазами і частотами, кратними циклічній частоті ω_0:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) +$$
$$+ A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \ldots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Такий вид періодичної функції пов'язаний з методом гармонічного аналізу складного періодичного коливання або розкладанням Фур'є. Члени ряду Фур'є, які відповідають за гармонічні коливання з частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ... мають назву першої (основної), другої, третьої та інших гармонік складного періодичного коливання.

Складання взаємно перпендикулярних коливань

Якщо тіло бере участь у коливаннях, напрями яких взаємно перпендикулярні, а частоти однакові, то траєкторія коливань криволінійна, форма її залежить від різниці фаз обох коливань.

Нехай

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \qquad (6.20)$$

Одержимо рівняння траєкторії результуючого руху:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_1 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_1; \qquad (6.21)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_2 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_2. \qquad (6.22)$$

Помножимо рівняння (6.21) на cos φ_2, а (6.22) на cos φ_1 і знайдемо їх різницю, потім помножимо (6.21) на sin φ_2, а (6.22) на sin φ_1 і також знайдемо різницю.

У результаті одержимо:

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \qquad (6.23)$$

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (6.24)$$

Рівняння (6.23) і (6.24) піднесемо до квадрата і почленно додамо їх. Дістанемо:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (6.25)$$

Вираз (6.25) є рівнянням траєкторії результуючого руху тіла, яке одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях. У загальному випадку це еліпс. Визначимо форму траєкторії для окремих випадків.

Якщо різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то рівняння (6.25) має вигляд:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,$$

звідки одержимо рівняння прямої $y = \frac{A_2}{A_1}x$. Результуючий рух є гармонічним коливанням з частотою ω вздовж прямої, нахиленої під кутом $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{A_2}{A_1}$ до осі Ox. Зміщення точки від стану рівноваги у будь-який момент часу визначимо як $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 6.11, *а*), амплітуда коливань $S = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. У цьому випадку мова йде про лінійно поляризовані коливання. За умови $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$ з (6.25) одержимо, що траєкторія — пряма лінія з рівнянням $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$, яка утворює з віссю Ox кут $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{A_2}{A_1}\right)$. Результуючий рух — також коливальний рух (рис. 6.11, *б*).

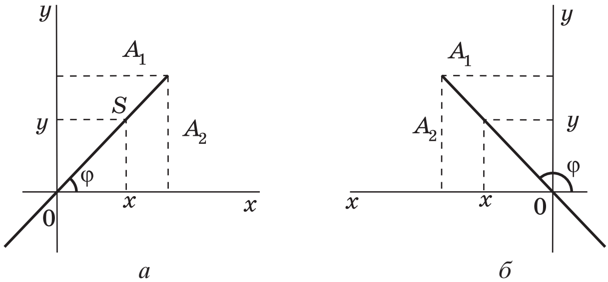


Рис. 6.11

Якщо різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\dfrac{\pi}{2}$, рівняння (6.25) набуває вигляду:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

тобто це рівняння еліпса, у якого півосі дорівнюють A_1 й A_2 й орієнтовані вздовж координатних осей Ox і Oy.

Якщо амплітуди однакові $A_1 = A_2 = A$, еліпс перетворюється в коло.

У випадку, коли $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, тіло рухається по еліпсу за стрілкою годинника; якщо $\varphi = -\pi/2$, рух проти годинникової стрілки (рис. 6.12).

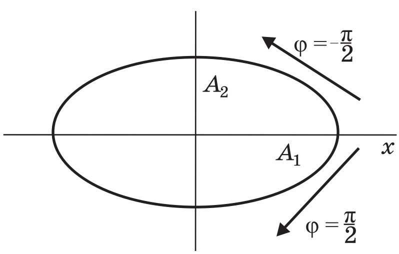


Рис. 6.12

Такі коливання називаються *циркулярно поляризованими* або *коливаннями, поляризованими по колу*.

Фігури Ліссажу

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань, які складаються, різні, то замкнені траєкторії результуючих коливань досить складні і мають назву фігур Ліссажу. Спостереження фігур Ліссажу є в основі досить зручного методу дослідження співвідношень між частотами і фазами коливань, а також форми коливань. Для цього фігури Ліссажу вписуються в прямокутник, центр якого збігається з початком координат, а бокові сторони паралельні осям Ox і Oy і розташовані по обидва боки від них на відстанях A_1 і A_2. Відношення частот коливань, які складаються, дорівнює відношенню числа точок дотику фігур Ліссажу зі сторонами прямокутника.

На рис. 6.13 наведено фігури для випадків, коли частоти складових коливань відносяться як 1 : 2, 1 : 3, 2 : 3; відповідно для різниці фаз коливань

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi.$$

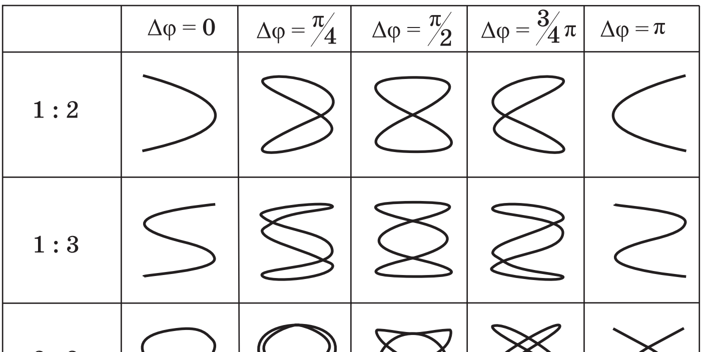


Рис. 6.13

6.7. Затухаючі коливання

Ми розглядали коливальні рухи, нехтуючи дією сил тертя й опором середовища. В реальній ситуації, внаслідок втрати енергії на виконання роботи проти сил опору і тертя та на випромінювання, амплітуда коливань з часом зменшується. Такі коливання називаються *затухаючими*.

Диференціальне рівняння затухаючих коливань та його розв'язок

Розглянемо рух лінійного осцилятора у в'язкому середовищі. На осцилятор, крім квазіпружної сили $F_{пр} = -kx$, при невеликій швидкості коливальної системи діє сила опору середовища, пропорційна швидкості та напрямлена завжди проти напряму швидкості системи:

$$F_{оп} = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt},$$

де r — коефіцієнт опору.

За другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху осцилятора має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (6.26)$$

де $\beta = \dfrac{r}{2m}$ — коефіцієнт затухання; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ — частота вільних коливань системи за відсутності сили опору.

Розв'язок цього рівняння (якщо $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} > 0$):

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (6.27)$$

де ω — частота затухаючих коливань.

Зауважимо, що в цьому випадку амплітуда коливань повинна зменшуватись з часом завдяки втратам енергії на виконання роботи проти сил опору. За час dt втрати енергії:

$$dW = F_{оп}\cdot dx = -r\upsilon\upsilon dt = -r\upsilon^2 dt; \quad \frac{dW}{dt} = -r\upsilon^2;$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2r}{m}\cdot\frac{m\upsilon^2}{2} = -\frac{2r}{m}W_k. \qquad (6.28)$$

З (6.28) знайдемо втрати енергії за один період. Оскільки середнє значення кінетичної енергії коливального руху дорівнює половині його повної енергії (6.13), тобто $W_k = \frac{1}{2}W$, тоді рівність (6.28) можна переписати як

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{r}{m}W = -2\beta W. \qquad (6.29)$$

З (6.29) очевидно, що швидкість зменшення енергії при затухаючих коливаннях пропорційна енергії. Перепишемо вираз (6.29):

$$\frac{dW}{W} = -2\beta dt;$$

$$W = W_0 \cdot e^{-2\beta t}. \qquad (6.30)$$

Рівняння (6.30) — закон втрати енергії з часом, де W_0 — значення енергії в момент часу $t = 0$. Оскільки повна енергія пропорційна квадрату амплітуди, то з (6.30) одержимо залежність амплітуди затухаючих коливань від часу:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}.$$

Отже, амплітуда затухаючих коливань зменшується з часом за експоненціальним законом, тобто розв'язок рівняння (6.26) має вигляд:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (6.31)$$

На рис. 6.14 зображено залежність (6.31).

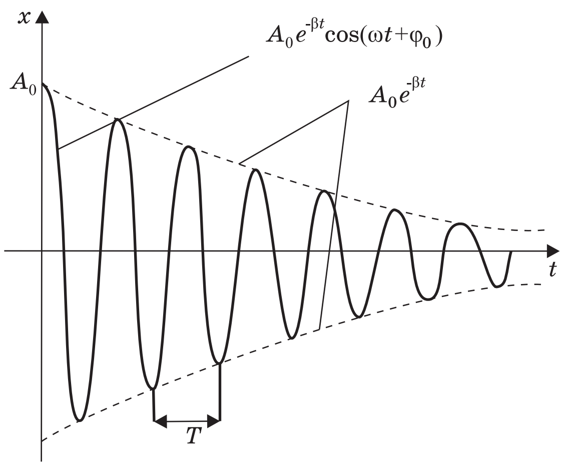


Рис. 6.14

Очевидно, що амплітуда коливань $A = A_0 e^{-\beta t}$ зменшується з часом за експоненціальним законом, A_0 — початкова амплітуда при $t = 0$.

Період затухаючих коливань

Коливання в цьому випадку не є періодичними, але при малих затуханнях можна ввести *умовний період* (або *квазіперіод*), який дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

і збільшується із зростанням коефіцієнта затухання β. Очевидно, що цей період більший за період власних гармонічних коливань без затухання

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} < T.$$

Час релаксації

Проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується в *e* разів, має назву *часу релаксації* τ:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\beta\tau} = e;\ \beta\tau = 1;\ \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Час релаксації — величина, обернена коефіцієнту затухання β.

Логарифмічний декремент затухання

Натуральний логарифм відношення двох послідовних амплітуд, які відрізняються одна від одної на період, має назву логарифмічного декремента затухання λ. *Він характеризує швидкість затухання коливань і дорівнює*:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T.$$

$$\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Тобто логарифмічний декремент затухання — фізична величина, обернена числу коливань N, яке здійснить система, доки амплітуда зменшується в e разів.

Добротність

У техніці використовують величину, яка має назву *добротності — величини, пропорційної відношенню енергії коливальної системи в деякий момент часу до зміни величини енергії за період:*

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} .$$

Беручи до уваги, що енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди, для малих значень λ одержимо:

$$Q = 2\pi \frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}}.$$

Якщо λ мале, то розклавши $e^{-2\lambda}$ у ряд, маємо: $e^{-2\lambda} = 1 - 2\lambda + \ldots$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N,$$

тобто *добротність пропорційна числу коливань, яке здійснить система за час релаксації* (за час зменшення амплітуди коливань в e разів). Якщо $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$, то при збільшенні коефіцієнта затухання умовний період зростає і при $\beta = \omega_0$ обертається на нескінченність. Рух буде аперіодичним. Якщо систему вивести із стану рівноваги, вона повертається до цього стану без здійснення коливань.

6.8. Вимушені коливання

Як було розглянуто в розділі 6.7, в реальних системах відбувається затухання коливань. Для підтримки сталої амплітуди втрати енергії треба компенсувати дією зовнішньої періодичної сили.

Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок

Розглянемо лінійний осцилятор, аналогічний розглянутому у розділі 6.7, але за умови дії зовнішньої періодичної сили:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t,$$

де F_0 і Ω — амплітуда і частота змушуючої сили. В цьому випадку рівняння (6.26) має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \qquad (6.32)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння $x(t)$ є сумою загального розв'язку однорідного рівняння $x_1(t)$ та частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{6.33}$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а A_0, φ_0 — сталі величини.

Визначаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$x_2(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \tag{6.34}$$

де A — амплітуда усталених коливань; φ — зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою.

Для розрахунку A і φ візьмемо першу і другу похідні від (6.34) за часом і підставимо в рівняння (6.32):

$$A\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi + \pi) + 2\beta\Omega A\cos(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \\ + \omega_0^2 A\cos(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t. \tag{6.35}$$

Звідси випливає, що сталі A і φ мають такі значення, за яких гармонічна функція $\frac{F_0}{m}\cos\Omega t$ дорівнювала б сумі трьох гармонічних функцій лівої частини рівняння. Застосуємо метод векторних діаграм. На рис. 6.15 зображено векторні амплітуди всіх чотирьох коливань з урахуванням зсуву фаз. Тоді

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 A^2 = \frac{F_0^2}{m^2},$$

звідки амплітуда вимушених коливань дорівнює

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \tag{6.36}$$

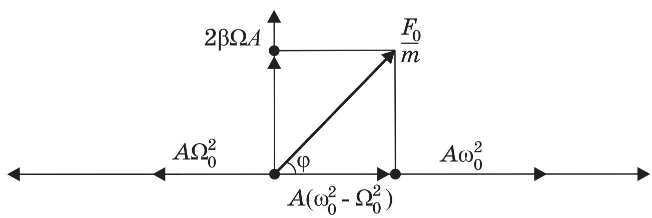


Рис. 6.15

Зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{6.37}$$

У результаті розв'язок рівняння (6.32) має вигляд:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + A\cos(\Omega t + \varphi).$$

Перший доданок має переважне значення тільки на початку коливань (період встановлення коливань), доки амплітуда не досягне величини (6.36). В усталеному режимі вимушені коливання є гармонічними і відбуваються з частотою змушуючої сили Ω (рис. 6.16).

Явище резонансу

З (6.36) випливає, що амплітуда вимушених коливань залежить від частоти змушуючої сили. При наближенні частоти зовнішньої сили до власної частоти коливань системи амплітуда коливань зростає (рис. 6.17).

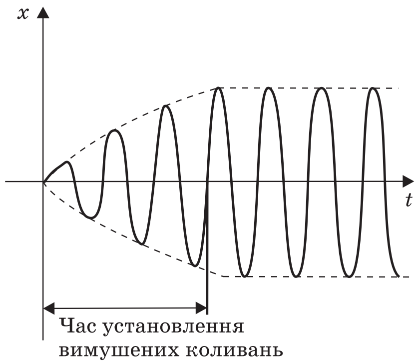


Рис. 6.16

Це явище має назву *резонансу*. Частоту змушуючої сили, при якій спостерігається максимальне значення амплітуди (при сталому β), називають резонансною частотою $\Omega_{\text{рез}}$. У цьому випадку знаменник у (6.36) повинен мати мінімальне значення, яке визначається за умови, що похідна від знаменника дорівнює нулю:

$$\omega_0^2 - \Omega_{\text{рез}}^2 - 2\beta^2 = 0.$$

Єдине значення $\Omega_{\text{рез}}$, яке має фізичний зміст:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{6.38}$$

Коли коефіцієнт затухання $\beta = 0$, то при $\Omega = \omega_0$ амплітуда стає нескінченно великою. Наслідком збільшення затухання β є зменшення амплітуди коливань і переміщення резонансної частоти до менших значень (рис. 6.17).

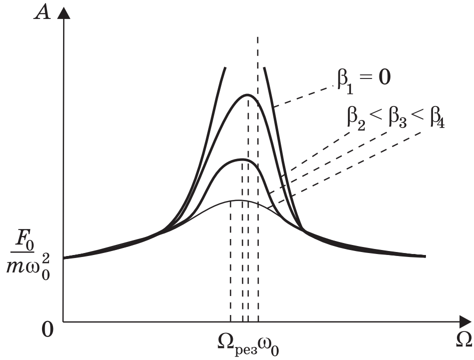


Рис. 6.17

З (6.38) і (6.36) одержимо величину амплітуди при резонансі:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{6.39}$$

Слід зауважити, що при зменшенні частоти змушуючої сили до нуля на резонансних кривих однакове значення амплітуди $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ або $\frac{F_0}{k}$. Це статичне відхилення, тобто величина зміщення від стану рівноваги, яке має система при дії сталої сили F_0 (рис. 6.17).

Явище резонансу може бути як корисним (у радіотехніці, прикладній акустиці, електротехніці), так і шкідливим (при конструюванні машин, двигунів та інших механізмів слід уникати цього явища, щоб запобігти руйнуванню механізму).

6.9. Параметричний резонанс

Незатухаючі коливання можна одержати не тільки внаслідок дії зовнішньої періодичної сили, але й за умови періодичної зміни параметрів коливальної системи. Амплітуда коливань залежно від частоти зміни параметрів може зростати. Таке збудження коливань називається *параметричним резонансом*.

Як приклад можна навести розгойдування гойдалки людиною, яка регулярно присідає і піднімається, тобто в цьому випадку періодично зміщується положення центра мас системи.

Для пояснення цього методу збудження коливань розглянемо коливання маятника, довжину нитки якого можна змінювати, перекинувши її через блок (рис. 6.18). Нехай у момент кожного проходження через положення рівноваги маятник підтягується зовнішньою силою F на деяку невелику висоту h (малу порівняно з довжиною маятника l), а в кожному крайньому положенні нитка відпускається на ту ж довжину h. За кожний період довжина маятника двічі збільшується і зменшується, тобто частота періодичної зміни параметра (довжина маятника) вдвічі більша частоти його власних коливань. Подовження нитки відбувається при похилому положенні маятника, тоді в цей момент він опускається на висоту $h\cos\varphi_0$, яка менша за висоту h піднімання в моменти вкорочування нитки. Тому за кожне подовження і вкорочування нитки зовнішня сила виконує проти сили тяжіння роботу, яка дорівнює:

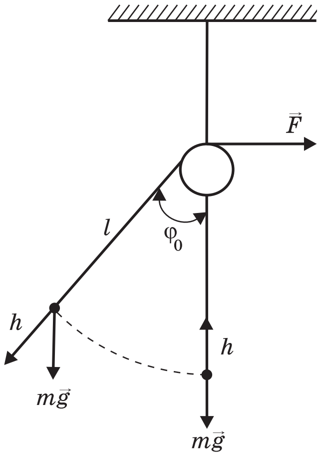


Рис. 6.18

$$A = mgh(1-\cos\varphi_0) \approx \frac{1}{2}mgh\varphi_0^2$$

(кут φ_0 вважається малим, тоді $\cos\varphi_0 \approx 1-\frac{\varphi_0^2}{2}$). Крім того, зовнішня сила $\vec{F}$ виконує ще роботу проти відцентрової сили, яка розтягує нитку і дорівнює $\frac{m\upsilon_0^2}{l}$ (υ_0 — максимальна швидкість маятника) в нижньому положенні маятника або нулю в його крайніх положеннях (де швидкість маятника дорівнює нулю). Таким чином, сумарна робота зовнішньої сили за період коливання маятника дорівнює:

$$A = 2\left(\frac{1}{2}mgh\varphi_0^2 + \frac{m\upsilon_0^2}{l}h\right).$$

Але $\upsilon_0 = l\varphi_0\omega$, де $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — власна частота коливань маятника, тому

$$A = 6\frac{h}{l}\frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Робота, яку виконує зовнішня сила над маятником, додатна і пропорційна його енергії. Тому енергія маятника періодично збільшується, одержує за кожен період невеликий приріст, пропорційний цій енергії і величині $\frac{h}{l}$. У цьому полягає механізм параметричного резонансу. Періодична зміна параметрів коливальної системи (з частотою вдвічі більшою за власну частоту системи) призводить до систематичного збільшення її середньої енергії W, швидкість цього збільшення пропорційна W:

$$\frac{dW}{dt} = 2\chi W,$$

де χ — невелика стала величина.

Це співвідношення таке ж, як і для затухаючих коливань, але в цьому випадку похідна $\frac{dW}{dt}$ не від’ємна, а додатна. Це означає, що енергія, а з нею й амплітуда, експоненціально зростають з часом.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Який рух можна вважати коливальним?
2. Які коливання називаються вільними, затухаючими, вимушеними?
3. Які характеристики коливань ви знаєте?
4. Які коливання називаються гармонічними?
5. Напишіть вирази для зміщення, швидкості і прискорення при коливаннях. Накресліть графіки.
6. Який вигляд має рівняння гармонічних коливань і його розв’язання?
7. Чому дорівнюють періоди коливань пружного, математичного і фізичного маятників?
8. Яка система називається гармонічним осцилятором?
9. Чому дорівнює енергія гармонічного осцилятора?
10. Як додати коливання одного напрямку й однакової частоти? З близькими частотами?
11. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.
12. Які коливання є затухаючими? Їх рівняння та його розв’язання.
13. Як змінюється частота, амплітуда й енергія при затухаючих коливаннях?
14. Характеристики затухаючих коливань: час затухання, логарифмічний декремент затухання, добротність. Фізичний смисл цих характеристик.
15. Рівняння вимушених коливань і його розв’язання. Векторна діаграма.

16. Як змінюються амплітуда і фаза вимушених коливань залежно від опору середовища і частоти змушуючої сили?
17. Що таке явище резонансу? Накресліть графік залежності амплітуди коливань від частоти змушуючої сили при резонансі.
18. Чому дорівнює резонансна частота і резонансна амплітуда?

Завдання для експрес-контролю

1. Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A. Яку відстань вона пройде за один період? Поясніть.

2. Чи можуть у якийсь момент часу збігтись напрямки векторів зміщення і швидкості простого гармонічного осцилятора? А напрямки векторів зміщення і прискорення? Поясніть.

3. Чому дорівнює початкова фаза φ_0 у виразі $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, якщо при $t = 0$ зміщення частинки дорівнює: а) $x = A$; б) $x = 0$; в) $x = -A$; г) $x = A/2$.

4. Через який час від початку руху точка, що здійснює гармонічні коливання, зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань дорівнює 24 с. Початкова фаза дорівнює нулю.

5. Як зміниться частота, максимальна швидкість, максимальне прискорення і повна механічна енергія гармонічного осцилятора, якщо подвоїти його амплітуду коливань?

6. М’яч падає з висоти 1 м і багатократно підстрибує вгору в результаті абсолютно пружних зіткнень. Визначте період коливань. Чи буде цей рух гармонічним?

7. Матеріальна точка бере участь у двох коливаннях, що відбуваються за одним напрямком і описуються рівняннями $x_1 = 3\cos \pi t$; $x_2 = 4\cos (\pi t + \pi/2)$. Визначте амплітуду і початкову фазу результуючого коливання і зробіть графічний рисунок.

8. Яким чином можна подвоїти максимальну швидкість гармонічного осцилятора?

9. Вантаж, що висить на невагомій пружині, здійснює гармонічні коливання з амплітудою A. Чи зміниться повна енергія, якщо маса вантажу подвоїться, але амплітуда не зміниться? Чи залежать кінетична і потенціальна енергія від маси вантажу? Поясніть.

10. Тіло масою m підвішене до пружини з жорсткістю k. Пружину розрізали на дві частини, з’єднали їх паралельно і підвісили до неї те ж тіло. Як зміниться частота коливань? Поясніть.

11. Як зміниться частота коливань математичного маятника, якщо його довжину збільшити в 4 рази? Якщо масу вантажу подвоїти?

12. Математичний маятник прикріплений до стелі ліфта. Як зміниться частота коливань, якщо ліфт: а) рухається вгору з прискоренням a; б) рухається вниз з прискоренням a; в) рухається зі сталою швидкістю?

13. Визначити період коливань математичного маятника довжиною 1 м, що розташований усередині ліфта, який піднімається вгору з прискоренням 6,2 м/с^2.

14. Маятниковий годинник іде точно на рівні моря. Поспішатиме він чи відставатиме, якщо його підняти на гору висотою h? Поясніть.

15. Вантаж математичного маятника — це куля, наповнена рідиною. Як змінюватиметься частота коливань, якщо в кулі зробити маленький отвір, крізь який рідина повільно витікатиме?

16. Тонкий однорідний стрижень масою m підвішений за один кінець і коливається з частотою ν. Як зміниться частота коливань, якщо до середини стрижня прикріпити кульку масою $2m$? Поясніть.

17. Фізичний маятник складається зі стрижня масою m_1 і довжиною l, до кінця якого прикріплений вантаж масою m_2. Знайдіть вираз для періоду коливань такого маятника через m_1, m_2, l і g.

18. Чи будуть коливання затухаючими для довільних значень коефіцієнта опору r і коефіцієнта пружності k? Поясніть.

19. Затухаючі коливання відбуваються за законом $x = 10{,}8e^{-0{,}2t} \times \cos 4\pi t$. Визначте амплітуду після 10 коливань.

Приклади розв'язання задач

1. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання вздовж осі Ox. Через $t_1 = 0{,}1$ с від початку руху, зміщення точки від стану рівноваги $x_1 = 5$ см, швидкість $\upsilon_{1x} = 62$ см/с, прискорення $a_{1x} = -540$ см/с^2. Знайти: а) амплітуду, циклічну частоту та початкову фазу коливань; б) зміщення, швидкість та прискорення в момент часу $t = 0$.

Розв'язання

Закон руху матеріальної точки має вигляд:

$$x = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{1}$$

Закон зміни швидкості та прискорення:

$$\dot{x} = \upsilon_x = A_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0); \tag{2}$$

$$\ddot{x} = a_x = -A_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{3}$$

Підставимо в рівняння (1) – (3) значення t_1, x_1, υ_x та a_{1x}, дістанемо:

$$x_1 = A_0 \sin(\omega t_1 + \varphi_0), \quad \upsilon_{1x} = A_0 \omega \cos(\omega t_1 + \varphi_0),$$

$$a_{1x} = -A_0 \omega^2 \sin(\omega t_1 + \varphi_0). \qquad (4)$$

З рівнянь (4) видно, що $a_{1x} = -x_1 \omega^2$, звідки $\omega = \sqrt{-\frac{a_{1x}}{x_1}} = 10{,}4 \text{ с}^{-1}$.
Амплітуда коливань:

$$A_0 = \sqrt{x_1{}^2 + \frac{\upsilon_{1x}^2}{\omega^2}} = 7{,}8 \text{ см}.$$

Щоб знайти початкову фазу, значення A_0 та ω підставимо, наприклад, у перше з рівнянь (4).

Оскільки
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}6 \text{ с},$$

тоді
$$\omega t_1 = \frac{2\pi \cdot t_1}{T} = \frac{2\pi}{6} \quad \text{та} \quad x_1 = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \varphi_0\right),$$

$$\frac{2\pi}{6} + \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{x_1}{A_0}\right) = \arcsin 0{,}6,$$

звідки
$$\frac{2\pi}{6} + \varphi_0 = 40^\circ = \frac{2\pi}{9}; \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{9}.$$

Щоб знайти координату, швидкість та прискорення в момент часу $t = 0$, слід у рівняння (1) – (3) підставити значення $t = 0$.

$x(0) = -2{,}7$ см; $\upsilon_x(0) = 76$ см/с; $a_x(0) = 289$ см/с^2.

2. На протилежних кінцях пружини закріплені два тіла масами m_1 і m_2. Якщо розтягнути пружину, а потім відпустити обидва тіла одночасно, то яким буде період коливань? Коефіцієнт пружності пружини дорівнює k.

Розв'язання

Нехай x_1 — зміщення маси m_1 із стану рівноваги, x_2 — зміщення маси m_2. Зауважимо, що центр мас системи повинен залишатися на місці, тому:

$$m_1 x_1 = -m_2 x_2 \text{ або } x_1 = -\frac{m_2}{m_1} x_2. \qquad (1)$$

Результуюча сила, що діє на масу m_2, дорівнює

$$F = -k(x_2 - x_1),$$

де $(x_2 - x_1)$ — результуюче розтягнення пружини.

З другого закону Ньютона $F = ma$ маємо:

$$-k(x_2 - x_1) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}. \qquad (2)$$

Підставимо в (2) вираз для x_1 (1) і одержимо:

$$-k\left[x_2 - \left(-\frac{m_2}{m_1}x_2\right)\right] = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2},$$

звідки маємо рівняння:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{-k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} x_2$$

або
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{\mu} x_2, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x_2 = 0,$$

де $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведена маса.

За умови, що $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, одержимо диференціальне рівняння гармонічних коливань, звідки

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}.$$

3. Фізичний маятник — це тонкий однорідний стрижень довжиною 35 см. Визначити, на якій відстані від центра мас повинна бути точка підвісу, щоб частота коливань була максимальна.

Розв'язання

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}},$$

де x — відстань від точки підвісу до центра мас стрижня.

Частота коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{J}},$$

де момент інерції стрижня відносно осі O за теоремою Штейнера дорівнює

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2.$$

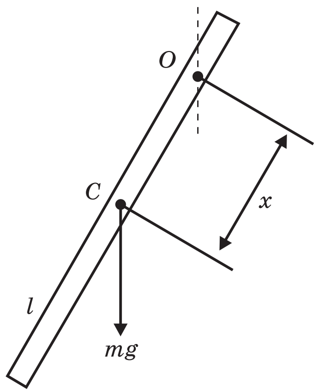


Рис. 1

Тоді $\omega = \sqrt{\dfrac{mgx}{\dfrac{ml^2}{12} + mx^2}} = \sqrt{\dfrac{12gx}{l^2 + 12x^2}}.$

Умова, за якої частота максимальна, — рівність нулю похідної від частоти $\dfrac{d\omega}{dx} = 0$:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3g}\left(l^2 - 12x^2\right)}{\sqrt{x\left(l^2 + 12x^2\right)^3}} = 0; \quad l^2 - 12x^2 = 0,$$

звідки $$x = \frac{l}{2\sqrt{3}}; \quad x = 10{,}1 \text{ см}.$$

4. Тіло рухається під дією сили $F = F_0 \cos\omega t$ за законом $x = B\sin\omega t$. Знайти роботу сили за час від $t_1 = t_н$ до $t_2 = t_к$. Знайти роботу сили за один період дії і середню потужність за той же період.

Розв'язання

Робота сили дорівнює:

$$A = \int_{t_н}^{t_к} F dx; \qquad dx = B\omega\cos\omega t,$$

тоді:

$$A = \int_{t_н}^{t_к} B\omega F_0 \cos\omega t \cdot \cos\omega t dt = B\omega F_0 \int_{t_н}^{t_к} \cos^2 \omega t dt =$$

$$= B\omega F_0 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right]\Bigg|_{t_н}^{t_к} = \frac{1}{2}B\omega F_0\left(t_к - t_н\right) + \frac{BF_0}{4}\left(\sin 2\omega t_к - \sin 2\omega t_н\right).$$

За один період час змінюється від $t_н = 0$ до $t_к = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, тоді робота за один період дорівнює:

$$A = \frac{1}{2}F_0 B\omega\frac{2\pi}{\omega} = \pi F_0 B.$$

Середня потужність за період:

$$P = \frac{A}{t_к - t_н} = \frac{\pi F_0 B\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}F_0 B\omega.$$

5. Математичний маятник довжиною $l = 50$ см здійснює малі коливання в середовищі з коефіцієнтом затухання $\beta = 0{,}9$ с$^{-1}$. Знайти час

τ та число повних коливань n, по закінченні яких амплітуда коливань маятника зменшиться у п'ять разів. У скільки разів повинен збільшитись коефіцієнт тертя, щоб коливання були неможливі?

Розв'язання

Малі коливання маятника здійснюються за гармонічним законом, причому власна циклічна частота коливань ω_0 дорівнює

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (1)$$

Внаслідок тертя коливання маятника будуть затухаючі:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \sin \omega t,$$

де φ — кут відхилення нитки маятника від вертикалі в момент часу t

Період затухаючих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (2)$$

Амплітуда затухаючих коливань:

$$A = \varphi_0 e^{-\beta t}.$$

Для моментів часу t та ($t + \tau$):

$$A_1 = \varphi_0 e^{-\beta t}, \quad A_2 = \varphi_0 e^{-\beta(t+\tau)}.$$

Відношення амплітуд: $\dfrac{A_1}{A_2} = e^{\beta\tau} = 5.$

Логарифмуючи цей вираз, дістанемо:

$$\tau = \ln\frac{5}{\beta} = 1{,}79 \text{ с.}$$

Кількість повних коливань, які пройшли за час τ, дорівнює $n = \dfrac{\tau}{T}.$

Дістанемо із (1) ω_0, підставимо в (2), одержимо $T = 1{,}45$ с.

Якщо порівняти T та τ, то видно, що $1 < n < 2$, тобто після двох повних коливань амплітуда зменшиться вже більше ніж у 5 разів, що відповідає зменшенню енергії більш ніж у 25 разів.

Значення коефіцієнта затухання β, при якому ще можливі коливання:

$$\beta_{max} = \omega_0,$$

причому $$\beta = \frac{r}{2m},$$

де m — маса маятника; r — коефіцієнт опору.

Таким чином, збільшення коефіцієнта опору z дорівнює:

$$z = \frac{r_{\max}}{r} = \frac{\beta_{\max}}{\beta}.$$

Оскільки $\beta_{\max} = \omega_0$, то $z = \dfrac{\omega_0}{\beta} = 4{,}9.$

6. Визначити резонансну частоту коливальної системи, якщо власна частота коливань $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмічний декремент $\lambda = 0{,}2$.

Розв'язання

Резонансна частота вимушених коливань:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

де β — коефіцієнт затухання, пов'язаний з логарифмічним декрементом λ і періодом коливань T. Таким чином

$$\lambda = \beta T, \text{ звідки } \beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega_0}{2\pi}.$$

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2\pi^2}};$$

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{\Omega_{\text{рез}}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2\pi^2}} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2\pi^2}}.$$

$$\nu_{\text{рез}} = 299{,}7 \text{ Гц}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Точка здійснює коливання вздовж осі x за законом: $x = A\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Побудувати графіки залежності від часу: а) зміщення $x(t)$; б) швидкості $\upsilon_x(t)$; в) прискорення $a_x(t)$.

6.2. Точка рухається вздовж осі x за законом: $x = a\sin^2\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Знайти: а) амплітуду та період її коливань; б) побудувати графік $x(t)$.

Відповідь: $A = \dfrac{a}{2}$; $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

6.3. Частинка здійснює гармонічні коливання. Амплітуда коливань $A = 4$ см, період $T = 2$ с. Знайти: а) час t_1, за який зміщення частинки зміниться від 0 до $\dfrac{A}{2}$; б) час t_2, за який зміщення зміниться від $\dfrac{A}{2}$ до A.

Відповідь: $t_1 = \dfrac{1}{6}$ с; $t_2 = \dfrac{1}{3}$ с.

6.4. Частинка здійснює коливання вздовж осі x за законом $x = 0{,}100\sin 6{,}28t$ (м). Знайти середнє значення модуля швидкості частинки $\langle\upsilon\rangle$: а) за період коливання T; б) за першу 1/8 частину T; в) за другу 1/8 частину T.

Відповідь: а) $\langle\upsilon\rangle = 0{,}4$ м/с; б) $\langle\upsilon\rangle = 0{,}57$ м/с; в) $\langle\upsilon\rangle = 0{,}23$ м/с.

6.5. Точка здійснює коливання за законом: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, де $A = 4$ см. Знайти початкову фазу φ_0, якщо $x(0) = -2\sqrt{2}$ см. Побудувати векторну діаграму для моменту часу $t = 0$.

Відповідь: $\varphi_0 = \dfrac{3}{4}\pi$ рад.

6.6. Точка бере участь у двох коливаннях одного напрямку: $x_1 = A_1\sin\omega t$ та $x_2 = A_2\cos\omega t$, де $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\omega = 1\,\text{с}^{-1}$. Знайти амплітуду A результуючого коливання, його частоту ν та початкову фазу φ_0. Написати рівняння цього руху.

Відповідь: $A = 2{,}24$ см; $\nu = 0{,}16$ Гц; $\varphi_0 = 0{,}353\pi$ рад.

6.7. При додаванні двох однаково напрямлених гармонічних коливань однієї частоти і з амплітудами, що дорівнюють 2 і 4 см, одержуємо гармонічне коливання з амплітудою 5 см. Знайти різницю фаз коливань, що додаються.

Відповідь: $\varphi_2 - \varphi_1 = 71^\circ 46'$.

6.8. Точка здійснює одночасно два гармонічних коливання однакової частоти. Коливання відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках та описуються рівняннями: а) $x = A\cos\omega t$ та $y = A\cos\omega t$; б) $x = A\cos\omega t$ та $y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Знайти рівняння траєкторії точки, побудувати її згідно з масштабом та показати напрямок руху. Прийняти $A = 2$ см, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: а) $y = x$; б) $x^2 + y^2 = 4$.

6.9. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\cos\omega t$ та $y = -\cos 2\omega t$. Записати рівняння траєкторії руху точки.

Відповідь: $y = -0{,}5x^2 + 1$.

6.10. Коливання матеріальної точки масою $m = 0{,}5$ г здійснюється згідно з рівнянням: $x = A\sin\omega t$, де $A = 5$ см, $\omega = 10$ с$^{-1}$. Визначити максимальні значення повертаючої сили $F_{\max}$ та кінетичної енергії $W_{k\max}$.

Відповідь: $F_{\max} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н, $W_{k\max} = 62{,}5$ мкДж.

6.11. Під дією повертаючої сили $F = 4{,}39$ мН матеріальна точка здійснює коливання за законом $x = A\cos\omega t$, де $A = 20$ см, $\omega = \left(\frac{2\pi}{3}\right)$с$^{-1}$. Знайти повну енергію W матеріальної точки в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $W = 877$ мкДж.

6.12. Матеріальна точка коливається за законом $x = x_0 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. У який момент часу її потенціальна енергія дорівнює кінетичній?

Відповідь: $t = \frac{1}{24}$ с.

6.13. Гиря, підвішена до пружини, здійснює вертикальні коливання з амплітудою $A = 2$ см. Знайти жорсткість пружини, якщо повна енергія цих коливань дорівнює 0,8 Дж.

Відповідь: $k = 4$ кН/м.

6.14. Тіло масою m рухається під дією сили $F = F_0 \cos\omega t$. Знайти вираз для кінетичної енергії тіла. Визначити максимум кінетичної енергії (при $t = 0, \upsilon = 0$).

Відповідь: $W_{k\max} = \frac{F_0^2}{2m\omega^2}$.

6.15. Повна енергія точки, що гармонічно коливається, дорівнює 10 мкДж, а максимальна сила $F_{\max}$, що діє на точку, дорівнює 0,5 мН. Напишіть рівняння руху цієї точки, якщо період T коливань становить 4 с, а початкова фаза $\varphi = \pi/6$.

Відповідь: $x = 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ м.

6.16. Невеликий вантаж масою 200 г підвішений до пружини, жорсткість якої $k = 4{,}87$ Н/м, здійснює коливання по вертикалі. Знайти період таких коливань.

Відповідь: T = 1,27 с.

6.17. На пружині підвішений вантаж масою m. Період коливань системи $T_1 = 0{,}5$ с. Після цього підвісили ще один вантаж, після чого період коливань став $T_2 = 0{,}6$ с. Визначити подовження пружини, навантаженої другим вантажем.

Відповідь: $\Delta l = 2{,}73$ см.

6.18. На двох пружинах з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2, з'єднаних послідовно, висить вантаж m. Знайти період вертикальних коливань такої системи. Який буде період, якщо пружини з'єднати паралельно?

Відповідь: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$.

6.19. На горизонтальній пружині жорсткістю $k = 900$ Н/м закріплена куля масою M = 4 кг, що лежить на гладкому столі, по якому вона може ковзати без тертя. Кулька масою $m = 10$ г, що летить з горизонтальною швидкістю $\upsilon_0 = 600$ м/с і має в момент удару швидкість, напрямлену вздовж осі пружини, потрапила в кулю і застрягла в ній. Нехтуючи масою пружини й опором повітря, визначити: а) амплітуду коливань кулі; б) період коливань кулі.

Відповідь: а) A = 10 см; б) T = 0,419 с.

6.20. На чашку вагів масою M, підвішену на пружині жорсткістю k, з висоти h падає невелика кулька масою m. Удар кульки абсолютно непружний. Чашка вагів у результаті удару починає здійснювати коливання. Визначити амплітуду цих коливань.

Відповідь: $A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gh}{(m+M)k}}$.

6.21. Невеликий кубик трохи зміщується від положення рівноваги на дні сферичної посудини радіусом $R = 10$ см. У припущенні, що тертя немає, знайти період коливань кубика.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 0{,}635$ с.

6.22. Банка у вигляді циліндра з важким дном плаває у воді. Нехтуючи силами опору, знайти період коливань банки. Маса її m, площа основи S, густина води $\rho_в$.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho_в g S}}$.

6.23. Маятниковий годинник, що йде точно на рівні моря, підняли на висоту $h = 5$ км. Наскільки зміняться його показання за одну добу порівняно з годинником, що перебуває на рівні моря?

Відповідь: годинник відстане на $\Delta t = 68$ с.

6.24. У нерухомому ліфті висить маятник, період коливань якого дорівнює $T_1 = 1$ с. З яким прискоренням і в якому напрямку рухається ліфт, якщо період коливань маятника став рівним 1,1 с?

Відповідь: $a = 1{,}7$ м/с^2.

6.25. Маятник довжиною $l = 1{,}2$ м підвішений до стелі вагона, що рухається горизонтально з прискоренням $a = 2{,}2$ м/с^2. Визначити положення рівноваги і період коливань маятника.

Відповідь: $\alpha = 13°$; $T = 2{,}1$ с.

6.26. У кабіні ліфта підвішений маятник, період коливання якого в нерухомому ліфті T_0. Визначити: а) який період T коливань маятника, якщо ліфт спускатиметься з прискоренням, яке дорівнює $\frac{3}{4}g$; б) з яким прискоренням необхідно піднімати ліфт, щоб період коливань дорівнював $\frac{1}{2}T_0$.

Відповідь: а) $T = 2T_0$; б) $a = 3g$.

6.27. На стрижень довжиною $l = 40$ см прикріплено два однакових вантажі: один — у середині стрижня, другий — на одному із його кінців. Стрижень з вантажами коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через його вільний кінець. Визначити приведену довжину $l_{пр}$ та період T коливань такої системи. Масою стрижня знехтувати.

Відповідь: $l_{пр} = 0{,}33$ м; $T = 1{,}16$ с.

6.28. Фізичний маятник являє собою тонкий однорідний стрижень масою $m = 100$ г з прикріпленою до нього маленькою кулькою масою $m=100$ г. Маятник здійснює коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через точку O на стрижні. Довжина стрижня дорівнює $l=1$ м. Знайти період T гармонічних коливань маятника для випадків, зображених на рис. 2, *а* та 2, *б*.

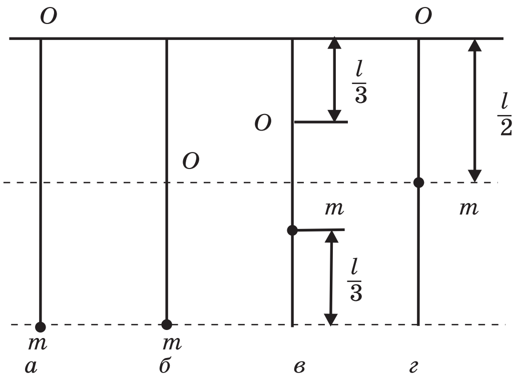


Рис. 2

Відповідь: а) $T=1{,}89$ с; б) $T=1{,}64$ с.

6.29. Із умов попередньої задачі знайти період гармонічних коливань для випадків, зображених на рис. 2, *в* та 2, *г*.

Відповідь: в) $T=1{,}34$ с; г) $T=1{,}53$ с.

6.30. Однорідний диск радіусом $R=20$ см коливається біля горизонтальної осі, що проходить на відстані $l=15$ см від центра диска. Визначити період коливань диска відносно цієї осі.

Відповідь: $T=1{,}07$ с.

6.31. Маятник складається зі стрижня ($l=30$ см, $m=50$ г), на верхньому кінці якого закріплена маленька кулька (матеріальна точка масою $m_1=40$ г), а на нижньому — куля радіусом $R=5$ см і масою $m_2=100$ г. Визначити період коливання цього маятника біля горизонтальної осі, що проходить крізь точку в центрі стрижня.

Відповідь: $T=1{,}24$ с.

6.32. За $t=20$ хв амплітуда затухаючих коливань маятника довжиною $l=1$ м зменшилася у 4 рази. Знайти коефіцієнт затухання та логарифмічний декремент коливань λ.

Відповідь: $\beta=0{,}0011$; $\lambda=0{,}0022$.

6.33. Логарифмічний декремент затухаючих коливань математичного маятника дорівнює $\lambda = 0{,}7$. Знайти, в скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника.

Відповідь: $\frac{A_0}{A} = 2.$

6.34. Період власних коливань системи дорівнює $T_0 = 1$ с, логарифмічний декремент коливань $\lambda = 0{,}314$. Знайти період T затухаючих коливань.

Відповідь: $T = 1{,}001$ с.

6.35. Математичний маятник здійснює затухаючі коливання. Довжина маятника $l = 25$ см, логарифмічний декремент $\lambda =$ 0,2. Знайти проміжок часу, через який енергія коливань маятника зменшиться втричі.

Відповідь: $t = 2{,}75$ с.

6.36. Повне прискорення математичного маятника в його крайньому положенні за одне коливання зменшується в 1,22 рази. Знайти логарифмічний декремент такого затухаючого коливання маятника.

Відповідь: $\lambda = 0{,}2.$

6.37. Знайти час релаксації (час, за який амплітуда коливань зменшується в e разів, де e — основа натуральних логарифмів) математичного маятника довжиною 0,5 м, який було виведено із стану рівноваги і який при першому коливанні відхилився на 5 см, а при другому (в тому ж напрямку) — на 4 см.

Відповідь: $t = 6{,}4$ с.

6.38. За час, протягом якого система здійснює 100 коливань, амплітуда зменшується в $k = 5$ разів. Знайти добротність такої системи Q.

Відповідь: Q = 195.

6.39. Добротність деякої коливальної системи Q = 2, частота вільних коливань $\omega = 100$ с$^{-1}$. Знайти власну частоту коливань системи ω_0.

Відповідь: $\omega_0 = 103$ с$^{-1}$.

6.40. Частота вільних коливань деякої системи $\omega = 65$ рад/с, а її добротність Q = 2. Визначте власну частоту ω_0 коливань цієї системи.

Відповідь: $\omega_0 = 67$ рад/с.

6.41. Тіло масою $m = 100$ г здійснювало затухаючі коливання і за $\tau = 1$ хв втратило 40 % своєї енергії. Визначте коефіцієнт опору середовища *r*.

Відповідь: $r = 8,51 \cdot 10^{-4}$ кг/с.

6.42. За час, протягом якого система здійснює $N = 50$ повних коливань, амплітуда зменшується вдвічі. Визначте добротність системи.

Відповідь: $Q = 227$.

6.43. Власна частота ν_0 коливань деякої системи дорівнює 500 Гц. Визначити частоту ν затухаючих коливань цієї системи, якщо резонансна частота $\nu_{рез}$ = 499 Гц.

Відповідь: $\nu = 499,5$ Гц.

6.44. Період затухаючих коливань системи дорівнює 0,2 с, а відношення амплітуд першого і шостого коливань дорівнює 13. Визначити резонансну частоту коливальної системи.

Відповідь: $\nu_{рез}$ = 4,98 Гц.

6.45. Частота вільних коливань системи $\omega = 100$ с$^{-1}$, резонансна частота $\Omega_{рез}$ = 99 с$^{-1}$. Знайти добротність *Q* цієї системи.

Відповідь: *Q* = 4.

6.46. При незмінній амплітуді змушуючої сили амплітуда вимушених коливань при частотах $\omega_1 = 100$ с$^{-1}$ і $\omega_2 = 300$ с$^{-1}$ виявилась однаковою. Знайти резонансну частоту $\Omega_{рез}$.

Відповідь: $\Omega_{рез}$ = 224 с$^{-1}$.

II. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

7. МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ

7.1. Статистичний та термодинамічний методи досліджень

Досліди доводять такі факти:

- усі речовини складаються з мікрочастинок (атомів, молекул, іонів та ін.);
- частинки перебувають у неперервному русі;
- частинки взаємодіють між собою та з зовнішніми тілами.

Макроскопічні системи являють собою величезні сукупності структурних одиниць, що перебувають у стані *теплового руху*. Фізичні властивості макросистеми, пов'язані із тепловим рухом, вивчають *термодинаміка* та *статистична фізика*. Предметом цих розділів фізики є вивчення закономірностей *теплового руху*, але суттєвою відмінністю є методи досліджень.

Термодинамічний метод

Термодинамічний метод не використовує уявлень про молекулярну будову речовин та фізичну природу теплоти, не розглядає внутрішній механізм досліджуваних явищ. Термодинаміка є аксіоматичною наукою, висновки якої ґрунтуються на загальних законах або началах, що є узагальненням дослідних фактів.

Термодинамічний метод є макроскопічним, феноменологічним (описовим) методом.

Термодинаміка вивчає закони взаємного перетворення різних видів енергії, серед яких особливу роль відіграють процеси передачі тепла.

Статистичний метод

Статистичний, або *молекулярно-кінетичний,* метод визначає фізичні властивості та стан тіл, спираючись на уявлення про внутрішню будову, взаємодію частинок, що складають тіла, та їх характер руху. Об'єм газу 1 м^3 містить ~10^{25} структурних одиниць (атомів, молекул), які безперервно рухаються, стикаючись між собою. Координати, швидкість, енергія окремої частинки є випадковими величинами, але поведінку сукупності великої кількості частинок можна визначити, використовуючи методи математичної статистики та теорії імовірності. Статистичний метод є мікроскопічним, ґрунтується на використанні певної моделі молекулярного руху. Статистична фізика встановлює певні властивості макросистем, які відсутні для невеликої кількості молекул — статистичні закономірності. Прикладами фізичних величин, які мають статистичний характер, є тиск, температура, густина та ін.

Таким чином, термодинамічний та статистичний методи досліджень взаємно доповнюють один одного, розглядаючи теплові явища з різних точок зору.

7.2. Основні поняття термодинаміки. Температура

Речовини в твердому, рідкому та газоподібному станах складаються з молекул, які безперервно рухаються та взаємодіють. Одна і та ж речовина може бути в різних агрегатних станах, при цьому розміри та маса молекул незмінні, змінюються міжмолекулярні відстані та характер взаємодії молекул.

У газах молекули знаходяться на відстанях, що значно перевищують розміри молекул, рух молекул хаотичний. У твердих тілах відстані між молекулами та розміри молекул — величини одного порядку. Для твердих тіл суттєвими є сили взаємодії між молекулами. Внаслідок дії сил притягання та відштовхування між молекулами твердих тіл, молекули не можуть віддалятись одна від одної на великі відстані. Молекули здійснюють, в основному, коливання навколо середніх положень рівноваги (вузлів кристалічної решітки), не переміщуються по об’єму тіла. Молекули рідин не розміщуються в вузлах періодичної решітки, але взаємодія сусідніх молекул рідини не дозволяє молекулам рідини рухатись вільно. Молекулам рідини притаманні риси руху молекул і твердого тіла, і газів. Тепловий рух молекул рідини — це коливання навколо деяких локальних положень рівноваги та неперервні стрибкоподібні переміщення від одного до іншого положення рівноваги (трансляційні рухи). Внаслідок різного характеру теплового руху молекул властивості речовини в різних агрегатних станах суттєво відрізняються. Речовини в газоподібному стані займають повністю наданий їм об’єм, мають значну стисливість та значну інтенсивність дифузії, броунівського руху. Рідини мають вільну поверхню, під дією сили тяжіння рідина набирає форму посудини, в якій знаходиться, стисливість рідин невелика, інтенсивність дифузії менша, ніж у газах. Тверді тіла мають певну форму та об’єм, які залишаються сталими без зовнішніх впливів. Головною особливістю твердих тіл є впорядкованість розміщення атомів та молекул. У кристалічних твердих тілах спостерігають *анізотропію* — залежність фізичних властивостей від напряму.

Кількість речовини

Однією з основних величин СІ є *кількість речовини*, одиницею вимірювання якої є моль. *Один моль* дорівнює кількості речовини системи, яка містить стільки структурних елементів, скільки містить атомів 0,012 кг ізотопу вуглецю ^{12}C. Структурними елементами системи можуть бути молекули, атоми, іони, електрони чи інші частинки.

Молярна маса

За визначенням один моль різних речовин містить однакове число частинок — число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Масу моля речовини називають *молярною масою* M, в СІ вимірюють у кілограмах на моль у мінус першому степені.

Тепловий рух притаманний тільки об'єктам, що складаються з великої кількості структурних одиниць, — макроскопічним системам. Система макроскопічних тіл, які взаємодіють та обмінюються енергією, — *термодинамічна система*.

Параметри стану

Фізичні величини, які характеризують систему — *термодинамічні параметри*, або *параметри стану системи*. Макроскопічні величини, які визначаються положенням та властивостями тіл, що не входять до складу системи, називають *зовнішніми параметрами*. *Внутрішніми параметрами* називають величини, що визначають внутрішній стан системи, вони залежать від положення зовнішніх тіл та від руху і положення частинок системи. Наприклад, якщо газ знаходиться в посудині певного об'єму V в електростатичному полі, то зовнішніми параметрами є об'єм (він залежить від розташування стінок посудини) та напруженість зовнішнього електричного поля. Внутрішні параметри — тиск та електричний дипольний момент (вектор поляризації) газу.

Якщо параметри системи не змінюються з часом, то стан системи називають *стаціонарним*.

Стан термодинамічної рівноваги

Якщо система не обмінюється енергією, речовиною чи випромінюванням із зовнішніми тілами, то таку систему називають *ізольованою*. Узагальненням дослідних результатів є положення про існування стану *термодинамічної рівноваги*, яке називають *першим постулатом термодинаміки*: ізольована макроскопічна система за незмінних зовнішніх умов переходить до стану термодинамічної рівноваги. В цьому стані макроскопічні параметри залишаються сталими, система спонтанно не може вийти із стану рівноваги.

Статистична фізика доводить, що стан термодинамічної рівноваги — найбільш імовірний стан системи, який найчастіше створюється частинками, що безперервно рухаються. Тобто постулат про перехід системи до стану термодинамічної рівноваги вказує на найімовірнішу поведінку системи. Спонтанні відхилення параметрів системи від рівноважних значень (флуктуації) можливі внаслідок неперервного теплового руху. Але випадкові відхилення параметрів системи від середніх значень виникають у невеликих об'ємах або протягом невеликих проміжків часу. Для макроскопічних систем відносні флуктуації тим менші, чим більша кількість частинок входить до складу системи. Тому поява значних флуктуацій у рівноважних термодинамічних системах малоймовірна.

Процес релаксації

Перехід ізольованої системи до стану термодинамічної рівноваги називають *процесом релаксації*, а час, протягом якого відбувається цей процес — *часом релаксації*. Зовнішні умови повинні змінюватись настільки повільно, щоб система проходила через послідовність рівноважних станів. Такі процеси називають *квазістатичними* чи *квазірівноважними*.

Температура

Нехай дві рівноважні системи *A* та *B* приведено до теплового контакту. Ці системи, незалежно від значень зовнішніх параметрів, або залишатимуться в тому ж стані рівноваги, або внаслідок обміну енергією прийдуть до спільного стану рівноваги, відмінного від станів рівноваги систем *A* та *B*. Тоді існує фізична величина, яка залежить від внутрішнього стану системи, не залежить від числа частинок системи, залишається постійною для всіх частин системи в стані термодинамічної рівноваги. Ця величина називається *температурою*, визначає взаємну рівновагу термодинамічних систем у тепловому контакті. Температура залежить від внутрішнього руху частинок, є мірою інтенсивності теплового руху. Якщо системи *A* та *B* до теплового контакту мають однакову температуру, то тепловий контакт не порушує стану термодинамічної рівноваги. У випадку різних температур контактуючих систем внаслідок обміну енергією встановлюється однакова температура у всіх частинах системи. Температура є величиною, що визначає стан термодинамічної рівноваги систем.

Рівноважні внутрішні параметри термодинамічної системи є функціями зовнішніх параметрів та температури. Тоді, змінюючи один із внутрішніх параметрів, можна визначити зміну температури тіла. Цей принцип є в основі вимірювань температури термометром.

У термометрах використовують залежність довжини, об'єму, густини, електричного опору, випромінювальної здатності та інших параметрів від температури. Для вимірювань температури використовують різні термометричні тіла й термометричну шкалу. Так, за шкалою Цельсія початок відліку температури (0 °C) відповідає температурі плавлення льоду, а 100 °C — температурі кипіння води за нормальних умов. Різниця температур між цими двома основними (реперними) точками, поділена на 100, відповідає одному градусу за шкалою Цельсія. Градуйований таким чином термометр (наприклад, за лінійною залежністю об'єму від температури), приводять до стану теплової рівноваги з тілом, температуру якого вимірюють. Показання термометрів з різними термометричними тілами, як правило, збігаються тільки для основних точок шкали, відрізняючись для інших температур.

Термодинамічна шкала температур

Температурна шкала, яка не залежить від вибору термометричного тіла, встановлюється другим началом термодинаміки та називається *термодинамічною шкалою температур,* або *шкалою Кельвіна*. Одиницею вимірювання температури за цією шкалою є кельвін (1 К). Температура T за шкалою Кельвіна та температура t за шкалою Цельсія пов'язані формулою

$$T = t + 273{,}16.$$

Шкала Кельвіна побудована за однією реперною точкою — потрійною точкою води, температуру якої вважають рівною 273,16 К.

Абсолютний нуль — температура, на 273,16 К нижча за температуру потрійної точки води. Докладніше фізичний зміст поняття абсолютного нуля розглядається в розділі 9.

7.3. Ідеальний газ. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

Усі матеріальні тіла складаються з великої кількості атомів і молекул, які перебувають у хаотичному русі. Якщо термодинаміка встановлює закони поведінки термодинамічних систем, не розглядаючи мікроскопічний рух молекул, то статистичний метод ґрунтується на встановленні поведінки макросистем на основі розгляду особливостей теплового руху молекул. Математичними методами молекулярної фізики є теорія ймовірностей та математична статистика.

Описати поведінку окремих атомів чи молекул речовини можна за допомогою законів класичної механіки чи квантової механіки. Але число молекул в одиниці об’єму, наприклад, для газів за нормальних умов ~10^{25}. Прослідкувати за поведінкою кожної з цих молекул неможливо і непотрібно. Для великих сукупностей молекул (ансамблів) існують статистичні закономірності, відсутні для кожної окремої молекули. З метою встановлення таких закономірностей у фізиці використовують моделювання процесів.

Моделі відображають реальні фізичні об’єкти наближено, виділяючи найбільш суттєві риси та властивості об’єкта. У процесі поглиблення знань, більш повного опису реального об’єкта досліджень до моделювання залучають більше властивостей реальних систем.

Модель ідеального газу

Для визначення величин, що характеризують газоподібний стан речовин, використовують *модель ідеального газу*. В основі цієї моделі — певні абстрактні припущення про властивості молекул газу та особливості їхнього руху.

Модель ідеального газу за молекулярно-кінетичною теорією — це сферичні молекули, розмірами яких можна знехтувати. Вони рухаються так, що всі напрямки руху є рівноправними та рівноймовірними. Зіткнення молекул між собою та зі стінками посудини відбуваються за законами пружних ударів. У проміжках між зіткненнями молекули рухаються прямолінійно та рівномірно, потенціальна енергія їх взаємодії дорівнює нулю.

В основі побудови моделі ідеального газу — основні положення класичної статистичної фізики:

- для систем з великою кількістю частинок справедливі закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу, електричного заряду;
- кожна з частинок має такі координати та швидкості, що не залежать від значень цих величин у інших частинок системи;
- частинки системи відрізняються одна від одної за значеннями швидкості, енергії, координат та інших фізичних величин — частинки не є тотожними;
- у рівноважному стані всі напрями в газі рівноймовірні, напрями швидкості молекул розподілені хаотично (гіпотеза молекулярного хаосу).

Тиск

Тиском p називають фізичну величину, що дорівнює відношенню модуля нормальної сили dF_n, яка діє на поверхню площею dS, до величини цієї площі поверхні:

$$p = \frac{dF_n}{dS}.$$

Якщо в посудині певного об'єму V знаходиться ідеальний газ, то внаслідок теплового руху молекули стикаються зі стінками посудини. При кожному ударі молекули об стінку виникає сила, яка діє на стінку. Із стінками посудини за одиницю часу стикається велика кількість молекул. Тиск газу є статистичною величиною, виникає внаслідок ударів великої кількості молекул. Якщо в посудині знаходиться невелика кількість молекул, то їх зіткнення із стінками відбуваються рідко та нерегулярно (час між окремими зіткненнями великий). Якщо число молекул велике, то зіткнення молекул із стінками відбувається дуже часто. Тоді нескінченно малі сили дії окремих молекул на стінку складають повну силу, що діє на стінку. Середнє за часом значення цієї сили, що діє на одиницю площі, і визначає тиск газу.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Якщо газ перебуває в стані рівноваги, то величину тиску визначають із *основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу*:

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle, \tag{7.1}$$

де p — тиск газу; n — концентрація молекул газу; m — маса молекули; υ — швидкість молекули; $\langle W_k \rangle = \left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle$ — середня кінетична енергія молекули.

Тиск газу — макроскопічна величина, яка не залежить від характеру ударів молекули зі стінками, від матеріалу стінок та ударів молекул одна з одною. Тиск визначається концентрацією та середньою кінетичною енергією поступального руху молекули.

7.4. Рівняння стану ідеального газу

Основні фізичні закономірності, які мають місце в реальних газах, можна вивчати, використовуючи модель ідеального газу. Вважають, що молекули ідеального газу не взаємодіють між собою та мають власні розміри, набагато менші за характерні відстані між молекулами. Молекули ідеального газу рухаються хаотично, стикаючись між собою за законами пружних ударів.

Фізично малий об'єм ΔV ідеального газу містить достатньо велику кількість молекул, до яких можна застосувати методи статистичної фізики.

У відповідності до термодинаміки ідеальний газ — газ, що описується газовими законами Бойля—Маріотта, Шарля, Гей-Люссака. Властивості реальних газів за малої густини (розріджені гази) з великою точністю збігаються з властивостями ідеального газу.

Рівняння Менделєєва — Клапейрона

Стан ідеального газу визначають його маса m, молярна маса M, тиск p, об'єм V, температура T, взаємозв'язок між якими визначається *рівнянням Менделєєва—Клапейрона*:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{7.2}$$

де $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — універсальна газова стала.

Функціональний зв'язок між параметрами стану ідеального газу, який виражений рівнянням Менделєєва — Клапейрона (7.2), є узагальненням експериментальних газових законів Гей-Люссака, Бойля — Маріотта та Шарля.

У термодинаміці важливу роль відіграють процеси, які відбуваються за певних фіксованих умов — *ізопроцеси* в ідеальних газах. Так, за умови незмінної температури T = const відбувається *ізотермічний процес*. Тоді із (7.2) маємо (закон Бойля — Маріотта):

$$pV = \text{const},$$

тобто добуток тиску та об'єму в ізотермічному процесі — величина стала. Ізотермою в координатах p,V є гіпербола.

Якщо тиск у системі не змінюється (p = const), спостерігається *ізобарний процес*. Такий процес здійснюється, наприклад, у посудині з рухомим поршнем. Із (7.2) випливає, що для ізобарного процесу здійснюється закон Гей-Люссака:

$$\frac{V}{T} = \text{const},$$

тобто між об'ємом і температурою газу прямо пропорційна залежність: зростання об'єму супроводжується зростанням температури.

При *ізохорному процесі* не змінюється об'єм газу (V = const). Рівнянням ізохори є рівняння закону Шарля:

$$\frac{p}{T} = \text{const}.$$

Графік ізохори в координатах p,T — пряма, що починається із початку координат. При збільшенні тиску для газу, об'єм якого не змінюється, температура зростає, при зменшенні тиску температура зменшується.

Окрім ізотермічного, ізобаричного та ізохоричного процесів, до ізопроцесів відносять *адіабатичний процес*, що здійснюється без теплообміну з навколишніми тілами. Цей процес розглянуто в розділі 9.

Позначимо

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К},$$

де N_A — число Авогадро (число частинок у молі будь-якої речовини); k — стала Больцмана (фізичний смисл сталої Больцмана k розглянемо в розділі 7.5). Тоді рівняння (7.2) можна записати в іншому вигляді:

$$pV = \frac{m}{M} N_A kT; \quad pV = NkT; \quad p = \frac{N}{V} kT,$$

де N — число молекул газу масою m.

Позначимо $n = N/V$ — концентрація молекул. Тоді

$$p = nkT. \tag{7.3}$$

Рівняння стану ідеального газу

Рівняння (7.2)–(7.3) — *рівняння стану ідеального газу*. Ці рівняння пов'язують параметри стану ідеального газу, різняться вони тим, що (7.3) містить концентрацію молекул n, яка не піддається прямим вимірюванням, а (7.2) складають величини, які є результатом прямих вимірювань.

Одним із наслідків (7.3) є закон Дальтона для суміші газів, які не вступають у хімічні реакції. Нехай у посудинах однакового об'єму V знаходяться різні ідеальні гази однакової температури T, тиск яких на стінки посудини дорівнює $p_1, p_2, p_3...$. Якщо в посудину об'ємом V помістити суміш газів при температурі T, то

$$pV = n_1 kT + n_2 kT + \ldots,$$

$$p = \frac{n_1}{V} kT + \frac{n_2}{V} kT + \ldots .$$

Але для кожного із газів суміші

$$p_1 = \frac{n_1}{V} kT, \; p_2 = \frac{n_2}{V} kT, \ldots .$$

Закон Дальтона

Тоді сформулюємо *закон Дальтона*:

$$p = p_1 + p_2 + ... = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків її компонент. Парціальний тиск — це тиск, який мав би газ суміші, якби займав об'єм, що дорівнює об'ємові суміші.

Закон Дальтона є наслідком відсутності взаємодії молекул ідеального газу. Молекули окремих компонент суміші чинять тиск, який не залежить від тиску молекул інших газів, що містяться в суміші.

Закон Авогадро

Для ідеальних газів встановлено *закон Авогадро*: однакові об'єми ідеального газу при однакових температурах та тиску містять одне і те ж число молекул. Якщо записати рівняння (7.2) для одного моля ідеального газу, що знаходиться під тиском p_0 = 1,013·10^5 Па при температурі T_0 = = 273,16 К (нормальні умови для ідеального газу), то знайдемо об'єм одного моля

$$V_M = 0{,}0224 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

За нормальних умов реальні гази (наприклад, кисень, гелій, азот, водень, повітря) за властивостями не відрізняються від ідеального. Концентрація молекул газу $n_0 \sim 10^{25}$ м$^{-3}$, середня відстань між молекулами

$$\langle r \rangle \sim \left(\frac{1}{n_0}\right)^{\frac{1}{3}} \sim 10^{-8} \text{ м}.$$

При підвищенні тиску та зменшенні температури зростає густина газу

$$\rho = \frac{M \cdot p}{RT}$$

та спостерігаються відхилення властивостей газу від ідеального внаслідок взаємодії молекул та скінченності об'єму молекул.

7.5. Молекулярно-кінетичний смисл температури. Енергія молекул

Запишемо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу (7.1) та рівняння стану ідеального газу (7.3):

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_k \rangle; \; p = nkT.$$

Із порівняння цих рівнянь зробимо висновок про те, що середня кінетична енергія молекул дорівнює

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2}kT. \tag{7.4}$$

Температура

Середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу прямо пропорційна абсолютній температурі. Тобто *температура — міра середньої кінетичної енергії поступального руху молекул ідеального газу в стані термодинамічної рівноваги.*

Число ступенів вільності

Поступальний рух молекули ідеального газу повністю визначається трьома координатами. Тому для молекули ідеального газу є три ступені вільності (ступені свободи). *Числом ступенів вільності* називають найменше число незалежних величин, що визначають положення тіла. Для молекул одноатомного газу число ступенів вільності $i = 3$.

Закон рівнорозподілу енергії

Три взаємно перпендикулярні напрями поступального руху одноатомної молекули є рівноймовірними, тому на кожний ступінь вільності припадає енергія $(1/2)kT$. Це твердження, що називається *законом рівнорозподілу енергії за ступенями вільності*, доведене методами статистичної фізики австрійським фізиком-теоретиком Л. Больцманом (1844–1906 рр.) та англійським фізиком Дж. Максвеллом (1831–1874 рр.). Тоді середня кінетична енергія молекул газу, який має i ступенів вільності, дорівнює

$$\langle W_k \rangle = \frac{i}{2}kT. \tag{7.5}$$

Молекула двохатомного газу — це два атоми, між якими відстань не змінюється (жорсткий зв’язок), або атоми, що здійснюють коливальний рух (пружний зв’язок). Для двохатомного газу, відстань між атомами якого не змінюється, $i = 5$ (два ступені вільності обертального та три — поступального рухів). Для двохатомних газів з пружним зв’язком $i = 7$ (два ступені вільності коливального руху, два — обертального, три — поступального). Для молекул багатоатомного газу $i = 6$ (три ступені вільності поступального руху та три — обертального).

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Які методи використовують у молекулярній фізиці для визначення характеристик макросистем?
2. Яким є тепловий рух молекул для різних агрегатних станів тіл?
3. Які положення є основними в молекулярній фізиці?
4. Чим відрізняються статистичний та термодинамічний методи досліджень?
5. Визначити поняття термодинамічної системи, термодинамічних параметрів, термодинамічного процесу.
6. Що ви знаєте про стан термодинамічної рівноваги? Які величини характеризують цей стан?
7. Які процеси належать до квазірівноважних?
8. Який газ називають ідеальним?
9. Яку величину називають кількістю речовини? В яких одиницях вона вимірюється?
10. Назвіть параметри стану ідеального газу.
11. Запишіть та проаналізуйте рівняння Менделєєва—Клапейрона.
12. Яка форма рівняння стану ідеального газу найзручніша для визначення концентрації молекул ідеального газу?
13. Сформулюйте закон Дальтона. Який тиск називають парціальним?
14. Наведіть формулювання закону Авогадро.
15. Запишіть та проаналізуйте основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу.
16. Розкрийте статистичний зміст поняття тиску. Від яких величин залежить тиск ідеального газу на стінки посудини?
17. У чому полягає статистичний смисл температури?
18. Запишіть та проаналізуйте формулу, що пов'язує середню кінетичну енергію поступального руху молекул ідеального газу з температурою.

Завдання для експрес-контролю

1. Визначити концентрацію молекул ідеального газу за нормальних умов.

2. Молекули газу розподілені по об'єму в середньому рівномірно. Оцініть середню відстань $\langle r \rangle$ між молекулами.

3. Пучок молекул нормально падає на стінку посудини. Скільки ударів за одиницю часу отримує стінка, якщо концентрація молекул n, їх середня швидкість $\langle \upsilon \rangle$, а площа поперечного перерізу S?

4. Оцініть кількість молекул, що міститься в стакані води за нормальних умов.

5. Знайдіть масу моля електронів (маса електрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг).

6. Визначити масу атома водню та молекули кисню. Число Авогадро дорівнює $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

7. Моль таких газів, як гелій та кисень, за нормальних умов займає об'єм $V_M = 22{,}4$ л. Чому дорівнює в цьому випадку число молекул в одиниці об'єму n?

8. Чому дорівнює концентрація молекул n газу, густина якого дорівнює ρ, а молярна маса M?

9. Визначити число ступенів вільності молекул газу, у якого молекули є: а) жорсткими двохатомними; б) двохатомними молекулами з пружними зв'язками.

10. Скільки молекул за одну секунду стикаються з 1 м^2 стінки посудини, в якій знаходиться азот за нормальних умов?

11. Зобразити для ідеального газу графік ізохорного, ізобарного, ізотермічного процесів на діаграмі p,V. Усі графіки проходять через спільну для них точку.

12. Зобразити для ідеального газу графік ізохорного, ізобарного, ізотермічного процесів на діаграмі T,V. Усі графіки проходять через спільну для них точку.

13. Зобразити для ідеального газу графік ізохорного, ізобарного, ізотермічного процесів на діаграмі T, p. Усі графіки проходять через спільну для них точку.

14. У посудині знаходиться N молекул ідеального газу. Як зміниться тиск газу та його температура, якщо число молекул збільшиться вдвічі, а повна кінетична енергія молекул не зміниться?

Приклади розв'язання задач

1. Аеростат заповнюється воднем при температурі $T_1 = 291$ К та зовнішньому атмосферному тиску $p_1 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Внаслідок підвищення температури зовнішнього повітря до $T_2 = 310$ К та зниження тиску до $p_2 = 0{,}985 \cdot 10^5$ Па, надлишок газу витік з аеростата, а вага аеростата з воднем зменшилася на величину $Q = 59$ Н. Якою була початкова маса водню m?

Розв'язання

Для аеростата стала величина — об'єм водню, а температура та тиск змінюються. Змінюється і маса газу. Запишемо рівняння Менделєєва — Клапейрона для початкового та кінцевого станів:

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1; \quad p_2 V = \frac{m - Q/g}{M} R T_2.$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно невідомої m:

$$\frac{m}{p_1 \cdot M} RT_1 = \frac{m - Q/g}{M \cdot p_2} RT_2;$$

$$mp_2T_1 = \left(m - \frac{Q}{g}\right) p_1T_2;$$

$$m = \frac{p_1T_2Q}{(p_1T_2 - p_2T_1)g}; m = 68 \text{ кг.}$$

2. Компресор забирає при кожному качанні $V_0 = 4 \cdot 10^{-3}$м^3 повітря при температурі $T_0 = 270$ K та нормальному атмосферному тиску $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па і нагнітає його в резервуар, об'єм якого $V_1 = 1{,}5$ м^3. У резервуарі підтримується стала температура $T_1 = 318$ K. Скільки качань повинен зробити компресор, щоб тиск у резервуарі підвищився на $\Delta p = 2{,}02 \cdot 10^5$ Па?

Розв'язання

При кожному качанні компресор забирає із атмосфери повітря масою m, яку визначаємо із рівняння Менделєєва—Клапейрона:

$$p_0V_0 = \frac{m}{M} RT_0. \tag{1}$$

Парціальний тиск, який створює ця маса повітря, потрапляючи в резервуар, дорівнює

$$p = \frac{m}{MV_1} RT_1. \tag{2}$$

Знаходимо із (1) масу m, підставляємо в рівняння (2):

$$m = \frac{p_0V_0M}{RT_0}; \; p = \frac{p_0V_0T_1}{T_0V_1}.$$

За законом Дальтона тиск у резервуарі дорівнює сумі парціальних тисків, створених окремими порціями повітря. Тоді:

$$\Delta p = np,$$

де n — число качань:

$$n = \frac{\Delta pV_1T_0}{RT_0}; n = 640.$$

3. Розрахувати повну енергію всіх молекул азоту, що знаходяться в балоні об'ємом $V = 10$ л під тиском $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

Розв'язання

Середня енергія однієї молекули дорівнює:

$$< W_1 >= \frac{i}{2} kT,$$

де i — кількість ступенів вільності (для азоту як двохатомної молекули $i = 5$).

Повна енергія всіх молекул дорівнює:

$$< W >= \frac{i}{2} kTN, \qquad (1)$$

де N — загальна кількість молекул, яка дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A, \qquad (2)$$

Тут m — маса газу; M — молярна маса; N_A — число Авогадро. Зважаючи, що $kN_A = R$, маємо

$$< W >= \frac{i}{2} kT \frac{m}{M} N_A = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT. \qquad (3)$$

Але згідно з рівнянням Менделєєва — Клапейрона $pV = \frac{m}{M} RT$, з (3) випливає

$$< W >= \frac{i}{2} pV = \frac{5}{2} pV,$$

$$< W > = 3{,}75 \text{ кДж}.$$

4. Суміш азоту та гелію знаходиться під тиском $p = 1{,}3 \cdot 10^4$ Па при температурі $T = 300$ K. Знайти концентрацію кожного з газів, якщо масова частка азоту в суміші становить $\omega_1 = 0{,}7$.

Розв'язання

Позначимо масу азоту m_1, а масу гелію m_2 в суміші масою m. Тоді

$$m_1 = \omega_1 m\,;\ m_2 = \omega_2 m. \qquad (1)$$

Концентрації n_1 азоту та n_2 гелію дорівнюють

$$n_1 = \frac{N_1}{V} = \frac{m_1 N_A}{M_1 V};\ n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{m_2 N_A}{M_2 V}, \qquad (2)$$

де M_1, M_2 — молярні маси азоту та гелію; N_A — число Авогадро.

Знаходимо m_1 та m_2 із (2) та (1):

$$\omega_1 m = \frac{M_1 n_1 V}{N_A}; \quad \omega_2 m = \frac{M_2 n_2 V}{N_A}.$$

Поділивши ліві та праві частини цих рівнянь, маємо

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_1 n_1}{M_2 n_2}; \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1 M_2}{\omega_2 M_1}.$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{0,7 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{0,3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{3}.$$

Концентрація молекул гелію n_2 втричі більша за концентрацію n_1 азоту. Концентрація суміші газів n дорівнює

$$n = n_1 + n_2.$$

Використовуючи рівняння стану ідеального газу

$$p = nkT,$$

знаходимо:

$$n_1 = \frac{1}{4} n = \frac{p}{4kT}; \quad n_2 = \frac{3}{4} n = \frac{3p}{4kT}.$$

$$n_1 = 0,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}; \quad n_2 = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

5. Газ складається із суміші трьох газів: $\nu_1 = 2$ моль азоту, $\nu_2 = 4$ моль кисню, $\nu_3 = 5$ моль водню. Визначити густину і молярну масу суміші при температурі $T = 320$ K і тиску $p = 1,7 \cdot 10^5$ Па.

Розв'язання

Відповідно до закону Дальтона, тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші

$$p = p_1 + p_2 + p_3. \tag{1}$$

Для кожної компоненти можна записати рівняння Менделєєва — Клапейрона

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT; \; p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT; \; p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT.$$

Додамо ці рівняння:

$$(p_1 + p_2 + p_3) V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} \right) RT. \tag{2}$$

Враховуючи (1) і те, що $\frac{m}{M} = \nu$ — кількість молів, з (2) маємо:

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) RT,$$

$$V = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \frac{RT}{p}.$$

Тоді густина суміші дорівнює

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3) p}{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) RT},$$

$$\rho = 1{,}13 \text{ кг/м}^3.$$

Молярна маса суміші дорівнює

$$M = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3},$$

$$M = 17{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

6. Визначити об’єм та масу 1 моля води; масу молекули води; об’єм, який займає одна молекула; діаметр молекули, вважаючи молекули кульками, які торкаються одна одної. Скільки молекул міститься в 1 м^3 води?

Розв’язання

Кількість молів речовини — відношення маси m до молярної маси M речовини:

$$\nu = \frac{m}{M}.$$

Для одного моля води $\nu = 1$ моль, тоді маса моля m дорівнює молярній масі M води. Молекула води складається з двох атомів водню та атома кисню (H_2O), тому молярна маса води

$$M = (2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3}) \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Об’єм моля води V_M знаходимо із означення густини ρ:

$$\rho = \frac{m}{V_M} = \frac{M}{V_M}; \qquad V_M = \frac{M}{\rho};$$

$$\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \qquad V_M = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Молярна маса M дорівнює масі однієї молекули m_0, помноженій на кількість молекул у 1 молі N_A, тому

$$m_0 = \frac{M}{N_A}; \quad m_0 = 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Об'єм молекули V_0 знайдемо, поділивши молярний об'єм V_M на число молекул у 1 молі N_A:

$$V_0 = \frac{V_M}{N_A} = \frac{M}{\rho N_A}; \quad V_0 = 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Якщо молекули щільно розташовані, то об'єм молекули V_0 та діаметр d пов'язані формулою:

$$V_0 = d^3,$$

звідки

$$d = \sqrt[3]{V_0}; \quad d = 3{,}1 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Кількість молекул N, що містяться в 1 м^3 води, знаходимо, помноживши число молів $\nu = \dfrac{m}{M}$ на число Авогадро:

$$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A = \frac{\rho V}{M} N_A.$$

$$N = 3{,}3 \cdot 10^{28}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Визначити сумарну густину суміші $m_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг водню та $m_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг кисню при температурі $T = 280$ К та загальному тиску $p = 0{,}93 \cdot 10^5$ Па.

Відповідь: $\rho = 0{,}48$ кг/м^3.

7.2. Оболонка аеростата має об'єм $V = 1600$ м^3. Знайти піднімальну силу водню, який заповнює оболонку, на висоті, де тиск $p = 60$ кПа, а температура $T = 280$ К. Під час піднімання водень може виходити через отвір у нижній частині оболонки.

Відповідь: $F = 10{,}9$ кН.

7.3. Дві посудини з повітрям, об'єми яких $V_1 = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$ м^3, $V_2 = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3, з'єднані між собою вузькою трубкою з краном. Температури посудин $T_1 = 373$ К та $T_2 = 253$ К під час досліду підтримують сталими. При закритому крані тиск у першій та другій посудинах дорівнював $p_1 = 0{,}53 \cdot 10^5$ Па; $p_2 = 0{,}2 \cdot 10^5$ Па. Який тиск встановиться в системі, якщо кран відкрити?

Відповідь: $p = 0{,}3 \cdot 10^5$ Па.

7.4. Газова суміш, що складається з кисню та азоту, знаходиться в балоні під тиском $p = 1$ МПа. Визначити парціальний тиск кисню та азоту, якщо масова частка кисню в суміші дорівнює $\omega_1 = 0{,}2$.

Відповідь: $p_1 = 0{,}18$ МПа; $p_2 = 0{,}82$ МПа.

7.5. Знайти густину суміші газів, що складаються з водню та кисню. Масові частки їх відповідно 1/9 та 8/9. Тиск суміші $p = 100$ кПа, температура $T = 300$ К.

Відповідь: $\rho = 0{,}402$ кг/м^3.

7.6. Визначити число n молекул повітря в одиниці об'єму при температурі 0 °С та тиску $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

Відповідь: $n = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

7.7. Середня кінетична енергія молекули одноатомного ідеального газу дорівнює $\langle W \rangle = 6{,}00 \cdot 10^{-21}$ Дж. Тиск газу $p = 2{,}00 \cdot 10^5$ Па. Знайти число молекул газу в одиниці об'єму за цих умов.

Відповідь: $n = 5{,}00 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

7.8. Визначити масу: а) одного кубічного метра; б) одного літра повітря за нормальних умов.

Відповідь: $m_1 = 1{,}29$ кг/м^3; $m_2 = 1{,}29$ г/л.

7.9. Поблизу поверхні Землі до складу повітря входять 78,08 % молекул азоту; 20,95 % молекул кисню; 0,93 % молекул аргону; 0,04 % — інших газів. Вважаючи тиск повітря рівним $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, знайти парціальний тиск азоту, кисню та аргону.

Відповідь: $p_1 = 0{,}791 \cdot 10^5$ Па; $p_2 = 0{,}212 \cdot 10^5$ Па; $p_3 = 0{,}009 \cdot 10^5$ Па.

7.10. На дні озера глибиною $h = 20$ м температура води $t_1 = 7$ °С. Бульбашка повітря, яка на дні озера має об'єм $V_1 = 2$ мм^3, повільно піднімається. Який буде об'єм бульбашки біля поверхні води, якщо атмосферний тиск нормальний? Тиском, зумовленим поверхневим натягом, знехтувати.

Відповідь: $V_2 = 6{,}2$ мм^3.

7.11. Посудина з теплоізольованими стінками поділена рухомою теплопровідною перегородкою на дві частини, відношення об'ємів яких у рівноважному стані $V_1/V_2 = 1/2$ при температурах відповідно $t_1 = 102$ °C і $t_2 = 227$ °C. Знайти відношення об'ємів, які встановляться після вирівнювання температур.

Відповідь: $V_1'/V_2' = 2{,}3$.

7.12. У двох балонах газобалонного автомобіля міститься газ (паливо для двигуна) під тиском $p_1 = 20{,}26$ МПа. Місткість кожного балона $V = 0{,}08$ м^3. Яка маса газу витрачена за час поїздок, якщо тиск у балонах знизився до $p_2 = 10{,}13$ МПа? Температура газу $t_0 = 0$ °C. Густина палива за нормальних умов $\rho_0 = 0{,}6$ кг/м^3.

Відповідь: $\Delta m = 9{,}6$ кг.

7.13. Газ стискається ізотермічно від об'єму $V_1 = 10$ дм^3 до об'єму $V_2 = 5$ дм^3. Тиск при цьому змінився на $\Delta\rho = 6$ кПа. Визначити початковий тиск газу.

Відповідь: $p_1 = 6$ кПа.

7.14. Обчислити зміну маси повітря в посудині місткістю $V = 10$ дм^3, якщо при зміні температури від $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 70$ °C тиск змінився від 100 до 120 кПа.

Відповідь: $\Delta m = 1{,}3$ г.

7.15. Двохатомний газ (атоми з жорсткими зв'язками) знаходиться під тиском $p = 80$ кПа та має густину $\rho = 4$ кг/м^3. Знайти енергію теплового руху молекул газу за цих умов.

Відповідь: $W = 750$ Дж.

7.16. Яке число молекул N двохатомного газу містить об'єм $V = 10$ см^2 під тиском $p = 5{,}3$ кПа та при температурі $t = 27$ °C? Чому дорівнює енергія теплового руху молекул?

Відповідь: $N = 1{,}3 \cdot 10^{19}$; $W = 0{,}133$ Дж.

7.17. У балоні об'ємом $V = 25$ л міститься водень при температурі $T = 290$ K. Після того, коли частину водню витратили, тиск знизився на $\Delta p = 0{,}4$ МПа. Визначити масу Δm витраченого водню.

Відповідь: $\Delta m = 8{,}3$ г.

7.18. Стінки балона, який містить $m_1 = 1{,}5$ кг азоту, руйнуються при температурі $t_1 = 300$ °С. Яку масу водню можна зберегти в цьому балоні при температурі $t_2 = 25$ °С та восьмикратному запасі міцності?

Відповідь: $m_2 = 26$ г.

7.19. Краплина рицинової олії масою $4{\cdot}10^{-7}$ кг розлилась по поверхні води, утворивши пляму площею $S = 0{,}6$ м^2. Вважаючи, що молекули в плівці утворюють один шар, оцінити середню відстань d_0 між молекулами олії та масу молекули m_0.

Відповідь: $d_0 = 7 \cdot 10^{-10}$ м; $m_0 = 1{,}7 \cdot 10^{-25}$ кг.

7.20. Скільки частинок міститься в 3 г кисню, якщо ступінь його дисоціації $\alpha = 0{,}4$ (ступінь дисоціації α — це відношення кількості молекул, які розпались на атоми, до загальної кількості молекул)?

Відповідь: $N = 7{,}9 \cdot 10^{22}$.

7.21. Визначити тиск суміші водню масою $m_1 = 10$ г і гелію масою $m_2 = 6$ г на стінки посудини об'ємом $V = 2$ л, якщо сума кінетичних енергій молекули водню і молекули гелію дорівнює $\langle\varepsilon\rangle = 1$ еВ.

Відповідь: $p = 7{,}83 \cdot 10^7$ Па.

7.22. Визначити кількість атомів ртуті в 1 мм^3, масу атома ртуті, його діаметр, вважаючи атоми ртуті кульками, які стикаються.

Відповідь: $N = 4{,}1 \cdot 10^{19}$; $m_0 = 3{,}32 \cdot 10^{-25}$ кг, $d_0 = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

7.23. Чому дорівнюють середні кінетичні енергії поступального й обертального руху всіх молекул азоту масою 0,3 кг при температурі 350 K?

Відповідь: $\langle W_{\text{пост}}\rangle = 4{,}67{\cdot}10^4$ Дж; $\langle W_{\text{оберт}}\rangle = 3{,}12{\cdot}10^4$ Дж.

7.24. У посудині об'ємом 10 л міститься ідеальний газ при температурі 10 °С. Знайти масу випущеного газу, якщо тиск у посудині зменшиться при сталій температурі на 0,5 атмосфери, а густина газу за нормальних умов 1,25 кг/м^3.

Відповідь: $\Delta m = 6$ г.

7.25. Визначити концентрацію кожного з газів суміші кисню і гелію, що знаходиться при температурі 17 °С під тиском $p = 2{\cdot}10^4$ Па. Густина суміші $9{\cdot}10^{-2}$ кг/м^3.

Відповідь: $n_{O_2} = 3{,}78 \cdot 10^{24}$; $n_{\text{He}} = 1{,}22 \cdot 10^{24}$.

7.26. Знайти масу повітря, що знаходиться в аудиторії висотою h = 5 м та площею S = 200 м^2. Тиск повітря p = 100 кПа, температура t_1= 17 °С. Як зміниться густина повітря, якщо температура в приміщенні збільшиться до t_2 = 30 °С? Тиск вважати сталим.

Відповідь: $m = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг; $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}9$.

7.27. Маса m = 12 г газу знаходиться в об'ємі V = 4 л при температурі t_1 = 7 °С. Після нагрівання газу при сталому тиску густина газу дорівнює ρ = 0,6 кг/м^3. До якої температури T_2 нагріли газ?

Відповідь: T_2 = 1400 К.

7.28. Визначити масу атомів водню та гелію.

Відповідь: $m_1 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_2 = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ кг.

7.29. У посудині об'ємом V = 4 л міститься m = 1 г водню. Чому дорівнює концентрація газу?

Відповідь: $n = 7{,}5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

7.30. Чому дорівнює кількість молекул повітря N, які знаходяться в кімнаті об'ємом V = 80 м^3 при температурі T = 390 К та тиску 100 кПа?

Відповідь: $N = 2 \cdot 10^{27}$.

7.31. У балоні об'ємом V = 3 л міститься кисень масою m = 4 г. Визначити кількість молів ν та концентрацію n кисню.

Відповідь: ν = 0,125 моль; $n = 2{,}51 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

8. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ МОЛЕКУЛ. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

8.1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями

Якщо газ перебуває в стані термодинамічної рівноваги, то його температура T = const, але це твердження не означає, що в стані рівноваги модулі швидкості молекул однакові. Адже молекули безперервно стикаються між собою та із стінками посудини, і їх швидкості внаслідок цього змінюються. Всі напрями руху молекул рівноймовірні, а швидкість окремої молекули в даний момент часу величина випадкова. Тобто молекула навіть протягом невеликих проміжків часу змінює напрям та величину швидкості — існує розподіл молекул за швидкостями. Це означає, що швидкість в інтервалі від $\vec{\upsilon}$ до $(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})$ мають певне число молекул. Оскільки в стані рівноваги постійною є температура, яка пов’язана із середньою кінетичною енергією молекул, то внаслідок принципу детальної рівноваги скільки молекул покидає інтервал швидкості, стільки ж їх і прибуває до цього інтервалу за малий проміжок часу. Тобто розподіл молекул за швидкостями є стабільним, не залежить від часу. Закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями встановлено Дж. Максвеллом у 1859 р. Розглянемо основні властивості розподілу Максвелла. Нехай швидкість в інтервалі від υ до $(\upsilon + d\upsilon)$ мають dN молекул. Тоді ймовірність того, що молекула має швидкість в цьому інтервалі, дорівнює

$$dP = \frac{dN}{N},$$

де N — повне число молекул у посудині.

Ця ймовірність прямо пропорційна інтервалу швидкості:

$$dP = f(\upsilon)d\upsilon, \tag{8.1}$$

де $f(\upsilon)$ — функція розподілу за швидкостями, яка має зміст густини ймовірності розподілу молекул за швидкостями.

Тоді

$$f(\upsilon)d\upsilon = \frac{dN}{N} \tag{8.2}$$

є відносною часткою молекул, які мають швидкість в інтервалі від υ до $(\upsilon + d\upsilon)$.

Із (8.2) знаходимо

$$dN = Nf(\upsilon)d\upsilon,$$

після інтегрування цього виразу одержимо повне число частинок:

$$\int dN = \int_0^\infty Nf(\upsilon)d\upsilon; \quad N = N\int_0^\infty f(\upsilon)d\upsilon;$$

Умова нормування

$$\int_0^\infty f(\upsilon)d\upsilon = 1. \tag{8.3}$$

Умова (8.3) — *умова нормування* функції розподілу Максвелла, означає, що ймовірність того, що молекула має швидкість в інтервалі від нуля до нескінченності, дорівнює одиниці.

Функція розподілу Максвелла

Вигляд функції розподілу Максвелла за абсолютним значенням швидкості можна одержати, використовуючи методи статистичної фізики. Таке доведення виходить за рамки курсу загальної фізики, тому наведемо цей закон без доведення:

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right), \tag{8.4}$$

де m — маса молекули; k — стала Больцмана.

Залежність функції розподілу Максвелла від абсолютного значення швидкості зображена на рис. 8.1 для різних температур $T_1 < T_2 < T_3$.

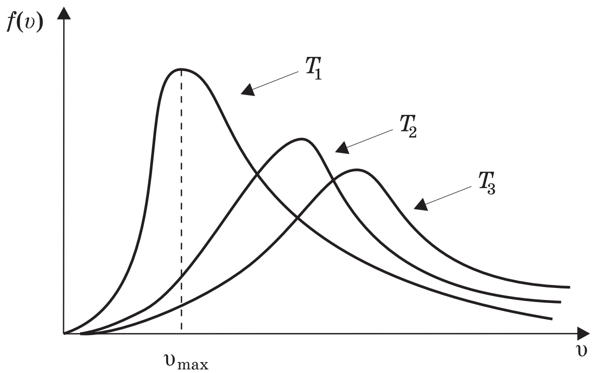


Рис. 8.1

Якщо змінюється температура газу, то зміщується максимум функції $f(\upsilon)$ у бік зростання швидкості, а площа під графіком $f(\upsilon)$ не змінюється (8.3).

Використовуючи (8.4), можна знайти середню $<\upsilon>$, середньоквадратичну $\upsilon_k = \sqrt{<\upsilon^2>}$ та найбільш імовірну $\upsilon_{\max}$ швидкості молекул. $\upsilon_{\max}$ відповідає максимуму функції розподілу $f(\upsilon)$ (8.4):

$$\left.\frac{df}{d\upsilon}\right|_{\upsilon=\upsilon_{\max}} = 0;$$

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2\upsilon \cdot \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right) - 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{m\upsilon}{kT}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right) = 0;$$

Найбільш імовірна швидкість

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \qquad (8.5)$$

Середню швидкість знаходимо з умови

Середня швидкість

$$<\upsilon> = \int_0^\infty f(\upsilon)\upsilon d\upsilon = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \qquad (8.6)$$

А *середнє значення квадрата швидкості* молекул визначаємо з (7.1):

$$<\upsilon^2> = \frac{3kT}{m}.$$

Середньоквадратична швидкість

Тоді *середньоквадратична швидкість* дорівнює

$$\upsilon_k = \sqrt{<\upsilon^2>} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (8.7)$$

Найбільш імовірна $\upsilon_{\max}$, середньоквадратична υ_k та середня $<\upsilon>$ швидкості прямо пропорційні $\sqrt{T}$ та обернено пропорційні $\sqrt{m}$. Тобто зі збільшенням температури інтенсивність руху молекул зростає та зменшується при зростанні маси частинок. Середньоквадратичну швидкість називають ще тепловою. Молекули повітря при кімнатних температурах мають теплову швидкість в інтервалі $\upsilon_k \approx (10^2 \div 10^3)$ м/с (залежно від маси молекул). Порівнюючи найбільш імовірну, середню та середньоквадратичну швидкості, одержимо:

$$\upsilon_{\max} < <\upsilon> < \upsilon_k; \quad \upsilon_{\max} : <\upsilon> : \upsilon_k = 1 : 1{,}13 : 1{,}22.$$

Тобто за величиною ці швидкості мало відрізняються.

Із (8.4) випливає, що із зменшенням швидкості молекул значно зменшується функція розподілу Максвелла, яка наближається до нуля $f(\upsilon) \to 0$, якщо $\upsilon \to 0$. Із збільшенням швидкості молекул $\upsilon \to \infty$ також $f(\upsilon) \to 0$. Тобто імовірність того, що молекули нерухомі або мають дуже великі швидкості, наближається до нуля. Переважна більшість молекул мають швидкості, близькі до υ_{max}. Наприклад, частка молекул із швидкістю втричі більшою за υ_{max} дорівнює 0,04 %. Молекул, які мають швидкість в інтервалі від $\frac{\upsilon_{max}}{2}$ до $\frac{3\upsilon_{max}}{2}$, близько 70 %.

Закон Максвелла відображає статистичні закономірності хаотичного теплового руху молекул. Незважаючи на випадковий, хаотичний рух молекул, сукупність великої кількості молекул підпорядкована закону (8.4), який має фундаментальне значення для молекулярної фізики.

Експериментальну перевірку закону Максвелла вперше здійснено в дослідах німецького вченого О. Штерна (1888—1969 рр.) у 1920 р. Більш точна перевірка здійснена в дослідах Елдріджа та Ламмерта в 1926—1929 рр. Експерименти довели з високою точністю справедливість закону Максвелла.

8.2. Барометрична формула. Розподіл Максвелла — Больцмана

Розподіл Максвелла не враховує зовнішніх сил, що діють на молекули. Але поблизу поверхні Землі на молекули діють сили тяжіння. Тому розподіл молекул газу в атмосфері визначається тепловим рухом та дією сил тяжіння. Внаслідок цього тиск повітря зменшується з висотою.

Розглянемо вертикальний стовп повітря, що перебуває в стані термодинамічної рівноваги при температурі T (рис. 8.2). Виділимо тонкий шар повітря висотою dh, густина повітря ρ — стала величина.

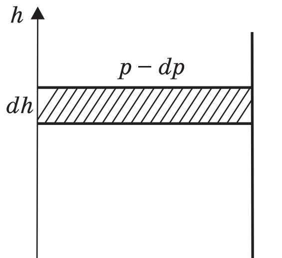


Рис. 8.2

При збільшенні висоти на dh тиск на верхню поверхню шару повітря зменшується на

$$dp = -\rho g dh.$$

Якщо m — маса молекули, а n — концентрація молекул, то $\rho = mn$. Концентрацію молекул знаходимо із рівняння стану ідеального газу (7.3):

$$n = p / kT.$$

Тоді

$$dp = -\frac{mg}{kT} p dh.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи одержаний вираз:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dh\ ; \quad \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} \int_{0}^{h} dh\ ;$$

Барометрична формула

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT} h\right). \tag{8.8}$$

(8.8) — *барометрична формула*, яку вперше одержав П. Лаплас у 1821 р. Це рівняння дозволяє знайти тиск газу p на висоті h; p_0 — тиск газу на висоті $h = 0$. Для невеликих висот (кілька кілометрів) барометрична формула дозволяє досить точно визначити тиск. При збільшенні висоти тиск експоненціально зменшується. Зменшення тиску з висотою відбувається тим швидше, чим нижча температура та більша маса молекул газу. Барометричну формулу використовують для визначення висоти, вимірюючи тиск газу на певній висоті та порівнюючи його з тиском на березі моря. Такі барометри-висотоміри називають *альтиметрами*.

Використовуючи (8.8), знайдемо закон розподілу молекул за висотою в полі тяжіння. Знайдемо концентрацію молекул n:

$$p = nkT\ ; \quad n = n_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT} h\right);$$

Закон Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Delta U}{kT}\right), \tag{8.9}$$

де n_0 — концентрація молекул на висоті $h = 0$; ΔU — зміна потенціальної енергії молекул в полі сили тяжіння.

Закон (8.9) — *закон Больцмана* рівноважного розподілу частинок у зовнішньому потенціальному полі. Відповідно до (8.9) число частинок в одиниці об'єму експоненціально зменшується при збільшенні потенціальної енергії. Тобто молекули в полі сили тяжіння розміщуються так, що концентрація їх менша там, де їх потенціальна енергія більша. Якщо $T \to 0$, то молекули розміщуються поблизу поверхні, де потенціальна енергія $U = 0$. Якщо температура зростає, то концентрація молекул повільно зменшується з висотою, розподіл молекул за висотою близький до рівномірного.

Співвідношення (8.9) можна узагальнити на випадок будь-якого потенціального силового поля. Тоді рівноважний просторовий розподіл молекул при температурі T у силовому полі $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$ має вигляд:

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}, \tag{8.10}$$

де $U(\vec{r})$ — потенціальна енергія молекули як функція радіуса-вектора $\vec{r}$.

Розподіл Больцмана

Якщо енергія частинки змінюється дискретно, то *розподіл Больцмана* має вигляд:

$$N_i = N_0 e^{-\frac{E_i}{kT}},$$

де N_i — число частинок, які мають енергію E_i.

Знайдемо число dn молекул, що знаходяться в одиниці об'єму в шарі на висоті між h і $(h + dh)$:

$$dn = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dh,$$

а використовуючи розподіл Максвелла (8.4), знайдемо число молекул, швидкості яких є в інтервалі від υ до $(\upsilon + d\upsilon)$ та ці молекули одночасно мають потенціальну енергію U:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\frac{m\upsilon^2}{2} + \Delta U}{kT}\right) \upsilon^2 d\upsilon. \tag{8.11}$$

Закон розподілу Максвелла — Больцмана

Закон (8.11) — *закон розподілу Максвелла — Больцмана* молекул за швидкостями та потенціальними енергіями.

8.3. Явища переносу

Середня довжина вільного пробігу

Молекули ідеального газу майже не взаємодіють одна з одною. Тобто для розріджених газів переважну частину часу молекули рухаються вільно, взаємодія молекул між собою відбувається тільки під час їх зіткнень між собою та зіткнень із стінками посудини. Тоді поведінка системи з великою кількістю молекул пов'язана із загальними рисами взаємодії частинок із зовнішніми тілами та між собою. Однією із характеристик, яка свідчить про наявність взаємодії частинок, є *середня довжина вільного пробігу молекул* $\langle l \rangle$ — середня відстань, яку проходить рухома молекула між двома послідовними зіткненнями.

Зіткнення молекул — це процес взаємодії молекул, внаслідок яких молекули змінюють напрям та величину швидкості. Розв'язуючи задачу про середнє число зіткнень молекул та про визначення середньої довжини вільного пробігу, необхідно враховувати скінченні розміри молекул. Сили кулонівської взаємодії молекул, до складу яких входять електричні заряди, визначають рух молекул. Залежно від відстані між двома молекулами, які стикаються, переважають сили притягання чи сили відштовхування між молекулами.

Ефективний діаметр

Найменша відстань, на яку наближаються центри двох молекул при зіткненні, називається *ефективним діаметром молекули d.* Ефективний діаметр молекул залежить від їх енергії. Якщо енергія молекул збільшується, то молекули наближаються ближче під час зіткнень. Тоді ефективний діаметр зменшується, ця величина залежить від температури. Із збільшенням температури ефективний діаметр молекули зменшується.

Ефективний поперечний переріз

Величину $\sigma = \pi d^2$ називають *ефективним поперечним перерізом* розсіяння молекул. Ця величина має ймовірнісний характер, визначає ймовірність зіткнень молекул.

У першому наближенні, вважаючи молекули газу ідеальними сферичними пружними кульками радіусом d та використовуючи розподіл Максвелла, можна довести формулу для довжини вільного пробігу:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \tag{8.12}$$

де n — концентрація молекул.

Середня кількість зіткнень

Середня кількість зіткнень <*z*>, які зазнає молекула за одиницю часу, дорівнює:

$$< z >= \frac{< \upsilon >}{< l >} = \sqrt{2}\sigma n < \upsilon >= \sqrt{2}\pi d^2 < \upsilon > n,$$

де <υ> — середня швидкість руху молекул.

Експериментальне підтвердження формули (8.12) здійснили М. Борн та Е. Борман у 1920 р., вимірявши довжину вільного пробігу молекул.

Явища переносу

У дослідженнях процесів, що відбуваються в нерівноважних ізольованих системах, у процесах дифузії, в’язкості, теплопровідності використовується поняття довжини вільного пробігу молекул. Якщо в газі спостерігаються просторові неоднорідності густини, температури, швидкості переміщення окремих шарів газу, то в ізольованій системі відбувається вирівнювання цих неоднорідностей, система приходить до рівноважного стану. При цьому виникають потоки енергії, маси, імпульсу. Ці явища зумовлені тепловим рухом молекул, є необоротними процесами, називаються *явищами переносу*. До явищ переносу відносять явища дифузії, теплопровідності та в’язкості.

Теплопровідність

Явище теплопровідності виникає у випадку, якщо є певна різниця температур у газі, зумовлена зовнішніми причинами. Оскільки температура пов’язана з середньою кінетичною енергією теплового руху молекул, то шари газу з більшою температурою мають більшу середню кінетичну енергію. Внаслідок хаотичного теплового руху молекул відбувається зміна середньої кінетичної енергії молекул різних шарів газу: збільшується середня кінетична енергія молекул шарів з меншою температурою та зменшується для шарів газу з більшою температурою. При цьому виникають потоки енергії та встановлюється стан термодинамічної рівноваги — зникає різниця температур у газі.

Закон Фур’є

Стаціонарна теплопровідність (для якої $\mathrm{grad}T = \mathrm{const}$) описується *законом Фур’є*:

$$\Delta Q = -\chi \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t, \tag{8.13}$$

де ΔQ — кількість теплоти, яка проходить через поперечний переріз площею ΔS за час Δt; χ — коефіцієнт теплопровідності; $\frac{dT}{dx}$ — градієнт температури в напрямі осі OX.

Коефіцієнт теплопровідності

Коефіцієнт теплопровідності — фізична величина, яка дорівнює густині теплового потоку внаслідок теплопровідності при градієнті температури, який дорівнює одиниці. Густина теплового потоку $\vec{J}_q$ — вектор, напрямок якого збігається з напрямком перенесення енергії, а модуль дорівнює кількості теплоти, яка переноситься внаслідок теплопровідності через площу поверхні dS, перпендикулярної напрямку перенесення енергії, за час dt:

$$J_q = \frac{dQ}{dtdS_{\perp}}.$$

Знак «мінус» у (8.13) означає, що напрями густини теплового потоку та градієнта температур протилежні.

Коефіцієнт теплопровідності дорівнює:

$$\chi = \frac{1}{3} C_V \rho < \upsilon >< l >, \tag{8.14}$$

де C_V — питома теплоємність ізохоричного процесу; ρ — густина газу; $<\upsilon>$ — середня швидкість молекул; $<l>$ — середня довжина вільного пробігу.

Дифузія газів

Дифузія — процес вирівнювання густини, зумовлений тепловим рухом мікрочастинок. Дифузія — один із необоротних процесів, у загальному випадку — нестаціонарний.

Закон Фіка

Якщо газ, у якому відбувається вирівнювання густини, однокомпонентний, то відбувається явище *стаціонарної самодифузії,* для якого основним законом є *закон Фіка:*

$$\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S_{\perp} \Delta t, \tag{8.15}$$

де Δm — маса, перенесена внаслідок дифузії через поверхню площею $\Delta S_{\perp}$, перпендикулярну до напряму перенесення речовини, за час Δt; $\frac{d\rho}{dx}$ — градієнт густини в напрямку осі OX; D — коефіцієнт дифузії.

Коефіцієнт дифузії

Коефіцієнт дифузії дорівнює:

$$D = \frac{1}{3} < \upsilon >< l >.$$

Для явища самодифузії D обернено пропорційний тиску та пропорційний $\sqrt{T}$.

Внутрішнє тертя (в'язкість)

Явище внутрішнього тертя або *динамічної в'язкості* — властивість газів, яка пов'язана з переносом імпульсу тепловим рухом мікрочастинок у газах з неоднорідним розподілом швидкостей. Сила внутрішнього тертя F визначається *законом Ньютона* для внутрішнього тертя:

Закон Ньютона

$$F = \eta \frac{d\upsilon}{dx} \Delta S,$$

де η — динамічна в'язкість або коефіцієнт внутрішнього тертя; $\frac{d\upsilon}{dx}$ — градієнт швидкості; ΔS — площа поверхні шару газу.

Коефіцієнт в'язкості

Коефіцієнт в'язкості дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho < \upsilon >< l >.$$

Внаслідок того, що $< \upsilon > \sim \sqrt{T}$, можна вважати, що $< \eta > \sim \sqrt{T}$. Але такий висновок можна зробити тільки для випадку σ = const. Якщо ефективний поперечний переріз зростає при зменшенні температури, то $\eta \sim T^n$, де n змінюється від 1/2 до 3/2.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Від яких величин залежить ймовірність dP того, що молекула ідеального газу має швидкість в інтервалі швидкості від υ до ($\upsilon + d\upsilon$)?
2. Який фізичний зміст має функція розподілу Максвелла за швидкостями?
3. Які властивості має функція розподілу Максвелла?
4. Запишіть та зобразіть графічно функцію розподілу Максвелла за модулями швидкості.
5. Як змінюється крива розподілу Максвелла зі зміною температури?
6. Який фізичний зміст площі, обмеженої графіком розподілу Максвелла і віссю абсцис?
7. Яка швидкість відповідає максимуму функції розподілу Максвелла? Чому дорівнює ця швидкість?
8. Чому дорівнює середня швидкість молекул ідеального газу?
9. Як знайти середню квадратичну швидкість молекул ідеального газу?
10. Запишіть та проаналізуйте барометричну формулу.
11. За яким законом змінюється концентрація молекул ідеального газу в полі сили тяжіння?

12. Запишіть та проаналізуйте функцію розподілу Максвелла — Больцмана.
13. Що таке довжина вільного пробігу молекул? Від яких величин вона залежить?
14. Сформулюйте закон Фіка для явища дифузії.
15. Яка величина називається коефіцієнтом теплопровідності?
16. Запишіть та проаналізуйте закон Фур'є для теплопровідності газів.
17. У чому полягає фізичний зміст механізмів дифузії, в'язкості і теплопровідності в газах?

Завдання для експрес-контролю

1. Як змінюється максимум функції розподілу Максвелла при збільшенні температури?

2. Якщо маса молекули газу збільшується, як змінюється максимум функції розподілу Максвелла?

3. Знайти відношення середніх арифметичних швидкостей молекул водню і вуглекислого газу при однакових температурах.

4. Знайти відношення середніх квадратичних швидкостей молекул гелію та азоту при однакових температурах.

5. Чому дорівнює площа під графіком функції розподілу Максвелла?

6. Ідеальний газ у стані рівноваги перебуває в однорідному полі тяжіння. Записати залежність тиску та концентрації цього газу від висоти. Зобразити ці залежності графічно.

7. Якщо тиск газу p_0 у полі сили тяжіння на висоті $h_1 = 0$ сталий, то при збільшенні температури концентрація молекул газу на нульовому рівні зменшується. Чому так відбувається?

8. Як знайти середнє значення фізичної величини, якщо відома функція розподілу?

9. Чому дифузію, внутрішнє тертя та теплопровідність називають явищами переносу? Які фізичні величини при цьому переносяться?

10. Як пояснити повільність явищ переносу, адже вони зумовлені швидкими рухами молекул?

11. Які межі застосування рівнянь переносу?

Приклади розв'язання задач

1. Деяка маса газу міститься в посудині, що рухається зі швидкістю u. Наскільки збільшиться середній квадрат швидкості теплового руху молекул, якщо посудина раптово зупиниться? Відповідь дайте для одноатомного та двохатомного газів. Теплоємністю, теплопровідністю та масою стінок можна знехтувати.

Розв'язання

Якщо посудина з газом рухається зі швидкістю u, то молекули газу беруть участь у хаотичному русі зі швидкістю $\vec{\upsilon}_i$ та поступальному русі зі швидкістю $\vec{u}$. Тоді швидкість молекул $\vec{\upsilon}_i'$ дорівнює векторній сумі

$$\vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_i + \vec{u},$$

а її кінетична енергія

$$\frac{m_0(\vec{\upsilon}_i')^2}{2} = \frac{m_0\upsilon_i^2}{2} + \frac{m_0u^2}{2} + m_0\vec{\upsilon}_i\vec{u},$$

де m_0 — маса молекули.

Середню кінетичну енергію молекул можна визначити, якщо знайдемо суму кінетичних енергій молекул і поділимо на їх число:

$$< W_1 > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_0(\upsilon_i')^2}{2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_0\upsilon^2{}_i}{2} + \frac{m_0u^2}{2} + \frac{m_0\vec{u}}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{\upsilon}_i.$$

Внаслідок того, що всі напрямки вектора швидкості $\vec{\upsilon}_i$ є рівноправними,

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{\upsilon}_i = 0.$$

Тоді

$$< W_1 > = < W_0' > + \frac{m_0u^2}{2},$$

де $< W_0' > = \frac{1}{N}\sum\frac{m_0\upsilon_i^2}{2} = \frac{i}{2}kT.$

Тут $< W_0' >$ — середня кінетична енергія теплового руху молекул.

Якщо посудина зупиняється, то молекули за інерцією деякий час зберігають попередній напрямок швидкості, але внаслідок зіткнень однієї з одною та зі стінками посудини газ прийде в стан рівноваги, для якого швидкості молекул стануть рівноймовірними в усіх напрямках. При цьому встановиться певний розподіл молекул за швидкостями, а середня кінетична енергія молекул стане рівною $< W_2 >$:

$$< W_2 > = \frac{i}{2}kT_2 = < W_0'' >.$$

Внаслідок зупинки посудини кінетична енергія напрямленого руху молекул повністю переходить в енергію теплового руху, таким чином, змінюється середня кінетична енергія молекул

$$\Delta < W > = < W_2 > - < W_1 >,$$

а також температура газу та середній квадрат швидкості молекул, який дорівнює

$$<\upsilon^2>= \frac{3kT}{m_0}.$$

Середня кінетична енергія теплового руху молекули

$$< W_0 >= \frac{i}{2}kT,$$

тому $< \upsilon^2 >= \dfrac{6 < W_0 >}{i\, m_0}$.

До зупинки посудини з газом середній квадрат швидкості дорівнює $< \upsilon_1^2 >= \dfrac{6 < W_0' >}{i\, m_0}$, а після зупинки — $< \upsilon_2^2 >= \dfrac{6 < W_0'' >}{i\, m_0}$.

Знаходимо зміну середнього квадрата швидкості

$$\Delta < \upsilon^2 > = < \upsilon_2^2 > - < \upsilon_1^2 > = \frac{6}{im_0}(< W_0'' > - < W_0' >) = \frac{6}{im_0}\frac{m_0 u^2}{2} = \frac{3u^2}{i}.$$

Для одноатомного газу

$$\Delta < \upsilon_1^2 > = \frac{3u^2}{3} = u^2;$$

для двохатомного газу $\Delta < \upsilon_2^2 >= \dfrac{3u^2}{5} = 0,6u^2$.

2. Температура окису азоту (NO) T = 300 К. Визначити частку молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від $\upsilon_1 = 820$ м/с до $\upsilon_2 =$ $= 830$ м/с. Газ перебуває під атмосферним тиском.

Розв'язання

За нормальних умов (атмосферному тиску та кімнатній температурі) окис азоту є ідеальним газом, молекули якого описуються законом розподілу Максвелла. Тоді число молекул, швидкості яких лежать в інтервалі швидкостей від υ до ($\upsilon + d\upsilon$), дорівнює

$$dN = NF(\upsilon)d\upsilon, \qquad (1)$$

де $F(\upsilon) = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \upsilon^2 \exp(-m\upsilon^2 / 2kT))$ — функція розподілу Максвелла за модулем швидкості.

Вираз (1) справедливий, якщо інтервал швидкостей такий малий, що функцію Максвелла в цьому інтервалі можна вважати сталою. За умовою задачі треба знайти частку молекул, швидкості яких змінюються від υ_1 до υ_2. Для цього слід інтегрувати вираз (1) у зазначеному інтервалі швидкостей:

$$\frac{\Delta N}{N}=\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}F(\upsilon)d\upsilon=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\upsilon^2\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon. \qquad (2)$$

Але розрахунок за формулою (2) складний, тому що інтеграл в явному вигляді не можна знайти і потрібно використовувати методи числового інтегрування. Якщо ж інтервал зміни швидкості $\Delta\upsilon = \upsilon_2-\upsilon_1$ малий, то функція розподілу Максвелла залишається майже сталою $F(\upsilon_1,T)\approx F(\upsilon_2,T)$. Тоді $\Delta N/N$ можна знайти за наближеною формулою

$$\frac{\Delta N}{N}=F(\upsilon_1,T)\Delta\upsilon. \qquad (3)$$

Визначаємо похибку, якої ми допускаємо, замінивши точне співвідношення (2) наближеним (3). Знайдемо значення функції Максвелла на кінцях інтервалу:

$$F(\upsilon_1,T)=4{,}03\cdot10^{-4}\ \text{м/с},\ F(\upsilon_2,T)=3{,}75\cdot10^{-4}\ \text{м/с}.$$

Тоді відносна похибка при заміні функції її значенням на одному з кінців інтервалу дорівнює:

$$\varepsilon=[1-F(\upsilon_1,T)/F(\upsilon_2,T)]\cdot100\%\approx7\%.$$

Таким чином, з похибкою $\varepsilon=7\%$ знаходимо із формули (3) частку молекул, швидкості яких лежать в інтервалі $\Delta\upsilon=\upsilon_2-\upsilon_1=10$ м/с:

$$\Delta N/N=4{,}03\cdot10^{-4}\ \text{м/с}\cdot10\ \text{м/с}=4\cdot10^{-3}.$$

3. У посудині об'ємом V = 30 л знаходиться кисень масою m = 100 г під тиском p = $3\cdot10^5$ Па. Знайти найбільш імовірне значення кінетичної енергії молекул кисню.

Розв'язання

Найбільш імовірне значення кінетичної енергії молекул відповідає максимуму функції розподілу молекул за кінетичними енергіями. Виходячи з функції розподілу Максвелла за модулями швидкості, одержимо функцію розподілу молекул за кінетичними енергіями:

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}; \quad \upsilon = \sqrt{2W_k / m};$$

$$dN / N = F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi(m / 2\pi kT)^{3/2}\upsilon^2 \exp(-m\upsilon^2 / 2kT)d\upsilon;$$

$$dW_k = m\upsilon d\upsilon; \quad d\upsilon = dW_k / \sqrt{2mW_k};$$

$$\frac{dN}{N} = F(W_k)dW_k = 4\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2W_k}{m}\right)\exp\left(-\frac{W_k}{kT}\right)\frac{dW_k}{\sqrt{2mW_k}};$$

$$F(W_k) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}W_k^{1/2}\exp(-W_k / kT). \qquad (4)$$

Найбільш імовірна кінетична енергія відповідає максимуму функції (4). Визначивши похідну функції, прирівняємо її до нуля:

$$F'(W_k) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}\left[(-1/kT)W_k^{1/2} + W_k^{-1/2}/2\right]\exp(-W_k / kT);$$

$$2\pi(\pi kT)^{-3/2}\exp(-W_k / kT)\left[\frac{1}{2W_k^{1/2}} - \frac{W_k^{1/2}}{kT}\right] = 0.$$

Звідси знаходимо $W_k^{\text{ім}} = kT/2$.

Температуру знаходимо зі рівняння Менделєєва—Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT; \quad T = \frac{pVM}{mR}.$$

Тоді найбільш ймовірна кінетична енергія

$$W_k^{\text{ім}} = \frac{pVMk}{2mR} = 2{,}4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Відзначимо, що найбільш імовірна кінетична енергія в п’ять разів менша від середньої кінетичної енергії поступального руху двохатомних молекул кисню $\langle W \rangle = 5kT/2$.

4. Знайти середню потенціальну енергію молекул повітря в полі тяжіння Землі. На якій висоті від поверхні Землі потенціальна енергія молекули дорівнює їх середній потенціальній енергії? Температуру повітря вважати постійною і рівною 0 °С.

Розв’язання

Повітря в полі тяжіння Землі (якщо повітря знаходиться при постійній температурі) можна описати розподілом Больцмана

$$f(U) = A\exp(-U/kT), \tag{5}$$

де $U = mgh$ — потенціальна енергія молекули; A — постійна величина.

Якщо відома функція розподілу Больцмана (5), то можемо знайти середнє значення потенціальної енергії $<U>$:

$$<U>= \frac{\int\limits_0^\infty f(U)UdU}{\int\limits_0^\infty f(U)dU} = \frac{A\int\limits_0^\infty U\exp(-U/kT)dU}{A\int\limits_0^\infty \exp(-U/kT)dU}. \tag{6}$$

Зробимо заміну змінної при інтегруванні $x = -U/kT$, тоді $dU = -kTdx$.

$$\int\limits_0^\infty \exp(-U/kT)dU = -kT\int\limits_0^\infty e^x dx = kT;$$

$$\int\limits_0^\infty U\exp(-U/kT)dU = k^2T^2\int\limits_0^\infty xe^x dx = k^2T^2.$$

Використовуючи (6), одержимо:

$$<U>= kT = 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273 = 3{,}8\cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Визначимо висоту, на якій середня потенціальна енергія дорівнює потенціальній енергії молекули

$$<U>= kT,\ \ U = mgh;$$

$$kT = mgh;$$

$$h = \frac{kT}{mg} = \frac{RT}{Mg} = 8\cdot 10^3 \text{ м}.$$

5. Розрахуйте середню довжину вільного пробігу і кількість зіткнень за 1 с всіх молекул вуглекислого газу (CO_2) у посудині об'ємом $V = 3$ л при температурі $t = 7$ °C і тиску $p = 1{,}3\cdot 10^5$ Па. Ефективний діаметр молекули $d = 4\cdot 10^{-10}$ м.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекули

$$<l>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

де n — концентрація молекул, яку можна розрахувати як

$$n=\frac{p}{kT}.$$

Тут k — стала Больцмана.

Тоді

$$<l>=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

$$<l>=4{,}18\cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Кількість зіткнень між усіма молекулами за 1 с

$$Z=\frac{1}{2}zN,$$

де z — середня кількість зіткнень однієї молекули з іншими за 1 с.

$$z=\frac{<u>}{<l>},$$

де $<u>=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ — середня арифметична швидкість молекул; N — сумарна кількість молекул CO_2 в об'ємі V

$$N=n\cdot V.$$

Тоді $Z=\frac{1}{2}\cdot\frac{<u>}{<l>}nV=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\cdot\frac{\sqrt{2}\pi d^2 p}{kT}\cdot\frac{p}{kT}\cdot V=\frac{2\pi d^2 p^2 V}{k^2T^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}},$

$$Z=4{,}4\cdot 10^{32}\ \text{с}^{-1}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

8.1. Посудину заповнено аргоном, температура якого дорівнює 0 °С. Посудина спочатку рухається із швидкістю υ = 100 м/с, а потім раптово зупиняється. Нехтуючи теплообміном між газом і стінками посудини, визначити температуру газу після зупинки.

Відповідь: t_2 = 16 °С.

8.2. Знайти середньоквадратичну швидкість, середню кінетичну енергію поступального руху і середню повну кінетичну енергію молекул гелію й азоту при температурі T = 300 К. Визначити повну кінетичну енергію всіх молекул, що знаходяться в 100 г кожного з газів.

Відповідь: $\upsilon'_{кв} = 1{,}37 \cdot 10^3$ м/с, $\upsilon''_{кв} = 5{,}17 \cdot 10^2$ м/с, $< W'_n > = < W''_n > = 6{,}2 \cdot 10^{-21}$ Дж, $< W' > = 6{,}2 \cdot 10^{-21}$ Дж, $< W''> = 10{,}4 \cdot 10^{-21}$ Дж, $W'_к = 9{,}35 \times 10^4$ Дж, $W''_к = 2{,}23 \cdot 10^4$ Дж.

8.3. Деякий газ перебуває в стані рівноваги. Яка частка молекул газу має швидкості, що відрізняються від найбільш імовірної не більш ніж на 1 %?

Відповідь: $\Delta N / N = 1{,}7$ %.

8.4. Молекули ідеального газу, у якого $\gamma = 1{,}4$ і тиск p = 100 кПа, мають середню енергію $<W> = 2{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж. Знайти число молекул в одиниці об'єму.

Відповідь: $n = 1 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

8.5. Одержати формулу для найбільш імовірного імпульсу молекули ідеального газу.

Відповідь: $p_{ім} = \sqrt{2mkT}$.

8.6. Визначити найбільшу імовірну, середню та середньоквадратичну швидкість молекул газу, у якого при нормальному атмосферному тиску густина дорівнює ρ = 1 г/л.

Відповідь: $\upsilon_{ім} = 0{,}45$ км/с; $< \upsilon > = 0{,}51$ км/с; $\upsilon_{кв} = 0{,}55$ км/с.

8.7. Знайти температуру азоту (в газоподібному стані), при якій швидкості молекул υ_1 = 300 м/с і υ_2 = 600 м/с відповідають однакові функції розподілу Максвелла $F(\upsilon)$.

Відповідь: T = 330 К.

8.8. Знаючи функцію розподілу Максвелла за швидкостями $F(\upsilon)$, знайти формулу для найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$.

Відповідь: $\upsilon_{ім} = \sqrt{2kT/m}.$

8.9. Знаючи функцію розподілу Максвелла $F(\upsilon)$, одержати формулу для середньоквадратичної швидкості.

Відповідь: $< \upsilon_{кв} > = \sqrt{3kT/m}.$

8.10. Визначити, яка з двох середніх величин $<1/\upsilon>$ чи $1/<\upsilon>$ більша, та знайти їх відношення.

Відповідь: $\dfrac{<1/\upsilon>}{1/<\upsilon>} = \dfrac{4}{\pi} = 1{,}27.$

8.11. Наскільки зменшиться атмосферний тиск $p = 100$ кПа, якщо спостерігач піднімається над поверхнею Землі на висоту $h = 100$ м? Температуру повітря вважати постійною $T = 290$ К.

Відповідь: $\Delta p = 1{,}18$ кПа.

8.12. На якій висоті h над поверхнею Землі атмосферний тиск вдвічі менший, ніж на поверхні? Вважати, що температура повітря дорівнює $T = 290$ К і не змінюється з висотою?

Відповідь: $h = 5{,}88$ км.

8.13. Знайти імпульс p_i молекули водню при температурі $T = 293$ К. Швидкість молекули дорівнює середньоквадратичній.

Відповідь: $p_i = 6{,}3 \cdot 10^{-24}$ кг·м·с$^{-1}$.

8.14. Обчислити середньоквадратичну швидкість молекул двохатомного газу, якщо відомо, що середня кінетична енергія теплового руху молекул цього газу масою $m = 32$ г дорівнює $<W_k> = 2{,}8$ кДж.

Відповідь: $<\upsilon_{кв}> = 320$ м/с.

8.15. Знайти відношення середніх арифметичних швидкостей молекул водню і вуглекислого газу при однакових температурах.

Відповідь: $<\upsilon_1>/<\upsilon_2> = \sqrt{M_2/M_1} = 4{,}6.$

8.16. При тиску $p = 100$ кПа в 1 м^3 знаходиться $n = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ молекул повітря. Обчислити їх найбільш імовірну швидкість.

Відповідь: $\upsilon = 400$ м/с.

8.17. Густина газу в посудині при тиску $p = 90$ кПа дорівнює $\rho =$ $= 0{,}6$ кг/м^3. Яка середньоквадратична швидкість молекул газу?

Відповідь: $<\upsilon_{кв}> = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}} = 640$ м/с.

8.18. При температурі $t = 527$ °C найбільш імовірна швидкість молекул деякого газу $\upsilon_{ім} = 1820$ м/с. Встановити, який це газ.

Відповідь: гелій.

8.19. При якій температурі молекули водню в атмосфері Землі можуть набути першої космічної швидкості?

Відповідь: $T = 5010$ K.

8.20. На якій висоті над поверхнею Землі парціальний тиск вуглекислого газу зменшується вдвічі? Температуру атмосфери вважати постійною і такою, що дорівнює 17 °С.

Відповідь: $h = 3{,}84$ км.

8.21. На якій висоті над рівнем моря атмосферний тиск дорівнює $p = 8{,}0$ кПа, якщо температура з висотою не змінюється і дорівнює 17 °С, а тиск на рівні моря нормальний? Визначити кількість молекул в одиниці об'єму на цій висоті.

Відповідь: $h = 21$ км; $n = 2\cdot10^{24}$ м$^{-3}$.

8.22. Знайти густину водню в посудині, якщо відомо, що середня довжина пробігу його молекул дорівнює 1,2 мм.

Відповідь: $\rho = 1{,}2\cdot10^{-5}$ кг/м^3.

8.23. Внаслідок процесу ізотермічного розширення тиск газу зменшився в 1,5 рази. У скільки разів при цьому зміниться коефіцієнт дифузії азоту?

Відповідь: збільшиться в 1,5 рази.

8.24. Розрахуйте коефіцієнт теплопровідності водню, що знаходиться у посудині при температурі 300 K.

Відповідь: $\chi = 63{,}3$ мВт/(м · K).

8.25. Яка маса кисню проходить внаслідок дифузії крізь площину $S = 1$ м^2 за $t = 1$ с? Густина газу біля площини $\rho = 20$ кг/м^3, градієнт густини газу $\dfrac{d\rho}{dx} = 11{,}4$ кг/м^4, температура $T = 320$ K.

Відповідь: $\Delta m = 8{,}56 \cdot 10^{-6}$ кг.

9. ЗАКОНИ ТЕРМОДИНАМІКИ

9.1. Внутрішня енергія, робота, кількість теплоти

У термодинаміці тепловий рух молекул та перетворення енергії, пов'язані з ним, відіграють визначальну роль. Механічна енергія термодинамічної системи в цілому — зовнішня енергія — термодинамікою не розглядається.

Внутрішня енергія

Внутрішня енергія системи — це енергія руху та взаємодії частинок, що складають систему: кінетична енергія теплового руху частинок, потенціальна енергія їх взаємодії, кінетична та потенціальна енергія коливального та обертального руху атомів у молекулах, внутрішньоатомна та внутрішньоядерна енергія. Внутрішня енергія є однозначною функцією стану системи. Зміна внутрішньої енергії ΔU при переході системи із початкового стану з енергією U_1 до кінцевого стану з енергією U_2 дорівнює $\Delta U = U_2 - U_1$ та не залежить від процесів, що призвели до переходу. Якщо система повертається до попереднього стану, внутрішня енергія її залишається незмінною. Тобто диференціал внутрішньої енергії dU є повним диференціалом:

$$\oint dU = 0. \tag{9.1}$$

Внутрішня енергія рівноважної системи залежить від зовнішніх параметрів та температури, є адитивною величиною. Для ідеального газу внутрішня енергія залежить тільки від температури, для реальних газів — від температури та об'єму.

Робота

Під час взаємодії системи з зовнішніми тілами здійснюється обмін енергією. Стан термодинамічної системи змінюється двома способами: із зміною зовнішніх параметрів та тоді, коли зовнішні параметри незмінні. У першому випадку відбувається макроскопічне переміщення зовнішніх тіл, виконується *макроскопічна робота*. Нехай у циліндрі під поршнем площею S перебуває стиснутий газ (рис. 9.1), тиск якого дорівнює p. Тоді сила тиску $F = pS$, якщо поршень при квазістатичному розширенні газу перемістився на dx, то газ виконає роботу

$$\delta A = Fdx = pSdx = pdV.$$

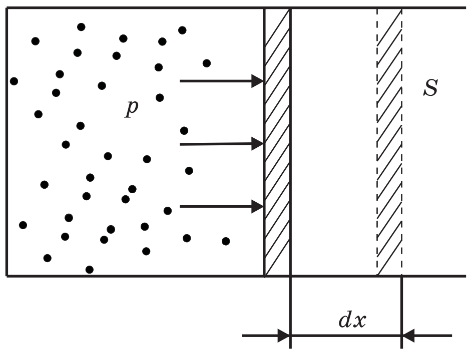


Рис. 9.1

Робота, виконана системою при скінченному розширенні від об'єму V_1 до V_2, дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \tag{9.2}$$

Зобразивши процес переходу на діаграмі p-V (рис. 9.2), легко зрозуміти, що робота (9.2) залежить від способу переходу із точки 1 до точки 2 (робота дорівнює площі під графіком залежності $p(V)$). Таким чином, робота не є функцією стану. Тому диференціал роботи δA не є повним диференціалом на відміну від диференціалу внутрішньої енергії dU.

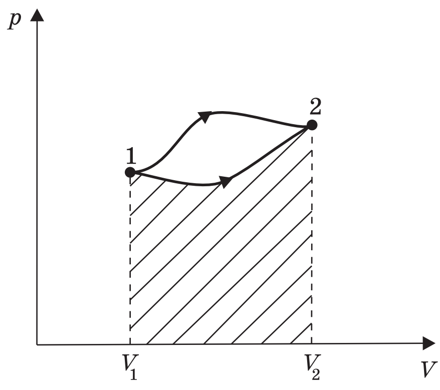


Рис. 9.2

Кількість теплоти

Другим способом передачі енергії є *процес теплообміну*, який відбувається за незмінних зовнішніх параметрів. Теплообмін зумовлено різницею внутрішніх параметрів системи. *Кількість теплоти* δQ — енергія, що передається системі в процесі теплообміну. В цьому випадку відбувається передача енергії шляхом безпосередньої взаємодії молекул контактуючих тіл.

Якщо робота пов'язана зі змінами макроскопічного стану системи, то теплопередача — це мікропроцеси, що призводять до передачі енергії. Здійснюючи над системою роботу — змушуємо її частинки рухатись упорядковано; передача певної кількості теплоти пов'язана із невпорядкованим тепловим рухом молекул.

І робота, і кількість теплоти не дорівнюють нулю тільки в процесі передачі енергії, а числове значення їх суттєво залежить від виду цього процесу. Тобто робота та кількість теплоти не є формою енергії, вони характеризують способи передачі енергії, залежать від того, яким способом здійснено процес переходу від початкового до кінцевого стану.

9.2. Перший закон термодинаміки

За формулою (9.2) можна знайти роботу для довільного процесу, що відбувається з термодинамічною системою. Зміна внутрішньої енергії та передана теплота універсальних формул визначення не мають. Але існує взаємозв'язок між теплотою, зміною внутрішньої енергії та роботою, яку виконала система.

Перший закон (перше начало) термодинаміки є узагальненням закону збереження та перетворення енергії для термодинамічних систем. Цей закон встановлено експериментальними й теоретичними дослідженнями англійських фізиків Дж. П. Джоуля (1818–1889 рр.), У. Томсона (лорда Кельвіна)(1824–1907 рр.), німецьких дослідників, лікарів за освітою, Г. Гельмгольца (1821–1894 рр.) та Ю. Р. Майєра (1814–1878 рр.).

Перший закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки стверджує, що кількість теплоти δQ, яку одержала система, дорівнює сумі зміни внутрішньої енергії системи dU та роботи δA, яку виконала система над зовнішніми тілами:

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{9.3}$$

Рівняння (9.3) — перший закон термодинаміки в диференціальному вигляді. Якщо термодинамічна система квазістатично здійснила перехід між двома фіксованими станами, то, інтегруючи (9.3), одержимо

$$Q = (U_2 - U_1) + A, \tag{9.4}$$

що є першим законом термодинаміки в інтегральному вигляді. Якщо початковий і кінцевий стани системи збігаються, то, враховуючи (9.1), одержимо

$$Q = A.$$

Тоді робота в коловому процесі (циклі) дорівнює кількості теплоти, одержаної системою. Внаслідок цього перший закон термодинаміки формулюють як положення про неможливість вічного двигуна першого роду: неможливий такий періодичний пристрій, який виконував би роботу без одержання енергії ззовні. Тобто роботу не можна створити із нічого (без витрат енергії) та не можна перетворити в ніщо (без виділення енергії). Неможливий такий процес, єдиним результатом якого є виконання роботи без змін в оточуючих тілах. Адже, якщо $V_1 = V_2$ (процес круговий) та $Q = 0$, то і $A = 0$. Будь-які спроби побудувати вічний двигун першого роду закінчувались невдало. Як доведено дослідним шляхом, закон збереження енергії та перший закон термодинаміки, який є відображенням закону збереження енергії в термодинаміці, справедливі.

9.3. Теплоємність. Ізопроцеси в ідеальному газі

Теплоємність тіла

Якщо тілу надати кількість теплоти δQ і температура при цьому змінилась на dT, то *теплоємністю тіла* називають величину

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Питома теплоємність

Питомою теплоємністю називають величину, що дорівнює кількості теплоти, необхідної для збільшення на 1 К температури 1 кг речовини:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Молярна теплоємність

Молярна теплоємність C_M дорівнює

$$C_M = \frac{C \cdot M}{m} = \frac{M}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dT}, \tag{9.5}$$

це кількість теплоти, витрачена для нагрівання одного моля речовини на 1 K.

Залежно від умов нагрівання теплоємність тіла різна. Розглянемо основні процеси в ідеальному газі, що відбуваються за умов сталості одного з параметрів стану.

Ізохоричний процес

Для ізохоричних процесів $V = \text{const}$. Тоді із (9.2) та (9.3) маємо:

$$\delta Q = dU.$$

Знаходимо δQ із (9.5), враховуючи, що $V = \text{const}$.

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_V dT.$$

Тоді для ізохоричного процесу:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT, \tag{9.6}$$

де C_V — молярна теплоємність ізохоричного процесу.

Із (9.6) зрозуміло, що внутрішня енергія U залежить тільки від температури для ідеального газу. В ізохоричному процесі робота газу дорівнює нулю, кількість теплоти та зміну внутрішньої енергії визначаємо із (9.6).

Ізотермічний процес

Для *ізотермічних процесів* $T = \text{const}$, тоді із (9.6) $dU = 0$, а з (9.2) та (9.3) знайдемо:

$$\delta A = pdV; \quad \delta Q = \delta A.$$

Із рівняння Менделєєва — Клапейрона (7.2) маємо:

$$\delta A = pdV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}.$$

Після інтегрування визначимо роботу в ізотермічному процесі:

$$A = Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \tag{9.7}$$

де V_1 та V_2 — початковий та кінцевий об’єми газу.

В ізотермічному процесі внутрішня енергія тіла не змінюється, робота та кількість теплоти однакові за величиною, їх визначають за формулою (9.7).

Ізобаричний процес

Якщо *процес ізобаричний, то* p = const. Тоді із (7.2) та (9.2) маємо

$$\delta A = pdV = \frac{m}{M} RdT; \quad A = \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Із означення молярної теплоємності знаходимо

$$\delta Q = C_p \frac{m}{M} dT,$$

де C_p — молярна теплоємність в ізобаричному процесі.

Тоді із (9.3) та (9.6) знайдемо

$$\delta Q = dU + \delta A;$$

$$\frac{m}{M} C_p dT = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} RdT.$$

Рівняння Майєра

Тоді молярні теплоємності ізобаричного та ізохоричного процесів взаємозв'язані рівнянням

$$C_p = C_V + R, \tag{9.8}$$

яке називається *рівнянням Майєра*. Молярна теплоємність ізобаричного процесу більша за молярну теплоємність ізохоричного процесу на величину універсальної газової сталої.

Адіабатичний процес

Адіабатичні процеси відбуваються без теплообміну з навколишніми тілами, тобто $\delta Q = 0$. Тоді з першого закону термодинаміки (9.3):

$$-dU = \delta A,$$

тобто робота газу дорівнює зменшенню внутрішньої енергії.

Реальні процеси в газах вважають адіабатичними, якщо система знаходиться в оболонці, що погано проводить тепло та у випадку швидкоплинних процесів, упродовж яких істотний теплообмін системи з оточуючими тілами не встигає відбутися.

Продиференціювавши рівняння (7.2), знаходимо:

$$\frac{m}{M}RdT = pdV + Vdp. \tag{9.9}$$

Із (9.3) та (9.6) одержимо перший закон термодинаміки для адіабатичного процесу:

$$\frac{m}{M}C_V dT + pdV = 0,$$

а з (9.9) знаходимо dT та підставляємо в це рівняння:

$$\frac{C_V}{R}(pdV + Vdp) + pdV = 0. \tag{9.10}$$

Позначимо $\gamma = C_p/C_V$ — показник адіабати.

Із рівняння Майєра (9.8):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}; \ \frac{R}{C_V} = \gamma - 1.$$

Тоді (9.10) запишемо у вигляді

$$pdV + Vdp + (\gamma - 1)pdV = 0;$$

$$\gamma pdV + Vdp = 0;$$

$$\gamma\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \tag{9.11}$$

Після інтегрування (9.11) визначаємо

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \tag{9.12}$$

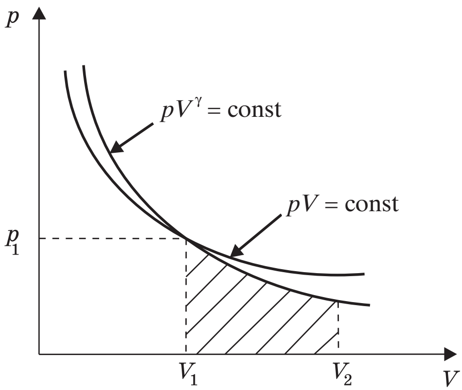


Рис. 9.3

Рівняння Пуассона

Рівняння (9.12) — рівняння адіабати в координатах p,V — *рівняння Пуассона*. Показник адіабати $\gamma > 1$, тому адіабата на діаграмі p,V у точці перетину адіабати та ізотерми спадає крутіше за ізотерму (рис. 9.3). Дійсно, адіабатичне розширення, на відміну від ізотермічного, відбувається без надання системі теплоти. Тому зменшення тиску зумовлене не тільки збільшенням об'єму, а й зменшенням температури.

Рівнянням адіабати в координатах T,V та p,T є рівняння

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}; \tag{9.13}$$

$$p^{\gamma-1}/T^{\gamma} = \text{const}. \tag{9.14}$$

Наслідком рівняння (9.13) є нагрівання газу у випадку адіабатичного стиску. Це явище використовується в двигуні Дізеля для спалахування займистої суміші. Якщо об'єм збільшується, то температура в адіабатичному процесі зменшується — це один із способів одержання низьких температур.

Знайдемо роботу газу за адіабатичних умов (площа заштрихованої фігури на рис. 9.3):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^{\gamma} \frac{dV}{V^{\gamma}} = p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} =$$

$$= \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \tag{9.15}$$

Формула (9.15) визначає роботу газу в адіабатичному процесі, якщо відомі початковий тиск та об'єм газу. Із рівняння першого закону термодинаміки для адіабатичного процесу

$$\delta A = -dU; \quad \delta A = -\frac{m}{M} C_V dT.$$

Проінтегрувавши цей вираз, маємо:

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \tag{9.16}$$

Із рівняння Майєра (9.8) запишемо:

$$C_p - C_V = R; \quad C_p = \gamma C_V; \quad C_V (\gamma - 1) = R; \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Тоді роботу в адіабатичному процесі визначаємо за відомою зміною температури та показником адіабати:

$$A = \frac{mR}{M(\gamma-1)}(T_1 - T_2) = \frac{mRT_1}{M(\gamma-1)}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \qquad (9.17)$$

Формули (9.15) — (9.17) використовують для визначення роботи в адіабатичному процесі залежно від того, які параметри системи відомі.

Політропний процес

Узагальнюючи розглянуті ізопроцеси, введемо поняття про *політропний процес* — процес, для якого теплоємність тіла залишається сталою:

$$C = \text{const}.$$

Рівняннями політропи для параметрів *p, V; T, V; T, p* є рівняння:

$$pV^n = \text{const}; \quad TV^{n-1} = \text{const}; \quad T^n p^{1-n} = \text{const},$$

де n — показник політропи.

Показник політропи n пов'язаний з молярною теплоємністю ізобаричного C_p, ізохоричного C_V процесів та молярною теплоємністю C політропного процесу:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Якщо $C = C_p$, то $n = 0$, такий процес *ізобаричний*,

$$\frac{T}{V} = \text{const}.$$

Для $n = 1$, $C \to \infty$; $pV = \text{const}$ — процес *ізотермічний*. Для ізотермічного процесу теплоємність наближається до нескінченності, адже зміна температури $dT = 0$, а $\delta Q \neq 0$.

В *ізохоричному* процесі $C = C_V$, $n \to \infty$.

Для *адіабатичного* процесу $n = \gamma$; $\gamma = C_p / C_V$; тоді $C = 0$; $pV^\gamma = \text{const}$.

Молекули ідеального газу не взаємодіють між собою, тому внутрішня енергія ідеального газу дорівнює добутку середньої кінетичної енергії молекули (7.5) на число Авогадро N_A та число молів:

$$U = \frac{m}{M} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{M}\frac{i}{2} RT.$$

Тоді молярна теплоємність ідеального газу в ізохоричному процесі дорівнює

$$C_V = \frac{i}{2}R. \tag{9.18}$$

А молярна теплоємність ізобаричного процесу

$$C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2}R. \tag{9.19}$$

Відповідно до класичної теорії теплоємності C_p та C_V (9.18–9.19) не залежать від температури та визначаються тільки числом ступенів вільності i. Але такі висновки класичної фізики не підтверджуються експериментально. Тільки для окремих температурних інтервалів та досить великих температур експериментальні залежності теплоємності від температури збігаються з висновками класичної статистичної фізики. Причина такої розбіжності в тому, що рух молекул описується квантовою теорією, згідно з якою енергія коливального та обертального рухів молекул є величиною дискретною.

9.4. Взаємоперетворення роботи і теплоти. Напрямок теплових процесів

Робота і теплота є еквівалентними як два можливих способи передачі енергії, але в природі існує асиметрія стосовно їх взаємних перетворень. Роботу можна повністю перетворити в один із видів енергії, теплота безпосередньо (без попереднього перетворення в роботу) перетворюється тільки у внутрішню енергію. Окрім цього, роботу можна повністю перетворити в теплоту (наприклад, при гальмуванні автомобіля), без зміни стану інших тіл, такий процес відбувається сам собою. Якщо термодинамічна система ізольована, то перехід роботи в теплоту відбувається самовільно, без будь-яких додаткових процесів (без компенсації). Здійснення оберненого процесу перетворення теплоти в роботу неможливе без зміни стану інших тіл, такий процес не є єдиним процесом в ізольованій системі, супроводжується компенсацією. Нерівноправність взаємоперетворень роботи та теплоти призводить до того, що природні процеси відбуваються в певному напрямі. Наприклад, гарячі тіла з плином часу охолоджуються, а холодні самі собою не нагріваються; теплота переходить від тіла з вищою температурою до тіла з нижчою температурою при тепловому контакті двох тіл, а не навпаки; м’яч, що падає на горизонтальну поверхню з деякої висоти, через деякий час зупиняється і сам собою не починає підстрибувати.

Відповідно до першого закону термодинаміки повна кількість енергії термодинамічної системи повинна залишатись незмінною в довільних процесах, розподіл енергії змінюється необоротно. Асиметрія природних процесів відображається другим законом термодинаміки, який вказує на напрям зміни розподілу енергії.

9.5. Оборотні та необоротні процеси. Цикл Карно

Оборотний процес

Нехай за допомогою деякого процесу термодинамічна система переходить із стану A до стану B. Якщо можливо повернути систему до початкового стану так, щоб у всіх інших тілах не відбулось ніяких змін, то цей процес називається *оборотним*. Квазістатичні процеси — оборотні; прямий та обернений процеси відбуваються через ті самі проміжні стани, не змінюється стан тіл, які не входять до складу системи. Тобто оборотні процеси відбуваються без компенсації.

Необоротний процес

Необоротні процеси — процеси, які не можна здійснити в оберненому напрямі без змін у зовнішніх тілах. Тобто необоротні процеси відбуваються з компенсацією. Реальні процеси в природі відбуваються із скінченною швидкістю, супроводжуються тертям, тобто є необоротними. Але вивчення ідеальних оборотних процесів дає можливість виявлення шляхів максимального наближення реальних необоротних процесів до оборотних.

Прикладами оборотних процесів є всі механічні процеси за відсутності тертя; незатухаючі електромагнітні коливання; розповсюдження електромагнітних хвиль у середовищах без поглинання; термодинамічні квазістатичні процеси.

Необоротними є процеси теплопередачі за скінченної різниці температур; розширення газу в пустоту; дифузії; всі механічні процеси, що супроводжуються тертям, та інші процеси.

Коловий процес

Особливу увагу привертають термодинамічні процеси, в яких відбувається перетворення теплоти в роботу та система повертається до попереднього стану. Такі процеси є в основі роботи теплових двигунів, це *колові процеси,* або *цикли.*

Ідеалізовані джерела теплоти, які передають тепло системі та мають нескінченно велику теплоємність та сталу температуру, називають *нагрівниками.* Джерела, які відбирають теплоту від системи, охолоджуючи її, називають *холодильниками*. І нагрівник, і холодильник є *термостатами*, температура їх не змінюється. Система, яка здійснює роботу внаслідок одержання теплоти та обмінюється енергією з іншими тілами, здійснюючи коловий процес — *робоче тіло.*

Тепловий двигун

Тепловий двигун складається з робочого тіла (найчастіше газ), нагрівника та холодильника. Початковий стан робочого тіла (газу в циліндрі теплового двигуна) — точка 1 на діаграмі pV (рис. 9.4). Приведемо робоче тіло в контакт з нагрівником, тобто тілом, температура якого вища температури газу. Газ нагріватиметься та розширюватиметься, здійснюючи роботу A_1 — процес 1*a*2 на рис. 9.4.

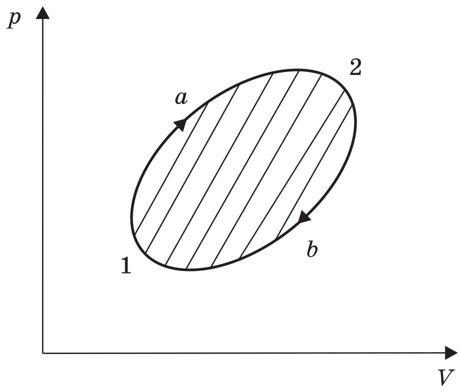


Рис. 9.4

За першим законом термодинаміки кількість теплоти Q_1, одержана від нагрівника, дорівнює

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1.$$

Тепер необхідно повернути газ в попереднє положення — стиснути газ, але так, щоб робота в цьому процесі A_2 була меншою за A_1. Робоче тіло приводять у контакт з холодильником (температура холодильника менша за температуру робочого тіла), стискують газ, здійснюючи роботу A_2 (2*b*1 на рис. 9.4). Холодильник за цих умов одержить кількість теплоти Q_2:

$$Q_2 = U_1 - U_2 - A_2.$$

Тоді коефіцієнт корисної дії такого теплового двигуна дорівнює

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

а робота A, виконана за цикл, дорівнює площі заштрихованої фігури на рис. 9.4.

Вічний двигун другого роду

Якщо $Q_2 = 0$, тобто кількість теплоти, що передається холодильнику, дорівнює нулю, то для такого теплового двигуна $\eta = 1$. Такий двигун міг би повністю перетворювати на роботу всю теплоту, яка одержана від нагрівника. Створення такого теплового двигуна не забороняється першим законом термодинаміки. Такий тепловий двигун німецький вчений В. Оствальд (1853–1932 рр.) назвав *вічним двигуном другого роду.* Вічний двигун міг би працювати за рахунок практично невичерпних джерел внутрішньої енергії, наприклад, енергії води морів та океанів. Але результати експериментів доводять, що вічних теплових двигунів другого роду не існує.

Цикл Карно

Аналізу роботи теплових двигунів присвячені наукові розробки французького дослідника Н. Карно (1796–1832 рр.). Розглянемо оборотний цикл, що складається з двох ізотерм та двох адіабат — *цикл Карно* (рис. 9.5). На ділянці 1-2 відбувається ізотермічне розширення газу, який перебуває в тепловому контакті з нагрівником, що має температуру T_1. Газ ізотермічно переходить до стану 2, одержавши кількість теплоти Q_1 від нагрівника. Перехід 2-3 — адіабатичне розширення газу, при цьому температура газу зменшується від T_2 до T_1. У процесі 3-4 відбувається ізотермічне стиснення газу, що перебуває в контакті з холодильником при температурі T_2. Газ на цьому етапі віддає холодильнику кількість теплоти Q_2. Перехід 4-1 — адіабатичне стиснення газу, температура збільшується від T_2 до T_1.

Використовуючи перший закон термодинаміки (9.4) та розрахунки роботи в ізотермічному процесі (9.7), внутрішньої енергії ідеального газу (9.6), знайдемо роботу на окремих ділянках циклу Карно:

$$A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1; \tag{9.20}$$

$$A_{23} = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1);$$

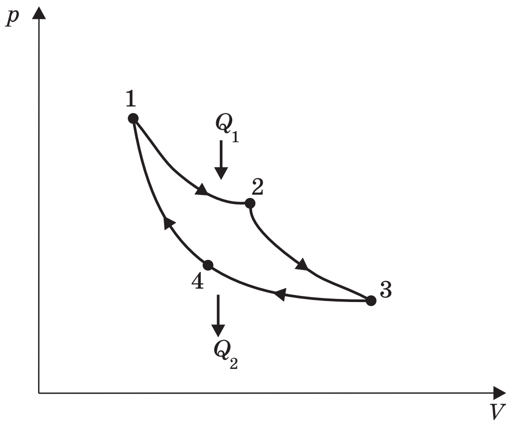


Рис. 9.5

$$A_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2; \tag{9.21}$$

$$A_{41} = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

Тоді повна робота газу за цикл Карно дорівнює:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2;$$

$$A = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Використовуючи рівняння адіабати (9.13), запишемо

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}; \;\; T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1};$$

звідки

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тоді коефіцієнт корисної дії двигуна, що здійснює цикл Карно, дорівнює

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{9.22}$$

де T_1 — температура нагрівника; T_2 — температура холодильника.

Теорема Карно

Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна, що здійснює цикл Карно, визначається тільки температурою нагрівника T_1 та холодильника T_2, не залежить від природи робочого тіла — це зміст *теореми Карно.* Такий тепловий двигун має найбільший коефіцієнт корисної дії порівняно з іншими тепловими двигунами, у яких такі ж граничні температури. Величина $\eta < 1$. Тільки у випадку $T_1 \to \infty$ або $T_2 \to 0$ $\eta \to 1$, що неможливо здійснити.

Холодильна установка

Якщо двигун працює за оборотним циклом Карно $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$, то відбувається передача теплоти від холодного тіла до гарячого за рахунок роботи зовнішніх сил. За таким принципом працюють *холодильні установки*. Такий процес супроводжується переходом теплоти від тіла, яке охолоджується, в навколишнє середовище.

9.6. Ентропія. Другий закон термодинаміки

В ізотермічних процесах 1-2 та 3-4 циклу Карно із рівнянь (9.20)–(9.21) одержимо

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{9.23}$$

Величина Q/T називається *зведеною теплотою*. Співвідношення (9.23) означає, що сума зведених теплот в оборотному циклі Карно дорівнює нулю. Цей висновок можна поширити на довільні цикли, розглядаючи їх як сукупність елементарних циклів Карно. Тоді можна узагальнити для довільного оборотного циклу:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \tag{9.24}$$

Закон (9.24) означає, що інтеграл по довільному контуру від зведеної теплоти за оборотний цикл дорівнює нулю. Тоді з (9.24) випливає, що підінтегральна функція є повним диференціалом деякої функції стану термодинамічної системи:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \tag{9.25}$$

Ентропія

Функцію S вперше ввів німецький вчений Р. Клаузіус (1822–1888 рр.) у 1854 р., назвав її *ентропією.* Ентропія — однозначна функція стану системи, якби це було не так, то можна було б створити вічний двигун другого роду, тобто пристрій, за допомогою якого періодично одержують роботу внаслідок охолодження тільки одного тіла.

Із (9.25) зрозуміло, що знаки диференціалів δQ та dS однакові. Тобто при нагріванні тіла $\delta Q > 0$ і ентропія зростає $dS > 0$, при охолодженні $\delta Q < 0$ і ентропія зменшується. Якщо процес відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем, то $\delta Q = 0$, $dS = 0$. Тоді для оборотних адіабатичних процесів ентропія не змінюється, такі процеси є ізоентропійними.

Оборотні процеси, які відбуваються з ідеальним газом, можна зображувати на діаграмах $T - S$. Для таких діаграм на осі абсцис відкладають ентропію S, а на осі ординат — температуру T термодинамічної системи. Наприклад, цикл Карно на діаграмі $T - S$ зображено на рис. 9.6. Відрізки 1-2 та 3-4 — ізотерми, 2-3 та 4-1 — адіабати.

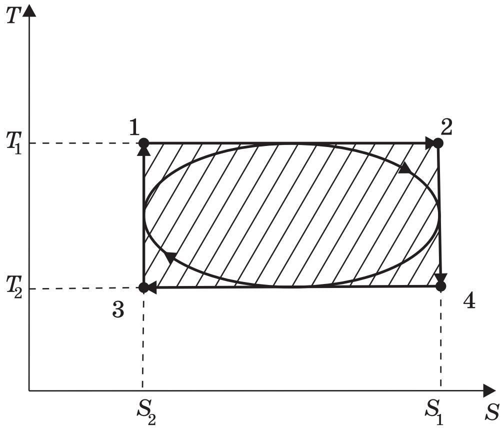


Рис. 9.6

У процесі 1-2 система одержує теплоту $Q_1 = T_1(S_2 - S_1) = T_1 \Delta S$, а в процесі 3-4 — віддає холодильнику теплоту $Q_2 = T_2(S_2 - S_1) = -T_2 \Delta S$. Тоді робота за цикл $A = Q_1 + Q_2$ дорівнює площі прямокутника (заштриховано на рис. 9.6). А ККД теплового двигуна, який працює за циклом Карно, дорівнює

$$\eta_0 = \frac{A}{Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

що доведено теоремою Карно (9.22). Із діаграми $T - S$ (рис. 9.6) зрозуміло, що ККД теплового двигуна, який працює за циклом Карно, найбільший порівняно з тепловими двигунами, які працюють за іншими оборотними циклами. Дійсно, площа прямокутника 1-2-3-4 більша за площу всередині довільної замкненої лінії (замкнена лінія на рис. 9.6) із граничними температурами T_1 та T_2. Можна довести, що ККД теплового двигуна, що працює за необоротним циклом η, менший за ККД машини, що працює за оборотним циклом η_0:

$$\eta < \eta_0, \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \le 0. \tag{9.26}$$

Нерівність Клаузіуса

Нерівність (9.26) — *нерівність Клаузіуса*, записана для циклу Карно, знак рівності тут відповідає оборотним процесам. Для необоротних процесів сума зведених теплот менша за нуль. Тоді нерівність Клаузіуса для довільного циклу має вигляд:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0. \tag{9.27}$$

Співвідношення (9.23)–(9.27) одержано для ідеальних газів та теплових двигунів. Але поняття ентропії як функції стану термодинамічної системи є одним із основних понять термодинаміки, справедливим для різних термодинамічних систем. Нерівність Клаузіуса (9.27) є одним із формулювань другого закону термодинаміки.

Рівняння (9.25)–(9.27) визначають існування ентропії як функції стану термодинамічної системи, яка збільшується в необоротних процесах та не зменшується для ізольованих систем. Ці твердження складають зміст другого закону термодинаміки як *закону зростання ентропії*. Аналогічний вираз *другого закону термодинаміки* в диференціальній формі:

$$dS \ge \frac{\delta Q}{T}. \tag{9.28}$$

Закон зміни ентропії ізольованої системи

Для всіх необоротних процесів в ізольованій системі ентропія зростає, для оборотних процесів ентропія системи не змінюється. Реальні природні процеси є необоротними, тільки в окремих випадках процеси можна наближено вважати необоротними. Тому ентропія ізольованої системи не зменшується, не зникає. Якщо всі необоротні процеси в ізольованій системі завершуються, то подальшого зростання ентропії не буде, ентропія сягає максимального значення. *Ентропія ізольованої системи наближається до максимуму.*

Знайти зміну ентропії в різних оборотних процесах можна, використовуючи формулу

$$dS = \frac{1}{T}(dU + \delta A).$$

Другий закон термодинаміки

Другий закон (друге начало) термодинаміки встановлено на основі узагальнення експериментальних досліджень, цей закон встановлює можливі межі перетворення теплоти в роботу, визначає напрям процесів. Можна навести декілька еквівалентних формулювань *другого закону термодинаміки:*

- неможливо провести такий круговий процес, єдиним результатом якого є здійснення роботи за рахунок охолодження одного тіла (У. Томсон, 1851 р.);
- теплота не може сама собою переходити від менш нагрітого тіла до більш нагрітого (Р. Клаузіус, 1850 р.);
- вічний двигун другого роду неможливий (В. Оствальд).

Другий закон термодинаміки містить два основних положення: у рівноважної системи існує однозначна функція стану — ентропія; ентропія не зменшується в процесах, що відбуваються в ізольованих системах. Співвідношення (9.27) та (9.28) — це інтегральний та диференціальний вирази другого закону термодинаміки. Перше положення цього закону вказує на неможливість у замкнутому циклі перетворити теплоту в роботу без змін у зовнішніх тілах. Зміна стану робочого тіла для незамкнутих процесів або передача частини теплоти в замкнутому процесі робочим тілом іншим тілам та зміні термодинамічного стану цих тіл називається *компенсацією*. Тоді другий закон термодинаміки стверджує, що без компенсації теплоту неможливо перетворити в роботу, в той час як робота повністю перетворюється в теплоту без компенсації.

Другий закон термодинаміки є основою для визначення термодинамічної шкали температур, яка не залежить від термометричної речовини та будови термометра. В основі такої абсолютної термодинамічної шкали температур лежить теорема Карно, відповідно до якої ККД циклу Карно залежить тільки від температури нагрівника та холодильника і не залежить від будови теплового двигуна та природи робочого тіла (9.22). За цією шкалою єдиною визначальною точкою є температура потрійної точки води — 273,16 K.

9.7. Взаємозв'язок ентропії та ймовірності стану системи

Другий закон термодинаміки як закон зростання ентропії вказує на те, що ентропія ізольованої системи сягає максимального значення. Перехід системи до стану термодинамічної рівноваги найбільш імовірний, тобто між ентропією та імовірністю стану термодинамічної системи є функціональний зв'язок.

Формула Больцмана

Цей зв'язок встановлює формула Больцмана:

$$S = k \ln \Omega, \tag{9.29}$$

де Ω — термодинамічна ймовірність даного стану, або статистична вага стану.

Термодинамічна ймовірність

Термодинамічна ймовірність дорівнює числу мікростанів, що відповідають даному макростану системи. Доведення формули Больцмана (9.29) проведено в курсі статистичної фізики.

Якщо в посудині об'ємом V знаходиться N молекул одноатомного ідеального газу в стані термодинамічної рівноваги при температурі T, макростан газу визначають V і T, мікростан — координати та швидкості N молекул. За молекулярно-кінетичною теорією даному макростану газу відповідає певний розподіл молекул за об'ємом та швидкостями. Так, об'єм газу розділимо на кубічні комірки такі, що в кожній з них міститься достатньо велика кількість молекул. Якщо в першій комірці знаходиться N_1 молекул, у другій — N_2 у третій — N_3 і т. д., то число способів розміщення молекул в i комірках дорівнює

$$N_1!N_2!N_3!...N_i!,$$

а термодинамічна ймовірність макростану —

$$\Omega = \frac{N!}{N_1!N_2!...N_3!}.$$

Термодинамічна ймовірність, на відміну від математичної, більша за одиницю.

Формула Больцмана стверджує, що термодинамічна ймовірність стану ізольованої системи не зменшується, сягаючи максимального значення для рівноважного стану. Стан системи змінюється так, що відбувається перехід від менш імовірного до більш імовірного стану. В стані термодинамічної рівноваги термодинамічна ймовірність максимальна. Але навіть найменш імовірні стани, відповідно до теорії ймовірності, не є неможливими.

Флуктуації

Тоді можливі самовільні відхилення фізичних величин від середніх значень, зумовлені тепловим рухом, які називаються *флуктуаціями*. Відносно великі флуктуації зустрічаються тільки в системах із малим числом частинок. Поблизу стану рівноваги флуктуації величин убік збільшення чи зменшення рівноймовірні.

Наслідком (9.29) є можливість переходу системи з більш імовірного стану до менш імовірного, але такий перехід можливий лише тоді, коли відбувається процес компенсації в зовнішніх тілах (у відповідності до другого закону термодинаміки).

Другий закон термодинаміки має статистичний характер, вказує на найбільш імовірні переходи системи, розкриваючи фізичний зміст ентропії як міри наближення стану термодинамічної системи до рівноваги, міри хаотичності та невпорядкованості стану системи.

Ентропія є функцією, визначеною з точністю до довільної сталої величини. Перший та другий закони термодинаміки не дають можливості визначити цю сталу. Для багатьох питань термодинаміки визначення цієї величини несуттєве, бо найчастіше в задачах потрібно знати зміну ентропії, а не абсолютне значення її. Але у випадку зміни хімічного складу досліджуваних систем повне розв'язання термодинамічних задач неможливе без знання ентропійної сталої. Аналіз поведінки систем при низьких температурах призводить до висновку, що

Теорема Нернста

при наближенні температури до абсолютного нуля ентропія рівноважних систем в ізотермічних процесах не залежить від параметрів стану та наближається до нуля:

$$\lim_{T \to 0} S = 0.$$

Цей закон називають *теоремою Нернста*, або *третім законом термодинаміки*.

Наслідком теореми Нернста є недосяжність абсолютного нуля температур. До абсолютного нуля температур можна асимптотично наближатися, не досягаючи його.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Яка величина називається внутрішньою енергією систем у молекулярній фізиці? Від яких величин залежить внутрішня енергія ідеального газу?
2. Що означає твердження про те, що внутрішня енергія є функцією стану системи?
3. Розкрийте фізичний зміст понять роботи термодинамічної системи та роботи над системою.
4. Чому нескінченно мала кількість тепла, передана системі, не є повним диференціалом?
5. У чому полягає перший закон термодинаміки? Розкрийте фізичний смисл величин, що входять до нього.
6. Яка величина називається теплоємністю тіла? Одиниці вимірювання теплоємності тіла.
7. Дайте визначення питомої теплоємності.
8. Як пов'язані питома та молярна теплоємності?
9. У чому полягає нерівноцінність між роботою та кількістю теплоти як формами передачі енергії в теплових процесах?
10. Який процес називають адіабатичним? Запишіть рівняння Пуассона.
11. Яка величина теплоємності ідеального газу в ізотермічному та адіабатичному процесах?
12. Які процеси називають політропними?
13. Що ви знаєте про напрямок перебігу термодинамічних процесів?
14. Наведіть відомі вам формулювання другого закону термодинаміки.
15. Поясніть процеси, які відбуваються з газом на окремих ділянках циклу Карно.
16. Від яких величин залежить ККД теплового двигуна, що здійснює цикл Карно?
17. Наведіть формули, за якими знаходять зміну ентропії в оборотних процесах.
18. Запишіть та проаналізуйте нерівність Клаузіуса.
19. Яка величина називається термодинамічною ймовірністю стану системи? Запишіть та проаналізуйте формулу Больцмана.

Завдання для експрес-контролю

1. У якому випадку ідеальний газ при однаковому збільшенні об'єму виконує більшу роботу: ізобаричному, ізотермічному чи адіабатичному?

2. Чому для ідеального газу $C_p > C_V$?

3. Іноді ідеальний газ при охолодженні віддає меншу кількість теплоти, ніж було витрачено при його нагріванні. Чи не суперечить це закону збереження енергії?

4. Чи можна передати тілу певну кількість теплоти, не підвищуючи його температури?

5. Як змінюватиметься температура газу, вміщеного в теплоізолюючий циліндр при збільшенні об'єму циліндра?

6. Накреслити на діаграмі S, T графіки ізотермічного, адіабатичного, ізохоричного та ізобаричного процесів.

7. Яким повинен бути циклічний процес, щоб дістати максимальний ККД теплового двигуна при заданій різниці температур нагрівника та холодильника?

8. Як графічно визначити роботу циклічного процесу? Відповідь пояснити.

9. Як змінюється ентропія ідеального газу при адіабатичному розширенні в пустоту?

10. Як змінюється термодинамічна ймовірність стану деякої системи при здійсненні оборотного адіабатичного процесу? Чому?

Приклади розв'язання задач

1. Два грами азоту при температурі $T_1 = 280$ К ізобарично розширюються, при цьому його температура підвищується до $T_2 = 560$ К. Далі газ адіабатично розширюється до об'єму, в $n = 5$ разів більшого, ніж початковий $V_3 = nV_1$. Розрахуйте кількість теплоти, одержану газом, роботу, яку він виконав, і зміну його внутрішньої енергії.

Розв'язання

Розглянутий процес зображений на рис. 1, де 2-1 — ізобара, а 2-3 — адіабата. Кількість теплоти, одержана газом Q, дорівнює кількості теплоти Q_{12}, одержаної газом в ізобаричному процесі, бо при адіабатичному процесі $Q_{23} = 0$.

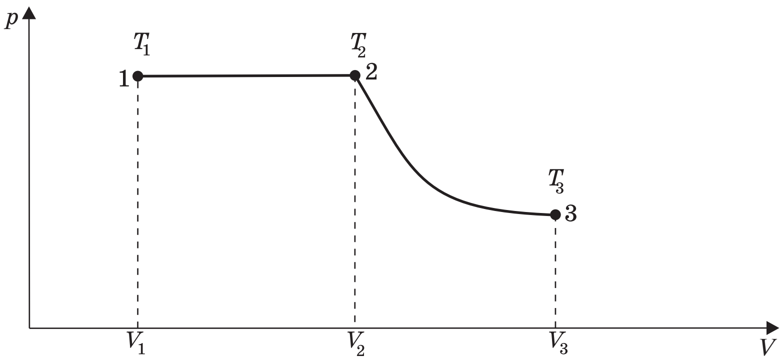


Рис. 1

Зважаючи на те, що газ двохатомний, кількість ступенів вільності $i = 5$,

$$C_p = \frac{i+2}{2} R = \frac{7}{2} R,$$

маємо

$$Q = Q_{12} = \frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R (T_2 - T_1);$$

$Q = 580$ Дж.

Робота, яку виконав газ при розширенні:

$$A = A_{12} + A_{23}.$$

Робота розширення газу при ізобаричному процесі з урахуванням рівняння Менделєєва — Клапейрона дорівнює

$$A_{12} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1).$$

При адіабатичному процесі

$$A_{23} = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_3),$$

де

$$C_V = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} R.$$

Температуру T_3 можна розрахувати з рівняння адіабатичного процесу

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1}; \quad T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1};$$

де

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}; \quad V_3 = nV_1.$$

Об'єм газу наприкінці ізобаричного розширення V_2 знайдемо з рівняння ізобаричного процесу

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1},$$

тоді

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_1}{V_3} \frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma-1} = T_2 \left(\frac{T_2}{nT_1} \right)^{\gamma-1},$$

звідки

$$A_{23} = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T_2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Повна робота дорівнює

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1) + \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_2\left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right];$$

$A = 420$ Дж.

Зміну внутрішньої енергії визначимо, враховуючи, що вона — функція стану і не залежить від термодинамічних процесів.

$$\Delta U = \frac{m}{M}C_V(T_3 - T_1) = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left[T_2\left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1} - T_1\right],$$

$\Delta U = 160$ Дж.

2. Кисень масою 5 г ізотермічно стискують до об'єму, вдвічі меншого, ніж початковий $V_2 = \frac{V_1}{2}$, далі ізобарично розширюють до об'єму $V_3 = 1{,}5V_1$. Визначити зміну ентропії кисню в цьому процесі.

Розв'язання

Діаграма процесу зображена на рис. 2, де 1-2 — ізотерма; 2-3 — ізобара. Зміна ентропії при переході системи з одного стану в інший визначається тільки параметрами цих станів і не залежить від характеру процесу, завдяки якому відбувся перехід.

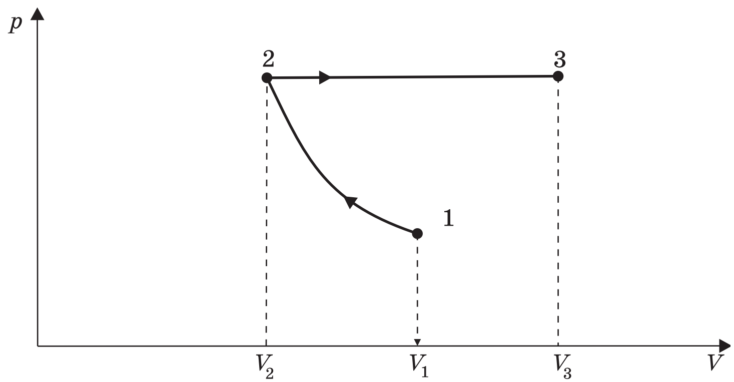


Рис. 2

Для оборотних процесів зміна ентропії обчислюється як

$$\Delta S = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^3 \frac{\delta Q_{12} + \delta Q_{23}}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q_{23}}{T}.$$

Для ізотермічного процесу стискання газу $dU_{12} = 0$

$$\delta Q_{12} = \delta A_{12} = pdV.$$

З рівняння Менделєєва — Клапейрона $T = \frac{pVM}{mR}$, тобто

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{T} = \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Для ізобаричного процесу нагрівання кисню

$$\delta Q_{23} = \frac{m}{M} C_p dT,$$

тоді
$$\int_2^3 \frac{\delta Q_{23}}{T} = \frac{m}{M} C_p \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Врахуємо, що молярна теплоємність двохатомного газу ($i = 5$) дорівнює $C_p = \frac{i+2}{2} = \frac{7}{2}$, і відповідно до рівняння газового стану для ізобаричного процесу

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}; \qquad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2}.$$

У цьому випадку зміна ентропії дорівнює

$$\Delta S = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_1}{V_2} + \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{V_3}{V_2}.$$

За умовою задачі $V_2 = \frac{V_1}{2}$, $V_3 = 1{,}5V_1$; тоді

$$\Delta S = -\frac{m}{M} R \ln \frac{2V_1}{V_1} + \frac{m}{M} \frac{7}{2} R \ln \frac{3V_1 \cdot 2}{2V_1} = \frac{m}{M} R \left(-\ln 2 + \frac{7}{2} \ln 3 \right),$$

$\Delta S = 4{,}1$ Дж/К.

3. Розрахуйте зміну ентропії $m = 1$ кг свинцю, що знаходиться при температурі $t = 20$ °С, якщо його розплавити.

Розв'язання

Повна зміна ентропії є сумою двох складових:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2,$$

де ΔS_1 — пов'язана з нагріванням свинцю від температури $T = 293$ K до температури плавлення і ΔS_2 — пов'язана з процесом плавлення, що відбувається при сталій температурі $T_{пл} = 600$ K.

Враховуючи, що для оборотного процесу

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2,$$

а також $$\delta Q_1 = cmdT;\ \ \delta Q_2 = \lambda m,$$

де $c = 130$ Дж/(кг · К) — питома теплоємність свинцю;

$\lambda = 2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг — його питома теплота плавлення,

маємо

$$\Delta S = \int_T^{T_{пл}} \frac{cmdT}{T} + \frac{\lambda m}{T_{пл}} = cm \ln \frac{T_{пл}}{T} + \frac{\lambda m}{T_{пл}},$$

$$\Delta S = 310 \text{ Дж/К}.$$

4. Десять грамів водню ізотермічно розширюються до об'єму $V_2 = 10V_1$, далі при сталому об'ємі температура газу зменшується від $T_1 = 500$ K до $T_2 = 100$ K. Внаслідок ізотермічного стискання газ повертають до його початкового об'єму і, при ізохоричному нагріванні до T_1, цикл замикається. Зобразіть діаграму циклу. Яку роботу виконує газ? Чому дорівнює кількість теплоти, одержана газом, і термічний ККД циклу? Порівняйте його з ККД циклу Карно з тими ж температурами нагрівника й охолоджувача.

Розв'язання

Цикл складається з двох ізотерм 1-2 і 3-4 при температурах T_1 і T_2 і двох ізохор 1-4 і 2-3 з відповідними об'ємами V_1 і V_2 (*див.* рис. 3).

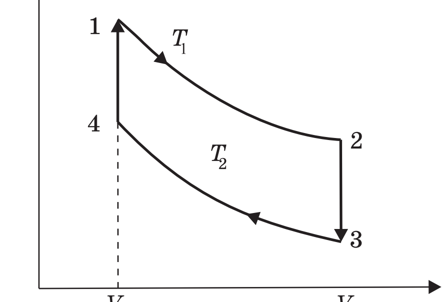


Рис. 3

Робота виконується тільки при ізотермічних процесах

$$A = A_{12} + A_{23}.$$

На ділянці 1-2 газ розширюється, тобто виконує роботу ($A_{12} > 0$)

$$A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

На ділянці 3-4 об'єм зменшується, газ стискається, тобто над ним виконується робота. Робота газу від'ємна. З урахуванням, що $V_1 = V_4$ і $V_2 = V_3$, маємо:

$$A_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Тоді повна робота газу за цикл

$$A = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} R \left(T - T_2\right) \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$A \approx 38{,}2 \text{ кДж}.$$

При розрахунку кількості теплоти, одержаної газом, візьмемо до уваги, що газ її одержував на ділянках 1-2 (ізотермічне розширення) і 4-1 (ізохоричне збільшення тиску), тобто

$$Q = Q_{12} + Q_{41}.$$

Із першого закону термодинаміки для ізотермічного процесу $\Delta U = 0$

$$Q_{12} = A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Для ізохоричного процесу ($A = 0$):

$$Q_{41} = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right).$$

Водень H_2 — двохатомний газ, тому його молярна теплоємність

$$C_V = \frac{5}{2} R.$$

Загальна кількість теплоти, одержана газом

$$Q = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right),$$

$$Q = 52{,}8 \text{ кДж}.$$

Термічний коефіцієнт корисної дії для циклу

$$\eta = \frac{A}{Q};$$

$$\eta = \frac{\frac{m}{M} R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \frac{C_V (T_1 - T_2)}{R \ln \frac{V_2}{V_1}}}. \qquad (2)$$

Для циклу Карно ККД дорівнює

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (3)$$

Порівняємо (2) з (3) і, зважаючи на те, що $T_1 > T_2$ і $T_2 > T_1$, бачимо, що знаменник у (2) більший ніж у (3), тобто $\eta < \eta_k$. Розрахунки це підтверджують. З (1) одержимо $\eta = 0{,}72 \approx 72$ %.

Для циклу Карно маємо з (3) $\eta_k = 0{,}8 = 80$ %.

Тобто ККД циклу Карно більший, ніж ККД довільного циклу.

5. Температура нагрівника теплового двигуна, що працює за циклом Карно, дорівнює $T_1 = 600$ K, а охолоджувача $T_1 = 250$ K. Чому дорівнює ККД циклу? Яку кількість теплоти Q_1 одержує робоче тіло від нагрівника і яка кількість теплоти Q_2 передається холодильнику за один цикл, якщо виконується робота $A = 50$ кДж?

Розв'язання

Коефіцієнт корисної дії циклу Карно можна знайти згідно з

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

тобто $\eta = 0{,}58 = 58$ %.

Зважаючи на те, що ККД теплового двигуна дорівнює

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}, \qquad (2)$$

знаходимо кількість теплоти, що передається робочому тілу

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}; \; Q_1 = 86{,}2 \text{ кДж}.$$

Щоб знайти кількість теплоти Q_2, передану холодильнику, звернемося до (2), тоді

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\eta Q_2}{A},$$

звідки $$Q_2 = \frac{A(1-\eta)}{\eta},$$

або інакше $$A = Q_1 - Q_2;\ Q_2 = Q_1 - A,$$

$$Q_2 = 36{,}2 \text{ кДж}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

9.1. При ізохоричному нагріванні кисню об'ємом $V = 50$ л тиск газу змінився на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Знайти кількість теплоти Q, наданої газу.
Відповідь: $Q = 62{,}5$ Дж.

9.2. 10 л азоту, що були під тиском $p_1 = 1$ атм, стискуються до тиску $p_2 = 100$ атм. Визначити роботу стискування для двох випадків: 1) стискування здійснюється ізотермічно; 2) стискування здійснюється адіабатично.
Відповідь: $A_1 = -4{,}6$ кДж; $A_2 = -6{,}8$ кДж.

9.3. Азот нагрівся при сталому тиску, причому йому була надана кількість теплоти $Q = 21$ кДж. Визначити роботу A, що здійснив при цьому газ, і зміну ΔU його внутрішньої енергії.
Відповідь: $A = 6$ кДж; $\Delta U = 15$ кДж.

9.4. Гелій масою $m = 1$ г буде нагрітий на $\Delta T = 100$ К при сталому тиску p. Визначити кількість теплоти Q, переданої газу; роботу розширення A, приріст внутрішньої енергії ΔU.
Відповідь: $Q = 520$ Дж; $A = 208$ Дж; $\Delta U = 312$ Дж.

9.5. Газ, що займав об'єм $V = 12$ л під тиском $p = 100$ кПа був ізобарично нагрітий від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Визначити роботу розширення газу A.
Відповідь: $A = 400$ Дж.

9.6. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0{,}02$ кг при температурі $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатично, збільшивши свій об'єм в п'ять разів, а потім буде стиснений ізотермічно, причому об'єм газу зменшився в п'ять разів. Знайти температуру T_2 наприкінці адіабатичного розширення і повну роботу A, що здійснена газом. Зобразити процес графічно.

Відповідь: $T_2 = 157$ К; $A = –21$ кДж.

9.7. Температура одного моля ідеального газу з відомим γ збільшується на ΔT в ізобаричному, ізохоричному та адіабатичному процесах. Визначити зміну внутрішньої енергії газу ΔU в цих випадках.

Відповідь: $\Delta U = [R/(\gamma–1)]\Delta T$.

9.8. Молекули ідеального газу, у якого $\gamma = 1,4$ і тиск $p = 100$ кПа, мають середню енергію $\langle W \rangle = 2,5 \cdot 10^{–20}$ Дж. Знайти число молекул в одиниці об'єму.

Відповідь: $n = 1 \cdot 10^{25}$ м$^{–3}$.

9.9. Довести, що закон Дальтона для суміші газів, які мають однакові значення γ і хімічно не взаємодіють, є наслідком закону збереження енергії.

9.10. Деяку масу одноатомного ідеального газу стискають спочатку ізотермічно, а потім адіабатично так, що в обох випадках його кінцевий тиск стає в $n = 5$ разів більшим від початкового. Початковий тиск і температура в обох випадках однакові. Знайти відношення робіт, які виконуються при стисканні газу в цих процесах.

Відповідь: $A_{із}/A_{ад} = 0,56$.

9.11. Внаслідок ізотермічного розширення маси $m = 8,2$ г деякого газу в $n = 4,5$ рази виконується робота $A = 820$ Дж. Знайти середню квадратичну швидкість молекул цього газу.

Відповідь: $\upsilon_{кв} = 450$ м/с.

9.12. Внаслідок колового процесу газ здійснив роботу $A = 1$ Дж і передав охолоджувачу кількість теплоти $Q_2 = 4,2$ Дж. Визначити термічний ККД η циклу.

Відповідь: $\eta = 0,193$.

9.13. Здійснюючи замкнений процес, газ отримав від нагрівника кількість теплоти $Q_1 = 4$ кДж. Визначити роботу газу A при перебігу циклу, якщо його термічний ККД $\eta = 0,1$.

Відповідь: $A = 400$ Дж.

9.14. Внаслідок ізотермічного розширення в циклі Карно газ дістав від нагрівника 150 Дж теплоти. Визначити роботу ізотермічного стиснення цього газу, якщо відомо, що ККД циклу дорівнює $\eta = 0,4$.

Відповідь: $A = -90$ Дж.

9.15. У циклі Карно робочим тілом є двохатомний газ. Визначити ККД циклу, якщо при адіабатичному розширенні об'єм газу збільшився від 8,0 до 10,2 дм^3.

Відповідь: $\eta = \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 0{,}1.$

9.16. Ідеальний тепловий двигун, який працює за циклом Карно, 2/3 теплоти, одержаної від нагрівника, передає холодильнику з температурою $t = 10$ °С. Визначити температуру нагрівника.

Відповідь: $T_1 = 424{,}5$ К.

9.17. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура нагрівника T_1 дорівнює 470 К, температура охолоджувача дорівнює $T_2 = 280$ К. При ізотермічному розширенні газ здійснює роботу $A = 100$ Дж. Визначити термічний ККД η циклу, а також кількість теплоти Q_2, яку газ віддає охолоджувачу при ізотермічному стискуванні.

Відповідь: $\eta = 0{,}404$; $Q_2 = 59{,}6$ Дж.

9.18. Найменший об'єм газу V_1, що здійснює цикл Карно, дорівнює 153 л. Визначити найбільший об'єм V_3, якщо об'єм V_2 наприкінці ізотермічного розширення і об'єм V_4, наприкінці ізотермічного стискування, дорівнює відповідно 600 і 189 л.

Відповідь: $V_3 = 0{,}74$ м^3.

9.19. Знайти зміну ΔS ентропії при ізобаричному розширенні азоту масою $m = 4$ г від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

Відповідь: $\Delta S = 2{,}43$ Дж/К.

9.20. Знайти зміну ентропії при охолоджуванні 100 г води від $T_1 = 15$ °С до $T_2 = 0$ °С.

Відповідь: $\Delta S = -22{,}4$ Дж/К.

9.21. Знайти зміну ентропії одного моля ідеального газу в адіабатичному, ізотермічному, ізохоричному та ізобаричному процесах.

Відповідь: $\Delta S_{ад} = 0$, $\Delta S_т = Q/T$; $\Delta S_V = C_V \ln (T_2/T_1)$; $\Delta S_p = C_p \ln (T_2/T_1)$.

9.22. Ідеальний газ, розширюючись ізотермічно (при $T = 400$ К), здійснює роботу $A = 800$ Дж. Як змінюється при цьому ентропія?

Відповідь: $\Delta S = 2{,}00$ Дж/К.

9.23. У випадку оборотного ізотермічного процесу при $T = 350$ К тіло виконує роботу $A = 80$ Дж, внутрішня енергія збільшується на $\Delta U = 7{,}5$ Дж. Як змінюється ентропія?

Відповідь: $\Delta S = 0{,}25$ Дж/К.

9.24. Термодинамічна ймовірність стану деякої маси газу дорівнює Ω_1. Визначити термодинамічну ймовірність стану такого газу, у якого маса збільшилась у η разів. Температура та тиск в обох випадках однакові.

Відповідь: $\Omega_2 = \Omega_1\eta$.

9.25. Чому дорівнює зміна ентропії системи, яка перейшла зі стану 1 до стану 2, якщо термодинамічна ймовірність другого стану в $\eta = 2$ рази більша за термодинамічну ймовірність першого стану?

Відповідь: $\Delta S = 0{,}96 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

9.26. Теплоємність ідеального газу в політропному процесі дорівнює $C = C_V + 0{,}1R$. Визначити показник політропи n такого процесу.

Відповідь: $n = -9$.

9.27. Одноатомний ідеальний газ здійснює процес, у якому молярна теплоємність газу залишається сталою та дорівнює $C = \frac{5}{2}R$. Чому дорівнює показник політропи n цього процесу?

Відповідь: $n = 0$.

9.28. При ізобаричному нагріванні від 0 до 100 °C моль ідеального газу поглинає $Q = 3{,}35$ кДж тепла. Визначити показник адіабати γ цього газу, зміну внутрішньої енергії ΔU, роботу A, здійснену газом.

Відповідь: $\gamma = 1{,}33$; $\Delta U = 2{,}5$ кДж; $A = 0{,}85$ кДж.

9.29. Кисень масою $m = 1$ кг адіабатично стискають, здійснюючи роботу $A = 100$ кДж. Визначити кінцеву температуру T_2 газу, якщо початкова температура $T_1 = 300$ К.

Відповідь: $T_2 = 454$ К.

9.30. Ідеальний багатоатомний газ здійснює цикл, що складається з двох ізохор та двох ізобар. Найбільший тиск газу вдвічі більший за найменший, найбільший об'єм вчетверо більший за найменший. Визначити термічний ККД циклу η.

Відповідь: $\eta = 0{,}11$.

10. ТЕСТИ

1. Кінематика

1. *Що називають матеріальною точкою:*

а) тіло або сукупність нерухомих тіл, відносно якого визначається просторове та часове положення інших тіл;

б) трійку лінійно незалежних спрямованих відрізків прямих, що виходять з одної точки;

в) тіло, розмірами якого можна знехтувати при описі його руху;

г) сукупність тіл, рух яких розглядається?

2. *Що називають переміщенням тіла (матеріальної точки):*

а) вектор, який проведено з початкової точки руху тіла у кінцеву точку;

б) довжину траєкторії;

в) модуль вектора, який проведено з початкової точки руху тіла у кінцеву точку;

г) вектор, який проведено в дану точку з початку координат?

3. *Яка з формул відповідає визначенню миттєвої швидкості змінного руху:*

а) $\upsilon = \dfrac{\upsilon_0 + \upsilon_t}{2}$;

б) $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$;

в) $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$;

г) $\upsilon = \dfrac{S}{t}$?

4. *Гусеничний трактор рухається зі швидкістю* 9 км/год. *З якою швидкістю відносно землі рухається його гусениця в її верхній і нижній частинах:*

а) 9 км/год, 18 км/год;

б) 18 км/год, 0 км/год;

в) 18 км/год, 9 км/год;

г) 9 км/год, 9 км/год?

5. *Які умови виконуються при нерівномірному прямолінійному русі:*

а) $\vec{\upsilon} = \text{const}$, $\upsilon = \text{const}$, $\vec{a} = 0$, $a_n = 0$, $a_\tau = 0$;

б) $\vec{\upsilon} \neq \text{const}$, $\upsilon = \text{const}$, $\vec{a} = \vec{a}_n$, $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$;
в) $\vec{\upsilon} \neq \text{const}$, $\upsilon \neq \text{const}$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau$, $a_n = 0$, $a_\tau \neq 0$;
г) $\vec{\upsilon} \neq \text{const}$, $\upsilon \neq \text{const}$, $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, $a_n \neq 0$, $a_\tau \neq 0$?

6. *Який тип руху спостерігається за умови* $a_\tau = \text{const}$, $a_n = \text{const}$:
а) криволінійний;
б) рівномірний по колу;
в) рівноприскорений по колу;
г) прямолінійний рівнозмінний;
д) прямолінійний рівномірний?

7. *Швидкість прямолінійного руху точки задана рівнянням* $\upsilon(t) = t^2 + 2t$. *Чому дорівнює прискорення в кінці другої секунди:*
а) 6 м/с^2; б) 4 м/с^2; в) 2 м/с^2; г) 0?

8. *Яким співвідношенням визначається тангенціальне прискорення:*

а) $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$;

б) $\vec{\upsilon}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)$;

в) $\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{dt}$;

г) $\dfrac{d\upsilon}{dt}$?

9. *Яким співвідношенням визначається нормальне прискорення:*

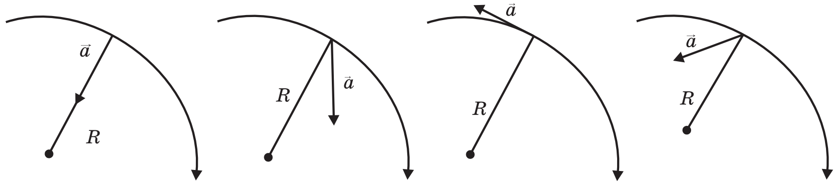
а) $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$;

б) $\vec{\upsilon}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\right)$;

в) $\dfrac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{dt}$;

г) $\dfrac{d\upsilon}{dt}$?

10. *Як напрямлений вектор повного прискорення при сповільненому русі по колу:*



а *б* *в* *г*

11. *Точка рухається по колу. Залежність шляху від часу задається рівнянням* $x = Ct^3$, *де* $C = 0{,}1$ м/с^3. *Знайти тангенціальне прискорення точки в момент, коли лінійна швидкість точки дорівнює* 0,3 м/с:

а) 0,1 м/с^2; б) 0,3 м/с^2; в) 0,6 м/с^2; г) 0,9 м/с^2.

12. *Яким співвідношенням визначається миттєва кутова швидкість:*

а) $\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$;

б) $\dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$;

в) $\dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$;

г) $\dfrac{1}{\Delta t}\Delta\left(\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}\right)$?

13. *Яким співвідношенням визначається миттєве кутове прискорення:*

а) $\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$;

б) $\dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$;

в) $\dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$;

г) $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

14. *Кут повороту тіла, що обертається, заданий рівнянням* $\varphi = 5t^2 - 3t + 5$. *Якій з умов відповідає рух тіла:*

а) $\omega = \text{const}$; б) $\frac{d\omega}{dt} > 0$; в) $\frac{d\omega}{dt} < 0$; г) $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

15. *Кут повороту колеса змінюється з часом за законом* $\varphi = 3t^2 + 2t - 4$. *Знайти лінійну швидкість точки на ободі колеса радіусом* $R = 2$ м *у кінці другої секунди після початку руху:*

а) 4 м/с; б) 14 м/с; в) 28 м/с; г) 36 м/с.

16. *Автомобіль рухається зі швидкістю* 60 км/год. *Скільки обертів за секунду зроблять його колеса, якщо вони котяться без ковзання, а зовнішній діаметр колес дорівнює* 60 см:

а) ~ 9 об/с; б) ~ 12 об/с; в) ~ 16 об/с; г) ~ 3 об/с?

17. *Відро закріплене на мотузці, що намотана на вал ворота колодязя радіусом* 25 см. *Відро спускається в колодязь з прискоренням* 1 м/с^2. *З яким кутовим прискоренням обертається вал ворота:*

а) 1 рад/с^2; б) 2 рад/с^2; в) 3 рад/с^2; г) 4 рад/с^2?

2. Динаміка

18. *Що стверджує перший закон Ньютона:*

а) тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не впливають інші тіла;

б) дія сили на тіло призводить до зміни у часі імпульсу тіла;

в) сили, з якими взаємодіють два тіла, рівні за величиною та протилежні за напрямком;

г) сила, з якою дві матеріальні точки притягують одна одну, прямо пропорційна масам цих точок та обернено пропорційна квадрату відстані між ними?

19. *Що таке сила:*

а) причина прискорення тіла;

б) міра інертності тіла;

в) міра взаємодії тіл або частин тіла;

г) здатність тіла виконувати роботу?

20. *Дайте визначення маси тіла:*

а) кількість речовини в тілі;

б) міра гравітаційної взаємодії тіл;

в) відношення маси тіла до прискорення вільного падіння;

г) міра інертності тіла.

21. *Що стверджує другий закон Ньютона:*

а) тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не впливають інші тіла;

б) дія сили на тіло призводить до зміни у часі імпульсу тіла;

в) сили, з якими взаємодіють два тіла, рівні за величиною та протилежні за напрямком;

г) сила, з якою дві матеріальні точки притягують одна одну, прямо пропорційна масам цих точок та обернено пропорційна квадрату відстані між ними?

22. *Що стверджує третій закон Ньютона:*

а) тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не впливають інші тіла;

б) дія сили на тіло призводить до зміни у часі імпульсу тіла;

в) сили, з якими взаємодіють два тіла, рівні за величиною та протилежні за напрямком;

г) сила, з якою дві матеріальні точки притягують одна одну, прямо пропорційна масам цих точок та обернено пропорційна квадрату відстані між ними?

23. *Що стверджує закон всесвітнього тяжіння:*

а) тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не впливають інші тіла;

б) дія сили на тіло призводить до зміни у часі імпульсу тіла;

в) сили, з якими взаємодіють два тіла, рівні за величиною та протилежні за напрямком;

г) сила, з якою дві матеріальні точки притягують одна одну, прямо пропорційна масам цих точок та обернено пропорційна квадрату відстані між ними?

24. *Що називається кількістю руху (імпульсом) тіла:*

а) добуток маси тіла та його швидкості $(m\vec{\upsilon})$;

б) добуток маси тіла та прискорення $(m\vec{a})$;

в) добуток сили, що діє на тіло, та часу її дії $(\vec{F}\Delta t)$;

г) добуток маси тіла та квадрату його швидкості $(m\upsilon^2)$?

25. *Який із наведених виразів для другого закону Ньютона є найбільш загальним (виражає основний закон динаміки поступального руху):*

а) $\vec{F} = m\vec{a}$;

б) $\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{\upsilon})$;

в) $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$;

г) $\vec{F} = \dfrac{m\vec{\upsilon}}{t}$?

26. *Яка з наведених нижче формул описує імпульс сили:*

а) $\vec{F}\Delta t$;

б) $\sum\limits_i \vec{F}_i$;

в) $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$;

г) $\vec{r}_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$?

27. *Чому дорівнює імпульс сили, що діє на стінку при абсолютно пружному ударі кулі масою* 2 кг *, що рухається зі швидкістю* 5 м/с *перпендикулярно до стіни:*

а) 5 $\text{Н} \cdot \text{с}$; б) 10 $\text{Н} \cdot \text{с}$; в) 20 $\text{Н} \cdot \text{с}$; г) 40 $\text{Н} \cdot \text{с}$?

28. *Яке з наведених формулювань закону збереження імпульсу є найбільш загальним:*

а) імпульс тіла — стала величина;

б) вектор повного імпульсу всіх тіл у замкненій ізольованій системі не змінюється з часом;

в) зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили;

г) імпульс системи тіл дорівнює нулю?

29. *Снаряд масою* 6 кг, *що рухався зі швидкістю* 300 м/с, *розірвався на два уламки масами* 4 кг *і* 2 кг. *Перший уламок полетів у тому самому напрямку зі швидкістю* 500 м/с. *Чому дорівнює швидкість другого уламка:*

а) –200 м/с; б) 300м/с; в)100 м/с; г) –100 м/с?

30. *Тіло масою* 3 кг *обертається в горизонтальній площині на нитці довжиною* 0,5 м *з кутовою швидкістю* 2 рад/с. *Чому дорівнює сила натягу нитки:*

а) 3 Н; б) 6 Н; в) 9 Н; г) 12 Н?

3. Робота. Потужність. Енергія

31. *Які вирази можна застосувати для розрахунку механічної роботи в найбільш загальному вигляді:*

а) $A = Fr\cos(\widehat{\vec{F},\vec{r}})$;

б) $A = \int Fdr\cos(\widehat{\vec{F},d\vec{r}})$;

в) $A = \int pdV$;

г) $A = \int \vec{F}d\vec{r}$;

д) $A = \int Pdt$?

32. *За якою формулою можна розрахувати миттєву потужність:*

а) $P = \dfrac{dA}{dt}$;

б) $P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$;

в) $P = F \cdot \upsilon$;

г) $P = \dfrac{A}{t}$?

33. *Пристрій рухається зі сталою швидкістю* 3 м/с *завдяки дії сталої сили* 10 Н. *Чому дорівнює потужність двигуна:*

а) 600 Вт; б) 300 Вт; в) 30 Вт; г) 3 Вт?

34. *Тіло пройшло шлях* 5 м *під впливом сили, що рівномірно зменшувалась від* 8 Н *на початку шляху до* 2 Н *в кінці його. Яка робота сили на всьому шляху:*

а) 10 Дж; б) 15 Дж; в) 20 Дж; г) 25 Дж?

35. *Які сили мають характер консервативних:*

а) сила інерції;
б) сила гравітаційної взаємодії;
в) сила тертя;
г) сила пружності;
д) сила опору середовища?

36. *Яка енергія називається потенціальною:*

а) енергія, пов’язана з рухом молекул тіл;

б) енергія, пов’язана з положенням тіла відносно Землі;
в) енергія, пов’язана з рухом тіла;
г) енергія, пов’язана із взаємним розташуванням частин тіла;
д) енергія пружно деформованого тіла?

37. *Яка енергія називається кінетичною:*
а) енергія, пов’язана з рухом молекул тіл;
б) енергія, пов’язана з положенням тіла відносно Землі;
в) енергія, пов’язана з рухом тіла;
г) енергія, пов’язана із взаємним розташуванням частин тіла;
д) енергія пружно деформованого тіла?

38. *Який вигляд має кінетична енергія матеріальної точки:*
а) mgh;

б) $-G\frac{m_1 m_2}{r}$;

в) $\frac{1}{2}kx^2$;

г) $\frac{1}{2}m\upsilon^2$?

39. *Яка формула з наведених нижче описує зв’язок сили та потенціальної енергії:*

а) $\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}$;

б) $\vec{F}d\vec{r}$;

в) $\oint_L \vec{F}d\vec{l}$;

г) $\vec{F}=-\mathrm{grad}\,W_p$?

40. *Яка формула з наведених нижче описує циркуляцію сили:*

а) $\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}$; б) $\vec{F}d\vec{r}$; в) $\oint_L \vec{F}d\vec{l}$; г) $\vec{F}=-\mathrm{grad}\,W_p$?

41. *Тіло в полі тяжіння рухається за замкненою траєкторією. Чому дорівнює робота сили тяжіння:*
а) $A=0$; б) $A>0$; в) $A<0$?

42. *Два тіла при поступальному русі мають однакову кінетичну енергію. В цьому випадку обов'язково виконується умова:*

а) $m_1 = m_2$; $\upsilon_1 = \upsilon_2$;

б) $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$;

в) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$;

г) $m_1 \upsilon_1{}^2 = m_2 \upsilon_2^2$?

43. *Потенціальна енергія залежить від координат згідно з законом* $W_p = 3x^3y - 7x$. *У цьому випадку діюча сила дорівнює:*

а) $(7 - 9x^2 y)\vec{i} - 3x^3\vec{j}$;

б) $9x^2 y - 7 + 3x^2$;

в) $6x^3y - 7$;

г) $3x^3\vec{i} + 7\vec{j}$?

44. *З якої рівності можна визначити другу космічну швидкість:*

а) $G\dfrac{mM_з}{r^2} = mg$;

б) $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = mgh$;

в) $\dfrac{m\upsilon^2}{r} = mg$;

г) $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = G\dfrac{mM_3}{R_3}$;

д) $\dfrac{m\upsilon^2}{r} = G\dfrac{mM_3}{r^2}$?

45. *На похилу площину, що складає кут* 45° *з обрієм, вертикально падає кулька. Якою буде траєкторія кульки після абсолютно пружного удару:*

а) кулька відіб'ється в зворотному напрямку;

б) кулька відіб'ється по нормалі до похилої площини;

в) кулька відіб'ється від похилої площини в горизонтальному напрямку, а далі полетить вниз за параболою;

г) кулька рухатиметься вздовж похилої площини?

46. *Чому дорівнює сила тертя, якщо тіло масою* 10 кг*, що рухалось зі швидкістю* 4 м/с*, пройшло до зупинки* 20 м*:*

а) 2 Н; б) 4 Н; в) 8 Н; г) 16 Н?

47. *Яке з формулювань найбільш повно виражає закон збереження механічної енергії:*

а) у замкненій ізольованій консервативній системі енергія всіх тіл з часом не змінюється;

б) енергія всіх тіл замкненої системи не змінюється з часом;

в) у консервативній системі енергія всіх тіл — стала величина;

г) механічна енергія всіх тіл замкненої ізольованої консервативної системи не змінюється з часом?

48. *Тіло масою* m *кинули вертикально вгору з початковою швидкістю* υ_0. *Нехтуючи опором повітря, визначити висоту, на якій швидкість тіла зменшиться вдвічі:*

а) $h = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$;

б) $h = \dfrac{3\upsilon_0^2}{8g}$;

в) $h = \dfrac{\upsilon_0^2}{g}$;

г) $h = \dfrac{\upsilon_0^2}{4g}$?

49. *Парашутист масою* 50 кг *вистрибнув з вертольота на висоті* 1 км *і приземлився зі швидкістю* 10 м/с. *Яка енергія була втрачена парашутистом внаслідок опору повітря:*

а) 0,475 кДж; б) 4,75 кДж; в) 47,5 кДж; г) 475 кДж?

50. *Які з наведених рівнянь відповідають непружному удару двох куль:*

а) $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$;

б) $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$;

в) $\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2}$;

г) $\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{(m_1 + m_2)u}{2} + \Delta Q$?

4. Динаміка обертального руху

51. *Чому дорівнює момент інерції системи матеріальних точок:*

а) $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i r_i^2$;

б) $\int r^2 dm$;

в) $\frac{1}{2} mr^2$;

г) $\frac{2}{5} mr^2$?

52. *Чому дорівнює момент інерції довільного тіла:*

а) $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i r_i^2$;

б) $\int r^2 dm$;

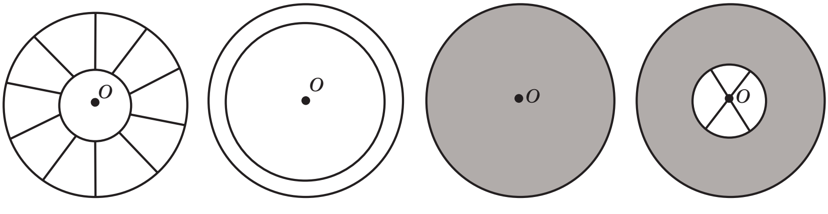
в) $\frac{1}{2} mr^2$;

г) $\frac{2}{5} mr^2$?

53. *Чому дорівнює момент інерції стрижня масою m і довжиною l відносно осі, що проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього:*

а) $J = \frac{2}{5} ml^2$; б) $J = ml^2$; в) $J = \frac{1}{2} ml^2$; г) $J = \frac{1}{12} ml^2$; д) $J = \frac{1}{3} ml^2$?

54. *Яке з наведених тіл однакової маси і радіуса мають найбільший момент інерції відносно осі O:*



а *б* *в* *г*

55. *У якому вигляді основний закон динаміки обертального руху має найбільш загальний характер:*

а) $\vec{M} = J\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$;

б) $\vec{M} = J\vec{\beta}$;

в) $\vec{M} = \dfrac{d(J\vec{\omega})}{dt}$;

г) $\vec{M} = \dfrac{J\vec{\omega}}{t}$?

56. *Чому дорівнює повна кінетична енергія обертально-поступального руху тіла:*

а) $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$;

б) $\dfrac{J\omega^2}{2}$;

в) $\dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}$;

г) $\dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$?

57. *Кут повороту вала змінюється за законом* $\varphi = 3t^2 - 6t + 1$. *Момент інерції вала дорівнює* 20 кг·м^2. *Чому дорівнює обертальний момент:*

а) 20 Н · м; б) 40 Н · м; в) 80 Н · м; г) 120 Н · м?

58. *Кутове прискорення колеса дорівнює* 5 рад/с^2, *його момент інерції* 2 кг·м^2. *Чому дорівнює момент прискорюючої сили:*

а) 20 Н · м; б) 10 Н · м; в) 5 Н · м; г) 2 Н · м?

59. *До вала радіусом* 0,2 м *прикладена дотична сила* 50 Н. *Момент інерції вала дорівнює* 0,5 кг · м^2. *Знайти кутове прискорення вала:*

а) 5 рад/с^2; б) 10 рад/с^2; в) 20 рад/с^2; г) 40 рад/с^2.

60. *Яке формулювання закону збереження моменту імпульсу є найбільш повним:*

а) повний момент імпульсу замкненої ізольованої системи не змінюється з часом;

б) момент імпульсу тіла — величина стала;
в) момент імпульсу замкненої системи тіл з часом не змінюється;
г) повний момент імпульсу всіх тіл не змінюється за напрямком?

61. *Кутова швидкість тіла збільшилась у 3 рази. У скільки разів збільшилась кінетична енергія тіла:*

а) у 3 рази; б) у 9 разів; в) у $\sqrt{3}$ разів; г) у $\sqrt[3]{3}$ разів?

62. *Чому дорівнює кінетична енергія диска, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю* 2 рад/с*? Момент інерції диска дорівнює* 5 кг·м^2*:*

а) 10 Дж; б) 5 Дж; в) 20 Дж; г) 0,5 Дж.

63. *Кінетична енергія тіла, що обертається, дорівнює* 20 Дж. *Чому дорівнює кутова швидкість обертання, якщо момент імпульсу дорівнює* 10 кг·м^2/с:

а) 16 рад/с; б) 8 рад/с; в) 4 рад/с; г) 2 рад/с?

64. *Частота обертання колеса при гальмуванні зменшилась за* 1 *хвилину з* 300 об/хв *до* 180 об/хв. *Момент інерції колеса дорівнює* 2 кг·м^2. *Чому дорівнює робота гальмування:*

а) 64 π^2 Дж; б) 16 π^2 Дж; в) 4 π^2 Дж; г) π^2 Дж?

5. Релятивістська механіка

65. *У чому полягає відносність руху:*

а) у залежності його характеристик від вибору інерціальних систем відліку;

б) у залежності положень тіла та часу подій від вибору інерціальних систем відліку;

в) у залежності всіх кінематичних, динамічних, інертних та часових характеристик руху від вибору інерціальних систем відліку та їх швидкостей;

г) у неодночасності подій у рухомих інерціальних системах відліку, коли вони є одночасними у нерухомих інерціальних системах відліку?

66. *Який вигляд мають перетворення Лоренца у випадку, коли система K' рухається відносно системи K зі швидкістю V:*

а) $x = x' + Vt$; $y = y'$; $z = z'$; $t = t'$;
б) $\upsilon = \upsilon' + V$; $t = t'$;

в) $\upsilon = \dfrac{\upsilon' + V}{1 + \upsilon' \dfrac{V}{c^2}}$;

г) $x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$; $y = y'$; $z = z'$; $t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$?

67. *Якою формулою задається зв'язок між релятивістською довжиною та власною довжиною стрижня, що рухається уздовж прямої, паралельної самому стрижню:*

а) $l = \dfrac{l_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$;

б) $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$;

в) $l = l_0$;

г) $l = l_0 \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$?

68. *Якою є залежність між релятивістськими та власними проміжками часу між подіями:*

а) $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$;

б) $t = \dfrac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$;

в) $\Delta t = \Delta t_0$;

г) $\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$?

69. *Який вигляд має релятивістський закон додавання швидкостей:*

а) $\upsilon' = \upsilon' + V$;

б) $\upsilon = \dfrac{\upsilon' + V}{1 + \upsilon' \dfrac{V}{c^2}}$;

в) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$;

г) $\upsilon' = \upsilon - V$?

70. *Якою формулою задається інтервал між подіями:*

а) $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$;

б) $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2$;

в) $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2$;

г) $\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}$?

71. *Якою формулою задається зв'язок між масою та енергією:*

а) $E = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgh$;

б) $E = mgh$;

в) $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$;

г) $E = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$?

72. *Який вигляд має основне рівняння релятивістської динаміки:*

а) $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$;

б) $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)$;

в) $\vec{F} = \vec{\upsilon}\dfrac{dm}{dt}$;

г) $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\dfrac{dm}{dt}$?

73. *Чому дорівнює кінетична енергія релятивістської частинки:*

а) $\frac{m\upsilon^2}{2}$;

б) $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-m_0c^2$;

в) mc^2;

г) m_0c^2 ?

74. *Чому дорівнює повна енергія релятивістської частинки:*

а) $\frac{m\upsilon^2}{2}$;

б) $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-m_0c^2$;

в) mc^2;

г) m_0c^2 ?

75. *Чому дорівнює енергія спокою релятивістської частинки:*

а) $\frac{m\upsilon^2}{2}$;

б) $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-m_0c^2$;

в) mc^2;

г) m_0c^2?

76. *Якою формулою визначається зв'язок між повною енергією релятивістської частинки та її імпульсом:*

а) $E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$;

б) $E = mc^2$;

в) $E = \frac{p^2}{2m}$;

г) $\vec{p} = \vec{\upsilon}\frac{E}{c^2}$?

6. Механічні коливання

77. *Рівняння гармонічних коливань матеріальної точки* $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. *Як визначається швидкість коливань у будь-який момент часу:*

а) $A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$;

б) $A\omega\cos\varphi_0$;

в) $-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$;

г) $-A\omega^2 \sin\omega t$?

78. *Який вигляд має вираз для прискорення матеріальної точки, якщо вона коливається за гармонічним законом* $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$:

а) $-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$;

б) $-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$;

в) $A\omega^2 \sin\varphi_0$;

г) $A\omega\cos\omega t$?

79. *Максимальна швидкість гармонічних коливань матеріальної точки* 1,5 м/с, *максимальне прискорення* 3 м/с^2. *Чому дорівнює кругова частота коливань:*

а) 0,5 рад/с; б) 1 рад/с; в) 2 рад/с; г) 4,5 рад/с?

80. *Який вигляд має рівняння вільних незатухаючих гармонічних коливань:*

а) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$;

б) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$;

в) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t$;

г) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \dfrac{f_0}{m}\cos\Omega t$?

81. *Рівняння коливань гармонічного осцилятора* $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. *Який вигляд має кінетична енергія гармонічних коливань:*

а) $\dfrac{kA^2}{2}\sin(\omega t + \varphi_0)$;

б) $\dfrac{2\pi A}{T}\cos(\omega t+\varphi_0)$;

в) $\dfrac{1}{2}kA^2$;

г) $\dfrac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$?

82. *Рівняння коливань гармонічного осцилятора* $x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$. *Який вигляд має потенціальна енергія гармонічних коливань:*

а) $\dfrac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$;

б) $\dfrac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi_0)$;

в) $A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)$;

г) $\dfrac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$?

83. *Назвіть вірний вираз для повної енергії гармонічних коливань:*

а) $\dfrac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi_0)$;

б) $\dfrac{m\omega^2A^2}{2}$;

в) $\dfrac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$;

г) $\dfrac{2\pi^2A^2m}{T^2}$.

84. *Рівняння коливань матеріальної точки має вигляд* $x = 2\cos(2\pi t + \dfrac{\pi}{3})$ (*x — у метрах, t — у секундах*). *Чому дорівнює зміщення цієї точки в початковий момент часу* ($t = 0$):

а) 0; б) 1 м; в) 2 м; г) 4 м?

85. *Наскільки змінюється фаза за час одного повного коливання:*

а) 0; б) $\pi/2$; в) π; г) 2π?

86. *За який час після початку руху точка, яка здійснює гармонічні коливання за рівнянням* $x = 5\sin 0{,}25\pi t$, *пройде шлях від положення рівноваги до максимального зміщення:*

а) 0; б) 1 с; в) 2 с; г) 4 с?

87. *За який час після початку руху точка, що гармонічно коливається за законом* $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, *зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань дорівнює* 36 с, *початкова фаза дорівнює нулю:*

а) 3 с; б) 6 с; в) 0,3 с; г) 9 с?

88. *Вантаж масою* 4 кг *гармонічно коливається під дією сили* $F = -\pi^2 x$. *Чому дорівнює період коливань:*

а) 1 с; б) 2 с; в) 8 с; г) 4 с?

89. *Чому дорівнює період коливань математичного маятника:*

а) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; б) $2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$; в) $2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}$; г) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$?

90. *Як зміниться частота коливань математичного маятника, якщо його довжину збільшити в* 4 *рази:*

а) збільшиться в 4 рази;
б) зменшиться в 4 рази;
в) збільшиться в 2 рази;
г) зменшиться в 2 рази?

91. *Чому дорівнює період коливань фізичного маятника:*

а) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; б) $2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$; в) $2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}$; г) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$?

92. *Чому дорівнює приведена довжина фізичного маятника, маса якого дорівнює* 4 кг, *відстань від осі обертання до центра тяжіння дорівнює* 1,5 м, *момент інерції відносно осі коливань* 30 кг·м^2:

а) 2 м; б) 1,5 м; в) 1 м; г) 0,5 м?

93. *Чому дорівнює період коливань фізичного маятника, для якого маса дорівнює* 1 кг, *момент інерції відносно осі коливань* 40 кг·м^2, *відстань від осі обертання до центра тяжіння дорівнює* 1 м (g = 10 м/с^2):

а) 4π (с); б) 2π (с); в) 16π (с); г) π (с)?

94. *Який вигляд має рівняння затухаючих гармонічних коливань:*

а) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$

б) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$

в) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t;$

г) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{f_0}{m}\cos\Omega t?$

95. *Чому дорівнює логарифмічний декремент затухання, якщо період коливань дорівнює* 2,5 с, *а коефіцієнт затухання* 2 с$^{-1}$:

а) 1,25; б) 5; в) 10; г) 12,5?

96. *Який вигляд має рівняння вимушених коливань:*

а) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$

б) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$

в) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t;$

г) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \dfrac{f_0}{m}\cos\Omega t?$

97. *При якому співвідношенні між частотою* Ω *періодичної вимушуючої сили і частотою власних коливань цього тіла спостерігається резонанс (з урахуванням опору середовища):*

а) $\Omega > \omega_0$; б) $\Omega < \omega_0$; в) $\Omega = \omega_0$; г) $\Omega = 0,5\omega_0$?

98. *При додаванні яких коливань спостерігаються биття:*

а) додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами, які відбуваються в одному напрямку;

б) додавання двох гармонічних коливань, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках;

в) збіг частоти зовнішньої сили з власною частотою коливань системи;

г) додавання двох коливань з однаковими амплітудами, частотами та довжинами хвиль, що поширюються одночасно в одному середовищі у протилежних напрямках?

99. *За яких умов спостерігаються фігури Ліссажу:*

а) додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами, які відбуваються в одному напрямку;

б) додавання двох гармонічних коливань, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках;

в) збіг частоти зовнішньої сили з власною частотою коливань системи;

г) додавання двох коливань з однаковими амплітудами, частотами та довжинами хвиль, що поширюються одночасно в одному середовищі у протилежних напрямках?

100. *Яку траєкторію описує тіло, яке бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, амплітуди яких однакові, а різниця фаз дорівнює* $\frac{\pi}{2}$:

а) пряму;

б) еліпс;

в) коло;

г) складну фігуру Ліссажу?

7. Молекулярна фізика і термодинаміка

101. *Якими ефектами в газі можна знехтувати, щоб вважати газ ідеальним:*

а) взаємодією молекул на відстані;

б) розмірами молекул;

в) взаємодією молекул при зіткненнях;

г) масами молекул?

102. *Чому дорівнює тиск:*

а) $\frac{dF_n}{dS}$; б) $\frac{dm}{dV}$; в) $\frac{dV}{dm}$; г) $\frac{M}{\rho}$?

103. *Який вигляд має рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва — Клапейрона):*

а) $pV = RT$;

б) $pV = \frac{m}{M}RT$;

в) $\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$;

г) $p(V-b)=RT$?

104. *Від яких величин, що характеризують рух молекул, залежить тиск газу:*

а) сили притягання молекул;
б) кінетичної енергії молекул;
в) середньоквадратичної швидкості;
г) середньої довжини вільного пробігу;
д) кількості зіткнень молекул?

105. *Який вигляд має рівняння ізотерми:*

а) $pV = \text{const}, T = \text{const}, m = \text{const}$;
б) $\frac{V}{T} = \text{const}, p = \text{const}, m = \text{const}$;
в) $\frac{p}{T} = \text{const}, V = \text{const}, m = \text{const}$;
г) $pV^{\gamma} = \text{const}$?

106. *Який вигляд має рівняння адіабати:*

а) $pV = \text{const}, T = \text{const}, m = \text{const}$;
б) $\frac{V}{T} = \text{const}, p = \text{const}, m = \text{const}$;
в) $\frac{p}{T} = \text{const}, V = \text{const}, m = \text{const}$;
г) $pV^{\gamma} = \text{const}$?

107. *Який вигляд має рівняння ізохори:*

а) $pV = \text{const}, T = \text{const}, m = \text{const}$;
б) $\frac{V}{T} = \text{const}, p = \text{const}, m = \text{const}$;
в) $\frac{p}{T} = \text{const}, V = \text{const}, m = \text{const}$;
г) $pV^{\gamma} = \text{const}$?

108. *Який вигляд має рівняння ізобари:*

а) $pV = \text{const}, T = \text{const}, m = \text{const}$;
б) $\frac{V}{T} = \text{const}, p = \text{const}, m = \text{const}$;
в) $\frac{p}{T} = \text{const}, V = \text{const}, m = \text{const}$;
г) $pV^{\gamma} = \text{const}$?

109. *Дайте визначення температури:*

а) міра середньої кінетичної енергії молекул;

б) міра кількості зіткнень молекул;

в) міра внутрішньої енергії речовини;

г) характеристика агрегатного стану речовини.

110. *Що називається кількістю ступенів вільності молекули газу:*

а) кількість атомів у молекулі;

б) кількість пружних зв'язків між атомами в молекулі;

в) кількість незалежних координат, за допомогою яких можна описати положення молекул у просторі;

г) кількість можливих незалежних переміщень молекули в просторі?

111. *Чому дорівнює середня кінетична енергія молекули, що припадає на один ступінь вільності:*

а) $\frac{3}{2}kT$;

б) kT;

в) $\frac{i}{2}kT$;

г) $\frac{1}{2}kT$?

112. *Чому дорівнює середня кінетична енергія поступального руху багатоатомної молекули:*

а) $\frac{3}{2}kT$;

б) kT;

в) $\frac{i}{2}kT$;

г) $\frac{1}{2}kT$?

113. *Чому дорівнює найбільш імовірна швидкість молекул газу:*

а) $\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$; б) $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$; в) $\sqrt{\frac{2kT}{m}}$; г) 0?

114. *Чому дорівнює середня арифметична швидкість молекул газу:*

а) $\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$; б) $\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$; в) $\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$; г) 0?

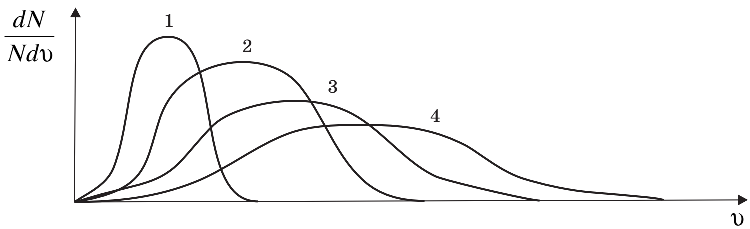
115. *Чому дорівнює середня квадратична швидкість молекул газу:*

а) $\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$; б) $\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$; в) $\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$; г) 0?

116. *Як зміниться середня квадратична швидкість молекул, якщо абсолютну температуру газу зменшити в 2 рази:*

а) збільшиться в 4 рази;
б) зменшиться в 2 рази;
в) збільшиться в $\sqrt{2}$ рази;
г) зменшиться в $\sqrt{2}$ рази?

117. *Яка з кривих розподілу молекул за швидкостями (розподілу Максвелла) відповідає найвищій температурі:*



118. *Для якого розподілу температури за висотою справедлива барометрична формула:*

а) температура є сталою;
б) довільно змінюється з висотою;
в) зменшується з висотою;
г) збільшується з висотою?

119. *Яка з наведених формул описує розподіл молекул газу з висотою в полі тяжіння Землі:*

а) $dN = N\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-\upsilon^2}d\upsilon$;

б) $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$;

в) $W = mgh$;

г) $W = -G\dfrac{mM}{r}$?

120. *Чому дорівнює питома теплоємність тіла:*

а) $\dfrac{\delta Q}{dT}$;

б) $\dfrac{1}{m}\dfrac{\delta Q}{dT}$;

в) $\dfrac{1}{M}\dfrac{\delta Q}{dT}$;

г) $\dfrac{Q}{\Delta T}$?

121. *Чому дорівнює молярна теплоємність тіла:*

а) $\dfrac{\delta Q}{dT}$;

б) $\dfrac{M}{m}\dfrac{\delta Q}{dT}$;

в) $\dfrac{1}{M}\dfrac{\delta Q}{dT}$;

г) $\dfrac{Q}{\Delta T}$?

122. *Чому дорівнює молярна теплоємність ідеального газу при сталому тиску:*

а) $\dfrac{i+2}{2}R$;

б) $\dfrac{i}{2}R$;

в) $\dfrac{i}{2M}R$;

г) $\dfrac{i+2}{2M}R$?

123. *Які з наведених формул відповідають роботі газу:*

а) $p\Delta V$;

б) $\dfrac{i}{2}R\Delta T$;

в) $\frac{m}{M}C_p\Delta T$;

г) $p_1V_1\ln\frac{p_1}{p_2}$?

124. *Робота, яку виконує ідеальний газ, дорівнює нулю. Який це процес:*

а) ізотермічний;
б) адіабатичний;
в) ізохоричний;
г) ізобаричний?

125. *Чому дорівнює внутрішня енергія маси m ідеального газу:*

а) $m\frac{i}{2}RT$;

б) $m\frac{i}{2}kT$;

в) $\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$;

г) $\frac{m}{M}ikT$?

126. *Яке твердження виконується для ізотермічних процесів у ідеальному газі:*

а) робота, яку виконав ідеальний газ, дорівнює кількості теплоти, яку він отримав;
б) зміна внутрішньої енергії дорівнює кількості теплоти, отриманої газом;
в) кількість теплоти, отримана газом, дорівнює нулю;
г) зміна внутрішньої енергії газу дорівнює роботі, яку виконав газ?

127. *Що стверджує перше начало термодинаміки:*

а) незалежно від початкового стану ізольованої термодинамічної системи в ній через деякий скінченний час завжди встановлюється термодинамічна рівновага;
б) кількість теплоти, що передана системі, дорівнює сумі зміни її внутрішньої енергії та роботи, яку виконує система над зовнішнім середовищем;
в) неможливий циклічний процес, виключним результатом якого було б перетворення теплоти, що отримує система від зовнішнього середовища, на роботу без змін у зовнішньому середовищі;

г) усі процеси при абсолютному нулі температур, у яких система переходить з одного рівноважного стану в інший, відбуваються без зміни ентропії?

128. *Яке з рівнянь першого начала термодинаміки виконується для ізотермічного процесу:*

а) $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$;

б) $\Delta Q = \Delta A$;

в) $\Delta Q = \Delta U$;

г) $\Delta U = -\Delta A$?

129. *Які з рівнянь відповідають адіабатичному процесу:*

а) $pV^{\gamma} = \text{const}$;

б) $pV = \text{const}$;

в) $\dfrac{p}{T} = \text{const}$;

г) $TV^{\gamma-1} = \text{const}$;

д) $\dfrac{V}{T} = \text{const}$?

130. *Що називається коефіцієнтом корисної дії циклу Карно:*

а) відношення одержаної газом теплоти до виконаної в повному циклі роботи;

б) відношення виконаної за один цикл роботи до одержаної від нагрівника кількості теплоти;

в) відношення переданої холодильнику кількості теплоти до кількості теплоти, одержаної від нагрівника;

г) відношення різниці температур нагрівника і холодильника до температури нагрівника?

131. *Які з характеристик є функціями стану речовини:*

а) внутрішня енергія;

б) кількість теплоти;

в) ентропія;

г) виконана робота?

132. *Які властивості нагрітих тіл характеризує ентропія тіла:*

а) температуру тіла;

б) ступінь впорядкованості руху молекул;

в) середню кінетичну енергію молекул;
г) приведену кількість теплоти?

133. *Який зв'язок ентропії S з термодинамічною імовірністю стану:*
а) $S \approx w$;
б) $\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T}$;
в) $S = k \ln w$;
г) $\Delta S < \dfrac{\Delta Q}{T}$?

134. *Яку умову задовольняє оборотний процес в ізольованій системі:*
а) ентропія системи збільшується;
б) ентропія системи зменшується;
в) ентропія системи залишається сталою;
г) ентропія системи спочатку збільшується, а потім зменшується?

135. *За якими формулами можна розрахувати довжину вільного пробігу* λ:
а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$;
б) $\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$;
в) $\dfrac{\upsilon}{z}$;
г) $\upsilon \Delta t$?

136. *Який стан газу називається вакуумом:*
а) простір, у якому немає молекул;
б) стан газу, при якому середня довжина вільного пробігу молекул сумірна з розмірами посудини;
в) стан газу, при якому відсутня взаємодія молекул;
г) стан газу, при якому середня довжина вільного пробігу молекули порядку розмірів молекул?

137. *Яка фізична величина переноситься при дифузії:*
а) кінетична енергія молекул;
б) маса;
в) кількість руху молекул, що хаотично рухаються;
г) кількість руху молекул, що рухаються за одним напрямком?

138. *Укажіть рівняння, що описують процес дифузії:*

а) $D = \frac{1}{3} < \upsilon >< \lambda >$;

б) $\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} S \Delta \tau$;

в) $\Delta (m\upsilon) = -\eta \frac{d\upsilon}{dz} S \Delta \tau$;

г) $\Delta Q = -\chi \frac{dT}{dx} S \Delta \tau$.

139. *Яка фізична величина переноситься при процесі теплопровідності:*

а) кінетична енергія молекул;
б) маса;
в) кількість руху молекул, що хаотично рухаються;
г) кількість руху молекул, що рухаються за одним напрямком?

140. *Укажіть рівняння, що описує процес теплопровідності:*

а) $\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} S \Delta \tau$;

б) $\Delta (m\upsilon) = -\eta \frac{d\upsilon}{dz} S \Delta \tau$;

в) $\Delta Q = -\chi \frac{dT}{dx} S \Delta \tau$;

г) $\chi = \frac{1}{3} c_v \rho < \upsilon >< \lambda >$.

141. *Що є причиною процесу внутрішнього тертя:*

а) градієнт концентрації молекул;
б) градієнт температури;
в) градієнт швидкості впорядкованого руху молекул;
г) градієнт густини молекул?

142. *Яке рівняння описує процес внутрішнього тертя (в'язкості):*

а) $\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} S \Delta \tau$;

б) $\Delta (m\upsilon) = -\eta \frac{d\upsilon}{dz} S \Delta \tau$;

в) $F = 6\pi\eta R\upsilon$;

г) $\eta = \frac{1}{3} \rho < \upsilon >< \lambda >$?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Фізичні величини та одиниці фізичних величин

Фізичні закони виражаються у вигляді математичних співвідношень між фізичними величинами. Під останніми розуміють характеристики (властивості) фізичних об'єктів (предметів, станів, процесів), що вимірюються.

Кожна фізична величина являє собою добуток чисельного значення на одиницю величини.

Скалярні та векторні величини

Скалярні величини повністю характеризуються чисельним значенням та одиницею величини. *Векторні* величини повністю характеризуються чисельним значенням, одиницею величини та напрямком.

У фізиці найчастіше вектори пов'язані з лінією їх дії та можуть переміщуватися лише вздовж неї (колінеарні вектори).

Вектори, що виходять із строго зазначеної точки (наприклад, початку координат), взагалі не можуть змінюватися і називаються орт-векторами. Аксіальні вектори (псевдовектори) — вектори, що не мають строго зазначеної точки прикладання: вони можуть бути відкладені від будь-якої точки осі обертання. Як правило, точку прикладання вектора поєднують з точкою, що приймається за початок координат системи відліку.

- Векторний добуток двох векторів $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]$ — вектор, що має довжину $a=|\vec{b}||\vec{c}|\sin(\vec{b}\hat{}\vec{c})$, перпендикулярний векторам $\vec{b}$ і $\vec{c}$, так що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ складають праву трійку векторів.
- Скалярній добуток двох векторів
$$a=(\vec{b};\vec{c})=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos(\vec{b}\hat{}\vec{c}).$$
- Подвійний векторний добуток трьох векторів $[\vec{a}[\vec{b};\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-$ $-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.
- Змішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ не змінюється при коловій перестановці всіх співмножників. При перестановці двох співмножників змішаний добуток змінює знак.
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}\ .$$

Основні та похідні величини

У фізиці використовуються як основні, так і похідні величини. Похідні величини можна одержати за допомогою основних величин, або використовуючи вирази для законів природи, або шляхом визначення їх через добуток чи ділення основ4них величин. Наприклад, похідна величина *ньютон* дорівнює: 1 Н = (кг · м)/с^2.

Розмірність

Розмірність фізичної величини встановлює її зв'язок з основними величинами. Вона зображує добуток ступенів розмірностей основних величин. Наприклад, для швидкості рівномірного прямолінійного руху, що обчислюється за формулою $\upsilon = \frac{S}{t}$, розмірність dim $\upsilon = L \cdot T^{-1}$, одиниця величини $[\upsilon] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Міжнародна система одиниць

У 1960 році прийнята єдина міжнародна система одиниць — СІ. У системі СІ використовують сім основних величин: довжина, час, маса, температура, сила струму, кількість речовини, сила світла та дві додаткові — радіан та стерадіан.

Основні одиниці СІ

Одиниця довжини — метр (м)

Метр дорівнює відстані, яку проходить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля за 1/299 792 458 частку секунди.

Одиниця часу — секунда (с)

Секунда дорівнює 9192 631 770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома надтонкими лініями основного стану атома цезію — 133.

Одиниця маси — кілограм (кг)

Кілограм дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма. Прототип кілограма виготовлений із платино-іридієвого сплаву (Pl 90 %, Ir 10 %) у вигляді циліндричної гирі діаметром та висотою 39 мм; відносна похибка порівняння з прототипом еталонів-копій не перевищує $2 \cdot 10^{-9}$.

Одиниця сили електричного струму — ампер (А)

Ампер дорівнює силі незмінного струму, який при проходженні по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і дуже малій площі кругового поперечного перерізу, розміщених у вакуумі на відстані 1 м один від одного, викликав би на кожній ділянці провідника довжиною в 1 м силу взаємодії, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Одиниця температури — кельвін (K)

Кельвін дорівнює 1/273,16 частці термодинамічної температури потрійної точки води.

Одиниця кількості речовини — моль (моль)

Моль дорівнює кількості речовини системи, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у 0,012 кг вуглецю C_{12}. При використанні моля структурні елементи повинні бути специфікованими групами частинок.

Одиниця сили світла — кандела (кд)

Кандела дорівнює силі світла джерела в заданому напрямку, яке імітує монохроматичне випромінювання частотою $540 \cdot 10^{12}$ Гц, енергетична сила світла якого в цьому напрямку складає $\frac{1}{683}$ Вт/ср.

Додаткові одиниці СІ

Плоский кут — радіан (рад)

Радіан дорівнює куту між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу.

Тілесний кут — стерадіан (ср)

Стерадіан дорівнює тілесному куту з вершиною в центрі сфери, який вирізає на поверхні цієї сфери площу, що дорівнює площі квадрата зі стороною, яка дорівнює радіусу цієї сфери.

Додаток 2

1. Основні фізичні сталі

Стала	Позначення	Числове значення
1	2	3
Прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с^2
Гравітаційна стала	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Стала Авогадро	N_A	$6{,}62\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Універсальна газова стала	R	8,31 Дж/(моль·К)
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов	V_0	$22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Нормальний атмосферний тиск	p_0	$1{,}01\cdot10^{5}$ Па
Стала Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/к
Стала Фарадея	F	$9{,}65\cdot10^{4}$ Кл/моль
Елементарний заряд	e	$1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ кг $5{,}49\cdot10^{-4}$ а.о.м.
Маса спокою протона	m_p	$1{,}67\cdot10^{-27}$ кг 1,00728 а.о.м.
Маса спокою нейтрона	m_n	$1{,}67\cdot10^{-27}$ кг 1,00866 а.о.м.
Відношення заряду електрона до його маси	$\frac{\lvert e\rvert}{m_e}$	$1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Електрична стала	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м = = $12{,}57\cdot10^{-7}$ Н/А^2
Швидкість світла в вакуумі	c	$2{,}998\cdot10^{8}$ м/с

Закінчення таблиці

1	2	3
Стала Стефана — Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Стала Планка	h	$6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж·с
Стала в законі зміщення Віна	b_1	$2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К
Стала Віна в другому законі Віна	C	$1{,}30\cdot10^{-5}$ Вт/(м^2·К^4)
Стала Рідберга	R_∞	$1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Борівський радіус	a_0	$5{,}29\cdot10^{-11}$ м
Комптонівська довжина хвилі електрона	λ_e	$2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_e	$9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерний магнетон	μ_N	$5{,}05\cdot10^{-27}$ Дж/Тл
Атомна одиниця маси	а.о.м	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Коефіцієнт пропорційності між масою й енергією	c^2	$8{,}99\cdot10^{16}$ Дж/Кг

2. Деякі астрономічні величини

Фізичні параметри	Сонце	Земля	Місяць
Маса, кг	$1{,}97\cdot10^{30}$	$5{,}96\cdot10^{24}$	$7{,}33\cdot10^{22}$
Радіус, м	$6{,}95\cdot10^{8}$	$6{,}37\cdot10^{6}$	$1{,}74\cdot10^{6}$
Середня густина, кг/м^3	1400	5518	3350
Середня відстань від Землі, км	$1{,}496\cdot10^{8}$	—	384 440

3. Густина речовини

Тверді тіла при 293 K		Рідини		Гази за нормальних умов $T_0 = 273{,}15$ K $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па	
Речовина	$\rho \cdot 10^3$, кг/м^3	Речовина	ρ, кг/м^3	Речовина	ρ, кг/м^3
Алюміній	2,69	Бензол (t = 20 °C)	879	Азот	1,250
Залізо, хімічно чисте	7,86	Вода (t = + 4 °C)	1000	Водень	0,089
Латунь	8,3–8,7	Вода (t = 100 °C)	958	Вуглекислий газ	1,977
Лід (0 °C)	0,91	Гас (t = 0 °C)	800	Гелій	0,178
Мідь електролітична	8,88–8,96	Гліцерин (t = 0 °C)	1260	Кисень	1,429
Нікель	8,4–9,2	Рицинова олія (t = 20 °C)	950	Метан	0,717
Олово лите	7,23	Скипидар (t = 16 °C)	858	Неон	0,900
Сталь лита	7,7–8,0	Спирт етиловий (t = 0 °C)	789	Повітря	1,293
Свинець	11,22–11,44	Спирт метиловий (t = 0 °C)	792		
Срібло	10,42–10,57	Толуол (t = 18 °C)	870		
Цинк	6,86–7,24	Ртуть (t = 0 °C)	13 596		
Чавун	6,6–7,3				

4. Фізичні параметри газів

Газ	Температурний коефіцієнт тиску $\beta \cdot 10^{-6}$, K^{-1}	Питома теплоємність при 0 °С c_p, Дж/(кг·К)	C_p/C_V	Коефіцієнт теплопровідності при 0 °С $\chi \cdot 10^{-3}$, Вт/(м·К)	Коефіцієнт внутрішнього тертя при 0 °С $\eta \cdot 10^{-6}$, Па·с
Азот (N_2)	3674	$1{,}0 \cdot 10^3$	1,40	23,9	16,7
Водень (H_2)	3662	$1{,}43 \cdot 10^4$	1,40	169	8,4
Вуглекислий газ (CO_2)	3726	848	1,30	14,7	14,0
Гелій (He)	3660	5240	1,66	143	18,9
Кисень (O_2)	3674	913	1,40	24,5	19,2
Повітря сухе	3674	1011	1,40	24,1	17,5

5. Фізичні характеристики рідин

Рідина	Коефіцієнт поверхневого натягу при 20 °С $\sigma \cdot 10^{-3}$, Н/м	Коефіцієнт внутрішнього тертя при 20 °С $\eta \cdot 10^{-3}$, Па·с	Коефіцієнт об'ємного розширення при 20 °С $\beta \cdot 10^{-5}$, K^{-1}	Точка кипіння при $p_0 =$ $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па t_k, °С
Бензол	30	0,673	124	80,2
Вода	72,6	1,005	21	100,0
Гліцерин	66	1,480	50	290,0
Олія рицинова	36,4	970	—	—
Ртуть	500,0	1,590	18	356,7
Спирт етиловий	22,0	1,2	110	78,3

Рідина	Питома теплота пароутворення $r \cdot 10^5$, Дж/кг	Коефіцієнт теплопровідності при 20 °C $\chi \cdot 10^{-2}$, Вт/(м·К)	Питома теплоємність $c \cdot 10^3$, Дж/(кг·К)
Бензол	3,94	—	1,71
Вода	22,6	60	4,18
Гліцерин	—	29	2,43
Олія рицинова	—	—	2,1
Ртуть	2,85	908	0,125
Спирт етиловий	8,57	17	2,43

6. Теплофізичні характеристики твердих тіл

Матеріал	Температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$	Питома теплоємність при 18 °C $c \cdot 10^2$, Дж/(кг·К)	Коефіцієнт теплопровідності при 18 °C χ, Вт/(м·К)	Температура плавлення $t_{пл}$, °C	Питома теплота плавлення $\lambda \cdot 10^5$, Дж/кг
Алюміній	23,8	9,2	200,6	660	3,8
Залізо	12,1	4,6	58,5	1539	2,7
Лід	51,0	20,9	2,5	0	3,35
Мідь	16,7	3,8	384,0	1083	1,8
Парафін	107–407	32,0	0,21	38–56	1,5
Свинець	29,3	1,2	34,7	327	0,25
Срібло	19,7	2,5	422,2	960,8	0,88
Ебоніт	84,0	—	0,17	—	—

Питома теплота згоряння палива 10^7 Дж/кг

Бензин	4,61	Гас	4,61
Деревина	1,26	Нафта	4,61
Кам’яне вугілля	2,93	Спирт	2,93

7. Деякі сталі для газів

Газ (відносна молекулярна маса M_r)	Діаметр молекули d, нм	Сталі Ван-дер-Ваальса		Критична темпера-тура $T_{кр}$, K	Критичний тиск $p_{кр}$, МПа
		a, $\frac{Па \cdot м^6}{моль^2}$	$b \cdot 10^{-6}$, $м^3/моль$		
H_2 (2)	0,27	0,024	27	33	1,3
He (4)	0,20	—	—	5,2	0,23
H_2O (18)	0,30	0,554	30	647	22,1
Ne (20)	0,26	—	—	44,4	2,72
N_2 (28)	0,37	0,137	39	126	3,39
O_2 (32)	0,35	0,137	32	155	5,08
Ar (40)	0,35	0,132	32	151	4,86
CO_2 (4)	0,40	0,367	43	304	7,38
Повітря (29)	0,35	0,140	—	—	—

8. Пружні властивості твердих тіл

Матеріал	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{10}$, Па	Модуль зсуву, $G \cdot 10^{10}$, Па	Коефіцієнт Пуассона, μ	Границя міцності, $\sigma_m \cdot 10^8$, Па
Алюміній	6,1–7,4	2,2–2,6	0,33	0,98–3,90
Залізо коване	20–22	6,9–8,3	0,28	3,90–5,90
Сталі	20–22	7,8–8,1	0,28	4,9–15,7
Чавуни сірі, білі	7,4–17,6	4,9	0,23–0,27	1,17–1,27
Латунь	7,8–9,8	2,6–3,6	0,3–0,4	0,98–4,90
Мідь	1,0–13	3,8–4,7	0,31–0,40	1,56–4,41
Свинець	1,5–1,7	0,54	0,44	0,0196
Гетинакс	1,0–1,7	—	—	—
Текстоліт	0,14–0,28			

9. Швидкість звуку

Речовина	$\upsilon_{зв}$, м/с
Вода	1450
Повітря	332

10. Множники і префікси для утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позначення	Множник	Найменування	Позначення	Множник
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	мілі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^{9}	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^{3}	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

11. Латинський алфавіт

A, a — а	N, n — ен
B, b — бе	O, o — о
C, c — це	P, p — пе
D, d — де	Q, q — ку
E, e — е	R, r — ер
F, f — еф	S, s — ес
G, g — ге	T, t — те
H, h — аш	U, u — у
I, I — і	V, v — ве
J, j — йот	W, w — дубль-ве
K, k — ка	X, x — ікс
L, l — ель	Y, y — ігрек
M, m — ем	Z, z — зет

12. Грецький алфавіт

Α, α — альфа	Ν, ν — ню
Β, β — бета	Ξ, ξ — ксі
Γ, γ — гамма	Ο, ο — омікрон
Δ, δ — дельта	Π, π — пі
Ε, ε — епсилон	Ρ, ρ — ро
Ζ, ζ — дзета	Σ, σ — сигма
Η, η — ета	Τ, τ — тау
Θ, θ — тета	Υ, υ — іпсилон
Ι, ι — йота	Φ, φ — фі
Κ, κ — каппа	Χ, χ — хі
Λ, λ — ламбда	Ψ, ψ — псі
Μ, μ — мю	Ω, ω — омега

13. Деякі сталі числа і наближені формули

Сталі числа	Наближені формули (при $\alpha < 1$)
$\pi = 3{,}1416$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$e^\alpha \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha$
$e = 2{,}7183$	$\sin\alpha \approx \alpha$
$\lg e = 0{,}4343$	$\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$
$\ln 10 = 2{,}3026$	$\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1, 2, 3. — М.: Наука, 1989.
2. *Сивухін Д. В.* Загальний курс фізики. — М.: Наука, 1990.
3. *Детлаф В. Н., Яворский Б.* Курс физики. — М.: Высшая школа, 1985.
4. *Кузьмичев В. Е.* Законы и формулы физики. — К.: Наукова думка, 1989.
5. *Базаров И. П.* Термодинамика. — М.: Высшая школа, 1991.
6. *Чертов О. Г, Воробьев А. А.* Задачник по физике. — М.: Высшая школа, 1988.

Навчальне видання

СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович
КІБЕЦЬ Інна Миколаївна
РИБАЛКА Антоніна Іванівна
ТКАЧЕНКО Тетяна Борисівна

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ

Частина I

Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка

Редактор *Ю. В. Статкевич*
Комп'ютерна верстка *О. А. Федосєєвої*
Дизайн обкладинки *А. В. Пивоварова*

Підписано до друку 28.09.2006. Формат 60×90/16. Папір офсетний
Гарнітура Times Ten Cyrillic. Друк ризографічний. Умов. друк. арк. 20
Обл.-вид. арк. 22,63. Тираж 1000 прим. Зам. № 32

ТОВ «Компанія СМІТ»
61166, м. Харків, просп. Леніна,14
Тел. (057) 717-54-94,702-08-16
Факс: (057) 702-13-07
E-mail: book@smit.com.ua
http://www.smit-book.com

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розпровсюджувачів
видавничої продукції ДК № 435 від 26.04.2001

Друк — ФОП Васильєва Н. В.
м. Харків, просп. Леніна, 14
Тел. (057) 702-13-07