

І. М. Кібець
А. І. Рибалка
В. О. Стороженко

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

з прикладами
і задачами

Електрика
та магнетизм

Навчальний посібник
Частина II

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник



Харків
Компанія СМІТ
2009

ББК 22.33
УДК 537
К38

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

Р е ц е н з е н т и:

- А. П. Поліщук*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
зав. каф. загальної фізики Національного
авіаційного університету (НАУ);
О. Г. Нерух, д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. каф. математики
Харківського національного університету радіоелектроніки;
О. П. Сук, канд. фіз.-мат. наук,
проф. каф. загальної та експериментальної фізики НТУ «ХПІ»

Кібець, І. М.

К38 **Загальна фізика з прикладами і задачами [Текст]. Ч. II.**
Електрика та магнетизм : навч. посібник / І. М. Кібець,
А. І. Рибалка, В. О. Стороженко. — Х. : Компанія СМІТ,
2009. — 424 с.

ISBN 978-966-2028-45-4

У навчальному посібнику викладено основні положенні електромагнетизму та теорії механічних і електромагнітних хвиль. особливу увагу приділено фізичному смислу та інтерпретації основних законів, аналізу експериментальних даних. Значний обсяг теоретичного матеріалу, прикладів розв'язання задач, а також задач для самостійної роботи, тестів і довідкового матеріалу вигідно відрізняє цей посібник серед інших видань.

Для студентів і викладачів вищих технічних навчальних закладів.

ББК 22.33
УДК 537

ISBN 978-966-2028-45-4

© І. М. Кібець, А. І. Рибалка,
В. О. Стороженко, 2008
© ТОВ «Компанія СМІТ», 2009

ЗМІСТ

Передмова	9
---------------------	---

I. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

1. Електричне поле у вакуумі	10
1.1. Електричний заряд і його властивості	10
1.2. Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона	11
1.3. Електричне поле. Напруженість електричного поля	12
1.4. Принцип суперпозиції електричних полів	14
1.5. Потенціал електричного поля	15
1.6. Потік вектора напруженості. Теорема Гаусса у вакуумі	23
1.7. Застосування теореми Гаусса для розрахунку електростатичних полів у вакуумі	28
1.8. Електричний диполь	35
1.9. Диполь у зовнішньому електричному полі	38
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	40
Завдання для експрес-контролю	41
Приклади розв'язання задач	42
Задачі для самостійного розв'язання	49
2. Електричне поле в діелектриках	59
2.1. Типи діелектриків. Поляризація діелектриків	59
2.2. Зв'язок поляризованості з поверхневою і об'ємною густиною зв'язаних зарядів..	63
2.3. Вектор електричної індукції	66
2.4. Умови для електростатичного поля на межі двох ізотропних діелектричних середовищ (граничні умови)	70
2.5. Спонтанно поляризовані діелектрики	74
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	79
Завдання для експрес-контролю	80
Приклади розв'язання задач	81
Задачі для самостійного розв'язання	89
3. Провідники в електричному полі	93
3.1. Електроємність	95
3.2. Конденсатори. Приклади обчислення ємностей	98
3.3. Сполучення конденсаторів.	100
3.4. Енергія системи зарядів, відокремленого провідника та конденсатора. Енергія електричного поля	104
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	107
Завдання для експрес-контролю	108
Приклади розв'язання задач	109
Задачі для самостійного розв'язання	116

II. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

4. Постійний електричний струм	126
4.1. Електричний струм і його характеристики.	126

4.2. Закон безперервності струму	129
4.3. Закон Ома для однорідної та неоднорідної ділянки кола. Електрорушійна сила	131
4.4. Закон Ома в диференціальній формі.	136
4.5. Правила Кірхгофа та їх застосування для розгалуженого кола	137
4.6. Робота й поужність електричного струму	138
4.7. Теплова дія електричного струму. Закон Джоуля — Ленца	141
5. Електричний струм у металах, рідинах, газах і вакуумі	143
5.1. Природа носіїв струму в металах	143
5.2. Основні положення класичної електронної теорії провідності металів	145
5.3. Закон Ома	146
5.4. Закон Джоуля — Ленца	148
5.5. Закон Відемана — Франца	149
5.6. Труднощі класичної теорії електропровідності	151
5.7. Електричний струм у рідинах	152
5.8. Електричний струм у газах	155
5.9. Електричний струм у вакуумі	159
Контрольні запитання та завдання для самоконтролю.	160
Завдання для експрес-контролю	162
Приклади розв'язання задач.	163
Задачі для самостійного розв'язання	169

III. МАГНІТНЕ ПОЛЕ

6. Магнітне поле у вакуумі	177
6.1. Природа магнітного поля	177
6.2. Сила Ампера	179
6.3. Контур зі струмом у магнітному полі	182
6.4. Сила Лоренца	185
6.5. Ефект Холла	191
6.6. Закон Біо — Савара — Лапласа. Принцип суперпозиції магнітних полів	192
6.7. Магнітне поле рухомого заряду.	193
6.8. Приклади визначення вектора індукції магнітного поля.	194
6.9. Магнітний потік. Теорема Остроградського — Гаусса для вектора магнітної індукції у вакуумі	197
6.10. Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму	198
6.11. Застосування теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції для розрахунку магнітних полів	200
6.12. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі.	202
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	203
Завдання для експрес-контролю	204
Приклади розв'язання задач.	206

Задачі для самостійного розв'язання	218
7. Магнітне поле в речовині.	235
7.1. Магнітні моменти атомів	235
7.2. Магнетики та їх намагнічування. Вектор намагнічування	237
7.3. Теорема про циркуляцію (закон повного струму) для магнітного поля в речовині	239
7.4. Граничні умови для векторів \vec{B} і \vec{H}	242
7.5. Класифікація магнетиків	244
7.6. Діамагнетизм	245
7.7. Парамагнетизм	247
7.8. Феромагнетизм	248
7.9. Магнітне поле Землі	254
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки і експрес-контролю	256
Приклади розв'язання задач.	257
Задачі для самостійного розв'язання.	260
8. Електромагнітна індукція	262
8.1. Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея	262
8.2. Закон електромагнітної індукції Фарадея і правило Ленца.	263
8.3. Електрорушійна сила електромагнітної індукції	265
8.4. Явище самоіндукції. Індуктивність.	268
8.5. Явище взаємної індукції	271
8.6. Закон зміни сили струму в електричному колі при вимиканні та вмиканні джерела ЕРС	273
8.7. Енергія магнітного поля замкненого провідного контуру зі струмом. Енергія й густина енергії магнітного поля	277
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	278
Завдання для експрес-контролю	279
Приклади розв'язання задач.	280
Задачі для самостійного розв'язання	287
9. Основи теорії Максвелла електромагнітного поля	294
9.1. Струм зміщення	294
9.2. Рівняння Максвелла	297
9.3. Властивості рівнянь Максвелла	302
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки і експрес-контролю	304
Приклади розв'язання задач.	305
Задачі для самостійного розв'язання	308

IV. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ. МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

10. Електромагнітні коливання.	309
10.1. Коливальний контур і його рівняння.	310
10.2. Вільні незагасаючі гармонічні коливання в коливальному контурі	311
10.3. Вільні загасаючі коливання.	314

10.4. Величини, що характеризують загасання.	316
10.5. Вимушені електричні коливання	317
10.6. Змінний струм	321
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	325
Завдання для експрес-контролю	327
Приклади розв'язання задач.	327
Задачі для самостійного розв'язання	336
11. Механічні хвилі	344
11.1. Хвильовий рух. Поширення пружних хвиль в пружному середовищі	344
11.2. Плоска та сферична хвилі. Рівняння біжучої хвилі	348
11.3. Хвильове рівняння для плоскої пружної хвилі	351
11.4. Енергія пружної хвилі	352
11.5. Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість	356
11.6. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі	359
11.7. Акустичні хвилі.	362
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	364
Завдання для експрес-контролю	365
Приклади розв'язання задач.	366
Задачі для самостійного розв'язання	368
12. Електромагнітні хвилі	370
12.1. Рівняння Максвелла та електромагнітні хвилі	370
12.2. Плоска електромагнітна хвиля	372
12.3. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Умова — Пойнтінга	375
12.4. Тиск і імпульс електромагнітних хвиль	377
12.5. Випромінювання диполя	378
12.6. Шкала електромагнітних хвиль	379
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки	381
Завдання для експрес-контролю	381
Приклади розв'язання задач.	382
Задачі для самостійного розв'язання	384
Тести	387
Література.	419
Додаток 1	420
Додаток 2	421

Передмова

Навчальний посібник «Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина II. Електрика та магнетизм» є другою частиною традиційного поділу курсу фізики. Він створений на основі програми з фізики Міністерства освіти і науки України для інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів і охоплює розділи, пов'язані з вивченням електромагнітних явищ і законів. Також розглянуто хвильові процеси (створення і поширення механічних та електромагнітних хвиль).

Слід зауважити, що ця тема є, мабуть, однією з найважливіших у загальному курсі фізики, оскільки електромагнітні явища, разом з гравітаційними, визначають в макросвіті практично всі процеси. При цьому в природних процесах, що відбуваються на Землі, а також у більшості технічних приладів, головна роль належить саме електромагнітній взаємодії.

Як свідчить багаторічний досвід, засвоєння студентами великого обсягу теоретичного матеріалу та здобуття практичних навичок у розв'язанні задач з фізики неможливе без істотного методичного підґрунтя. Це особливо важливо за необхідності приділити велику увагу самостійній роботі студентів у зв'язку зі скороченням кількості аудиторних занять. Такій задачі цілком відповідає цей посібник, основною метою якого є викладання, по можливості у доступній формі, основних законів і понять електричних і магнітних явищ, пояснення їх єдності та відносності проявів. Особливу увагу приділено поясненню фізичного смислу законів.

Структура посібника залишилась такою ж, як і у першій частині [1]. Кожний розділ складається з теоретичного матеріалу, контрольних запитань для самоперевірки та експрес-контролю, прикладів розв'язання задач і задач для самостійного розв'язання.

У кінці видання наведено тести для самоконтролю.

Необхідні довідкові матеріали подано у додатках.

Сподіваємося, що посібник, який є результатом багаторічного досвіду викладання курсу фізики в ХНУРЕ, буде корисним як для студентів, так і для викладачів.



ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Електростатика — розділ учення про електрику, в якому вивчаються взаємодії та властивості систем електричних зарядів, нерухомих відносно обраної інерціальної системи відліку.

1 Електричне поле у вакуумі

1.1. Електричний заряд і його властивості

Одним із фундаментальних понять фізики й основним поняттям учення про електрику є *електричний заряд*. Він є внутрішньою характеристикою деяких елементарних матеріальних частинок, яка зумовлює електромагнітний тип взаємодії. Він не існує поза носіями заряду та є джерелом і об'єктом дії електростатичного поля.

**Властивості
електричного
заряду**

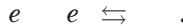
Існує два типи заряду. Умовно їх назвали позитивними (+) та негативними (-). Однойменно заряджені тіла відштовхуються, а різнойменно заряджені — притягуються.

Заряд є величиною *дискретною* (заряд квантується). Елементарний заряд — найменший заряд, який існує в природі. Негативний елементарний заряд e_0 має електрон, позитивний елементарний заряд e_0 — протон. Заряд будь-якого тіла є величиною, кратною елементарному заряду.

$$q = \pm Ne_0 \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \quad e_0 = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Для макроскопічних тіл і зарядів можна вважати, що заряд змінюється безперервно.

У будь-якому електронейтральному тілі кількість елементарних негативних зарядів дорівнює кількості елементарних позитивних. Тіл, які б не мали ніяких зарядів, у природі не існує. Електричні заряди, позитивні та негативні, з'являються та зникають одночасно (парами). Реакція анігіляції електрон-позитронної пари має вигляд:



Величина заряду, вимірювана в різних інерціальних системах відліку, однакова, тобто величина заряду не залежить від того, рухається він чи ні в інерціальній системі відліку. Отже, заряд є *релятивістсько інваріантним*.

Алгебраїчна сума електричних зарядів тіл або частинок, що складають електроізольовану систему, не змінюється при будь-яких процесах, що відбуваються в цій системі.

Закон збереження електричного заряду

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const.}$$

Електроізольована система — це така система, через граничну поверхню якої не можуть проходити заряджені частинки.

У системі можуть виникати нові електрично заряджені частинки, наприклад електрони внаслідок явища іонізації атомів чи молекул, іони за рахунок явища іонізації або електричної дисоціації і таке інше. Але якщо система електроізольована, то алгебраїчна сума зарядів, які виникли, завжди дорівнює нулю.

Закон збереження електричного заряду є одним із фундаментальних законів природи.

1.2. Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона

Точковий електричний заряд — заряд, що його має тіло, розміри якого малі порівняно з відстанями до інших тіл, з котрими він взаємодіє. Поняття точкового заряду, як і матеріальної точки, є фізичною абстракцією (моделлю).

Закон взаємодії нерухомих точкових зарядів експериментально встановлений у 1785 р. Кулоном і носить його ім'я.

Закон Кулона

Сила електростатичної взаємодії двох точкових електричних зарядів, що перебувають у вакуумі, прямо пропорціональна добутку величин цих зарядів q_1 та q_2 , обернено пропорціональна квадрату відстані між ними r та спрямована вздовж прямої, що їх з'єднує.

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}; \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}, \quad (1.1)$$

де \vec{F}_{12} — сила, що діє на заряд q_1 з боку заряду q_2 ; \vec{r}_{12} — радіус-вектор, напрямлений від заряду q_1 до заряду q_2 (рис. 1.1, а); \vec{F}_{21} — сила, що діє на заряд q_2 з боку заряду q_1 ; \vec{r}_{21} — радіус-вектор, напрямлений від заряду q_2 до q_1 (рис. 1.1, б).

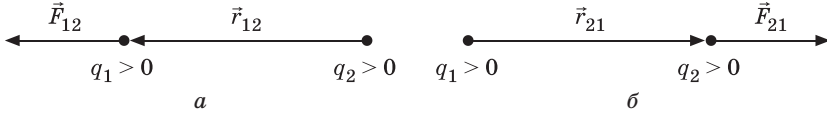


Рис. 1.1

Напрямок сил визначається знаками зарядів q_1 та q_2 (\vec{F}_{12} та \vec{F}_{21} за третім законом Ньютона).

Коефіцієнт k залежить від вибору системи одиниць. У системі Гаусса $k = 1$ і не має розмірності. В системі СІ

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

де ϵ_0 — електрична стала $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

У законі Кулона міститься два основних твердження:

- про обернену залежність сили взаємодії від квадрата відстані;
- про адитивність дії електричних зарядів. Сила взаємодії двох зарядів не залежить від наявності інших зарядів.

[q] = 1 Кл (Кулон).

1.3. Електричне поле. Напруженість електричного поля

Електричне поле — вид матерії, яка існує в просторі й часі та через яку здійснюється взаємодія електричних зарядів.

Навколо електричного заряду в просторі існує електричне поле. Основною ознакою наявності поля у просторі є дія сили на *пробний заряд*, внесений у це поле.

Пробний заряд — точковий позитивний заряд, досить малий, щоб він не змінював (не спотворював) характер досліджуваного поля. Якщо вносити пробний заряд у різні точки електричного поля, то сила, що діє на нього, буде різною.

Напруженість електричного поля

Силовою характеристикою електричного поля є *вектор напруженості* \vec{E} .

Вектор напруженості електростатичного поля \vec{E} дорівнює відношенню сили \vec{F} , з якою поле діє на

одичний точковий заряд, що знаходиться в заданій точці поля, до величини q_0 цього заряду

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}; \quad (1.2)$$

$$[E] = 1 \text{ Н/Кл (В/м)}.$$

Електростатичне поле — векторне поле напруженості \vec{E} . Кожній точці цього поля можна зіставити вектор \vec{E} . Якщо $q_0 > 0$, напрямок вектора \vec{E} збігається з напрямком вектора \vec{F} . Якщо $q_0 < 0$, вектори \vec{E} та \vec{F} мають протилежні напрямки.

Із формули (1.2) випливає, що сила \vec{F} , яка діє з боку електричного поля на будь-який точковий заряд q , що знаходиться в цьому полі, дорівнює

$$\vec{F} = qE.$$

Напруженість поля, утвореного точковим зарядом q у вакуумі, згідно з формулами (1.1) та (1.2) дорівнює

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2}, \quad (1.3)$$

де \vec{r} — радіус-вектор, що з'єднує заряд q з точкою поля, в якій визначається \vec{E} . Якщо $q > 0$, вектор \vec{E} напрямлений по радіус-вектору від заряду (рис. 1.2, а), якщо $q < 0$ — до заряду (рис. 1.2, б).



Рис. 1.2

Отже, джерелом електричного поля є нерухомі електричні заряди. Потужність джерела характеризується величиною заряду.

Однорідне електричне поле — поле, в кожній точці якого напруженість \vec{E} однакова за величиною та напрямком. Якщо \vec{E} не змінюється з часом — однорідне поле є *стаціонарним (або постійним)*. Поле точкового заряду неоднорідне.

Силкові лінії

Для графічного зображення електричних полів застосовують метод силових ліній (ліній напруженості).

Силкові лінії — уявні лінії, дотична до яких в кожній точці поля збігається з напрямком вектора напруженості поля в цій точці.

Властивості силових ліній:

силові лінії точкового заряду являють собою промені, що виходять із точки, де розміщений заряд (для позитивного заряду), або такі, що входять до неї (для негативного заряду);

силові лінії неперервні;

силові лінії від одного джерела ніде не перетинаються тому, що вектор \vec{E} в кожній точці має лише один напрямок;

силові лінії однорідного поля паралельні та рівновіддалені одна від одної;

густина силових ліній характеризує величину напруженості;

силові лінії починаються на позитивних зарядах, а закінчуються на негативних, або у нескінченності (за домовленістю).

1.4. Принцип суперпозиції електричних полів

Основна задача електростатики може бути сформульована таким чином: за заданими розподілом у просторі джерел поля та їх потужності (електричних зарядів) — знайти значення вектора напруженості \vec{E} в усіх точках поля. Ця задача розв'язується на основі **принципу суперпозиції електричних полів**: *напруженість електричного поля системи зарядів дорівнює геометричній сумі напруженостей полів, утворених кожним із цих зарядів окремо, тобто*

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \quad (1.4)$$

У просторі заряди розподіляються або *дискретно*, або *неперервно*.

У випадку дискретного розподілу зарядів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

де \vec{E}_i — напруженість, яку створює i -й заряд у заданій точці поля; n — число дискретних зарядів, що входять до складу системи.

Напруженість електричного поля, яка створюється системою точкових нерухомих зарядів $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, є:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

де \vec{r}_i — радіус-вектор, проведений від точкового заряду q_i до точки поля, що розглядається.

Напруженість електричного поля, утвореного безперервно розподіленими зарядами, за принципом суперпозиції дорівнює

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (q)$$

де $d\vec{E}$ — напруженість електростатичного поля, утвореного малим зарядом dq . Інтегрування ведеться по всіх неперервно розподілених зарядах. Малий dq можна вважати точковим, тоді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r},$$

де \vec{r} — радіус-вектор, проведений від місця розташування заряду до точки, що розглядається.

Густина зарядів

Характеристикою неперервного розподілу зарядів є їх *густина*.

Якщо заряди неперервно розподілені вздовж лінії, то вводиться *лінійна густина зарядів*

$$\frac{dq}{dl},$$

де dq — заряд малої ділянки лінії dl .

$$[] \quad 1 \text{ Кл/м.}$$

Якщо електричні заряди неперервно розподілені по певній поверхні, то *поверхнева густина зарядів*

$$\frac{dq}{dS},$$

де dq — заряд, розташований на малій ділянці поверхні площею dS .

$$[] \quad 1 \text{ Кл/м}^2.$$

При неперервному розподілі зарядів у будь-якому об'ємі *об'ємна густина зарядів*

$$\frac{dq}{dV},$$

де dq — заряд, який міститься в малому елементі об'єму dV .

$$[] \quad 1 \text{ Кл/м}^3.$$

1.5. Потенціал електричного поля

Робота сил електростатичного поля

Нехай джерелом електростатичного поля є точковий заряд $+q$. У полі цього заряду з точки 1 до точки 2 уздовж будь-якої траєкторії (рис. 1.3) переміщується інший точковий заряд $+q_0$.

Елементарна робота A , яку виконують кулонівські сили \vec{F} при малому переміщенні $d\vec{l}$ точкового заряду q_0 , дорівнює

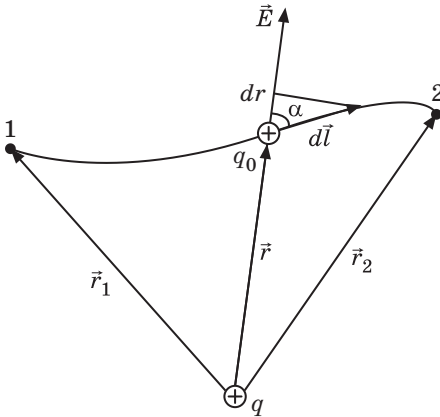


Рис. 1.3

векторами $d\vec{r}$ і $d\vec{l}$. Тоді $\vec{r}d\vec{l} = rdl \cos \alpha$.

Знайдемо добуток $\vec{E}d\vec{l}$, де \vec{E} — напруженість точкового заряду — обчислюється за формулою (1.3)

$$\vec{E}d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{rdr}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}.$$

Остаточна робота (1.6) дорівнюватиме

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.7)$$

Із формули (1.7) випливає, що робота залежить лише від початкового r_1 та кінцевого r_2 положення точок 1 та 2 і ніяк не залежить від шляху, яким рухався заряд q_0 між цими точками. У цьому разі (як це відомо ще з механіки) сили, що діють на заряд q_0 , є *потенціальними*.

Для однойменних зарядів q та q_0 робота кулонівських сил $A > 0$, якщо заряди віддаляються один від одного (діють сили відштовхування) і $A < 0$, якщо заряди зближуються (робота виконується проти сил поля).

Для різнойменних зарядів робота сил поля $A < 0$, коли заряди зближуються (діють сили притягання), і $A > 0$, коли заряди віддаляються (робота проти сил поля).

Якщо електричне поле утворене системою точкових зарядів $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, то робота сил цього поля для переміщення точкового заряду q_0 із точки 1 до точки 2 дорівнює

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad (1.5)$$

де \vec{E} — напруженість електростатичного поля в точці перебування заряду q_0 , $d\vec{l} = |d\vec{l}|$.

Робота кулонівських сил (сил поля) при скінченному переміщенні заряду q_0 від точки 1 до точки 2 дорівнює

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.6)$$

Із рис. 1.3 видно, що $dr = |d\vec{l}| \cos \alpha$, де α — кут між

$$A_{12} = \frac{q_i q_0}{r_{i1}^4} \frac{1}{r_{i1}} \frac{1}{r_{i2}} - q_0 \frac{q_i}{r_{i1}^4} \frac{1}{r_{i1}} \frac{1}{r_{i2}}.$$

Підсумування здійснюється по всіх n зарядах.

Робота сил електростатичного поля (кулонівських сил) уздовж будь-якого замкненого шляху (контуру) дорівнює нулю тобто, що в цьому випадку $r_{i1} = r_{i2}$.

Зважаючи на (1.6) роботу, що здійснюється силами поля над зарядом q_0 у разі обходу його по замкненому контуру, може бути подано у вигляді

$$A = \oint q_0 E_l dl,$$

де E_l — проекція вектора \vec{E} на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$.

Прирівнявши інтеграл, що виражає роботу, до нуля, отримуємо відношення

$$\oint E_l dl = 0,$$

яке виконується для любого замкненого контуру.

Це означає, що електростатичне поле є *потенціальним*, а кулонівські сили — *консервативними*.

Циркуляція вектора напруженості. Теорема про циркуляцію

Циркуляцією вектора напруженості електричного поля \vec{E} вздовж замкненого контуру L називається лінійний (контурний) інтеграл виду:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E dl \cos \alpha = \oint_L E_n dl,$$

де \vec{E} — напруженість електростатичного поля в точках елементарної ділянки контуру dl ; $d\vec{l}$ — вектор, проведений у напрямку обходу контуру по дотичній до нього; E_n — проекція вектора \vec{E} на напрямок $d\vec{l}$.

Враховуючи визначення напруженості $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ циркуляція вектора \vec{E} — це робота сил поля з переміщення одиничного заряду q_0 вздовж замкненого контуру.

Теорема про циркуляцію: циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж будь-якого замкненого контуру дорівнює нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.8)$$

Силове поле, що має такі властивості, — *потенціальне*. Тобто ця теорема також виражає потенціальний характер електростатичного поля.

Із того, що циркуляція вектора \vec{E} обертається на нуль, впливає, що лінії напруженості електростатичного поля не можуть бути замкненими, вони починаються й закінчуються на зарядах або ж прямують у нескінченність.

Рівняння (1.8) є інтегральною формою запису теореми про циркуляцію вектора \vec{E} . Щоб записати цю теорему у диференціальній формі, слід спочатку ознайомитися з поняттям ротора вектора (див. дод. 1 «Елементи векторного аналізу»).

Потік вектора $\text{rot} \vec{E}$ крізь довільну поверхню S , що спирається на контур L , на основі теореми Стокса записується таким чином:

$$\oint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Звідси випливає диференціальна форма теореми про циркуляцію, яка стверджує: *ротор (вихор) вектора \vec{E} в будь-якій точці електростатичного поля дорівнює нулю.*

$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.9)$$

Отже, електростатичне поле *безвихрове*.

Потенціальна енергія електростатичного поля

Тіло, що перебуває в потенціальному полі сил (електростатичне поле саме таке), має потенціальну енергію, за рахунок якої силами поля здійснюється робота.

Робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії

$$A = dW_n, \text{ або } A_{12} = W_n - W_{n1} - W_{n2},$$

де W_{n1} та W_{n2} — значення потенціальної енергії в точках поля 1 та 2 відповідно.

У полі системи точкових зарядів $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ зменшення потенціальної енергії пробного заряду q_0 , який не входить до системи, при переміщенні його із точки 1 до точки 2 дорівнює

$$W_{n1} - W_{n2} = \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right),$$

де r_{i1} та r_{i2} — початкові та кінцеві відстані між зарядами системи q_i та пробним зарядом q_0 . Звідси випливає, що абсолютне значення потенціальної енергії пробного заряду q_0 у полі системи зарядів q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) визначається з точністю до деякої константи, яка (як це визначалося в частині I, розділ 3.4) залежить від вибору початку відліку потенціальної енергії.

Якщо початком відліку вважати нескінченність, то потенціальна енергія електростатичної взаємодії заряду q_0 з полем системи зарядів q_i дорівнюватиме

$$W_n = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (1.10)$$

де r_i — відстань від заряду q_i до тієї точки поля, де перебуває пробний заряд q_0 .

Для однойменних зарядів q_0 та q_i потенціальна енергія їх взаємодії (відштовхування) додатна ($W_n > 0$) і зростає (зменшується) у разі наближення (віддалення) зарядів (рис. 1.4, а)

Потенціальна енергія взаємодії різнойменних зарядів (притягання) від'ємна ($W_n < 0$) і зростає до нуля при віддаленні одного із зарядів на нескінченність (рис. 1.4, б).

Потенціальна енергія взаємодії пробного заряду q_0 з точковим зарядом q

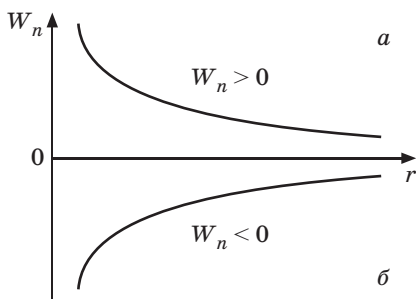


Рис. 1.4

$$W_n = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.11)$$

де r — відстань між зарядами.

Потенціал електростатичного поля

Як це видно з (1.10) та (1.11), відношення W_n/q_0 не залежить від q_0 , тому його можна прийняти за енергетичну характеристику електростатичного поля. Воно має назву

потенціалу.

Потенціал у будь-якій точці електростатичного поля — фізична скалярна величина, яка дорівнює відношенню потенціальної енергії W_n пробного точкового електричного заряду q_0 , який помістили в цю точку, до величини q_0 цього заряду

$$\frac{W_n}{q_0}. \quad (1.12)$$

Іншими словами, потенціал електростатичного поля в будь-якій його точці дорівнює потенціальній енергії взаємодії одиничного пробного заряду, який перебуває в цій точці поля, з полем.

Підставивши в (1.12) значення потенціальної енергії (1.11), отримаємо для потенціалу електростатичного поля, створеного точковим зарядом q у вакуумі, такий вираз:

$$\frac{1}{4} \frac{q}{0 r}, \quad (1.13)$$

де r — відстань від точки поля, потенціал у якій , до заряду q .

Потенціал, як і потенціальна енергія, визначається з точністю до константи, значення якої залежить від вибору початку відліку. Якщо припустити, що 0 , коли r , то константа дорівнює нулю.

Принцип суперпозиції

При накладенні електростатичних полів, створених різними джерелами, їх потенціали складаються алгебраїчно, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \frac{q_i}{0 r_i}.$$

Якщо заряди розподілені в просторі неперервно, то за умови, що $() 0$

$$\frac{dq}{4} \frac{1}{0 r},$$

де dq dl , dq dS або dq dV у випадку лінійного, поверхневого чи об'ємного розподілу зарядів відповідно; r — відстань від елементарного заряду, що розглядається, до точки поля, в якій визначається потенціал .

Різниця потенціалів

Робота, яку здійснюють сили електростатичного поля, щоб перемістити точковий заряд із точки 1, потенціал якої ϕ_1 , до точки 2, потенціал якої ϕ_2 , дорівнює

$$A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2) = qU,$$

де $U = \phi_1 - \phi_2$ — різниця потенціалів (напруга) між початковою та кінцевою точками переміщення.

Різниця потенціалів двох точок 1 і 2 в електростатичному полі визначається роботою, яку виконують сили поля, при переміщенні одиничного позитивного заряду з точки 1 до точки 2.

Робота сил поля при переміщенні заряду q_0 з точки 1 до точки 2 може бути записана у вигляді

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Після зіставлення двох виразів для A_{12} дістанемо

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl. \quad (1.14)$$

Інтегрування можна проводити вздовж будь-якої лінії, що з'єднує початкову та кінцеву точки, оскільки робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії переміщення.

Слід зауважити, якщо різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ($\varphi_1 = \varphi_2$) і контур переміщення заряду замкнений, то з (1.14) випливає теорема про циркуляцію (1.8).

Якщо заряд q_0 переміщувати з довільної точки у нескінченність, де за умовою потенціал дорівнює нулю ($\varphi = 0$), то робота сил електростатичного поля $A = q_0 \varphi$, звідки випливає

$$\varphi = \frac{A}{q_0}. \quad (1.15)$$

Таким чином, *потенціал — фізична величина, яка визначається роботою по переміщенню одиничного позитивного заряду з даної точки у нескінченність.*

[] 1 В (Вольт).

Зв'язок між напруженістю та потенціалом електростатичного поля

Напруженість і потенціал — дві характеристики електростатичного поля. Напруженість — силова характеристика, потенціал — енергетична характеристика поля.

Установимо взаємозв'язок між цими величинами.

Роботу сил електростатичного поля при малому переміщенні в ньому dr заряду q можна виразити подвійно.

З одного боку, елементарна робота A дорівнює

$$A = dW = qd\varphi = q \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \right),$$

де $d\varphi$ — мала зміна потенціалу поля при малому переміщенні $d\vec{r}$; x, y, z — декартові координати точки поля.

З іншого боку, ця ж елементарна робота A дорівнює

$$A = (\vec{F} d\vec{r}) = q(\vec{E} d\vec{r}) = q(E_r dr + E_x dx + E_y dy + E_z dz),$$

де E_r — проекція вектора \vec{E} на напрямок вектора $d\vec{r}$, який дорівнює

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Із цих співвідношень видно, що компоненти вектора \vec{E} можна виразити таким чином:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

а сам вектор \vec{E} дорівнює

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}, \text{ або } \vec{E} = -\text{grad } U,$$

де $\text{grad } U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}$.

Визначений таким чином вектор має назву *градієнта скалярної величини* (див. дод. 1 «Елементи векторного аналізу»). Градієнт ще позначають grad . називають оператором Гамільтона або набла-оператором:

$$\text{grad } U = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким чином:

$$\vec{E} = -\text{grad } U. \quad (1.16)$$

Вектор напруженості електростатичного поля за модулем дорівнює модулю градієнта потенціалу та напрямлений у бік його зменшення.

Для довільного напрямку

$$E_l = -\frac{\partial U}{\partial l},$$

тобто проєкція вектора напруженості електростатичного поля на довільний напрямок чисельно дорівнює швидкості зменшення потенціалу поля на одиницю довжини в цьому напрямку.

Для однорідного поля

$$E = \frac{1}{d} \frac{\partial U}{\partial d}, \quad (1.17)$$

де U — напруга між точками 1 та 2.

$$[E] = 1 \text{ В/м.}$$

Еквіпотенціальні поверхні

Графічно розподіл потенціалу електростатичного поля зображують за допомогою *еквіпотенціальних поверхонь* — поверхонь, в усіх точках яких потенціал має однакове значення.

Робота, яку здійснюють сили електростатичного поля при переміщенні заряду по екіпотенціальній поверхні, дорівнює нулю, оскільки $\vec{0}$ і електростатичні сили, що діють на заряд, завжди напрямлені по нормалі до екіпотенціальної поверхні. Звідси випливає, що вектор \vec{E} завжди перпендикулярний до екіпотенціальної поверхні, тому й лінії напруженості вектора \vec{E} ортогональні до цих поверхонь.

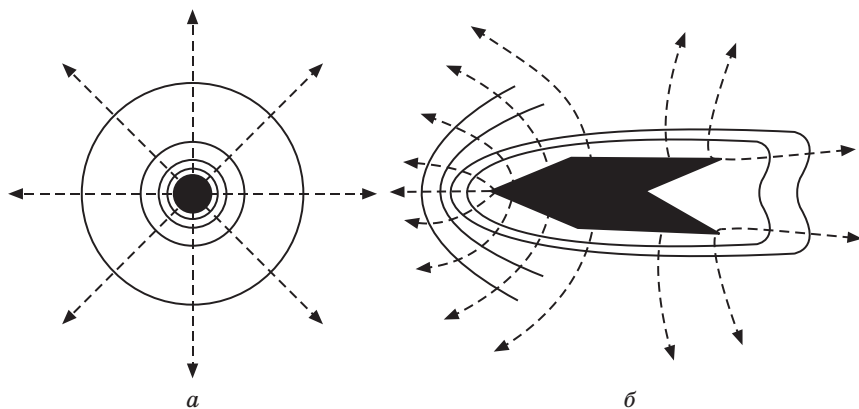


Рис. 1.5

На рис. 1.5 показано вид ліній напруженості (штрихові лінії) та екіпотенціальних поверхонь (суцільні лінії) полів позитивного точкового заряду (а) та зарядженого металевого циліндра, у якого на одному кінці виступ, а на іншому — западина (б).

1.6. Потік вектора напруженості.

Теорема Гаусса у вакуумі

За допомогою ліній напруженості можна характеризувати не тільки напрямок, а й величину вектора напруженості електростатичного поля. З цією метою умовилися проводити лінії напруженості з такою густиною (рис. 1.6), що число ліній напруженості, які проходять крізь окрему ділянку поверхні, перпендикулярну лініям напруженості, дорівнює модулю вектора \vec{E} .

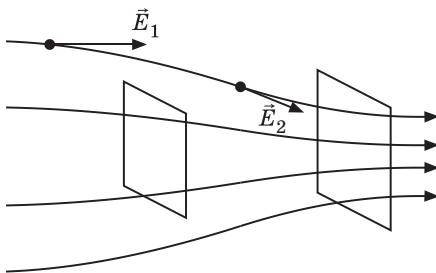


Рис. 1.6

**Потік вектора
напруженості**

Розглянемо поле вектора напруженості. Оскільки густина ліній напруженості дорівнює модулю вектора \vec{E} , то число ліній, що пронизують елементарну площадку dS , нормаль \vec{n} якої утворює з вектором \vec{E} кут α , дорівнюватиме $E dS \cos \alpha$

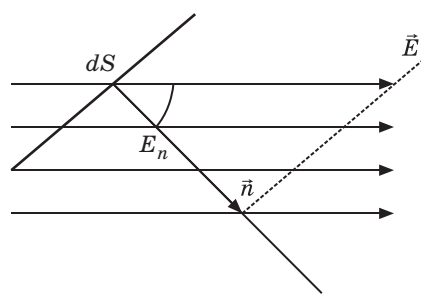


Рис. 1.7

де E_n — проекція вектора \vec{E} на напрямок вектора \vec{n} (рис. 1.7).

Елементарним потоком вектора напруженості електростатичного поля \vec{E} крізь ділянку поверхні, площа якої dS , проведеної в полі, є фізична величина

$$d\Phi = E_n dS.$$

Визначимо вектор $d\vec{S}$, модуль якого дорівнює величині площі dS , а напрямок збігається з напрямком нормалі до площини \vec{n} :

$$d\vec{S} = dS \vec{n}.$$

Тоді $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

Потік вектора напруженості крізь поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі потоків крізь елементарні поверхні dS , які складають усю поверхню S :

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E_n dS. \quad (1.18)$$

Усі одиничні вектори \vec{n} мають бути напрямлені в один бік відносно поверхні S .

Для довільної замкненої поверхні S потік вектора \vec{E} крізь цю поверхню

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS,$$

де \vec{n} — зовнішня нормаль.

Потік вектора напруженості Φ — алгебраїчна величина, тому він залежить не тільки від конфігурації поля \vec{E} , а й від вибору напрямку нормалі \vec{n} . Для замкнених поверхонь за позитивний напрямок нормалі вибрано саме зовнішню нормаль, тобто нормаль, що напрямлена від поверхні зовні.

Отже, потік вектора напруженості електростатичного поля характеризується числом ліній вектора, які проходять крізь дану

площу S , якщо густина ліній чисельно дорівнює модулю вектора \vec{E} в даній точці.

Потік вектора крізь замкнену поверхню є мірою потужності джерела, розташованого в об'ємі, що охоплює цю поверхню.

Теорема Гаусса

Модуль напруженості електростатичного поля точкового заряду q

$$E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}.$$

Розрахуємо потік вектора напруженості крізь сферичну поверхню радіуса r , що охоплює точковий позитивний заряд, який перебуває в її центрі (рис. 1.8).

За позитивний напрямок беремо зовнішню нормаль.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \oint_S \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} dS,$$

тобто $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$

Тут $d\vec{S} = \vec{n} dS$, а \vec{n} напрямлена по \vec{E} ($\vec{n} \parallel \vec{E}$).

Потік крізь довільну поверхню навколо цього заряду дорівнює потоку крізь сферу (однакова кількість силових ліній, що проходять крізь ці поверхні). Для системи точкових зарядів і для довільної поверхні

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \tag{1.19}$$

Ця формула виражає **теорему Гаусса** для електростатичного поля: *потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що містяться всередині області поля, обмеженої цією поверхнею, поділеній на електричну сталу ϵ_0 .*

Усі вектори $d\vec{S}$ напрямлені вздовж зовнішніх нормалей до замкненої поверхні інтегрування, яку ще називають *гауссовою*.

Якщо всередині гауссової поверхні зарядів немає або заряди існують, але $q_i = 0$, то потік вектора \vec{E} крізь цю поверхню $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$.

Якщо електричний заряд розподілений у просторі з деякою об'ємною густиною ρ , $dq = \rho dV$, тоді сумарний заряд, який перебуває

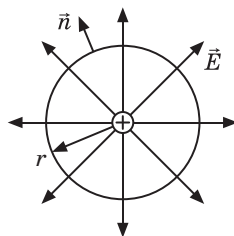


Рис. 1.8

в середині гауссової поверхні S , що охоплює деякий об'єм V , дорівнює

$$q_i \quad dV.$$

В інтегральному виді теорема Гауса записується так:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (1.20)$$

де $\langle \rangle$ — середня об'ємна густина заряду в малому об'ємі V .

Позитивному заряду відповідає додатний потік напруженості, негативному — від'ємний. Тому вважається, що позитивні заряди — джерела поля, негативні — стоки.

Диференціальна
форма теореми
Гауса

Величини, що входять до виразу теореми Гауса (1.19), характеризують різні точки електростатичного поля. Так, якщо вектор \vec{E} характеризує точки деякої замкненої поверхні, то електричний заряд стосується точок об'єму, обмеженого цією поверхнею. Таку форму запису теореми називають *інтегральною*.

Отримаємо аналітичний вираз цієї теореми в диференціальній формі, тобто знайдемо співвідношення між фізичними величинами, які характеризують ту саму точку поля.

Для цього знайдемо потік вектора напруженості електростатичного поля через поверхню нескінченно малого паралелепіпеда

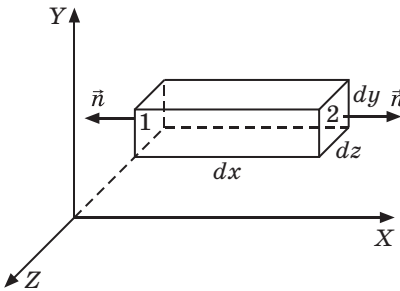


Рис. 1.9

з ребрами dx , dy , dz , паралельними координатним осям прямокутної системи координат (рис. 1.9) і який охоплює заряд

$$q = \rho dV, \quad (1.21)$$

де ρ — об'ємна густина заряду, $dV = dx dy dz$ — об'єм паралелепіпеда.

На грані 1 зовнішня нормаль напрямлена у від'ємний

бік осі X . Потік вектора \vec{E} крізь цю грань дорівнюватиме

$$-E_x(x) dy dz.$$

На протилежній грані 2 навпаки, напрямком зовнішньої нормалі збігається з додатним напрямком осі X , і для потоку крізь цю грань маємо

$$E_x(x + dx) dy dz.$$

Результуючий потік крізь паралельні грані 1 та 2 дорівнює їх сумі

$$E_x [E_x(x \ dx) \ E_x(x)]dydz \quad \frac{E_x}{x}dxdydz \quad \frac{E_x}{x}dV.$$

Аналогічно визначимо потоки крізь дві пари інших граней. Повний потік крізь усю поверхню паралелепіпеда

$$E \quad \frac{E_x}{x} \quad \frac{E_y}{y} \quad \frac{E_z}{z} \quad dV. \quad (1.22)$$

За теоремою Гаусса (1.19) потік E дорівнює

$$E \quad \oint_S E_n dS \quad \frac{1}{0} \sum_{i=1}^n q_i.$$

Зіставивши два вирази для E та беручи до уваги (1.21), маємо

$$\frac{E_x}{x} \quad \frac{E_y}{y} \quad \frac{E_z}{z} \quad \frac{1}{0}. \quad (1.23)$$

Це співвідношення виражає *теорему Гаусса в диференціальній формі*. Оскільки розміри паралелепіпеда нескінченно малі, то можна вважати, що значення вектора \vec{E} на поверхні цього паралелепіпеда й заряд, який охоплюється поверхнею, по суті стосуються тієї самої точки, тобто записана у вигляді (1.23) теорема Гаусса є *локальною теоремою*.

Теорему Гаусса в диференціальній формі можна записати інакше, використавши поняття дивергенції вектора (*див.* дод. 1 «Елементи векторного аналізу»).

У декартовій системі координат

$$\operatorname{div} \vec{E} \quad \frac{E_x}{x} \quad \frac{E_y}{y} \quad \frac{E_z}{z}. \quad (1.24)$$

Тоді теорема Гаусса в диференціальній формі набуває вигляду

$$\operatorname{div} \vec{E} \quad \frac{1}{0}. \quad (1.25)$$

Дивергенція вектора \vec{E} для деякої точки поля дорівнює об'ємній густині заряду в цій точці, поділеній на електричну сталу ϵ_0 .

Фізично дивергенція характеризує потужність джерел або стоків.

Підводячи підсумок, слід зауважити, що теорема Гаусса в інтегральній формі (1.19) пов'язує фізичні величини в як завгодно віддалених точках простору в один і той же момент часу, а записана в диференціальній формі (1.25), вона пов'язує різні фізичні величини (та \vec{E}) в тій самій точці поля.

Теорема Ірншоу

За допомогою теореми Гаусса доводиться одна з основних теорем електростатики — теорема Ірншоу. Вона стверджує: *система (конфігурація) нерухомих точкових зарядів, які перебувають на скінченній відстані один від одного, не може бути стійкою, якщо на них крім електростатичних сил притягання та відштовхування ніякі інші сили не діють.*

Якщо крім електростатичних сил в системі діють будь-які інші сили, то рівновага може бути стійкою. Наприклад, візьмемо три

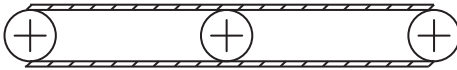


Рис. 1.10

однакові за розміром і однаково заряджені кульки. Дві з них закріпимо на кінцях циліндричної трубки з ізолятора, а третю розташуємо по середині між ними (рис. 1.10). Нехай середня кулька може ковзати в середині трубки без тертя, тоді в середньому положенні вона буде в стійкій рівновазі.

однакові за розміром і однаково заряджені кульки. Дві з них закріпимо на кінцях циліндричної трубки з ізолятора, а третю розташуємо по

1.7. Застосування теореми Гаусса для розрахунку електростатичних полів у вакуумі

Теорему Гаусса разом з принципом суперпозиції застосовують для розрахунків електростатичних полів. Використання її є особливо зручним, коли поле має заздалегідь відому симетрію, обумовлену симетрією в розміщенні (конфігурації) джерел поля (зарядів). Тоді можна так удаво вибрати гауссову поверхню, що потік напруженості крізь неї можна виразити за допомогою визначуваної напруженості поля, уникнувши дії інтегрування.

Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини

Нескінченна площина заряджена з постійною поверхневою густиною σ . Ця площина ($x = 0$) є площиною симетрії поля. Вектори напруженості перпендикулярні площині та напрямлені від неї (якщо $\sigma > 0$) або до неї (якщо

$\sigma < 0$). За гауссову поверхню S зручно прийняти поверхню циліндра, твірні якого перпендикулярні площині, а основи площею S паралельні їй та лежать по різні боки від неї на однакових відстанях (рис. 1.11).

Через те що вектори \vec{E} спрямовані вздовж осі OX ($\vec{E} = E_x \vec{i}$) та $E_x(x) = E_x(x)$, маємо

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 2E_x S,$$

де E_x — проекція вектора \vec{E} на вісь OX у точках з координатами $x > 0$. Заряд, який охоплює гауссова поверхня $q_{\text{охоп}} = S$.

Тоді згідно з теоремою Гаусса,

$$E_x = \frac{2S}{0} \frac{S}{0},$$

звідки випливає:

для точок поля з координатами $x < 0$

$$E_x = -\frac{2S}{0}, \tag{1.26}$$

для точок поля з координатами $x > 0$

$$E_x = \frac{2S}{0}. \tag{1.27}$$

Із формули (1.26) видно, що E не залежить від довжини циліндра, тобто напруженість поля на будь-яких відстанях однакова за модулем. Інакше кажучи, поле рівномірно зарядженої площини *однорідне*.

Оскільки $\frac{d}{dx} E_x = 0$, то, поклавши потенціал поля рівним нулю в точках зарядженої площини $x = 0$, матимемо

$$U = -\frac{2S}{0} |x|. \tag{1.28}$$

Графіки залежності E_x і U від x показано на рис. 1.12, а, б.

Поле двох нескінченних паралельних різнойменно заряджених площин

Дві нескінченні паралельні площини заряджені рівномірно різнойменними зарядами з поверхневими густинами σ_1 та σ_2 (рис. 1.13). Поле таких площин знайдемо як суперпозицію полів, що утворює кожна із площин окремо.

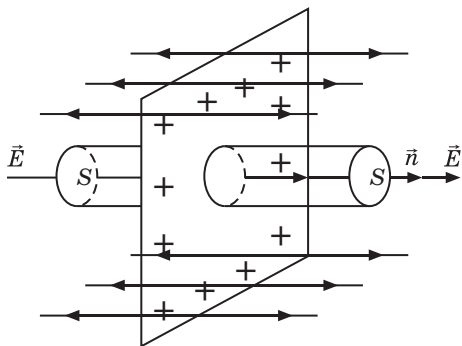


Рис. 1.11

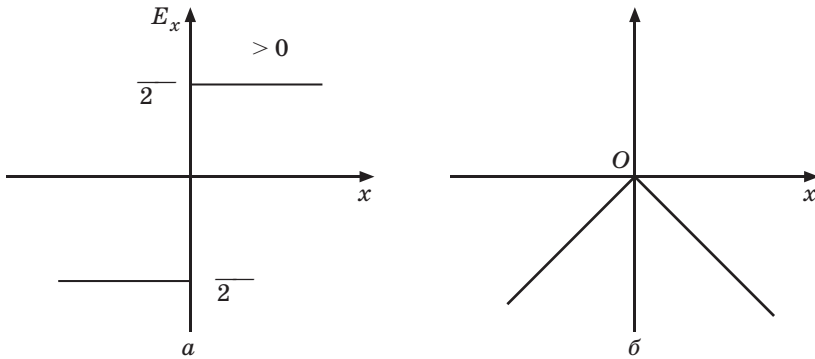


Рис. 1.12

На рис. 1.13 суцільні лінії відповідають полю від позитивно зарядженої площини, пунктирні — від негативно зарядженої.

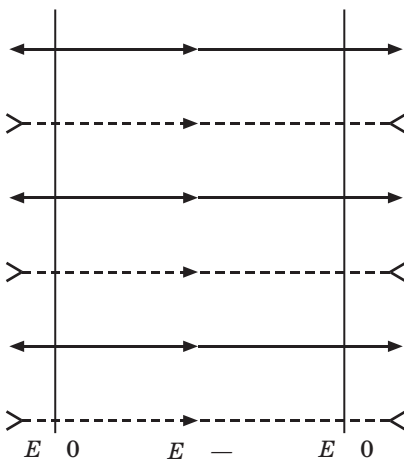


Рис. 1.13

Ліворуч і праворуч площин лінії напруженості напрямлені назустріч одна одній, тому напруженість тут $E = 0$. Між площинами лінії напруженості напрямлені в один бік, тому

$$E = E_1 + E_2,$$

де E_1 та E_2 визначаються за формулою (1.26). Результуюча напруженість

$$E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.29)$$

Таким чином, результуюча напруженість поля в області між площинами описується формулою (1.29), а поза об'ємом, обмеженим площинами, вона дорівнює нулю.

Різниця потенціалів між площинами, відстань між якими d , дорівнює

$$\int_0^d E dx = \int_0^d \frac{q}{\epsilon_0} dx = \frac{q}{\epsilon_0} d. \quad (1.30)$$

Поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні

Сферична поверхня радіуса R має заряд q , який рівномірно розподілений по її поверхні з поверхневою густиною $(q/(4\pi R^2))$.

Система зарядів, що утворюють поле, а як наслідок, і саме поле, центрально симетричні відносно центра сфери. Тому лінії напруженості напрямлені радіально (рис. 1.14).

Для знаходження напруженості поля \vec{E} на відстані від точки O за гауссову поверхню S візьмемо сферу радіуса r з центром у точці O . Тоді

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r \cdot 4\pi r^2,$$

де

$$\vec{E} = E_r \frac{\vec{r}}{r},$$

а E_r — проекція вектора \vec{E} на радіус-вектор \vec{r} , проведений з точки O до точки поля, що розглядається.

Якщо $r < R$ (усередині сфери), то заряд, який охоплює гауссова поверхня $q_{\text{охоп}} = 0$ і $E = 0$, тобто поля всередині сфери немає.

Якщо $r > R$ (поза сферою), то гауссова поверхня охоплює заряд $q_{\text{охоп}} = q$ і згідно з теоремою Гауса

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

звідки

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

або

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}. \quad (1.31)$$

Якщо $r < R$, то

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

або

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}. \quad (1.32)$$

Із зв'язку між потенціалом і напруженістю поля випливає, що $d\varphi/dr = -E_r$. Поклавши $\varphi = 0$ при $r = R$, отримаємо для потенціалу поля:

$$\text{поза сферою } (r > R) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \text{ або}$$

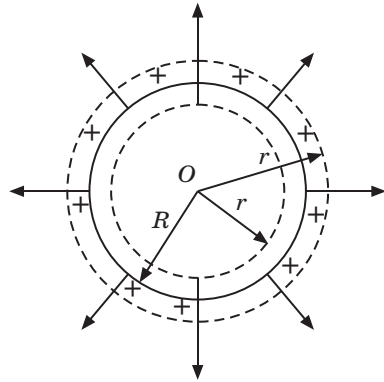


Рис. 1.14

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{r}. \quad (1.33)$$

Усередині сфери ($r < R$) потенціал всюди однаковий і дорівнює

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

або

$$\frac{R}{r}. \quad (1.34)$$

Графіки залежностей E_r і ϕ від r наведено на рис. 1.15, а, б.

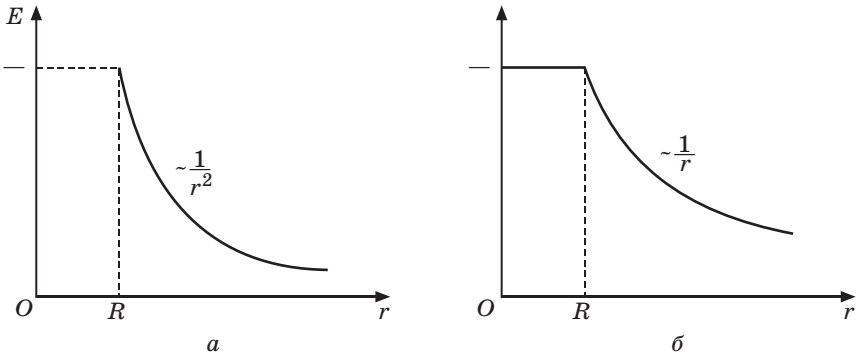


Рис. 1.15

Поле об'ємно зарядженої кулі

Куля радіуса R має заряд q , який рівномірно розподілений по її об'єму з об'ємною густиною

$$\frac{3}{4} \frac{q}{R^3}.$$

Центр кулі O є центром симетрії поля (рис. 1.16). Тому для гауссової поверхні S у вигляді сфери радіуса r з центром у точці O маємо

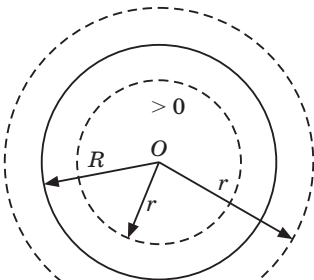


Рис. 1.16

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r \cdot 4\pi r^2.$$

Зв'язок потенціалу з \vec{E} має вигляд

$$\frac{d}{dr} \phi = -E_r.$$

Якщо $r > R$ (поза кулею), то гауссова поверхня охоплює заряд

$$q_{\text{охоп}} = q \frac{4 R^3}{3}.$$

Напруженість

$$E_r = \frac{q}{4 \pi_0 r^2} \frac{R^3}{3 \pi_0 r^2}. \quad (1.35)$$

Потенціал змінюється від $\phi_1(r)$ до $\phi_2(0)$ на нескінченності

$$\phi(r) = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 E dr = \frac{R^3}{3 \pi_0 r^2} \int_1^2 dr = \frac{R^3}{3 \pi_0 r}. \quad (1.36)$$

Якщо $r = R$, то напруженість

$$E(R) = \frac{R}{3 \pi_0}, \quad (1.37)$$

а потенціал

$$\phi(R) = \frac{R^2}{3 \pi_0}. \quad (1.38)$$

Якщо $r = R$ (усередині кулі), то гауссова поверхня охоплює заряд

$$q_{\text{охоп}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = q \frac{r^3}{R^3}.$$

Напруженість

$$E_r = \frac{qr}{4 \pi_0 R^2} = \frac{r}{3 \pi_0}. \quad (1.39)$$

Із зв'язку $\nabla \cdot E$ випливає, що

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{r}{3 \pi_0} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^3}{3 \pi_0} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{3r^2}{3 \pi_0} = \frac{1}{\pi_0} \end{aligned}$$

або

$$\frac{1}{\pi_0} = \frac{R^2}{3 \pi_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{R^2}{6 \pi_0} (R^2 - r^2) \right). \quad (1.40)$$

Очевидно, що

$$\frac{1}{\pi_0} = \frac{R^2}{3 \pi_0} \frac{R^2}{6 \pi_0} \frac{R^2}{2 \pi_0}. \quad (1.41)$$

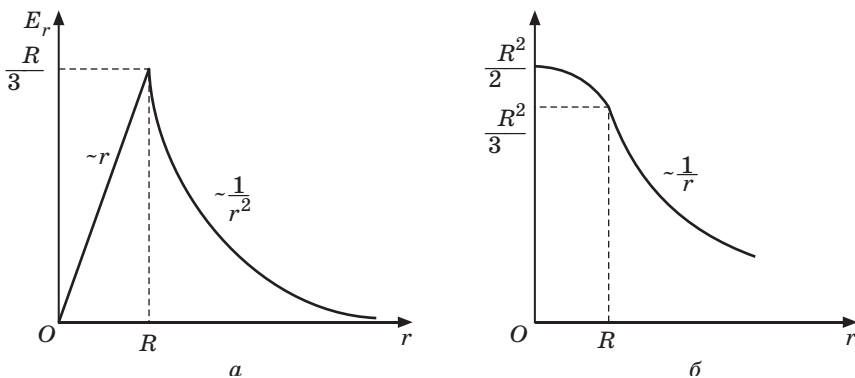


Рис. 1.17

Графіки залежностей E_r і від r наведено на рис. 1.17, а, б.

Поле рівномірно зарядженого нескінченного циліндра (нитки)

Нескінченний циліндр радіуса R має заряд q , який рівномірно розподілений по його довжині з лінійною густиною (q/l).

Із міркувань симетрії випливає, що лінії напруженості будуть напрямлені по радіусах колових перерізів циліндра з однаковою густиною в усі боки відносно осі циліндра. На рис. 1.18 показано поперечний переріз циліндричної поверхні, оточеної коаксіальною з нею гауссовою поверхнею радіусом r і висотою l .

Потік вектора напруженості \vec{E} крізь торці коаксіального циліндра дорівнює нулю, оскільки торці паралельні лініям напруженості. Потік крізь бокову поверхню дорівнюватиме $2rlE$. За теоремою Гаусса (1.19)

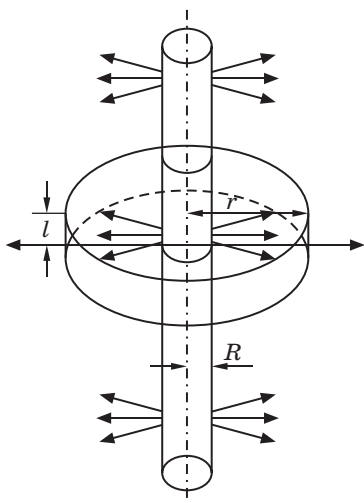


Рис. 1.18

$$E_r 2rl = \frac{q}{0}$$

Якщо $r < R$, то

$$E_r 2rl = \frac{l}{0}$$

звідки випливає

$$E_r = \frac{1}{2} \frac{q}{0 r}. \quad (1.42)$$

Якщо $r > R$, то замкнена поверхня зарядів усередині не має, тому в цій області $E = 0$.

Таким чином, напруженість поля поза рівномірно зарядженим нескінченним циліндром визначається формулою (1.42), усередині ж його поле відсутнє.

Різниця потенціалів між двома точками на відстанях r_1 та r_2 від осі зарядженого циліндра ($r_1 < R$, $r_2 < R$) дорівнює

$$U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_0 r}{2 \epsilon_0} dr = \frac{\rho_0}{2 \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.43)$$

Розглянуті приклади електростатичних полів підтверджують справедливність двох загальних висновків:

1. Напруженість поля у вакуумі змінюється стрибком при переході через заряджену поверхню.
2. Потенціал поля завжди є неперервною функцією координат.

1.8. Електричний диполь

Електричний диполь — система з двох точкових однакових за величиною та протилежних за знаком зарядів, які перебувають на відстані l один від одного. Якщо відстань між зарядами не змінюється, то такий диполь називають *жорстким*. Для точкового диполя $l \ll r$, де r — відстань від центра диполя до точки спостереження. Величину l називають *плечем диполя*. Пряма, що проходить крізь обидва заряди, називається *віссю диполя*.

Основною характеристикою диполя є електричний дипольний момент \vec{p}_e . Він являє собою вектор, який чисельно дорівнює добутку заряду на плече і напрямлений від негативного заряду до позитивного, тобто

$$\vec{p}_e = q \vec{l}, \quad (1.44)$$

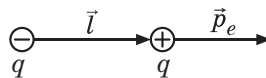


Рис. 1.19

де \vec{l} — вектор, напрямлений уздовж плеча диполя від негативного до позитивного заряду (рис. 1.19).

$$[p_e] = 1 \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

Потенціал і напруженість поля точкового диполя

Знайдемо потенціал поля точкового диполя в довільній точці A (рис. 1.20). Положення точки відносно центра диполя визначається за допомогою радіуса-вектора \vec{r} або за допомогою полярних координат r і θ .

Потенціал поля точкового заряду

$$\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}, \quad \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}.$$

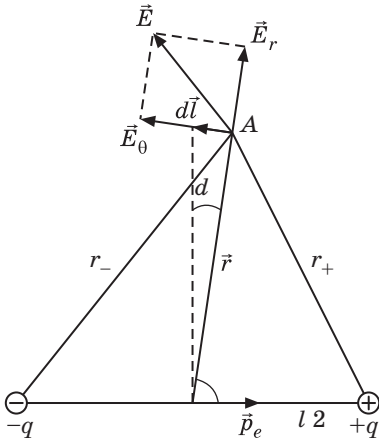


Рис. 1.20

Потенціали системи двох точкових зарядів

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_-} - \frac{q}{r_+} \right).$$

Із рисунка видно, що

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 \pm \frac{l^2}{4} \pm 2r \frac{l}{2} \cos \alpha}.$$

За умови $r \gg l$

$$r_{\pm} \approx r \left(1 \pm \frac{l}{r} \cos \alpha \right) \approx r \pm \frac{1}{2} \frac{p_e}{r} \cos \alpha, \dots,$$

або

$$r_{\pm} \approx r \pm \frac{l}{2} \cos \alpha, \text{ а } r_{\pm} \approx r \pm \frac{l}{2} \cos \alpha,$$

тоді

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_-} - \frac{q}{r_+} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} \left(1 - \frac{l}{r} \cos \alpha \right) - \frac{q}{r} \left(1 + \frac{l}{r} \cos \alpha \right) \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \alpha}{r^2} = \frac{q l \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p_e \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Тобто потенціал поля диполя залежно від r зменшується як $1/r^2$ ($\sim 1/r^2$).

Оскільки $p_e \cos \alpha = \vec{p}_e \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{p} \cdot \vec{e}_r$, де $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$ — одиничний вектор, то потенціал поля точкового диполя можна записати так:

$$(\vec{r}) \quad \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.45)$$

Щоб визначити напруженість поля диполя спочатку знайдемо проекції вектора \vec{E} на два взаємно перпендикулярні напрямки. Один напрямок збігається з вектором \vec{r} , а другий перпендикулярний йому (рис. 1.20).

Проекція вектора \vec{E} на напрямок \vec{r}

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e \cos \alpha}{r^3}.$$

Припустимо, що точка A переміщується на нескінченно малу величину $dl = rd$, тоді проекція вектора \vec{E} на напрямок dl $E_l = E \cos \theta$ може бути записана як

$$E_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e \sin \theta}{r^3} \cos \theta.$$

За теоремою Піфагора

$$E^2 = E_r^2 + E_l^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e^2}{r^3} (4\cos^2 \theta + \sin^2 \theta).$$

Результуюча напруженість дорівнюватиме

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}. \quad (1.46)$$

Якщо ввести одиничні вектори \vec{e}_r вздовж \vec{r} та \vec{e}_θ , перпендикулярний до нього, то вектор напруженості електричного поля точкового диполя в точці A дорівнюватиме

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta.$$

Поле диполя на його осі

На осі диполя (рис. 1.21) $\theta = 0, r = r_1, r_2 = r + l$.
Потенціал поля в точці A

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r(r+l)}.$$

За умови $r \gg l$

$$V_A \approx \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.47)$$

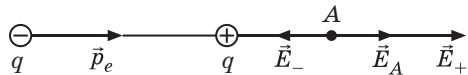


Рис. 1.21

Напруженість

$$E_A = \frac{dV}{dr} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

тобто

$$\vec{E}_{||} = \frac{2\vec{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.48)$$

Поле диполя на перпендикулярній до його осі

Потенціал поля диполя в точках площини перпендикулярної до осі диполя, яка проходить крізь його центр, дорівнює нулю $V = 0$ (рис. 1.22).

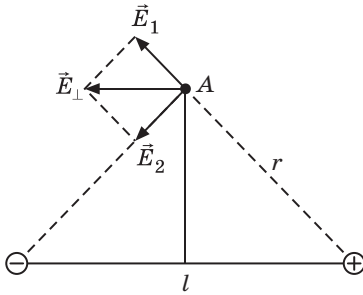


Рис. 1.22

Напрямок \vec{E} протилежний напрямку електричного моменту диполя \vec{p}_e , тобто

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.49)$$

Знайдемо напруженість у точці А. З подібності трикутників маємо

$$\frac{E}{E_1} = \frac{l}{r}; \quad E = \frac{E_1 l}{r}.$$

З урахуванням $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ маємо

$$E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

1.9. Диполь у зовнішньому електричному полі

Якщо диполь вмістити в однорідне електричне поле, то на його заряди діятимуть сили, однакові за модулем та протилежні за напрямком (рис. 1.23):

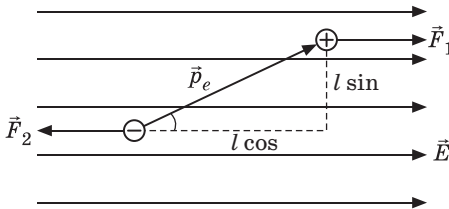


Рис. 1.23

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = qE.$$

Ці сили утворюють пару сил, плече якої дорівнює $l \sin \alpha$. Момент цієї пари сил, діючих на диполь в однорідному електростатичному полі

$$M = qEl \sin \alpha = p_e E \sin \alpha,$$

або у векторній формі

$$\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}].$$

Момент пари сил \vec{M} перпендикулярний до векторів \vec{p}_e та \vec{E} . Під дією цього моменту сил диполь намагається повернутися так, щоб напрямок вектора його електричного моменту \vec{p}_e збігався би з напрямком зовнішнього поля. У такому разі диполь перебуватиме в стані стійкої рівноваги.

Потенціальна енергія диполя в однорідному електростатичному полі

Жорсткий диполь, який розташований у зовнішньому полі, має потенціальну енергію W_p .

При повороті диполя на малий кут d сили поля здійснюють роботу A за рахунок зменшення потенціальної енергії диполя

$$A \vec{M} d^{-} p_e E \sin d \quad dW_p,$$

тобто

$$dW_p \quad p_e E \sin d .$$

Проінтегруємо це співвідношення по енергії від W_{0p} до W_p , а по куту від 0 до $\pi/2$.

$$W_p - W_{0p} = \int_0^{\pi/2} p_e E \sin d \quad p_e E \cos d \Big|_0^{\pi/2} = p_e E \cos d .$$

Вважатимемо, що при $d = \pi/2, W_{0p} = 0$, тобто відраховуватимемо енергію диполя відносно його положення перпендикулярного до напрямку поля.

Тоді $W_p = p_e E \cos d$ або

$$W_p = \vec{p}_e \vec{E}. \quad (1.50)$$

У стані стійкої рівноваги (вектори \vec{p}_e та \vec{E} напрямлені в один бік) кут $d = 0$, потенціальна енергія мінімальна й дорівнює $W_p = p_e E$.

**Диполь
у зовнішньому
неоднорідному
електричному
полі**

Якщо диполь перебуває в неоднорідному електричному полі, на нього з боку сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 ($F_2 > F_1$), які є горизонтальними складовими сил \vec{F} і \vec{F}' , дотичних до силових ліній поля, діє не тільки обертовий момент $\vec{M} = [\vec{p}_e \vec{E}]$, а ще й результуюча

цих сил (рис. 1.24)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

У цьому випадку

$$\vec{F} = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1),$$

де \vec{E}_1 та \vec{E}_2 — напруженості поля в точках перебування зарядів q та $-q$.

Для точкового диполя різницю $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$ можна приблизно замінити диференціалом

$$d\vec{E} = l_x \frac{\vec{E}}{x} + l_y \frac{\vec{E}}{y} + l_z \frac{\vec{E}}{z}.$$

У цьому наближенні

$$\vec{F} = p_{ex} \frac{\vec{E}}{x} + p_{ey} \frac{\vec{E}}{y} + p_{ez} \frac{\vec{E}}{z},$$

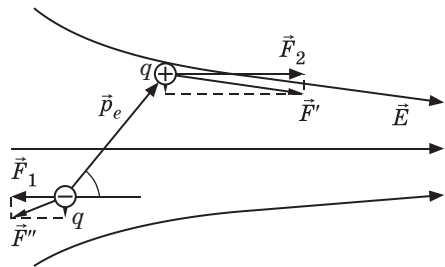


Рис. 1.24

де

$$p_{ex} = ql_x \cos \alpha, \quad p_{ey} = ql_y \cos \beta, \quad p_{ez} = ql_z \cos \gamma$$

або

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}_e \vec{E}) = \text{grad} W_p.$$

Якщо напрямки осі OX та вектора \vec{E} збігаються ($p_x = p$, $p_y = p_z = 0$), то

$$\vec{F} = p \frac{\vec{E}}{x}. \quad (1.51)$$

Під дією цієї сили диполь втягується в область сильнішого поля, коли кут гострий ($\cos \alpha > 0$). Якщо кут — тупий ($\cos \alpha < 0$), диполь виштовхується з області сильнішого поля.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Назвіть властивості електричного заряду.
2. Сформулюйте та запишіть закон збереження заряду.
3. Запишіть і поясніть закон Кулона.
4. Які поля мають назву електростатичних?
5. Що таке напруженість електростатичного поля? Як вона напрямлена?
6. У яких одиницях вимірюється напруженість у системі СІ?
7. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів і запишіть його у випадку:
 - а) дискретного розподілу зарядів,
 - б) неперервного розподілу зарядів.
8. Що таке лінійна, поверхнева й об'ємна густина зарядів?
9. Що таке потенціал? Різниця потенціалів? Одиниця їх вимірювання?
10. Чому дорівнює робота кулонівських сил уздовж замкнутого контуру?
11. Що називається циркуляцією вектора напруженості?
12. Сформулюйте теорему про циркуляцію.
13. Як пов'язані між собою напруженість і потенціал електростатичного поля?
14. Чому дорівнює робота переміщення заряду по екіпотенціальній поверхні?
15. Як орієнтовані екіпотенціальні поверхні та силові лінії?
16. Визначте потік вектора напруженості \vec{E} .
17. У чому полягає фізичний зміст теореми Гаусса для електростатичного поля в вакуумі?
18. Що таке електричний момент диполя?

19. Запишіть напруженість поля диполя в довільній точці.
20. Чому дорівнює напруженість поля диполя в точці, що знаходиться на його осі? На перпендикулярі до осі диполя, встановленому з його середини на відстані r від центра?

Завдання для експрес-контролю

1. Користуючись принципом суперпозиції, знайдіть у полі двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, що знаходяться на відстані l один від одного, точку, в якій напруженість поля дорівнюватиме нулю.
2. Чому дорівнює відношення напруженостей електричних полів у точці A , що лежить на продовженні осі диполя, та в точці B , яка лежить на перпендикулярі, що проходить крізь середину O осі цього диполя, якщо $OA = OB$?
3. Електричний диполь перебуває всередині замкненої поверхні. Чому дорівнює потік E крізь цю поверхню?
4. Доведіть, що електростатичне поле є потенціальним.
5. Іноді кажуть, що силові лінії — це траєкторії, уздовж яких рухатиметься позитивний заряд, який є в електричному полі. Чи правильне це твердження?
6. Як зміниться сила взаємодії двох точкових зарядів при перенесенні їх з вакууму в воду ($\epsilon = 81$) і зменшенні відстані між зарядами втричі?
7. Як пов'язаний вектор напруженості електростатичного поля з потенціалом? Чому він дорівнює і як напрямлений у точці, розташованій між двома плоскими екіпотенціальними поверхнями з потенціалами 5 В і 3 В . Відстань між площинами $d = 1\text{ см}$.
8. Кільце з тонкого провідника розривається, якщо його зарядити зарядом q . Діаметри кільця й провідника збільшили в n разів. Визначте заряд q_1 , при якому розірветься нове кільце.
9. Електростатичне поле створене нескінченною площиною, рівномірно зарядженою зарядом з поверхневою густиною 1 нКл/м^2 . Визначте різницю потенціалів між двома точками цього поля, що лежать на відстані $x_1 = 20\text{ см}$ і $x_2 = 50\text{ см}$ від площини.
10. Початкова швидкість негативного заряду в електричному полі дорівнює нулю. Куди рухатиметься заряд — у напрямі вищого чи нижчого потенціалу? Як зміниться його потенціальна енергія?

11. Якщо металевим кулям різних радіусів надати однакових негативних зарядів, чи виникне струм у провіднику, якщо з'єднати кулі?
12. Дві кулі — велика і маленька — рівномірно заряджені зарядом з поверхневою густиною σ . Чи будуть однаковими потенціали куль?
13. З якою швидкістю пролетить електрон із нескінченності крізь центр позитивно зарядженого кільця? Лінійна густина заряду дорівнює λ .
14. Дві краплини ртуті кожна масою 20 г лежать на склі на відстані 4 см одна від одної. Одна краплина заряджена негативним зарядом $q_1 = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл, друга — позитивним зарядом $q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл. У який бік вони рухатимуться? Чи буде рух рівноприскореним?

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Чотири однакових за модулем точкових заряди $|q| = 20$ нКл, два з яких позитивні (розташовані поряд), а два негативні, розташовані в вершинах квадрата зі стороною $a = 20$ см. Знайти силу, що діє на розміщений у центрі квадрата позитивний точковий заряд $q_0 = 20$ нКл (рис. 1.25).

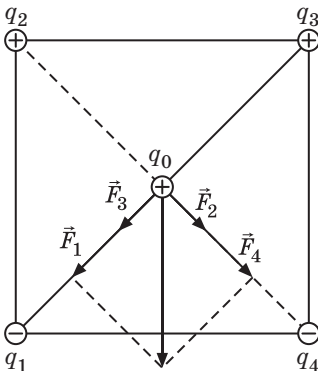


Рис. 1.25

Розв'язання
Сила, що діє на заряд q_0 , $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$. Сили рівні за модулем і кожна з них дорівнює

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = k \frac{qq_0}{(a/\sqrt{2})^2} = k \frac{2qq_0}{a^2},$$

$$\text{де } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Ф/м.}$$

Результуюча сила

$$F = 2\sqrt{2}F_1 = k \frac{4\sqrt{2}qq_0}{a^2} = 509 \text{ мкН.}$$

Задача 2

На двох нитках однакової довжини, закріплених в одній точці, підвішені дві кульки. Порівняйте кути відхилення ниток від

вертикалі, якщо: 1) кульки мають однакову масу, заряджені од-
ноійменно і заряд першого більший за заряд другого; 2) заряди
кульок однакові, а маса першої більша за масу другої.

Розв'язання

1. Рівняння рівноваги для кожної кульки (рис. 1.26, а)

$$m\vec{g} + \vec{F}_k + \vec{T}_1 = 0;$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_k + \vec{T}_2 = 0.$$

За третім законом Ньютона $\vec{F}_k = -\vec{F}'_k$, тоді

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_k}{mg}; \quad \text{tg } \beta = \frac{F'_k}{mg},$$

звідки $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$ і $\alpha = \beta$, тобто кути відхилення кульок однакові.

2. Маса кульок різні і $m_1 > m_2$ (рис. 1.26, б), тоді

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_k}{m_1 g}; \quad \text{tg } \beta = \frac{F'_k}{m_2 g}.$$

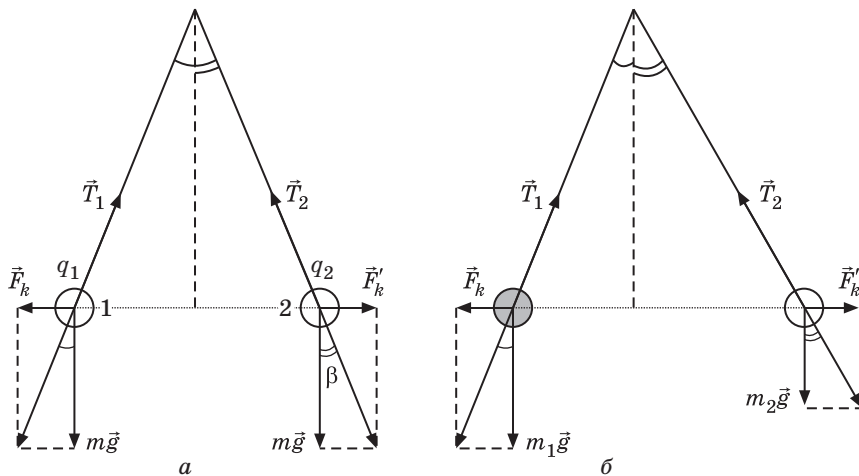


Рис. 1.26

Оскільки $\vec{F}_k = -\vec{F}'_k$, а $m_1 > m_2$, то $\text{tg } \alpha < \text{tg } \beta$, $\alpha < \beta$, тобто кут від-
хилення другої кульки більший.

Задача 3

Електричне поле створюється точковим диполем, електричний
момент якого дорівнює $p_e = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл · м. Знайти роботу сил поля

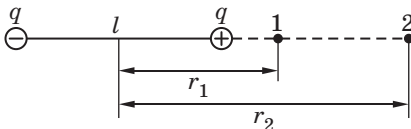


Рис. 1.27

з переміщення заряду $q = 0,1$ Кл з точки 1 (рис. 1.27), яка перебуває на осі диполя на відстані $r_1 = 0,1$ м від його центра з боку позитивного заряду, до точки 2, яка перебуває на осі диполя на відстані $r_2 = 0,2$ м від його центра.

Розв'язання

Для визначення роботи сил поля скористаємося співвідношенням

$$A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2).$$

З принципу суперпозиції полів випливає, що потенціал будь-якої точки електричного поля диполя дорівнює

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r+l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^2 - l^2/4}.$$

Враховуємо, що для точкового диполя $l \ll r$, тобто можна знехтувати величиною $l^2/4$ у знаменнику. Остаточно отримаємо

$$A_{12} = \frac{qp_e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Задача 4

Тонкий стрижень довжиною $l = 0,2$ м несе рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\lambda = 10$ нКл/м. Знайти напруженість E та потенціал ϕ , створені розподіленим зарядом у точці A , що лежить на осі стрижня на відстані $a = l = 0,2$ м від його кінця (рис. 1.28).

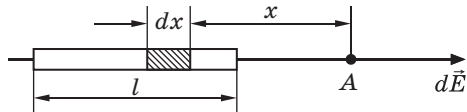


Рис. 1.28

Розв'язання

Розглядається поле, що створює розподілений заряд. На стрижні беруть малий відрізок довжиною dx . Тоді заряд цього відрізка можна вважати точковим і рівним $dq = \lambda dx$, де λ — лінійна густина заряду. Напруженість dE , яку створює заряд dq у точці A на відстані x від цього заряду, можна здобути за формулою

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2},$$

а потенціал

$$d \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{dq}{x}$$

За принципом суперпозиції електричних полів

$$E = \frac{2l}{4 \pi \epsilon_0 x^2} - \frac{2l}{4 \pi \epsilon_0 l x^2} - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2l}{x l} = 225 \text{ В/м};$$

$$\frac{2l}{4 \pi \epsilon_0 x} - \frac{2l}{4 \pi \epsilon_0 l x} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \ln x \frac{2l}{l} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \ln 2 = 62,4 \text{ В}.$$

Задача 5

Дві концентричні провідні сфери радіусами $R_1 = 6 \text{ см}$ і $R_2 = 10 \text{ см}$ несуть заряди $Q_1 = 1 \text{ нКл}$ і $Q_2 = 0,5 \text{ нКл}$ (рис. 1.29). Використовуючи теорему Гаусса, здобути напруженість \vec{E} поля в точках, які перебувають від центра сфер на відстанях $r_1 = 5 \text{ см}$, $r_2 = 9 \text{ см}$ та $r_3 = 15 \text{ см}$. Побудувати графік $E(r)$.

Розв'язання

1. Проведемо гауссову поверхню S_1 радіусом $r_1 < R_1$ (область I). За теоремою Гаусса

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$

(оскільки заряд усередині цієї гауссової поверхні дорівнює нулю). Із міркувань симетрії

$$E_n = E_1 = \text{const} \quad \oint_{S_1} \vec{E}_1 \circ dS = 0;$$

$E_1 = 0$ в усіх точках, для яких $r_1 < R_1$.

2. В області II гауссову поверхню проведемо радіусом r_2 ($R_1 < r_2 < R_2$).

У цьому випадку

$$\oint_{S_2} \vec{E}_n dS = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

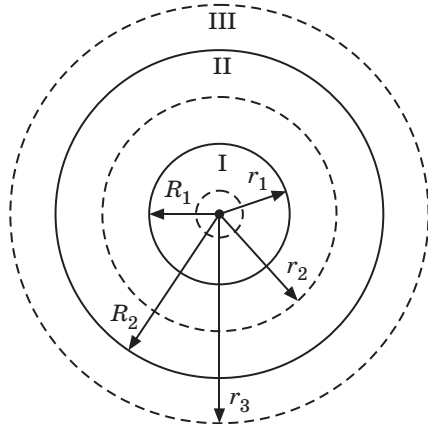


Рис. 1.29

(усередині гауссової поверхні перебуває тільки заряд Q_1).

Оскільки $E_n = E_2 = \text{const}$, то

$$E_2 \cdot \oint_{S_2} dS = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \text{ або } E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0};$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S_2}; S_2 = 4\pi r_2^2;$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} = 1 \text{ кВ/м.}$$

3. В області III проведемо гауссову поверхню радіусом $r_3 = R_2$.

Тоді

$$\oint_{S_3} E_n dS = \frac{Q_1 - Q_2}{\epsilon_0}$$

(усередині цієї гауссової поверхні перебувають заряди Q_1 і Q_2).

Враховуючи те, що $Q_2 = 0$, отримаємо

$$E_3 = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi \epsilon_0 r_3^2} = 200 \text{ В/м.}$$

Графік $E(r)$ наведено на рис. 1.30.

В області I ($r < R_1$); $E = 0$.

В області II ($R_1 < r < R_2$); $E(r) \sim \frac{1}{r^2}$.

У точці $r = R_1$; $E_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1^2} = 2,5 \text{ кВ/м.}$

У точці $r = R_2$; $E_2(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 R_2^2} = 0,9 \text{ кВ/м (} r = R_2 \text{ зліва).}$

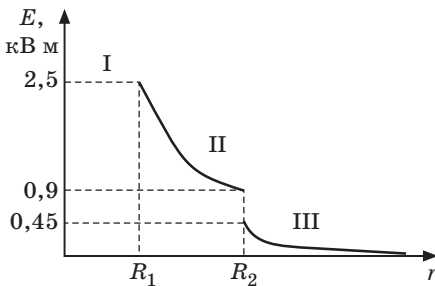


Рис. 1.30

В області III ($r > R_2$);

$E_3(r) \sim \frac{1}{r^2}$, причому в точці

$$r = R_2; E_3(R_2) = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi \epsilon_0 R_2^2}$$

$= 0,45 \text{ кВ/м (} r = R_2 \text{ справа).}$

Таким чином, функція $E(r)$ у точках $r = R_1$ і $r = R_2$ має розрив.

Задача 6

Розрахувати напруженість поля прямої нескінченної нитки, яка рівномірно заряджена з лінійною густиною λ у точці O , яка лежить від нитки на відстані r_0 (рис. 1.31).

Розв'язання

1. Застосуємо теорему Гаусса. Оскільки поле симетричне, то вектор напруженості в будь-якій точці перпендикулярний до циліндричної поверхні, що проходить через цю точку. Вісь симетрії цієї поверхні збігається з ниткою. Тому за гауссову поверхню слід взяти циліндр довжиною l з віссю симетрії, що збігається з ниткою, а бокова поверхня циліндра проходить через точку O (рис. 1.31).

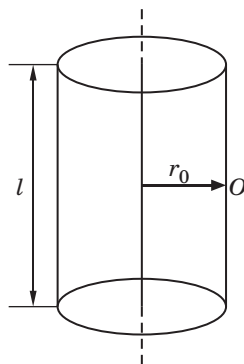


Рис. 1.31

Потік вектора \vec{E} через бокову поверхню циліндра $E \cdot 2 \pi r_0 l$, а елементарний заряд, що перебуває всередині циліндра, $-\lambda l$.

За теоремою Гаусса

$$2 \pi r_0 l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

звідки

$$E = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

2. Застосуємо диференціально-інтегральний метод. Розіб'ємо нитку на такі малі елементи довжини, щоб заряд на кожному з них можна було вважати точковим і рівним $dq = \lambda dl$ (рис. 1.32). Напруженість, яку утворює цей заряд в точці O ,

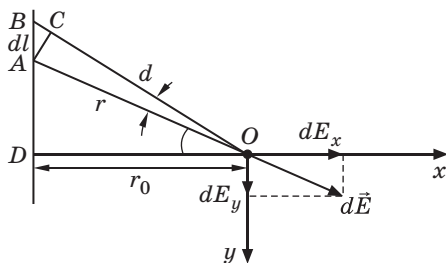


Рис. 1.32

$$dE = \frac{dq}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4 \pi \epsilon_0 r^2},$$

де r — відстань від елемента dl до точки O .

Із рисунка

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha}; \quad AC = rd = \frac{r_0 d}{\cos \alpha}; \quad dl = \frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{r_0 d}{\cos^2 \alpha}.$$

Напруженість

$$dE = \frac{\lambda d}{4 \pi \epsilon_0 r_0^2 \cos^3 \alpha};$$

$$d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j}; dE_x = \frac{\cos d}{4 \cdot 0r_0}; dE_y = \frac{\sin d}{4 \cdot 0r_0}.$$

$$E_x = \int_0^{2\pi} \frac{\cos d}{4 \cdot 0r_0} \frac{dl}{2 \cdot 0r_0}; E_y = \int_0^{2\pi} \frac{\sin d}{4 \cdot 0r_0} dl = 0.$$

Таким чином,

$$E = \frac{Q}{2 \cdot 0r_0},$$

що збігається з виразом, отриманим за допомогою теореми Гаусса.

Задача 7

Третина тонкого кільця радіусом 15 см несе рівномірно розподілений заряд $Q = 10$ нКл. Знайти напруженість \vec{E} і потенціал електричного поля, утвореного цим розподіленим зарядом у точці O , що збігається з центром кільця.

Розв'язання

Із міркувань зручності осі координат виберемо так, щоб початок координат збігався з центром кривизни дуги, а вісь OY була б розташована симетрично відносно кінців дуги (рис. 1.33).

Візьмемо на дузі малий елемент dl , заряд якого можна вважати точковим і рівним $dQ = \lambda dl$, де

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{3Q}{2R}.$$

Напруженість $d\vec{E}$ поля, що утворює цей заряд у центрі кільця,

$$|d\vec{E}| = dE = \frac{dQ}{4 \cdot 0R^2};$$

$$d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j},$$

$$\vec{E} = \int \frac{d\vec{E}}{l} = \int \frac{dE_x}{l} \vec{i} + \int \frac{dE_y}{l} \vec{j}.$$

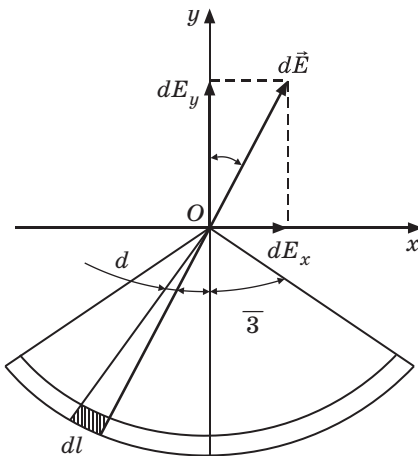


Рис. 1.33

Через симетрію задачі $\int \frac{dE_x}{l} = 0$, тоді $\vec{E} = \int \frac{dE_y}{l} \vec{j}$.

$$dE_y = dE \cos \frac{dl \cos}{4 \cdot 0R^2}; dl = R d\alpha; dE_y = \frac{R}{4 \cdot 0R^2} \cos \alpha d\alpha.$$

Інтегрування ведеться від 0 до $\frac{\pi}{3}$.

$$E = \frac{1}{4 \cdot 0R} \int_0^{\pi/3} \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{4 \cdot 0R} \int_0^{\pi/3} \cos \alpha d\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 0R} = \frac{3Q}{4 \cdot 2 \cdot 0R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3,3 \text{ кВ/м.}$$

Потенціал електростатичного поля в точці O

$$U = \int_0^l \frac{dl}{4 \cdot 0R}; U = \frac{l}{4 \cdot 0R} = \frac{2 \cdot R}{3 \cdot 4 \cdot 0} = \frac{3Q}{2 \cdot R \cdot 6 \cdot 0} = \frac{Q}{4 \cdot 0R} = 600 \text{ В.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. На двох однакових краплинках води міститься по одному зайвому електрону. Сила електростатичного відштовхування краплинок врівноважує силу їх взаємного гравітаційного притягування. Знайти радіуси краплинок.

Відповідь: $R = 76 \text{ мкм.}$

1.2. Заряди $q_1 = 10 \text{ нКл}$ та $q_2 = 16 \text{ нКл}$ розташовані на відстані $r = 7 \text{ мм}$ один від одного. Яка сила діятиме на заряд $q = 2 \text{ нКл}$, розташований у точці, що лежить на відстані $r_1 = 3 \text{ мм}$ від меншого заряду та на $r_2 = 4 \text{ мм}$ від більшого.

Відповідь: $F = 2 \text{ мН.}$

1.3. Три однакові позитивні заряди $q = 9 \cdot 10^9 \text{ Кл}$ кожний містяться в вершинах правильного трикутника, в центрі якого перебуває негативний заряд q_1 . Знайти абсолютне значення цього заряду, якщо ця система перебуває в рівновазі у повітрі.

Відповідь: $q_1 = 5,2 \text{ нКл.}$

1.4. Чотири однакові заряди q розташовані в кутах квадрата. Який заряд q_0 протилежного знака слід помістити в центрі квадрата, щоб уся система зарядів перебувала в рівновазі.

Відповідь: $q_0 = 0,957q.$

1.5. Заряди q_1 , q та $q_2 = 2q$ перебувають на відстані l один від одного. З якою силою діють ці заряди на третій заряд $q_3 = 3q$, якщо він перебуває на відстані l від середини лінії, яка з'єднує ці заряди.

Відповідь: $F = \frac{3\sqrt{2,6}q^2}{5 \cdot 0l}$.

1.6. На нитці підвішено кульку, маса якої $m = 9,8$ г. Їй надали заряд $q = 1$ мкКл. Коли до неї знизу піднесли заряджену таким самим зарядом кульку, сила натягу нитки зменшилася в 4 рази. Визначити відстань між центрами кульок.

Відповідь: $r = 36$ см.

1.7. Дві маленькі провідні кульки підвішені на двох довгих непровідних нитках до одного гачка. Кульки мають однакові заряди й перебувають на відстані $r = 5$ см одна від одної. Що відбудеться після того, як одну із кульок розрядити, та яка відстань буде між ними?

Відповідь: $r_1 = 3$ см.

1.8. Дві однакові заряджені маленькі кульки, підвішені на нитках однакової довжини, знаходяться в гасі. Якою має бути густина матеріалу кульок, щоб кут розходження ниток у повітрі й у гасі був тим самим? Густина гасу $\rho_2 = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м³, відносна електрична проникність гасу $\epsilon = 2$.

Відповідь: $1,6 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.9. Дві однакові кульки, підвішені на закріплених в одній точці нитках однакової довжини, зарядили однаковими однойменними зарядами. Кульки відштовхнулися, і кут між ними став дорівнювати 60° . Після занурення кульок у рідкий діелектрик, кут між ними зменшився до 50° . Знайти діелектричну проникність середовища. Виштовхувальною силою знехтувати.

Відповідь: $1,7$.

1.10. Кулька масою $m = 10$ г, яка несе заряд $q = 50$ нКл, підвішена на нитці довжиною 20 см, обертається навколо нерухомого заряду, такого самого, як і заряд кульки. Кут між напрямком нитки й вертикаллю дорівнює 30° . Знайти кутову швидкість рівномірного обертання кульки та силу натягу нитки.

Відповідь: $7,4$ см⁻¹; $T = 0,1$ Н.

1.11. На деякій відстані $a = 5$ см від нескінченної поверхні перебуває точковий заряд $q = 1$ нКл. Визначити силу, яка діє на заряд з боку індукованого ним заряду на площині.

Відповідь: $F = 0,9$ мкН.

1.12. Тонкий стрижень довжиною $l = 0,2$ м рівномірно заряджений з лінійною густиною $\lambda = 2,5$ нКл/м. На продовженні осі стрижня на відстані $a = 0,1$ м від одного з його кінців є точковий заряд $Q_1 = 4 \cdot 10^8$ Кл. Знайти силу взаємодії цього заряду зі стрижнем.

Відповідь: $F = 6 \cdot 10^6$ Н.

1.13. По тонкому кільцю радіусом $R = 10$ см рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\lambda = 10^9$ Кл/м. Який заряд Q слід помістити в центр кільця, щоб сила F , яка розтягує кільце, дорівнювала б 35 мкН? Взаємодією зарядів кільця знехтувати.

Відповідь: $Q = 0,4$ мкКл.

1.14. Тонку нескінченну нитку зігнуто під кутом 90° . На продовженні однієї зі сторін на відстані $a = 50$ см від вершини кута перебуває точковий заряд $Q = 0,1$ мкКл. Розрахувати лінійну густину λ , з якою розподілено заряд по нитці, якщо сила взаємодії нитки й точкового заряду $F = 4$ мН.

Відповідь: $\lambda = 10^6$ Кл/м.

1.15. Електричне поле утворене двома точковими зарядами $q_1 = 40$ нКл і $q_2 = 30$ нКл, які перебувають на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити напруженість поля E у точці A , віддаленій від першого заряду на $r_1 = 6$ см та від другого на $r_2 = 8$ см.

Відповідь: $E = 110$ кВ/м.

1.16. Діагоналі ромба $d_1 = 96$ см, $d_2 = 32$ см. На кінцях довшої діагоналі розташовано точкові заряди $q_1 = 64$ нКл і $q_2 = 352$ нКл, на кінцях коротшої — точкові заряди $q_3 = 8$ нКл і $q_4 = 40$ нКл. Знайти модуль і напрямок (відносно коротшої діагоналі) вектора напруженості електричного поля в центрі ромба.

Відповідь: $E = 15,9$ кВ/м; 45° .

1.17. Металева сфера радіусом $R = 0,2$ м несе заряд $Q = 10$ нКл. Знайти напруженість E електричного поля у таких точках: 1) на відстані $l_1 = 15$ см від центра сфери; 2) на поверхні сфери; 3) на $l_2 = 25$ см від центра сфери. Побудувати графік залежності E від r .

Відповідь: 1) $E = 0$; 2) $E = 2,25$ кВ/м; 3) $E = 1,44$ кВ/м.

1.18. Дві концентричні металеві заряджені сфери радіусами $R_1 = 5$ см та $R_2 = 10$ см несуть відповідно заряди $Q_1 = 10$ нКл та $Q_2 = -5$ нКл. Знайти напруженість E поля в точках, що перебувають від центра сфери на відстанях: $r_1 = 3$ см, $r_2 = 8$ см, $r_3 = 12$ см. Побудувати графік залежності $E(r)$.

Відповідь: $E_1 = 0$; $E_2 = 14$ кВ/м; $E_3 = 3,12$ кВ/м.

1.19. Кільце з дроту радіусом $R = 10$ см рівномірно заряджене негативно і несе заряд $q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця в точках, що перебувають від центра на відстанях: 0; 5; 8; 10 та 15 см. Побудувати графік $E(r)$.

Відповідь: $E = 0$; 1600; 1710; 1600; 1150 В/м відповідно.

1.20. Дуже довга тонка нитка несе заряд, рівномірно розподілений по всій її довжині з лінійною густиною $\lambda = 5,55$ нКл/м. Знайти напруженість поля на відстані $a = 0,5$ м від нитки проти її середини.

Відповідь: $E = 200$ В/м.

1.21. По тонкому півкільцю радіусом $R = 0,1$ м рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\lambda = 10^{-6}$ Кл/м. Визначити напруженість електричного поля, яке утворює розподілений заряд у точці O , що збігається з центром кільця.

Відповідь: $E = 180$ кВ/м.

1.22. Тонке кільце несе рівномірно розподілений заряд $Q = 0,2$ мкКл. Визначити напруженість електричного поля E , створеного розподіленим зарядом у точці A , рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань $h = 0,2$ м. Радіус кільця $R = 0,1$ м.

Відповідь: $E = 390$ кВ/м.

1.23. Тонкий довгий стрижень рівномірно заряджений з лінійною густиною $\lambda = 10$ мкКл/м. Знайти напруженість поля на відстані $a = 20$ см від кінця стрижня по перпендикуляру до його осі. Якою є сила взаємодії зарядженого стрижня з точковим зарядом $Q = 10$ нКл, розташованим у цій точці?

Відповідь: $E = 637$ кВ/м; $F = 6,37$ мН.

1.24. Тонкий стрижень довжиною $l = 30$ см несе рівномірно розподілений за довжиною заряд з лінійною густиною $\lambda = 10^{-6}$ Кл/м. Знайти напруженість поля в точці, яка перебуває на відстані $r_0 = 0,2$ м від стрижня та рівновіддалена від обох його кінців. Знайти силу, що діє на заряд $Q_1 = 10^{-8}$ Кл, розташований у цій точці.

Відповідь: $E = 54$ кВ/м; $F = 0,54$ мН.

1.25. Півкільце радіусом $R = 20$ см несе рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\lambda = 10$ мкКл/м. Знайти силу взаємодії зарядженого півкільця з точковим зарядом $Q = 10$ нКл, що перебуває в центрі кільця. Визначити також напруженість поля в центрі півкільця.

Відповідь: $F = 9$ мН; $E = 0,9$ МВ/м.

1.26. Півсфера несе заряд рівномірно розподілений з поверхневою густиною $\sigma = 10$ мкКл/м². Знайти напруженість E електростатичного поля в геометричному центрі сфери.

Відповідь: $E = 282$ кВ/м.

1.27. Кільце радіусом $R = 20$ см має заряд $Q = 5 \cdot 10^9$ Кл. На якій відстані l від центра кільця напруженість електростатичного поля буде максимальною?

Відповідь: $L = 14,2 \cdot 10^2$ м.

1.28. Нескінченна рівномірно заряджена площина має поверхневу густину електричних зарядів $\sigma = 9$ мкКл/м². Над нею перебуває алюмінієва кулька із зарядом $q = 3,68 \cdot 10^7$ Кл. Якого радіусу має бути кулька, щоб вона не впала?

Відповідь: $r = 0,012$ м.

1.29. Точковий заряд $q = 10^9$ Кл перебуває в центрі тонкого кільця радіусом $R = 10$ см, по якому рівномірно розподілений заряд Q . Знайти модуль вектора напруженості електричного поля на осі кільця в точці, що перебуває від центра кільця на відстані $x = 20$ см.

Відповідь: $E = 57,6$ В/м.

1.30. Тонке кільце радіусом R заряджене рівномірно з лінійною густиною λ . Знайти напруженість електричного поля: 1) на відстані h над кільцем уздовж осі симетрії; 2) в центрі кільця. На якій відстані від кільця напруженість поля буде максимальною? Мінімальною?

Відповідь: 1) $E = \frac{Rh}{2 \cdot 0(R^2 + h^2)^{3/2}}$; 2) $E = 0$; E_{\max} при $h = R \frac{\sqrt{2}}{2}$;

E_{\min} при $h = 0$.

1.31. Тонкий прямий стрижень довжиною $l = 2a$, що перебуває у вакуумі, заряджений з лінійною густиною λ . Для точок, що лежать на прямій, перпендикулярній до осі стрижня в його центрі, знайти модуль $|\vec{E}|$ напруженості поля як функцію відстані r від центра стрижня.

Відповідь: $E = \frac{a}{2 \epsilon_0 r \sqrt{a^2 - r^2}}$.

1.32. Тонкий однорідний диск радіусом $R = 40$ см заряджений рівномірно з поверхневою густиною $\sigma = 1$ мкКл/м². Знайти напруженість електростатичного поля: 1) на відстані $h = 30$ см над диском по осі симетрії; 2) у центрі диска. На якій відстані від диска напруженість поля буде максимальною? Мінімальною?

Відповідь: 1) $E = 22,6$ кВ/м; 2) $E = 56,5$ кВ/м; $E_{\max} = 56,5$ кВ/м, якщо $h = 0$; $E = 0$, якщо $h = R$.

1.33. Електричне поле створене двома паралельними нескінченними зарядженими площинами з поверхневими густинами заряду $\sigma_1 = 0,2$ мкКл/м² і $\sigma_2 = 0,3$ мкКл/м². Знайти напруженість електричного поля, утвореного цими зарядженими площинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж лінії, перпендикулярної до пластин.

Відповідь: $E_I = E_{III} = 28,3$ кВ/м; $E_{II} = 5,6$ кВ/м.

1.34. Електричне поле утворене двома нескінченними паралельними пластинами, які несуть однакові рівномірно розподілені по площині заряди ($\sigma = 0,1$ нКл/м²). Знайти напруженість E поля: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік $E(x)$.

Відповідь: 1) $E = 0$; 2) $E = 11,3$ В/м.

1.35. Електричне поле створено нескінченною площиною, зарядженою з поверхневою густиною $\sigma = 400$ нКл/м², і нескінченною прямою ниткою, зарядженою з лінійною густиною $\lambda = 100$ нКл/м. Сила, що діє на точковий заряд, розташований на відстані $r = 10$ см від нитки, дорівнює $F = 289$ мкН. Знайти величину точкового заряду, якщо заряд і нитка лежать в одній площині, паралельній зарядженій площині.

Відповідь: $Q = 10$ нКл.

1.36. Дві нескінченно довгі рівномірно заряджені тонкі нитки $\sigma_1 = 1$ мкКл/м і $\sigma_2 = 2$ мкКл/м перетинаються під прямим кутом одна до одної. Знайти силу F їх взаємодії.

Відповідь: $F = 112$ мН.

1.37. З якою силою, що припадає на одиницю площини, відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченні площини з однаковою поверхневою густиною заряду $\sigma = 2$ мкКл/м²?

Відповідь: $\frac{F}{S} = 0,23$ Н/м².

1.38. Нескінченна пряма нитка, рівномірно заряджена з лінійною густиною $\lambda_1 = 0,3 \text{ мкКл/м}$, та відрізок довжиною $l = 0,2 \text{ м}$, рівномірно заряджений з лінійною густиною $\lambda_2 = 0,2 \text{ мкКл/м}$, розташовані в одній площині перпендикулярно одне до одного на відстані $r_0 = 0,1 \text{ м}$. Знайти силу взаємодії між ними.

Відповідь: $F = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$.

1.39. На двох концентричних сферах радіусами R та $2R$ рівномірно розподілені заряди за поверхневими густинами σ_1 та σ_2 .
 1) Використовуючи теорему Гаусса, знайти залежність $E(r)$ напруженості електричного поля від відстані для трьох областей (I, II, III). Прийняти $\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$; $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$.
 2) Знайти напруженість E в точці, яка перебуває на відстані $r = 1,5R$ від центра, та вказати напрямок вектора \vec{E} . Прийняти $R = 30 \text{ нКл/м}^2$.
 3) Побудувати графік $E(r)$.

Відповідь: $E_I = 0$; $E_{II} = \frac{4}{0} \frac{R^2}{r}$; $E_{III} = \frac{8}{0} \frac{R^2}{r}$; $E = 6 \text{ кВ/м}$.

1.40. На двох концентричних сферах радіусами R та $2R$ рівномірно розподілені заряди з поверхневими густинами $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$ і $\sigma_2 = 0,1 \text{ мкКл/м}^2$.
 1) Використовуючи теорему Гаусса, знайти залежність $E(r)$ напруженості електричного поля від відстані для трьох областей I, II, III.
 2) Знайти напруженість E в точці на відстані $r = 3R$ від центра, вказати напрямок вектора \vec{E} .
 3) Побудувати графік $E(r)$.

Відповідь: $E_I = 0$; $E_{II} = \frac{2}{0} \frac{R^2}{r}$; $E_{III} = \frac{2}{0} \frac{R^2}{r}$; $E = 2510 \text{ В/м}$.

1.41. На двох нескінченних паралельних площинах рівномірно розподілені заряди з поверхневими густинами $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$ і $\sigma_2 = 20 \text{ мкКл/м}^2$.
 1) Використовуючи теорему Гаусса та принцип суперпозиції електричних полів, знайти залежність $E(x)$ напруженості електричного поля в трьох областях I, II, III.
 2) Знайти напруженість E поля в точці, що перебуває ліворуч площин, зазначити напрямок вектора \vec{E} .
 3) Побудувати графік $E(x)$.

Відповідь: $E_I = E_{II} = \frac{3}{2} \cdot 10^3$; $E_{III} = \frac{3}{2} \cdot 10^3$; $E = 3,39 \cdot 10^3 \text{ В/м}$.

1.42. На двох коаксіальних нескінченних циліндрах радіусами R і $2R$ рівномірно розподілені заряди з поверхневими густинами $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$ і $\sigma_2 = 50 \text{ нКл/м}^2$.
 1) Використовуючи теорему Гаусса, знайти залежність $E(r)$ напруженості електричного поля від

відстані для трьох областей I, II, III. 2) Знайти напруженість E в точці, віддаленій від осі циліндра на відстань $r = 1,5R$, та вказати напрямок вектора \vec{E} . 3) Побудувати графік $E(r)$.

Відповідь: $E_I = 0$; $E_{II} = \frac{2}{0} \frac{R}{r}$; $E_{III} = 0$; $E = 7,54$ кВ/м.

1.43. У задачі 1.42 прийняти λ_1 ; λ_2 (60 нКл/м²), $r = 3R$.

Відповідь: $E_I = 0$; $E_{II} = \frac{R}{0} \frac{R}{r}$; $E_{III} = \frac{R}{0} \frac{R}{r}$; $E = 2,26$ кВ/м.

1.44. Тонкий стрижень довжиною $l = 0,1$ м має рівномірно розподілений заряд $q = 1$ нКл. Визначити потенціал електричного поля в точці, що міститься на осі стрижня на відстані $a = 0,2$ м від найближчого кінця.

Відповідь: $36,5$ В.

1.45. По тонкому кільцю радіуса $R = 10$ см рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною 10 нКл/м. Визначити потенціал у точці, що лежить на осі кільця на відстані $a = 5$ см від його центра.

Відповідь: 505 В.

1.46. Тонкі стрижні утворюють квадрат зі стороною a . Стрижні заряджені з лінійною густиною $1,33$ нКл/м. Знайти потенціал у центрі квадрата.

Відповідь: $33,6$ В.

1.47. Три однакові водяні краплини зливаються в одну велику краплю. Знайти потенціал великої краплі, якщо потенціал кожної краплини $\varphi_1 = 900$ В.

Відповідь: $1,87 \cdot 10^3$ В.

1.48. Яку роботу слід виконати, щоб перенести точковий заряд $q_0 = 30$ нКл із нескінченності до точки, що перебуває на відстані $r = 10$ см від поверхні зарядженої металевої кулі? Потенціал на поверхні кулі 200 В, радіус кулі $R = 2$ см.

Відповідь: $A = 1$ мкДж.

1.49. Заряди $q, -2q, 3q$ розташовані у вершинах правильного трикутника, сторона якого дорівнює a . Знайти потенціальну енергію цієї системи.

Відповідь: $W_n = \frac{5q^2}{4 \cdot 0 a}$.

1.50. Нескінченна площина рівномірно заряджена з поверхневою густиною $2 \cdot 10^9$ Кл/м². Знайти величину та напрямок градієнта потенціалу електричного поля, створеного цією поверхнею.

Відповідь: |grad | 113 В/м.

1.51. У деякій точці електричного поля напруженість $E = 600$ В/м. Знайти різницю потенціалів між цією точкою та іншою, що лежить на прямій, яка становить кут 60° з напрямком вектора напруженості. Відстань між точками $l = 2$ мм.

Відповідь: $U_1 - U_2 = 0,6$ В.

1.52. Електричне поле створене позитивним точковим зарядом. У точці, віддаленій від заряду на $r = 0,12$ м величина градієнта потенціалу дорівнює 200 В/м. Знайти потенціал поля в цій точці.

Відповідь: 24 В.

1.53. Нескінченна тонка пряма нитка несе рівномірно розподілений заряд з густиною $= 10$ нКл/м. Знайти градієнт потенціалу в точці, що віддалена на відстань $r = 20$ см від нитки. Вказати напрямок градієнта потенціалу.

Відповідь: 900 В/м.

1.54. Дві паралельні заряджені площини з поверхневими густинами $\sigma_1 = 2$ мкКл/м² та $\sigma_2 = 0,8$ мкКл/м² перебувають на відстані $l = 0,6$ см одна від одної. Визначити різницю потенціалів U між площинами.

Відповідь: $U = 949$ В.

1.55. Куля радіусом R заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ . Знайти напруженість поля E та потенціал ϕ для точок усередині кулі.

Відповідь: $E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$; $\phi = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{3 \epsilon_0}$.

1.56. Електрон вилітає із точки, потенціал якої $\phi_1 = 600$ В, зі швидкістю $v_1 = 1,2 \cdot 10^7$ м/с у напрямку силових ліній поля. Знайти потенціал точки поля, в якій електрон зупиниться.

Відповідь: $\phi_2 = 190,5$ В.

1.57. Протон, що летить до ядра двічі іонізованого нерухомого атома гелію, в деякій точці поля, напруженість якої $E = 10$ кВ/см, має швидкість $v_1 = 1$ км/с. На яку відстань до ядра зможе наблизитися протон?

Відповідь: $r_2 = 130$ нм.

1.58. Електрон рухається в напрямку силових ліній однорідного поля, напруженість якого $E = 120 \text{ В/м}$. Яку відстань він пролетить до повного зупинення, якщо його початкова швидкість $v = 1 \text{ м/с}$? Скільки часу він рухатиметься до зупинення?

Відповідь: $S = 2,4 \text{ см}; t = 47,6 \text{ нс}$.

1.59. Електрон, швидкість якого $v_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$, влітає в плоский конденсатор по його середній лінії. Вилетівши з конденсатора, він потрапляє на екран, який перебуває на відстані $L = 1 \text{ м}$ від кінця конденсатора. Знайти відхилення електрона від осьової лінії конденсатора, якщо до обкладок конденсатора, довжина яких $b = 0,2 \text{ м}$, а відстань між ними $d = 2 \text{ мм}$, прикладено напругу $U = 100 \text{ В}$.

Відповідь: $h = 5,13 \text{ см}$.

1.60. У плоский повітряний конденсатор паралельно пластинам влітає електрон із швидкістю $v = 10^6 \text{ м/с}$. На яку відстань зміститься електрон перпендикулярно пластинам на виході із конденсатора, якщо напруженість поля між пластинами $E = 1,2 \text{ В/м}$, а довжина конденсатора $l = 20 \text{ см}$?

Відповідь: $h = 4,22 \text{ мм}$.

2 Електричне поле в діелектриках

2.1. Типи діелектриків. Поляризація діелектриків

Діелектриком називається речовина, яка за звичайних умов не проводить постійний електричний струм, на відміну від провідника, що має високу провідність. Це пов'язано з різним характером руху заряджених частинок в діелектриках і провідниках.

Вільні і зв'язані заряди

У провідниках, незважаючи на їх електронейтральність, існує велика кількість *вільних* зарядів, що можуть упорядковано рухатися під дією зовнішнього електричного поля. Такими зарядами є електрони в металах, іони в газах і рідинах, заряди плазми. Якщо ізольований провідник зарядити, тобто на нього ззовні перенести вільні електрони, то вони розподіляться по поверхні провідника.

Питомий опір провідника змінюється у межах від 10^8 Ом м до 10^6 Ом м.

У діелектриках немає вільних зарядів. Заряджені частинки входять до складу атомів, молекул, які розташовані у вузлах кристалічної ґратки твердого тіла і неспроможні вільно рухатися. Заряди таких частинок називаються *зв'язаними*.

Підкреслимо умовний характер терміна «зв'язані» заряди: вони нічим не відрізняються від вільних за винятком тієї обставини, що *зв'язані заряди входять до складу атомів і молекул речовини, а вільні — втрапили зв'язок з конкретним ядром.*

Важливим є такий момент: вільні заряди можуть бути для даного тіла як зовнішніми, принесеними ззовні, так і внутрішніми, що входять до складу провідника. Зв'язані заряди завжди внутрішні.

До діелектриків належать усі гази, деякі рідини (дистильована вода, бензол; нафтові, синтетичні та рослинні мастила тощо), а також тверді тіла (скло, фарфор, полівінілхлорид та ін.).

Питомий електричний опір діелектрика 10^6 – 10^{15} Ом м тобто в 10^{14} – 10^{21} разів більший, ніж у провідників.

Як і провідник у незарядженому стані, діелектрик — електронейтральна система: кількість позитивних зв'язаних зарядів дорівнює кількості негативних. Якщо на твердий діелектрик помістити вільний заряд, то він, на відміну від провідника, залишаючись вільним, не рухатиметься, тобто розподіл вільних зарядів на діелектрику зберігається.

Якщо нейтральний діелектрик помістити у зовнішнє електричне поле, то виникнуть суттєві зміни як у полі, так і в самому діелектрику.

Для того щоб з'ясувати, чому це відбувається, розглянемо, яку структуру можуть мати атоми діелектрика.

Неполярний діелектрик

Діелектрик називається *неполярним*, якщо за відсутності зовнішнього електричного поля «центри тяжіння» позитивних і негативних зарядів збігаються і *дипольний момент молекул \vec{p}_e дорівнює нулю* (рис. 2.1, а)

У зовнішньому електричному полі відбувається деформація електричних оболонок атомів і молекул. Позитивні і негативні заряди зміщуються у протилежних напрямках, що призводить до

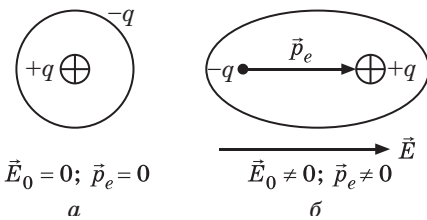


Рис. 2.1

зсуву центрів тяжіння позитивних і негативних зарядів. У цьому випадку неполярна молекула або атом набуває *індукованого електричного моменту \vec{p}_e* , що збігається за напрямком з напрямком зовнішнього поля \vec{E}_0 (рис. 2.1, б).

Така молекула поводить себе як пружний диполь, довжина плеча якого \vec{l} залежить від величини зовнішнього електричного поля і не залежить від теплового руху. Сумарний дипольний момент такого діелектрика у зовнішньому електричному полі відмінний від нуля.

Полярний діелектрик

У *полярних діелектриках* молекули являють собою *жорсткі диполі, які мають власний, сталий за модулем, дипольний момент \vec{p}_e* . Прикладом таких діелектриків є вода, органічні молекули тощо.

У таких молекул «центри тяжіння» позитивних і негативних зарядів не збігаються навіть за відсутності зовнішнього електричного поля, але в цьому випадку, внаслідок теплового руху, дипольні моменти орієнтовані хаотично і сумарний дипольний момент діелектрика дорівнює нулю.

У зовнішньому електричному полі на молекулу-диполь діє пара сил (див. розділ 1.7), що намагається зорієнтувати дипольний момент молекули за напрямком напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 , незважаючи на дезорієнтуючу дію теплового руху (рис. 2.2). У цьому випадку з'являється сумарний дипольний момент діелектрика, відмінний від нуля. Крім того, молекули полярних діелектриків набувають додаткових, індукованих зовнішнім полем, дипольних моментів, але електронний механізм поляризації в цьому випадку відіграє незначну роль і ним можна знехтувати.

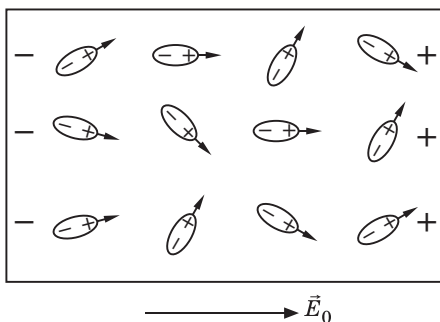


Рис. 2.2

Поляризація діелектрика

Явище набуття діелектриком деякого результуючого дипольного моменту під дією зовнішнього електричного поля має назву поляризації діелектрика. Діелектрик у такому стані — поляризований.

Залежно від будови молекул існує три типи поляризації діелектрика: електронна, орієнтаційна й іонна.

Електронна (деформаційна) поляризація

Електронна (деформаційна) поляризація спостерігається у неполярних діелектриків. Завдяки малій масі електронів, порівняно з масою ядер,

в електричному полі \vec{E}_0 зміщуються, переважно, електрони і деформуються електронні оболонки, у зв'язку з чим поляризація і називається електронною. На торцях діелектрика з'являються поверхневі зв'язані заряди різного знаку з поверхневою густиною σ' (рис. 2.3).

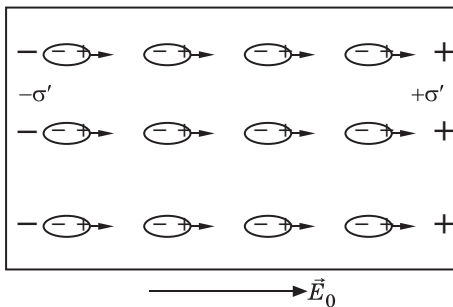


Рис. 2.3

Орієнтаційна (дипольна) поляризація

Другий тип поляризації — *орієнтаційна, або дипольна поляризація, характерна для полярних діелектриків.*

Одновременна дія зовнішнього електричного поля і теплового руху призводить до появи переважної орієнтації

дипольних електричних моментів молекул уздовж поля (див. рис. 2.2), що зростає зі збільшенням напруженості електричного поля і зменшенням температури.

**Іонна
поляризація**

Іонна поляризація спостерігається в твердих діелектриках, що мають іонну кристалічну ґратку, наприклад, діелектричні кристали типу NaCl, KCl, KBr тощо. Такі кристали являють собою просторові ґратки з правильним чергуванням іонів різних знаків, які можна розглядати як систему двох підґраток з негативними і позитивними зарядами.

Під час дії на іонний кристал електричного поля відбувається зсув іонів кристалічної ґратки: позитивних — у напрямку поля, а негативних — у протилежному напрямку. Це приводить до виникнення дипольного моменту, тобто поляризації кристала.

Для всіх типів поляризації визначальним є те, що при внесенні діелектрика в зовнішнє електричне поле в ньому виникає відмінний від нуля дипольний момент.

**Вектор
поляризації
(поляризованість)**

Вектор поляризації (поляризованість)
 \vec{P} — кількісна міра поляризації діелектрика, що дорівнює чисельно дипольному моменту одиниці об'єму діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{e_i} = \frac{\vec{p}_{eV}}{V}, \quad (2.1)$$

де \vec{p}_{e_i} — електричний дипольний момент i -ї молекули; N — загальна кількість молекул в об'ємі V ; \vec{p}_{eV} — дипольний момент об'єму V .

Цей об'єм має бути достатньо малим, щоб у його межах електричне поле можна було вважати однорідним. У той же час кількість N молекул у ньому має бути достатньо великою ($N \gg 1$), щоб до нього можна було застосувати статистичні закономірності.

Одиниці вимірювання поляризованості: 1 кулон на квадратний метр.

$$[P] = 1 \text{ Кл/м}^2.$$

**Діелектрична
сприйнятливість**

Експериментально доведено, що для ізотропних діелектриків і не сильних електричних полів вектор поляризації \vec{P} лінійно пов'язаний з напруженістю поля \vec{E} .

$$\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.2)$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — електрична стала, κ — скалярна стала, яка називається *діелектричною сприйнятливістю діелектрика*, що характеризує властивості діелектрика. κ — безрозмірна величина, завжди додатна ($\kappa > 0$) і для більшості діелектриків дорівнює декільком одиницям.

Діелектрична сприйнятливість неполярного діелектрика не залежить від температури, на відміну від полярного діелектрика, в якому κ залежить від температури, зменшуючись з її зростанням. Це можна пояснити тим, що тепловий рух заважає вишикувати електричні моменти полярних молекул за напрямком \vec{E} .

Кристалічні діелектрики можуть бути електрично анізотропними. У цьому випадку електрична сприйнятливість κ — величина тензорна, вектори \vec{P} і \vec{E} мають однаковий напрямок лише для визначених напрямків у даному кристалі.

2.2. Зв'язок поляризованості з поверхневою й об'ємною густиною зв'язаних зарядів

Зв'язок вектора поляризації з поверхневою густиною зв'язаних зарядів

Визначимо поверхневу густину зв'язаних зарядів. Для цього розглянемо поведінку елементарного об'єму однорідного ізотропного діелектрика у вигляді похилої призми з основою S і ребром l , паралельним зовнішньому електричному полю \vec{E}_0 (рис. 2.4). Вектор поляризації \vec{P} буде колінеарним вектору \vec{E}_0 і складає кут із зовнішньою нормаллю до поверхні діелектрика.

Усередині діелектрика позитивні і негативні заряди скомпенсовані, а в тонких шарах біля поверхні основ у результаті поляризації з'являються некомпенсовані поверхневі індуковані поляризаційні заряди $+$ і $-$.

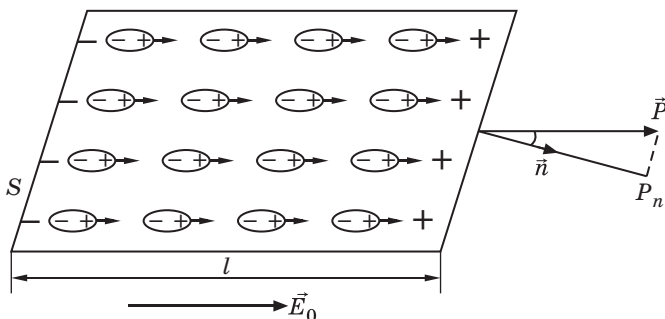


Рис. 2.4

Дипольний момент цього елементарного об'єму можна розглядати як для диполя з зарядами q і $-q$ на відстані l .

Згідно з (2.1) повний дипольний момент зразка дорівнює $p_{eV} = P V$, де об'єм зразка $V = Sl \cos \theta$, тоді

$$p_{eV} = P Sl \cos \theta. \quad (2.3)$$

З іншого боку, повний дипольний момент цього об'єму дорівнює добутку величини зв'язаного заряду кожної сторони q на відстань l між ними, тобто

$$p_{eV} = Sl. \quad (2.4)$$

Тоді з (2.3) і (2.4) маємо:

$$P Sl \cos \theta = Sl,$$

звідки $P \cos \theta = P_n$, $P \cos \theta = P_n$,

$$P_n = P \cos \theta. \quad (2.5)$$

Проекція поляризованості на зовнішню нормаль до відповідної поверхні (нормальна складова вектора поляризації) дорівнює поверхневій густині зв'язаних зарядів.

**Теорема Гаусса
для вектора
поляризації**

За однакової густини позитивних і негативних зарядів у діелектрику, що перебуває в електричному полі, об'ємних зарядів усередині діелектрика не виникає.

Проте якщо діелектрик неоднорідний або знаходиться в неоднорідному електричному полі, поляризованість \vec{P} діелектрика також неоднорідна і залежить від координат. У цьому випадку крім поверхневих поляризаційних зарядів з'являються також об'ємні поляризаційні заряди.

Для прикладу візьмемо неполярний діелектрик, електричні моменти молекул якого збігаються за напрямком з напрямком зовнішнього електричного поля. Під дією зовнішнього електричного поля неполярний діелектрик поляризується, виникають диполі з плечем l і дипольним моментом $\vec{p}_e = ql$ (q — заряд диполя). Уявимо собі всередині діелектрика замкнену поверхню S , яку вважатимемо гауссовою поверхнею (рис. 2.5, а), і розглянемо елемент такої поверхні dS ($d\vec{S} = \vec{n} dS$) (рис. 2.5, б). Зовнішня нормаль \vec{n} до цієї площини складає кут θ з вектором напруженості поля \vec{E} . Внесок у величину зв'язаного заряду, що охоплюється гауссовою поверхнею S , дадуть тільки диполі, що перетинаються цією поверхнею, а центри їх перебувають усередині косоного циліндра з основою площею dS і довжиною l (рис. 2.5, б).

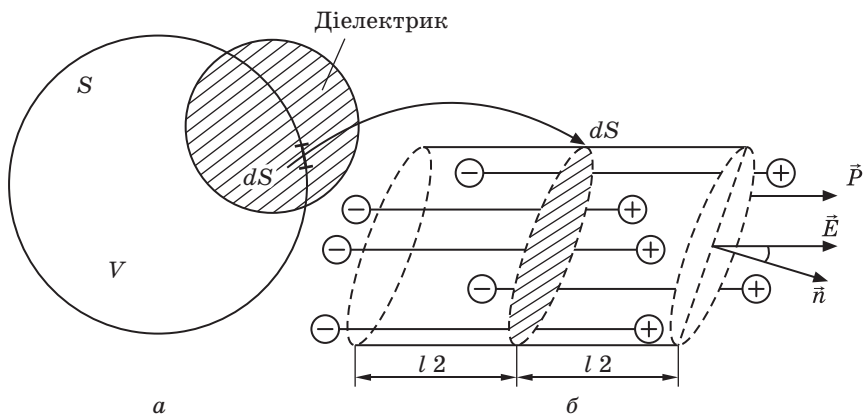


Рис. 2.5

Унаслідок дії електричного поля через елемент поверхні dS назовні поверхні S вийде позитивний заряд:

$$dq = q n_0 dV = q n_0 \frac{l}{2} dS \cos \theta, \text{ де } n_0 \text{ — концентрація молекул.}$$

Окрім того, крізь елемент dS усередину поверхні S ввійде негативний заряд

$$dq = -q n_0 \frac{l}{2} dS \cos \theta.$$

Проте слід взяти до уваги, що перенесення негативного заряду в деякому напрямку еквівалентне перенесенню позитивного заряду у зворотному напрямку. Тоді сумарний заряд, що вийшов назовні з поверхні S через елемент dS , дорівнює

$$dq = dq - |dq| = q n_0 l dS \cos \theta;$$

де $q l = p_e$; $p_e = p_e n_0$ — поляризованість діелектрика;

$$dq = P_n dS \cos \theta = P_n dS \vec{P} \cdot \vec{n}.$$

Після інтегрування цього виразу по всій замкнутій поверхні S знайдемо весь заряд, що вийшов при поляризації з об'єму V , обмеженого поверхнею S . Усередині поверхні S залишиться надлишковий зв'язаний заряд q . Очевидно, що заряд, який вийшов з поверхні, дорівнює за величиною і протилежний за знаком заряду, що залишився всередині поверхні, тоді отримаємо

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = q. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) є теоремою Гаусса для вектора поляризації: *потік вектора \vec{P} крізь довільну замкнену поверхню S дорівнює надлишковому зв'язаному заряду діелектрика в об'ємі V (усередині поверхні S), взятому зі зворотним знаком.*

Якщо ввести величину густини об'ємного поляризаційного заряду q , то

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \int_V q \, dV \quad (2.7)$$

(інтегрування ведеться за об'ємом V , обмеженим поверхнею S).

З виразів (2.6) і (2.7) отримаємо

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \int_V q \, dV. \quad (2.8)$$

До лівої частини (2.8) застосуємо теорему Остроградського — Гаусса

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{P} \, dV, \quad (2.9)$$

тоді з формул (2.8) і (2.9) маємо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{P} \, dV = - \int_V q \, dV.$$

Зважаючи на те, що об'єм інтегрування V довільний, від рівності інтегралів можна перейти до рівності підінтегральних виразів, тобто отримаємо *теорему Гаусса для вектора поляризації в диференціальній формі*

$$\operatorname{div} \vec{P} = -q. \quad (2.10)$$

Цей вираз (як і теорема Гаусса для вектора \vec{P} в інтегральній формі (2.6)) виражає *зв'язок вектора поляризації з об'ємною густиною зв'язаного заряду.*

Тобто *за наявності неоднорідної поляризації діелектрика з'являються джерела або стоки вектора поляризації, потужність яких визначається об'ємною густиною поляризаційних зарядів.*

2.3. Вектор електричної індукції

Електричне поле в діелектриках \vec{E} створюється як вільними, так і зв'язаними зарядами

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{вільн}} + \vec{E}_{\text{зв'яз}}.$$

Тоді теорема Гаусса для вектора \vec{E} має вигляд

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{0} (q_{\text{вільн}} + q), \quad (2.11)$$

де $q_{\text{вільн}}$ і q — вільні і зв'язані заряди, що охоплені поверхнею S .

Величину зв'язаного заряду можна знайти за допомогою теореми Гаусса для вектора поляризації (2.6)

$$q = \oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (2.12)$$

Поверхня інтегрування S у виразах (2.11) і (2.12) одна і та сама. З формул (2.11) і (2.12) маємо

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{вільн}}}{0} + \frac{1}{0} \oint_S \vec{P} d\vec{S};$$

$$\oint_S (\vec{E} - \vec{P}) d\vec{S} = q_{\text{вільн}}.$$

Величина

$$\vec{D} = \vec{E} - \vec{P} \quad (2.13)$$

називається **вектором електричної індукції, або електричного зміщення**. Вектор \vec{D} — допоміжна величина, що спрощує вивчення електричного поля в діелектриках. Розмірність вектора \vec{D} така сама, як і вектора \vec{P} :

$$[D] = 1 \text{ Кл/м}^2.$$

Теорема Гаусса для вектора електричної індукції

Потік вектора електричної індукції крізь довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі сторонніх (вільних) зарядів, охоплених цією поверхнею.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{вільн}}. \quad (2.14)$$

Одержимо диференціальну форму теореми Гаусса для вектора \vec{D} .

Для цього згадаємо диференціальну форму теореми Гаусса для напруженості електричного поля \vec{E} (1.25). Джерелами і стоками вектора \vec{E} можуть бути будь-які заряди, вільні і зв'язані. В діелектрику вільн , тоді

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\text{вільн}}{0}. \quad (2.15)$$

Підставимо (2.10) в (2.15), тоді

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\epsilon_0},$$

або

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} - \vec{P}) = 0.$$

З урахуванням (2.13) отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{вільн}}. \quad (2.16)$$

Тобто *потужність джерел вектора електричної індукції \vec{D} визначається вільними зарядами*. Тільки на них можуть починатись й закінчуватись силові лінії вектора \vec{D} . Лінії зміщення проходять, не перериваючись, через точки, де перебувають зв'язані заряди.

Зв'язок між векторами \vec{D} і \vec{E}

Для ізотропного діелектричного середовища маємо (2.2)

$$\vec{P} = \chi_0 \vec{E}.$$

З урахуванням (2.13) отримаємо

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} - \chi_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 - \chi) \vec{E},$$

де $1 - \chi$ — *діелектрична проникність діелектрика*.

Тобто *зв'язок між вектором електричної індукції \vec{D} і вектором напруженості електричного поля \vec{E} в ізотропному середовищі має вигляд*

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (2.17)$$

Діелектрична проникність

Діелектрична проникність ϵ — одна з основних характеристик діелектрика.

Для вакууму $\epsilon = \epsilon_0$, а $\epsilon > \epsilon_0$, для будь-якої речовини $\epsilon > 1$. Значення залежить від речовини і змінюється від 1 (гази) до 10^4 (сегнетоелектрики). Для однорідного ізотропного діелектрика діелектрична проникність — стала величина і вектори \vec{E} і \vec{D} колінеарні. Але у загальному випадку анізотропного діелектрика у різних напрямках має різне значення, тобто діелектрична проникність — тензор другого рангу

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot E_j.$$

Діелектрична проникність неполярних діелектриків, як і діелектрична сприйнятливості, не залежить від температури (при

сталій концентрації молекул), а в полярних — зменшується зі збільшенням температури.

**Напруженість
електричного
поля
в діелектрику**

Розглянемо дві паралельні нескінченні пластини, заряджені зарядом різного знаку з поверхневою густиною σ і $-\sigma$. Поле, створене цим зарядом в вакуумі, дорівнює (див. розділ 1)

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.18)$$

а величина вектора електричного зміщення

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0. \quad (2.19)$$

Розташуємо між пластинами однорідний ізотропний діелектрик (рис. 2.6).

Унаслідок дії електричного поля діелектрик поляризується і на його поверхнях з'являться зв'язані заряди з густиною $\pm \sigma'$, які створюють поле

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

Напруженість поля \vec{E} всередині діелектрика буде сумою двох полів: \vec{E}_0 , створеного вільними зарядами на пластинах, і поля \vec{E}' , створеного поляризаційними зарядами,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

З урахуванням напрямків полів (рис. 2.6) маємо

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (2.21)$$

Зважаючи на (2.2) та (2.5) отримуємо $P = \chi_0 \epsilon_0 E$, тоді $E' = \frac{\chi_0}{1 + \chi_0} E$, звідки

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi_0}. \quad (2.22)$$

Напруженість поля всередині діелектрика буде в $1 + \chi_0$ разів меншою, ніж у вакуумі. Тобто діелектрична проникність показує, у скільки разів ослаблене поле в діелектрику.

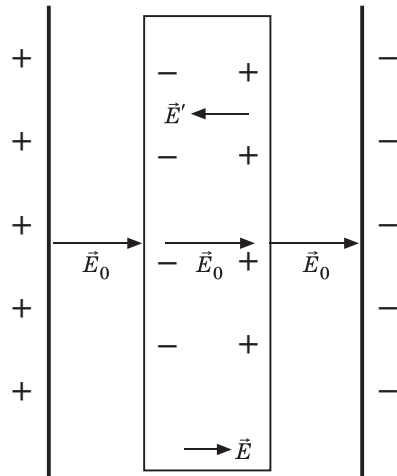


Рис. 2.6

Закон Кулона для зарядів у діелектричному середовищі має вигляд

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Напруженість і потенціал поля точкового заряду

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad \varphi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}.$$

Вектор електричної індукції $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \frac{q}{4 \pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Електричне зміщення всередині діелектрика

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{D}_0, \quad (2.23)$$

тобто електричне зміщення всередині діелектрика збігається з електричним зміщенням зовнішнього поля.

Зв'язок вектора \vec{D} з поверхневою густиною вільних зарядів

Розглянемо рівняння (2.13) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.
 Для нормальних складових (рис. 2.6) маємо

$$D_n = \epsilon_0 E_n + P_n = \epsilon_0 (E_0 + E) = \frac{0}{0} () ;$$

$$D = D_n . \quad (2.24)$$

Нормальна складова вектора електричної індукції дорівнює поверхневій густині вільних (сторонніх) зарядів.

Поверхнева густина зв'язаного заряду

Знайдемо поверхневу густину зв'язаного заряду. З виразів (2.21) і (2.17) отримаємо

$$E = E_0 + \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{D}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{D}{\epsilon_0}; \quad E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{D}{\epsilon_0};$$

$$\frac{D}{\epsilon_0} - \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{D}{\epsilon_0};$$

$$\frac{D}{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0} . \quad (2.25)$$

2.4. Умови для електростатичного поля на межі двох ізотропних діелектричних середовищ (граничні умови)

Розглянемо два діелектричні середовища з діелектричними проникностями ϵ_1 і ϵ_2 (рис. 2.7). Для визначення умов зміни вектора

напруженості на межі двох середовищ застосуємо теорему про циркуляцію вектора напруженості

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Замкнений контур, по якому інтегруємо, вибираємо поблизу поверхні поділу двох середовищ. Це прямокутний контур з довжиною сторін l та h ($h \ll l$). Напрямок одиничного вектора вздовж дотичної $\vec{\tau}$ і нормалі \vec{n} показано на рис. 2.7, а.

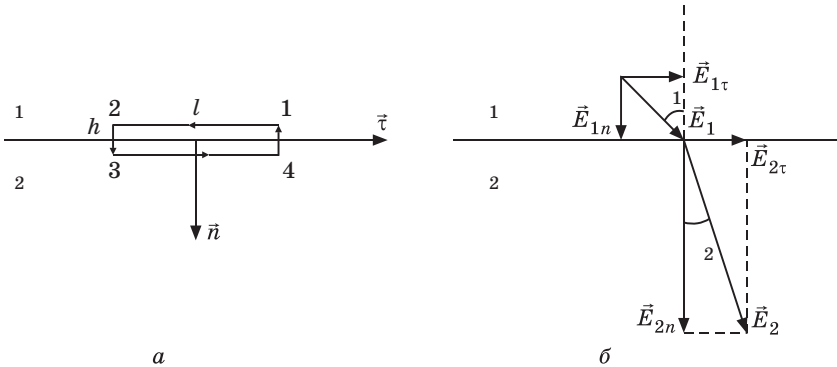


Рис. 2.7

Вектори \vec{E}_1 і \vec{E}_2 розкладемо на дві складові: тангенціальну \vec{E}_τ та нормальну \vec{E}_n (рис. 2.7, б). Знаходимо циркуляцію вектора \vec{E} за вибраним контуром, якщо $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = E_2 l - E_1 l + (E_{2n} - E_{1n}) h = 0,$$

звідки

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \tag{2.26}$$

Тобто при переході із одного середовища в інше тангенціальна складова вектора напруженості електростатичного поля не змінюється.

З виразу (2.17) маємо

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}; \\ D_1 &= \epsilon_1 E_{1\tau} + D_{1n}; \quad D_2 = \epsilon_2 E_{2\tau} + D_{2n}; \\ \frac{D_1}{D_2} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Тангенціальні складові вектора електричної індукції змінюються як діелектричні проникності середовищ.

Для того щоб знайти умови зміни нормальних складових векторів \vec{D} та \vec{E} (рис. 2.8, б), застосуємо теорему Гаусса для поля в діелектриках

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{вільн}}.$$

Замкнена гауссова поверхня — циліндр з площею основи S і висотою $h \rightarrow 0$ (рис. 2.8, а). Нехай на поверхні поділу середовищ є сторонні (вільні) заряди з поверхневою густиною $\sigma_{\text{вільн}}$.

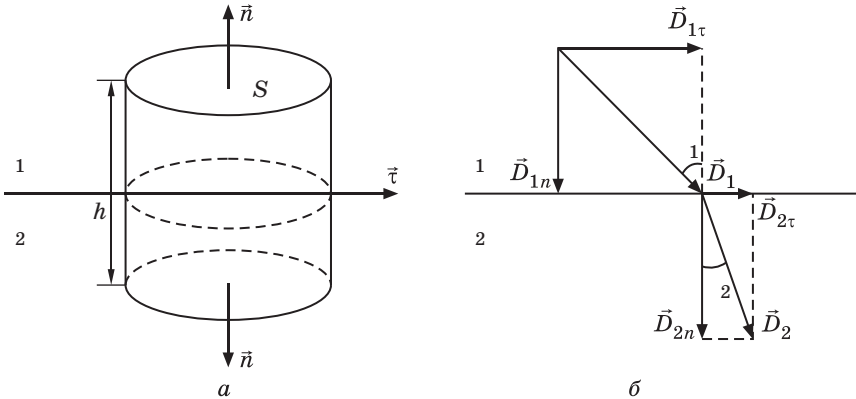


Рис. 2.8

Тоді потік вектора \vec{D} крізь поверхню циліндра дорівнює

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{2n} S + D_{1n} S = \sigma_{\text{вільн}} S;$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{вільн}}.$$

При переході межі поділу двох діелектричних середовищ нормальна складова вектора електричної індукції \vec{D} стрибком змінюється на величину, що дорівнює поверхневій густині вільних зарядів $\sigma_{\text{вільн}}$ на граничній поверхні.

Якщо на поверхні немає сторонніх зарядів, то

$$D_{2n} - D_{1n} = 0; \quad D_{1n} = D_{2n}. \quad (2.28)$$

Нормальна складова вектора \vec{D} не змінюється.

Для вектора напруженості нормальна складова змінюється

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n}; \quad D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n};$$

$$\begin{aligned}
 & {}_1E_{1n} \quad {}_2E_{2n}; \\
 & \frac{{}_1E_{1n}}{{}_2E_{2n}} = \frac{{}_2}{{}_1}. \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

**Закон заломлення
ліній
напруженості
електричного поля**

При переході крізь межу поділу двох діелектричних середовищ лінії напруженості та індукції електростатичного поля заломлюються (рис. 2.7, 2.8). Кути α_1 і α_2 , що утворюються лініями напруженості з перпендикуляром до поверхні поділу середовищ

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_1}{E_{1n}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_2}{E_{2n}}; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Тоді закон заломлення ліній напруженості електростатичного поля за умов відсутності на межі вільних зарядів

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (2.30)$$

Закон заломлення ліній електричного зміщення такий самий, як і закон заломлення ліній напруженості, тобто в кожному з діелектриків напрямки векторів \vec{D} і \vec{E} збігаються (рис. 2.9). Але вигляд ліній зміщення і силових ліній напруженості різний. Різниця в тому, що лінії зміщення безперервні, в той час як силові лінії частково перериваються на межі розділу (рис. 2.9, а, б). На рис. 2.9, а частота силових ліній усередині діелектрика менше ніж зовні. Лінії зміщення всередині пластини згущаються, що вказує на збільшення зміщення \vec{D} у діелектрику.

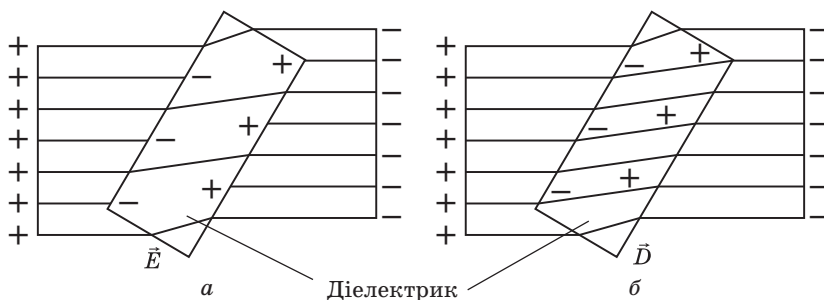


Рис. 2.9

Якщо вектор напруженості поля \vec{E} перпендикулярний межі поділу середовищ, то поверхня є екіпотенціальною і $E_1 = E_{1n}$, $E_2 = E_{2n}$, $D_1 = D_{1n}$, $D_2 = D_{2n}$.

Тоді з виразу (2.29) маємо

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

а з виразу (2.28)

$$D_1 = D_2,$$

тобто вектор електричного зміщення не змінюється при переході крізь межу розділу діелектричних середовищ, вектор \vec{D} , як і \vec{E} , перпендикулярний поверхні.

Якщо вектор напруженості поля \vec{E} дотичний до лінії розділу діелектричних середовищ, то

$$E_1 = E_2, \quad D_1 = \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2.$$

Це означає, що в цьому випадку вектор напруженості поля не змінюється при переході з одного діелектричного середовища до іншого.

Відповідно (2.27) для вектора діелектричного зміщення, виконується співвідношення:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

2.5. Спонтанно поляризовані діелектрики

Розглянуті раніше полярні і неполярні діелектрики мають ту особливість, що вони поляризуються тільки при накладанні зовнішнього електричного поля, а після припинення його дії знову повертаються в неполяризований стан.

Однак у природі існує велика група діелектриків, переважно в твердому кристалічному стані, які виявляють макроскопічну поляризованість, навіть якщо зовнішнього електричного поля немає. Це *спонтанно (самодовільно) поляризовані діелектрики*, тобто такі, *поляризація яких викликана не зовнішнім впливом, а внутрішніми причинами*.

До спонтанно поляризованих діелектриків належать піроелектрики та сегнетоелектрики.

Для того щоб кристал мав спонтанну поляризацію, необхідно (але недостатньо), щоб цей кристал не мав центра симетрії. Елементами симетрії можуть бути тільки одна вісь і площини симетрії, що проходять через неї.

Піроелектрики

Пірофект — це явище появи зв'язаних зарядів при зміні температури піроелектрика. Природа цього явища полягає в тому, що спонтанна поляризація таких діелектриків є наслідком зсуву «центрів ваги» позитивних і негативних зарядів кристалічної ґратки речовини, що пов'язано зі зсувом підґратки негативних іонів відносно підґратки позитивних і існує за будь-яких температур. Але за звичайних умов ця поляризація не проявляється через те, що зв'язані заряди на поверхні діелектрика нейтралізуються адсорбованими з повітря іонами.

При нагріванні піроелектрики звільняються від цих іонів, на поверхні з'являються додаткові зв'язані заряди, тобто збільшується їх поляризованість. Це явище має назву *прямого піроелектричного ефекту*. Існує також *обернений піроелектричний ефект*, коли при адіабатній ізоляції діелектрика і зміні напруженості поля \vec{E} змінюється температура піроелектрика. Типовим піроелектриком є турмалін. У разі зміни його температури на 1 С з'являється піроелектричне поле напруженістю до сотень вольт на метр.

Піроелектрики застосовуються як приймачі електромагнітного випромінювання, а також вони дають змогу реєструвати зміну температури з точністю до 10^{-6} С.

Електрети

Якщо полярний діелектрик розплавити і помістити в сильне електростатичне поле, то його диполі орієнтуються за полем. При охолодженні і затвердінні ця орієнтація, в основному, зберігається, тому що поворотам диполів при твердінні перешкоджає в'язкість. Отриманий таким чином *електрет* зберігає поляризацію тривалий час (від декількох днів до декількох років). Такі електрети мають назву *термоелектретів*.

Електрети отримують з воску, смол та інших органічних і неорганічних діелектриків з полярними молекулами. Вони застосовуються як джерела постійного електричного поля.

Якщо розплавлену речовину освітлювати в сильному електричному полі, то після його твердіння отримують фотоелектрети, які застосовуються в електрофотографії.

Сегнетоелектрики

Сегнетоелектрики, або *фероелектрики*, — полярні кристалічні діелектрики, які в певному інтервалі температур спонтанно поляризовані, а вектор спонтанної поляризації суттєво залежить від зовнішнього впливу (електричного поля, зміни температури тощо).

Назва сегнетоелектрика походить від сегнетової солі $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, що була першим дослідженим діелектриком цього типу. (Сегнетова сіль названа за іменем аптекаря П. де ля Сенє, що вперше одержав її як проносне ще в XVII столітті у французькому місті Ла-Рошелі.)

Особливі властивості сегнетоелектриків широко досліджувалися І. В. Курчатовим (1903—1960) і П. П. Кобеко (1897—1954). У 40-х роках були відкриті сегнетоелектричні властивості титанату барію (BaTiO_3) й інших керамік, докладно вивчені Б. М. Вулом (1903—1984) та іншими.

Кристали сегнетової солі належать до ромбічної системи і мають вигляд, як на рис. 2.10. Вони мають різку анізотропію властивостей. Сегнетоелектричні властивості спостерігаються, якщо електричне поле напрямлене вздовж кристалографічної осі a .

Перша особливість сегнетоелектриків полягає в тому, що в деякому інтервалі температур їх діелектрична проникність дуже велика і досягає $\sim 10^4$.

Друга особливість — це залежність діелектричної проникності (а також і діелектричної сприйнятливості χ) від напруженості поля \vec{E} : $f(\vec{E})$.

Третя особливість — у тому, що значення вектора поляризації \vec{P} визначається не тільки значенням напруженості поля \vec{E} , а ще й залежить від попередніх станів поляризації. Це явище має назву *діелектричного гістерезису*. Залежність P від E показано на рис. 2.11. При початковому збільшенні поля спостерігається

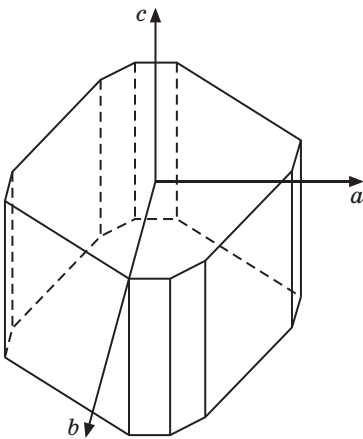


Рис. 2.10

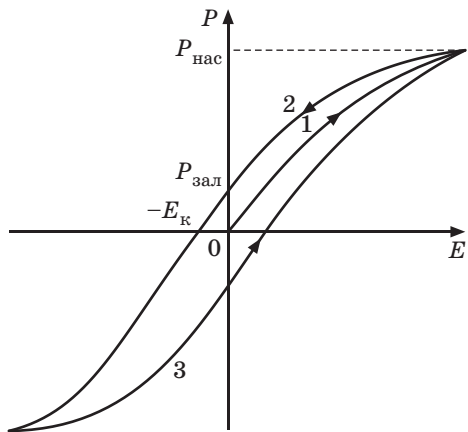


Рис. 2.11

зростання поляризованості, що відповідає кривій 1. При деякому значенні поля E вектор поляризації досягає максимального значення $P_{\text{нас}}$ (поляризованість насичення). Зменшення E супроводжується зміною P за кривою 2, а при $E = 0$ сегнетоелектрик зберігає *залишкову поляризацію* $P_{\text{зал}}$, тобто навіть, якщо зовнішнє електричне поле зникає, діелектрик залишається поляризованим. Щоб знищити *залишкову поляризацію*, слід створити електричне поле $E_{\text{к}}$ зворотного напрямку, яке має назву *коерцитивної сили*. У разі подальшої циклічної зміни електричного поля поляризованість змінюється згідно з петлею гістерезису (крива 3).

Сегнетоелектричні властивості суттєво залежать від температури. Для кожного сегнетоелектрика існує визначена *температура* або *точка Кюрі* $T_{\text{К}}$, вище якої сегнетоелектричні властивості зникають, що супроводжується фазовим переходом II роду, різким зростанням теплоємності і сегнетоелектрик перетворюється на звичайний полярний діелектрик.

Температура Кюрі отримала свою назву на честь французького фізика П'єра Кюрі (1859—1906), який уперше виявив існування такої критичної температури при дослідженні магнітних властивостей заліза та феромагнетиків.

У деяких випадках, як, наприклад, для сегнетової солі, існують дві температури Кюрі (+24 С і -18 С), і сегнетоелектричні властивості спостерігаються тільки в інтервалі між цими температурами. На рис. 2.12 показано залежність діелектричної проникності від температури для сегнетової солі. *Наявність однієї або декількох точок Кюрі — четверта характерна особливість сегнетоелектриків.*

Окрім сегнетової солі, сегнетоелектричні властивості мають і інші сполуки, наприклад фосфат калію (KN_2PO_4) і арсенат калію (KN_2AsO_4). Практично важливим сегнетоелектриком є титанат барію (BaTiO_3). Його точка Кюрі лежить близько 80 С, а діелектрична проникність у максимумі дорівнює 6000—7000.

Сегнетоелектрики набули практичного застосування досить широко в оптичних пристроях для запам'ятовування інформації, в модуляторах,

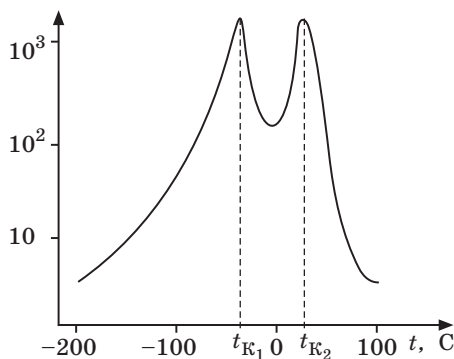


Рис. 2.12

оптичних затворах і дисплеях, нелінійній оптиці як діелектричні резонатори і прилади на їх основі в техніці надвисоких частот.

Сегнетову сіль використовують у мікрофонах та звукознімачах, титанат барію — в конденсаторах.

Пояснити властивості сегнетоелектриків можна, якщо взяти до уваги, що кристал сегнетоелектрика складається з невеликих ділянок самодовільної поляризації — *доменів*. За відсутності зовнішнього електричного поля електричні моменти доменів розташовані хаотично і сумарний електричний момент дорівнює нулю (рис. 2.13, а). Після створення зовнішнього електричного поля електричні моменти доменів поступово орієнтуються вздовж поля (рис. 2.13, б).

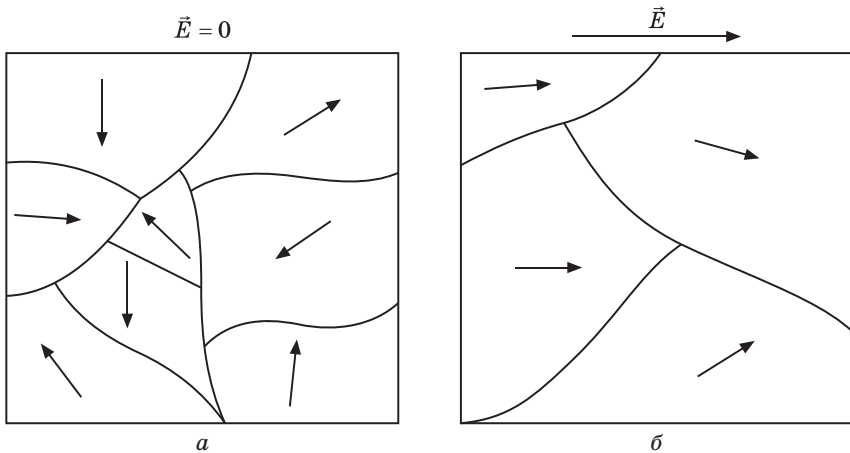


Рис. 2.13

Окрім того, домени з дипольними моментами, напрямки яких близькі до напрямку поля, збільшуються за рахунок інших доменів. У досить сильному полі всі електричні моменти доменів зорієнтовані за полем, поляризованість у цьому випадку максимальна $P_{нас}$, також спостерігається велике значення діелектричної проникності. У сильному електричному полі кристал стає однодоменим.

У разі зменшення поля орієнтація доменів порушується, але не відразу, що і пояснює появу петлі гістерезису.

Площа петлі гістерезису (рис. 2.11) пропорційна кількості теплоти, що виділяється в одиниці об'єму сегнетоелектрика за один цикл зміни його поляризації.

П'єзоелектричний ефект

Іони, відповідальні за виникнення спонтанної поляризації у сегнетоелектриків, можуть досить легко зсуватись. Тому механічна напруга може викликати у сегнетоелектриків електронну поляризацію. Це явище називається *п'єзоелектричним ефектом*. Існує і *зворотний п'єзоелектричний ефект* — зміна форми або розмірів кристала внаслідок дії зовнішнього електричного поля.

Цей ефект слід відрізнити від *електрострикції* у звичайних діелектриків, тобто *від зміни їх форми і об'єму під впливом зовнішнього поля*. Електрострикція пропорційна квадрату величини поля, тоді як зворотний п'єзоелектричний ефект пропорційний першій степені поля.

Усі сегнетоелектрики є п'єзоелектриками, але п'єзоелектриками можуть бути і не сегнетоелектрики, до останніх належить і кварц.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Яка речовина називається діелектриком?
2. Чим відрізняються вільні і зв'язані заряди?
3. Дайте визначення явища поляризації діелектриків.
4. Які види поляризації діелектриків ви знаєте?
5. Яка різниця поляризації діелектриків з полярними і неполярними молекулами?
6. Що таке поляризованість діелектрика?
7. Як пов'язаний вектор поляризації з напруженістю електричного поля?
8. Який зв'язок вектора поляризації з поверхневою густиною зв'язаних зарядів?
9. Як пов'язана поляризованість діелектрика з об'ємною густиною зв'язаних зарядів?
10. Сформулюйте теорему Гаусса для вектора поляризації.
11. Як визначається вектор електричної індукції? Що він характеризує?
12. Сформулюйте теорему Гаусса для вектора електричної індукції.
13. Який зв'язок між векторами \vec{E} , \vec{D} і \vec{P} ?
14. Як пов'язані вектор електричної індукції і вектор напруженості електростатичного поля?
15. Який фізичний смисл діелектричної проникності?
16. Який зв'язок вектора електричної індукції з поверхневою густиною вільних зарядів?

17. Виведіть умови для векторів \vec{E} і \vec{D} на границі розділу двох діелектричних середовищ.
18. Які особливості діелектричних властивостей сегнетоелектриків?

Завдання для експрес-контролю

1. Що є спільного і в чому різниця в поляризації діелектриків з полярними і неполярними молекулами?
2. Як можна розрахувати поверхневу густину поляризаційних зарядів?
3. Чому дорівнює потік вектора зміщення через замкнену поверхню, проведену в електростатичному полі?
4. Як діелектрик впливає на напруженість електростатичного поля? Який фізичний смисл відносної діелектричної проникності середовища?
5. Позитивний і негативний точкові заряди притягуються один до одного з силою F . Як зміниться ця сила, якщо між зарядами розташувати кульку з діелектрика?
6. Металева заряджена куля оточена товстим сферичним шаром діелектрика. Нарисуйте картину силових ліній електричного поля всередині і зовні діелектрика. Чому електричне поле змінюється на границі діелектрика?
7. У нескінченно протяжному діелектрику з діелектричною проникністю існує електричне поле напруженості \vec{E} . Чому дорівнює напруженість поля в порожнині діелектрика, якщо порожнина має форму: 1) дуже довгого тонкого циліндра, паралельного полю; 2) тонкої щілини, перпендикулярної до напрямку вектора напруженості поля?
8. Відстань між пластинами плоского конденсатора дорівнює d . Конденсатор заряджений до напруги U й між пластинами вставлено діелектрик з діелектричною проникністю ϵ . Визначте: 1) діелектричну сприйнятливність діелектрика; 2) поверхневу густину зв'язаних зарядів на діелектрику.
9. Діелектрична пластина з проникністю ϵ_2 розташована в однорідному електричному полі напруженістю \vec{E} . Лінії поля складають деякий кут з поверхнею пластини. 1) Нарисуйте якісну картину полів \vec{E} і \vec{D} у вакуумі і в пластині. 2) Побудуйте якісні графіки залежностей E_x, D_x, E_y, D_y, E, D від x , де вісь x спрямована перпендикулярно поверхні пластини, вісь y — уздовж поверхні пластини.

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Нескінченна пластина з діелектрика з проникністю ϵ заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ . Товщина пластини дорівнює $2a$. Поза пластиною $\epsilon = 1$. Вісь x перпендикулярна до пластини, а початок координат збігається з серединою пластини (рис. 2.14). Знайти потенціал ϕ і поле E_x усередині пластини як функцію x (потенціал у точці 0 пластини дорівнює нулю).

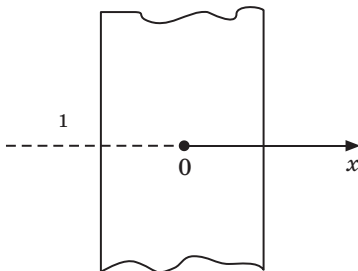


Рис. 2.14

Розв'язання

Вектор зміщення \vec{D} і об'ємна густина вільних зарядів зв'язані, як відомо, теоремою Гаусса в диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Цей самий вектор

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E},$$

де \vec{E} — напруженість поля в пластині.

Для проекції \vec{D} на вісь x маємо

$$\frac{D_x}{x} = \rho. \quad (1)$$

Аналогічно

$$D_x = \epsilon_0 E_x. \quad (2)$$

З рівняння (1) одержимо

$$D_x = \rho x. \quad (3)$$

З рівняння (2) з урахуванням (3) отримаємо для $|x| < a$

$$E_x = \frac{\rho x}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Для того щоб визначити потенціал ϕ усередині діелектричної пластини, скористаємося тим, що вектор напруженості поля зв'язаний з потенціалом співвідношенням

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi.$$

Проекція вектора \vec{E} на вісь x дорівнює

$$E_x = \frac{d}{dx}.$$

Звідки з урахуванням (4)

$$\frac{d}{dx} = \frac{x}{0}; \quad d = \frac{x}{0} dx;$$

$$x = \frac{x}{0} E_x dx = \frac{x^2}{2 \cdot 0}.$$

Задача 2

Металева куля радіусом $R = 5$ см оточена шаром фарфору завтовшки $d = 2$ см (рис. 2.15). Визначити поверхневі густини σ_1 і σ_2 зв'язаних зарядів відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях діелектрика. Заряд кулі $Q = 10$ нКл.

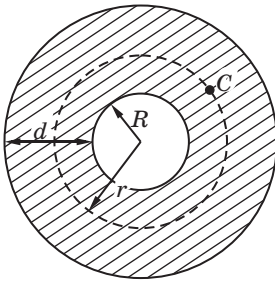


Рис. 2.15

Розв'язання

Наявність шару діелектрика, що оточує металеву кулю, внаслідок поляризації приведе до зміни напруженості поля. Щоб знайти напруженість поля всередині діелектрика, скористаємося теоремою Гауса для вектора зміщення \vec{D}

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_i, \quad (1)$$

де q_i — сумарний вільний заряд усередині поверхні інтегрування.

Лінії вектора \vec{D} , як і силові лінії поля \vec{E} , будуть спрямовані радіально. Виберемо всередині діелектричного шару точку C і проведемо через неї допоміжну сферичну поверхню радіусом r . Тоді

$$\oint_{S_C} \vec{D} d\vec{S} = D dS = D \cdot 4\pi r^2. \quad (2)$$

Допоміжна поверхня охоплює вільні заряди, що знаходяться на внутрішній кулі, тобто

$$q_i = Q. \quad (3)$$

Підставивши (2) і (3) у (1), отримуємо

$$D_4 r^2 = Q;$$

$$D = \frac{Q}{4 r^2}. \quad (4)$$

Оскільки

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (5)$$

то з (4) і (5) знаходимо

$$E = \frac{Q}{4 \epsilon_0 r^2}. \quad (6)$$

На межі діелектрик — вакуум з'являються зв'язані заряди, пов'язані з нормальною складовою вектора поляризації P_n , $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Для центральносиметричної системи для нормальних складових маємо (з урахуванням (5))

$$P_n = \epsilon_0 \epsilon_1 E_n. \quad (7)$$

Якщо $r = R - d$, з (6) знаходимо

$$E_n = \frac{Q}{4 \epsilon_0 (R - d)^2}.$$

З урахуванням (7) отримаємо поверхневу густину зв'язаних зарядів на зовнішній поверхні шару 1:

$$\sigma_1 = \epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) \frac{Q}{4 \epsilon_0 (R - d)^2};$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4 R d^2} \frac{1}{2}; \quad \sigma_1 = 0,130 \text{ мкКл/м}^2.$$

На внутрішній поверхні діелектричного шару поверхнева густина зв'язаного заряду дорівнює

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{Q}{4 \epsilon_0 R^2} - \frac{Q}{4 R^2} \frac{1}{2}; \quad \sigma_2 = 0,255 \text{ мкКл/м}^2.$$

Задача 3

Металева куля радіусом R , яка має заряд q , оточена двома діелектричними оболонками з проникностями ϵ_1 і ϵ_2 і товщиною h кожна. Знайти напруженість та індукцію електростатичного

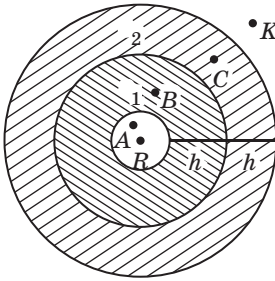


Рис. 2.16

• K поля в точках A, B, C, K , які розташовані на відстанях $\frac{R}{2}, R, \frac{h}{2}, R, \frac{3}{2}h, R, \frac{5}{2}h$ від центра кулі (рис. 2.16). Навести графіки $E(r)$ та $D(r)$.

Розв'язання

Згідно з теоремою Гаусса, повний потік ліній індукції електростатичного поля крізь замкнену поверхню (а в даному випадку вигідно брати сфери радіусами r_A, r_B, r_C, r_K) дорівнює сумі зарядів, розташованих усередині цієї поверхні,

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i.$$

Величина D_n стала на поверхні сфери та її можна винести за знак інтегрування, тоді

$$D \oint dS = D \cdot 4\pi r^2; \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Якщо $r_A < R$, то заряд перебуває не всередині кулі радіусом r_A , а зовні, тобто права частина рівняння Гаусса дорівнює нулю: $D_A = 0$.

Для $r_B = R, \frac{h}{2}$

$$D_B = \frac{q}{4\pi R \frac{h}{2}}.$$

І відповідно

$$r_C = R, \frac{3}{2}h, \quad D_C = \frac{q}{4\pi R \frac{3}{2}h}, \quad r_K = R, \frac{5}{2}h, \quad D_K = \frac{q}{4\pi R \frac{5}{2}h}.$$

Зв'язок між D і E : $E = \frac{D}{\epsilon_0}$, відповідно

$$E_A = 0, \quad E_B = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R \frac{h}{2}};$$

$$E_C = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2}; \quad E_K = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2}.$$

Графіки залежності $D(r)$ та $E(r)$ зображені на рис. 2.17, а, б відповідно.

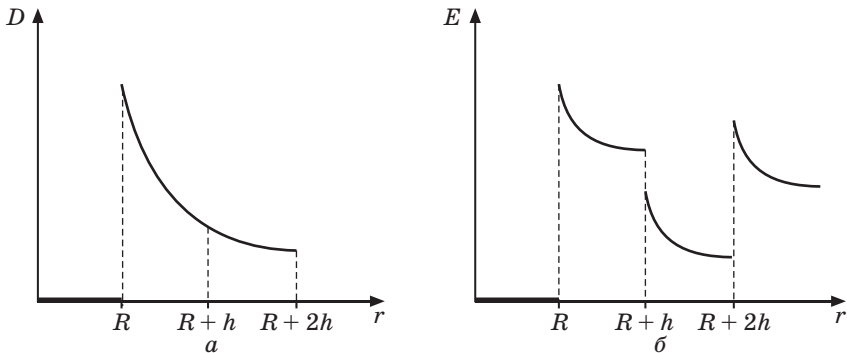


Рис. 2.17

Задача 4

Скляна (7) товстостінна куля (рис. 2.18) рівномірно об'ємно заряджена з густиною $1,5 \text{ мкКл/м}^3$. Внутрішній радіус кулі R_1 2 см, а зовнішній R_2 6 см. Знайти розподіл потенціалу в склі, а також розрахувати потенціали зовнішньої та внутрішньої поверхонь, а також центра кулі.

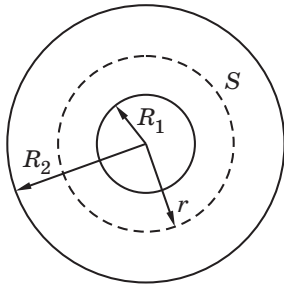


Рис. 2.18

Розв'язання

Застосуємо теорему Гаусса для вектора електричної індукції

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Для сфери радіусом r

$$D \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3) \rho; \quad D = \frac{\rho}{3} r \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}.$$

Напруженість поля знайдемо зі співвідношення

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E},$$

тоді $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}.$

Зі зв'язку $E = \frac{d\phi}{dr}$ отримаємо розподіл потенціалу кулі

$$E dr = \frac{q}{3 \epsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2} dr = \frac{q}{3 \epsilon_0} \frac{r^2}{2} \frac{R_1^3}{r^3} C. \quad (1)$$

Сталу інтегрування C знайдемо за умови безперервності потенціалу і того факту, що потенціал на зовнішній поверхні кулі визначається тільки вільним зарядом q

$$\phi(R_2) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R_2} = \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0 R_2} C,$$

Підставимо це значення в (1) і отримаємо значення довільної сталої

$$C = \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0 R_2} = \frac{R_2^2}{3 \epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2^2} C,$$

звідки

$$C = \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0 R_2} = \frac{(R_2^3 - 2R_1^3)}{6 \epsilon_0 R_2}.$$

Таким чином, потенціал, створений зарядженою кулею, дорівнює

$$\phi(r) = \frac{q}{3 \epsilon_0} \frac{r^2}{2} \frac{R_1^3}{r^3} = \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{3 \epsilon_0 R_2} = \frac{(R_2^3 - 2R_1^3)}{6 \epsilon_0 R_2}.$$

Задача 5

Скляну пластинку з проникністю $\epsilon_2 = 6$ внесено в однорідне електричне поле з напруженістю $E_1 = 10$ В/м і розташовано так, що кут α_1 між нормаллю до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює 30° (рис. 2.19). Знайти:

1) напруженість E_2 поля у пластинці; 2) кут α_2 , який це поле утворює з нормаллю до пластинки; 3) густину зв'язаних зарядів, що виникли на поверхнях пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою $\epsilon_1 = 1$.

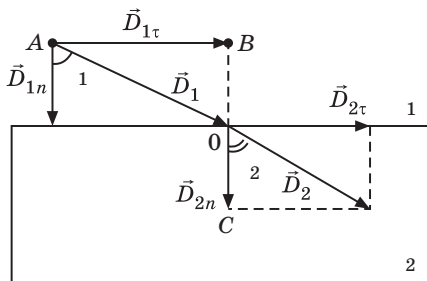


Рис. 2.19

Розв'язання

1. З граничних умов, яким задовольняють вектори \vec{E} і \vec{D} на межі поділу двох однорідних та ізотропних діелектричних середовищ, виходить, що нормальна складова вектора зміщення \vec{D} в обох діелектриках одна й та сама, тобто

$$\text{Оскільки } \vec{D}_{01} = \vec{D}_{02}, \text{ то} \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

звідки

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}, \\ & \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким чином, нормальні складові вектора \vec{E} на межі поділу зазнають розриву.

Для тангенціальних складових граничні умови, як відомо, мають такий вигляд:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (2)$$

З рис. 2.19 виходить, що

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}} = \frac{\epsilon_1 E_{1t}}{\epsilon_1 E_{1n}}; \quad (3)$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}} = \frac{\epsilon_2 E_{2t}}{\epsilon_2 E_{2n}}. \quad (4)$$

Поділимо (3) на (4)

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{E_{1t} E_{2n}}{E_{1n} E_{2t}}.$$

З урахуванням (1) і (2) отримаємо

$$\text{звідки} \quad \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (5)$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \text{tg } \alpha_1 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

$$\alpha_2 = \arctg \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \text{tg } \alpha_1 \right) = \arctg \left(\frac{30}{74} \right) = 21^\circ 30'.$$

2. Для того щоб знайти напруженість поля E_2 у пластинці, скористаємося схемою, наведеною на рис. 2.19.

З прямокутного трикутника OCD_2

$$D_2 = \sqrt{D_{2n}^2 - D_1^2} = D_{2n} \sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_{2n}^2}} = D_{2n} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_2}.$$

Оскільки з (5)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{D_2}{D_1}, \quad \text{а} \quad D_{2n} = D_{1n} \frac{D_2}{D_1},$$

то

$$\begin{aligned} D_2 &= D_{2n} \sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_{2n}^2}} = D_{2n} \sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \frac{\sin^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1}} \\ &= \frac{D_{2n}}{\cos \alpha_1} \sqrt{\frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \cos^2 \alpha_1 - \frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \sin^2 \alpha_1} \\ &= \frac{D_{1n}}{\cos \alpha_1} \sqrt{\frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \cos^2 \alpha_1 - \frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \sin^2 \alpha_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

З прямокутного трикутника ABO

$$D_{1n} = D_1 \cos \alpha_1. \quad (7)$$

Враховуючи, що $D_1 = \epsilon_0 E_1$, $D_2 = \epsilon_0 E_2$ і підставляючи ці вирази, а також вираз (7) у формулу (6), отримуємо

$$E_2 = \frac{E_1}{2} \sqrt{\frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \sin^2 \alpha_1 - \frac{D_1^2}{D_{2n}^2} \cos^2 \alpha_1} = 5,2 \text{ В/м.}$$

3. Під дією електричного поля E_1 скляна пластинка поляризується і на її поверхнях з'являються зв'язані заряди густиною P_n , яка визначається нормальною складовою вектора поляризації \vec{P} , тобто

$$P_n = \epsilon_0 E_1 \cos \alpha_1.$$

Оскільки

$$P_n = \epsilon_0 E_{2n} \cos \alpha_1, \quad \text{а} \quad E_{2n} = E_{1n} \frac{D_2}{D_1},$$

то

$$E_{2n} = E_{1n} \frac{D_2}{D_1} \cos \alpha_1 = E_{1n} \frac{1}{2} \cos \alpha_1,$$

тобто

$$\frac{0,02 \cdot 1}{2} E_1 \cos \alpha_1 = 64 \text{ нКл/м}^2.$$

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Ебонітова плоскопаралельна пластина розташована в однорідному електричному полі напруженістю $E_0 = 2$ МВ/м. Площина пластини перпендикулярна лініям напруженості. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів на поверхнях пластини.

Відповідь: $\pm 11,8$ мкКл/м².

2.2. У деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю $\epsilon = 7$ електричне зміщення має значення 700 нКл/м². Чому дорівнює поляризованість \vec{P} у цій точці?

Відповідь: $P = 0,6$ мкКл/м².

2.3. Поляризованість нескінченної плоскопаралельної пластини з парафіну ($\epsilon = 2$), розташованої перпендикулярно до напрямку електричного поля, дорівнює $0,44$ нКл/м². Визначити напруженість зовнішнього електричного поля E_0

Відповідь: 100 В/м.

2.4. Дві нескінченні паралельні площини заряджені з густиною σ і $-\sigma$. Спочатку вони перебувають у вакуумі. Потім проміжок між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ϵ . Що відбувається при цьому з напруженістю \vec{E} поля у проміжку, зміщенням \vec{D} , різницею потенціалів U між площинами?

Відповідь: а) \vec{E} зменшується у ϵ разів; б) \vec{D} залишається незмінним; в) U зменшується в ϵ разів.

2.5. Знайти напруженість \vec{E} і електричне зміщення \vec{D} усередині нескінченної плоскопаралельної пластини з фарфору ($\epsilon = 5$), яку розмістили перпендикулярно до напрямку поля напруженістю $E_0 = 200$ В/м.

Відповідь: $E = 40$ В/м; $D = 1,76$ нКл/м².

2.6. Визначити, при якій напруженості E середнього макроскопічного поля у діелектрику ($\epsilon = 3$) поляризованість P досягає значення, що дорівнює 200 мкКл/м².

Відповідь: $E = 11,3$ МВ/м.

2.7. Діелектрик розмістили в електричному полі напруженістю $E_0 = 20$ кВ/м. Чому дорівнює поляризованість P діелектрика, якщо напруженість E середнього макроскопічного поля у діелектрику виявилась рівною 4 кВ/м?

Відповідь: $P = 142$ нКл/м².

2.8. Нескінченна пластина товщиною a з ізотропного діелектрика поляризована так, що поляризованість біля одного боку пластини $\vec{P}_1 = P_1 \vec{n}$, а біля другого $\vec{P}_2 = P_2 \vec{n}$, де \vec{n} — одиничний вектор, перпендикулярний до пластини і спрямований від першої границі до другої. Знайти середню за об'ємом густину зв'язаних зарядів .

Відповідь:
$$\frac{P_1 - P_2}{a}.$$

2.9. Поляризованість \vec{P} деякого середовища виявляється пропорційною виразу $\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ де \vec{e}_r — орт, а r — модуль радіуса-вектора. Чому дорівнює об'ємна густина зв'язаних зарядів?

Відповідь: $0.$

2.10. Нескінченна пластина з діелектрика з проникністю ϵ заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ . Товщина пластини $2a$. Поза пластиною 1 . Знайти: а) поляризованість \vec{P} діелектрика як функцію x ; б) поверхневу густину зв'язаних зарядів на лівій ($x = -a$) і правій ($x = +a$) межах пластини; в) об'ємну густину зв'язаних зарядів.

Відповідь: а) $\vec{P} = 1 - \frac{1}{\epsilon} x \vec{i}$;

б) на обох поверхнях $\sigma = 1 - \frac{1}{\epsilon} a$; $\sigma = \frac{1}{\epsilon} a$.

2.11. Нескінченна пластина з ізотропного діелектрика розташована в перпендикулярному до неї однорідному зовнішньому електричному полі напруженістю E_0 . Товщина пластини a , проникність змінюється лінійно від значення ϵ_1 на лівій межі до ϵ_2 на правій. Поза пластиною 1 . Знайти: а) \vec{E} всередині пластини як функцію x ; б) потік вектора \vec{E} крізь уявну циліндричну поверхню, з твірними, паралельними осі x ; основи циліндра розташовані у точках $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{2}$; площа кожної основи дорівнює S ; в) об'ємну густину зв'язаних зарядів як функцію x .

Відповідь: а) $\vec{E} = \frac{E_0 k}{1 - kx} \vec{i}$, де $k = \frac{2}{a} \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$;

б) $E = SE_0 \frac{2}{1 - 2x} \vec{i}$; в) $\frac{0 E_0 k}{(1 - kx)^2}$.

2.12. Знайти усередині пластини з задачі 2.11, якщо $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 4$, $a = 1$ см, $E_0 = 3$ кВ/м.

Відповідь:
$$\frac{4 \epsilon_0 E_0}{a} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} = 0,59 \text{ мкКл/м}^2.$$

2.13. Система з двох однорідних та ізотропних діелектриків, що розділені плоскою межею, розташована в електричному полі. Напруженість поля у першому діелектрику утворює з нормаллю до межі поділу кут $\alpha_1 = 20^\circ$. У другому діелектрику ($\epsilon_2 = 3$) кут α_2 між нормаллю до межі поділу і напрямком поля в ньому складає $28,36^\circ$. Визначити проникність ϵ_1 першого діелектрика.

Відповідь: $\epsilon_1 = 2$.

2.14. Точковий заряд q перебуває в центрі кулі з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ϵ . Знайти поляризацію \vec{P} як функцію радіуса-вектора \vec{r} відносно центра системи, а також заряд q всередині кулі.

Відповідь:
$$\vec{P} = \frac{1}{4} \frac{q}{r^3} \vec{r}; \quad q = \frac{1}{\epsilon} q.$$

2.15. Однорідний діелектрик має вигляд сферичного шару, внутрішній і зовнішній радіуси якого дорівнюють a і b . Нарисуйте і поясніть графіки залежності E і потенціалу електричного поля від відстані r до центра системи, якщо діелектрику надати позитивний сторонній заряд, що розподілений рівномірно: а) по внутрішній поверхні шару; б) по об'єму шару.

2.16. Дві нескінченні коаксіальні труби радіусами $R_1 = 5$ см та $R_2 = 10$ см заряджені з поверхневими густинами $\sigma_1 = 1$ нКл/м² та $\sigma_2 = -2$ нКл/м² відповідно. Простір між трубами заповнено трансформаторним мастилом з $\epsilon = 2,2$. Знайти напруженість поля E в точках, що перебувають на відстанях $r_1 = 3$ см, $r_2 = 7$ см, $r_3 = 12$ см від осі труб.

Відповідь: $E_1 = 0$; $E_2 = 524$ В/м; $E_3 = 235$ В/м.

2.17. Дві нескінченні паралельні пластини заряджені з поверхневими густинами σ_1 і σ_2 . Спочатку вони перебувають у вакуумі. Потім зазор між пластинами заповнюється однорідним діелектриком з діелектричною проникністю ϵ . Як зміниться: 1) напруженість E поля в зазорі; 2) електрична індукція D ; 3) різниця потенціалів U між пластинами?

Відповідь: E зменшиться в ϵ разів; D залишиться незмінною; U зменшиться в ϵ разів.

2.18. Нескінченна плоскопаралельна пластина зроблена з однорідного та ізотропного діелектрика з діелектричною проникністю

2. Пластина розташована в однорідному електричному полі з напруженістю $E_0 = 100$ В/м перпендикулярно до \vec{E}_0 . Знайти: 1) напруженість поля E і електричну індукцію D всередині пластини, 2) поляризованість діелектрика P , поверхневу густину зв'язаних зарядів

Відповідь: 1) $E = 50$ В/м; $D = 0,88$ нКл/м²; 2) $P = 0,44$ нКл/м²; 3) $\pm 0,44$ нКл/м².

2.19. Усередині кулі з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю $\epsilon = 5$ створено однорідне електричне поле, напруженість якого $E = 200$ В/м. Радіус кулі $R = 5$ см. Знайти максимальну поверхневу густину зв'язаних зарядів і повний зв'язаний заряд одного знака.

Відповідь: $\sigma_{\max} = 7$ нКл/м²; $q = 55,510^{-12}$ Кл.

2.20. Електричний заряд $q = 10$ пКл рівномірно розподілений по об'єму ебонітової кулі (рис. 2,6) радіуса $R = 5$ см. Визначити напруженість та індукцію електричного поля на відстанях а) $r_1 = 10$ см; б) $r_2 = 3$ см від центра кулі та в) на її поверхні. Побудувати графіки $E(r)$ і $D(r)$.

Відповідь: а) $E_1 = 9$ В/м; $D_1 = 8$ пКл/м²;
б) $E_2 = 7,2$ В/м; $D_2 = 190$ нКл/м²;
в) $r < R$; $E_3 = 12$ В/м; $E_3 = 36$ В/м; $D_3 = D_3 = 320$ нКл/м².

2.21. Стрижень з сегнетоелектрика із залишковою поляризацією $P_{\text{зал}}$, напрямленою вздовж його осі, підвішений горизонтально на тонкій непружній нитці. Визначити частоту малих коливань, що здійснюватиме стрижень в однорідному горизонтально напрямленому електричному полі E , яке настільки слабе, що не впливає на поляризацію стрижня. Довжина стрижня l , густина речовини

Відповідь:
$$\sqrt{\frac{3P_{\text{зал}} E}{l^2}}$$

3 Провідники в електричному полі

Провідники — речовини, які містять у собі вільні заряди. До них належать метали, розчини кислот, лугів, солей. Але найчастіше під провідниками розуміють метали, тому що вони найбільш поширені.

Вільними носіями зарядів у металах є електрони провідності, які за відсутності зовнішнього електростатичного поля здійснюють неупорядкований рух у міжвузловому просторі кристалічних ґраток (решіток). Позитивні іони утворюють кристалічні решітки (ґратки) і здійснюють неупорядковані коливання навколо вузлів решітки. Сумарний заряд провідника дорівнює нулю.

Нейтральний провідник в електричному полі

Під час внесення незарядженого провідника в зовнішнє (відносно до нього) електростатичне поле відбувається просторовий перерозподіл зарядів. Рухливі електрони провідності зміщуються в напрямку, протилежному до напрямку напруженості зовнішнього поля (рис. 3.1, *a*). Та область, з якої пішли електрони, заряджається позитивно, а та, до якої вони прийшли, — негативно.

Провідник заряджається. Заряди, що виникли на протилежних кінцях провідника внаслідок їх перерозподілу, називаються *індукованими*. Вони чисельно дорівнюють один одному, протилежні за

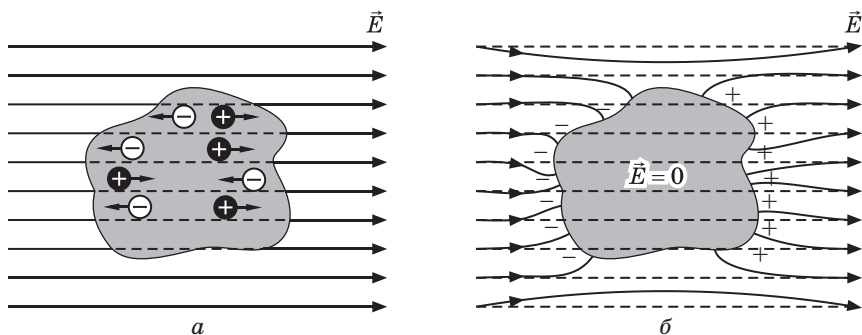


Рис. 3.1

знаками та розташовані на поверхні провідника. Ці заряди зникають, як тільки провідник видаляється з поля.

Явище перерозподілу зарядів та появи поверхневих зарядів на провіднику, вміщеному в зовнішнє електростатичне поле, називається *електростатичною індукцією* або *електризацією через вплив*.

Переміщення вільних зарядів у металі під дією зовнішнього поля \vec{E} триватиме доти, доки результуюча напруженість поля в провіднику не дорівнюватиме нулю, тобто $\vec{E} = \vec{E}$, а лінії напруженості зовні провідника не стануть перпендикулярними до його поверхні (рис. 3.1, б).

Накопичення індукованих зарядів призводить, по-перше, до послаблення в провіднику електричного поля, через те, що поле індукованих зарядів протилежне зовнішньому полю. По-друге, незаряджений провідник, внесений в електростатичне поле, розриває частину ліній напруженості (силових ліній) — вони закінчуються на негативних індукованих зарядах і знову починаються на позитивних точках.

На рис. 3.1 штриховими лініями зображено лінії напруженості зовнішнього поля до внесеного в нього провідника.

**Умови рівноваги
(розподіл
зарядів)
на поверхні
провідника**

Якщо тілу надати надлишкового заряд, то процес перерозподілу зарядів триватиме доти, доки не будуть виконані умови рівноваги зарядів:

напруженість поля всередині зарядженого провідника дорівнює нулю ($\vec{E} = 0$). За теоремою Гаусса це означає, що всередині провідника $q = 0$. Потенціал усередині провідника $\text{const}(\vec{E} = 0)$ і всі заряди розташовані на зовнішній поверхні провідника;

напруженість поля поблизу зарядженого провідника в кожній точці має бути спрямована по нормалі до поверхні, тобто поверхня провідника є *еквіпотенціальною* ($\vec{E} = \vec{E}_n, \vec{E} = 0$);

напруженість поля поблизу поверхні провідника пов'язана з поверхневою густиною індукованих зарядів. Відомо, що по-

верхнева густина заряду більша там, де більша кривизна поверхні.

Розглянемо дві заряджені кулі радіусами R_1 і R_2 , які з'єднані між собою тонким провідником (рис. 3.2).

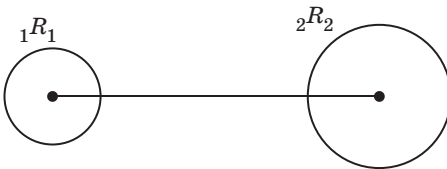


Рис. 3.2

Після встановлення рівноваги заряди на поверхнях кульок розподіляються так, що потенціали цих кульок будуть однаковими ($\varphi_1 = \varphi_2$).

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1};$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q_1}{R_1} \frac{R_2}{R_1}.$$

Оскільки $q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1$, $q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2$ та $\varphi_1 = \varphi_2$,

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2, \quad \text{або} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

де σ_1 та σ_2 — поверхневі густини індукованих зарядів на поверхнях першої та другої кульок відповідно.

Біля поверхні зарядженого провідника згідно з теоремою Гауса напруженість

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

У місцях з великими поверхневими густинами напруженість дуже велика. Це призводить до стікання зарядів з металевих вістер (блискавковідводів), до втрати енергії. Це явище застосовується для утворення електростатичного захисту. Наприклад, для захисту приладів від зовнішніх полів їх оточують металевими екранами. У цьому випадку зовнішнє поле компенсується всередині екрана індукованими на його поверхні зарядами.

3.1. Електроємність

Електрична ємність відокремленого провідника

Відокремленим називається провідник, віддалений від інших провідників та заряджених тіл настільки, що він не відчуває впливу їх електричних полів.

Якщо відокремлений провідник перебуває в однорідному ізотропному діелектрику, який заповнює все його поле, то його заряд q розподілений по його поверхні з поверхневою густиною σ . Характер цього розподілу залежить лише від форми поверхні. Для довільної точки поверхні провідника

$$dq = \sigma dS,$$

де $k = f(x, y, z)$ — функція координат точки, що розглядається, і залежить від форми та розмірів провідника. Величина k більша там, де більша кривизна поверхні.

Потенціал зарядженого відокремленого провідника, що міститься в однорідному та ізотропному діелектрику, діелектрична проникність якого ϵ_0 , дорівнює

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dS}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{kdS}{r},$$

де r — відстань від елемента поверхні dS (заряд якого $q = dS$) до деякої фіксованої точки на поверхні провідника, в котрій визначається ϕ . Вибір точки довільний, оскільки поверхня провідника екіпотенціальна. Інтегрування здійснюється по всій поверхні S провідника. Вважається, що потенціал нескінченно віддаленої точки дорівнює нулю.

Значення інтеграла $\oint \frac{kdS}{r}$ залежить тільки від геометрії провідника. Отже, потенціал відокремленого провідника $\phi = \frac{q}{C}$, або

$$\phi = \frac{q}{C},$$

де C — коефіцієнт, який називається *ємністю провідника*.

Ємність відокремленого провідника

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (3.1).$$

Ємність чисельно дорівнює величині заряду, який слід надати провіднику, щоб його потенціал підвищився на одиницю.

Це відношення не залежить від заряду і має визначену величину для кожного конкретного провідника.

У системі СІ електрична ємність вимірюється в фарадах (Ф).

За одиницю електричної ємності в 1 фарад взято ємність такого провідника, в якому зміна заряду в один кулон зумовлює зміну потенціалу на один вольт. Фарад — це дуже велика величина.

$$[C] = 1 \text{ Кл} / 1 \text{ В} = 1 \text{ Ф}.$$

$$1 \text{ Ф} = 10^{-6} \text{ мкФ} = 10^{-12} \text{ пФ}.$$

Ємність Землі дорівнює 700 мкФ.

1 Ф — ємність кулі, радіус якої в 1500 разів більший за радіус Землі.

Потенціал відокремленої кулі радіусом R , яка перебуває в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ϵ_0 , дорівнює

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Тоді електроємність відокремленої кулі (або сфери)

$$C = 4 \pi \epsilon_0 R. \quad (3.2)$$

**Взаємна
електроємність
двох провідників**

Розглянемо, як змінюється електроємність провідника при наближенні до нього іншого незарядженого провідника. Нехай провідник — відокремлена куля. Заряд рівномірно розподілений по поверхні кулі. Напруженість поля в точці A (рис. 3.3) дорівнює

$$E_r = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}.$$

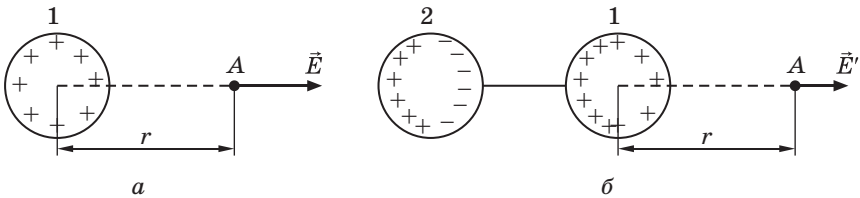


Рис. 3.3

Розташуємо ліворуч від цієї кулі ще одну незаряджену кулю (провідник). Під дією поля кулі 1 в кулі 2 відбудеться перерозподіл індукованих зарядів. Одночасно пройде й перерозподіл заряду кулі 1 з метою скомпенсування всередині кулі 1 поля зарядів, індукованих на кулі 2.

У результаті перерозподілу зарядів поле в точці A зменшується

$$E < E_0 \quad \text{та} \quad \frac{q}{C} < \frac{q}{C_0},$$

а це означає, що $C < C_0$.

Електроємність невідокремленого провідника завжди більша за ємність того самого провідника, коли він відокремлений.

Взаємна електроємність двох провідників чисельно дорівнює заряду, який слід перенести з одного провідника на інший для того, щоб різниця потенціалів між ними змінилася на одиницю:

$$C_{12} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (3.3)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ — різниця потенціалів двох близько розташованих один до одного провідників, заряджених однаковими за величиною та протилежними за знаками зарядами q та $-q$.

3.2. Конденсатори. Приклади обчислення ємностей

Конденсатор — система двох провідників (обкладок), різноманітним чином заряджених однаковими за абсолютним значенням зарядами. Обкладкам надають такої форми і так розміщують їх одну відносно одної, щоб поле, яке утворюють заряди, що накопичуються на них, було зосереджене всередині конденсатора. Електроємність конденсатора являє собою взаємну ємність його обкладок (3.3).

Плоский конденсатор

Плоский конденсатор складається з двох паралельних пластин площиною

S кожна, розташованих на малій відстані d одна від одної. Пластини мають заряди $+q$ та $-q$ (рис. 3.4).

Якщо відстань між пластинами значно менша за їх лінійні розміри, то електричне поле між ними можна вважати еквівалентним полю між двома нескінченними площинами

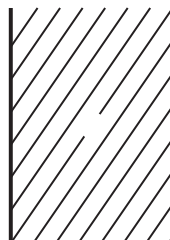


Рис. 3.4

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

Різниця потенціалів між обкладками

$$U = \int_1^2 E_x dx$$

або

$$U = \int_0^d E_x dx = \frac{d}{\epsilon_0 S} q$$

Тоді ємність плоского конденсатора C дорівнюватиме

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \tag{3.4}$$

Сферичний конденсатор

Сферичний конденсатор складається з двох концентричних металевих обкладок сферичної форми, радіуси яких r_1 та r_2 (рис. 3.5), розділені сферичним шаром діелектрика, діелектрична проникність якого ϵ .

Напруженість поля між обкладками визначається за теоремою Гаусса:

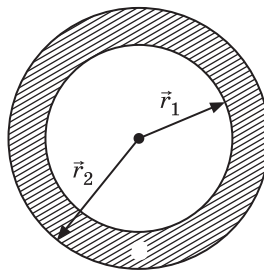


Рис. 3.5

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а різниця потенціалів

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2},$$

де q — заряд внутрішньої обкладки, а $r_1 < r_2$.

Тоді ємність сферичного конденсатора

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (3.5)$$

Якщо $r_2 - r_1 = d$, а $d \ll r_1$, то $r_2 \approx r_1 + d$, тоді

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon_0 r^2}{d}. \quad (3.6)$$

Враховуючи, що $4\pi r^2$ — площа сферичної обкладки, отримаємо формулу для ємності плоского конденсатора (3.4). Таким чином, при малому зазорі у порівнянні з радіусом сфери вирази для ємності сферичного та плоского конденсаторів збігаються.

Циліндричний конденсатор

Циліндричний конденсатор складається з двох порожнистих коаксіальних металевих циліндрів висотою h і радіусами r_1 та r_2 (рис. 3.6),

між якими перебуває діелектрик.

Напруженість поля між обкладками визначається за теоремою Гаусса

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 hr}.$$

Різниця потенціалів між обкладками

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 hr} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тоді ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (3.7)$$

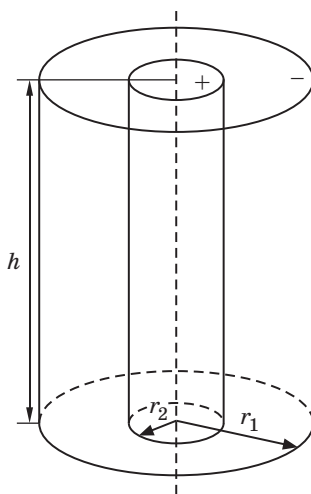


Рис. 3.6

При малому зазорі $d \ll r_1, r_2$ між циліндрами порівняно з їхніми радіусами $\ln(r_2/r_1)$ можна розкласти в ряд і обмежитися тільки членом першого порядку

$$\ln \frac{r_2}{r_1} \approx \ln \frac{r_1 + d}{r_1} \approx \ln \left(1 + \frac{d}{r_1} \right) \approx \frac{d}{r_1}.$$

Як і в разі сферичного конденсатора, знову отримуємо формулу для ємності плоского конденсатора (3.4)

$$C = \frac{2 \pi \epsilon_0 h r_1}{d},$$

де $S = 2 \pi r_1 h$ — площа обкладки конденсатора.

Виявилося, що ємність конденсаторів будь-якої форми пропорційна діелектричній проникненості діелектрика, що заповнює простір між обкладками. Тому з метою збільшення ємності конденсатора проміжок між обкладками заповнюють діелектриком з великою діелектричною проникністю ϵ , в першу чергу, сегнетоелектриками.

**Пробивна
напруга**

Пробивна напруга (пробій) — різниця потенціалів між обкладками конденсатора, за якої відбувається електричний розряд через шар діелектрика в конденсаторі. При перевищенні пробивної напруги між обкладками конденсатора проскакує іскра, внаслідок чого руйнується діелектрик. Пробивна напруга залежить від форми обкладок, властивостей діелектрика та його товщини.

3.3. Сполучення конденсаторів

З метою підвищення ємності та варіювання її можливих значень конденсатори з'єднують у батареї шляхом паралельного чи послідовного з'єднання.

**Паралельне
з'єднання
конденсаторів**

У паралельно з'єднаних конденсаторів (рис. 3.7) різниця потенціалів на обкладках однакова та дорівнює $(U_1 = U_2) = U$.

Якщо ємності окремих конденсаторів C_1, C_2, \dots, C_n , то їхні заряди дорівнюють відповідно

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 U; \\ q_2 &= C_2 U; \\ &\dots \\ q_n &= C_n U. \end{aligned}$$

Заряд батареї конденсаторів

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U.$$

Електрична ємність батареї

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (3.8)$$

тобто при паралельному з'єднанні конденсаторів ємність дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів.

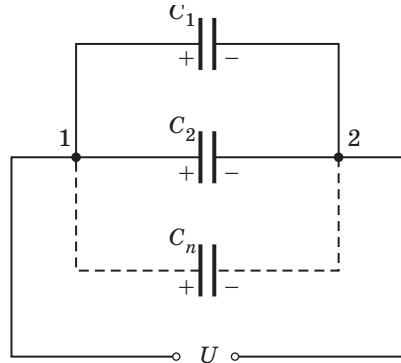


Рис. 3.7

Послідовне з'єднання конденсаторів

У послідовно з'єднаних конденсаторів (рис. 3.8) заряди всіх обкладинок однакові за модулем, а різниця потенціалів на затискачах батареї дорівнює

$$U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

Отже,

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2} \dots U_n = \frac{q}{C_n}.$$

Тоді

$$U = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right).$$

Оскільки

$$U = \frac{q}{C},$$

то

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

або

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (3.9)$$

тобто при послідовному з'єднанні конденсаторів величина, обернена результуючій електроємності батареї конденсаторів, дорівнює сумі величин, обернених електроємностям окремих конденсаторів.

Таким чином, при послідовному з'єднанні конденсаторів результуюча ємність C завжди менша за мінімальну ємність, що входить до складу батареї.

Якщо в батарею з'єднують n конденсаторів з однаковою електроємністю C_0 , то при паралельному їх з'єднанні $C = nC_0$, а при послідовному $C = C_0/n$.

Двопровідна лінія

Розглянемо два паралельних циліндричних проводи, радіуси яких r , а відстань між їх осями d (рис. 3.9).

Вважатимемо, що всі інші тіла (Земля також) перебувають від них на відстанях значно більших d , тому розглядатимемо ці провідники як простий конденсатор.

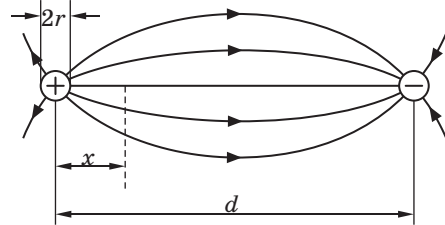


Рис. 3.9

Припустимо, що $d \gg r$. Обидва циліндри в цьому випадку заряджені рівномірно й напруженість поля між ними дорівнюватиме

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 r l}, \tag{3.10}$$

де q — густина заряду (заряд на одиницю довжини проводу q/l).

Напруженість поля в довільній точці на лінії, що з'єднує осі проводів і є перпендикулярною до їх поверхонь, дорівнює

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right). \tag{3.11}$$

Різницю потенціалів (напругу) між поверхнями проводів знайдемо за формулою $U = \int E dx$, звідки

$$U = \int_r^{d-r} \frac{q}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[\ln \frac{d-r}{r} + \ln \frac{d}{d-r} \right]. \tag{3.12}$$

Тоді

$$C = \frac{q}{U} = \frac{l}{U} \frac{q}{l} = \frac{\epsilon_0 l}{\ln(d/r)},$$

тобто ємність двохпровідної лінії довжиною l

$$C = \frac{\epsilon_0 l}{\ln(d/r)}. \tag{3.13}$$

**Метод
дзеркальних
відображень**

Для розрахунку електричних полів та обчислення ємності використовується метод дзеркальних відображень. Основою цього методу є очевидне положення: якщо в електричному полі будь-яку еквіпотенціальну поверхню замінити металевою поверхнею тієї самої форми й утворити на ній потенціал, який би дорівнював потенціалу еквіпотенціальної поверхні, що розглядається, то електричне поле в такому випадку не змінюється.

Застосуємо це положення до електричного поля двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, що перебувають на відстані $2h$ один від одного (рис. 3.10).

Площина AA розділяє поле, що розглядається, на дві рівні частини. Ця площина буде скрізь перпендикулярною до силових ліній, тобто буде еквіпотенціальною поверхнею. Тому, якщо в AA перебуває необмежена провідна площина, то поле між цією площиною та зарядом $+q$ не зміниться і збігатиметься з полем двох точкових зарядів $+q$ та $-q$. Це дає можливість урахувати дію індукованих зарядів на провідній площині.

Заряд $-q$ перебуває за площиною на тій самій відстані h , що й заряд $+q$ перед площиною, і тому є його дзеркальним відображенням у провідній площині.

Таким чином: *електричне поле між точковим зарядом й нескінченною провідною площиною збігається з полем, яке утворює заряд, що розглядається, та його дзеркальне відображення в цій площині.*

**Ємність
циліндричного
проводу**

До розрахунку ємності циліндричного проводу радіусом r , що перебуває на відстані h від Землі, застосуємо метод дзеркальних відображень.

Силові лінії поля в площині, перпендикулярній до проводу, також зображуються на рис. 3.10. Поле між проводом і Землею буде збігатися з полем проводу та його дзеркальним відображенням, і тому задача зводиться до випадку двох паралельних проводів (двопровідна лінія). Але напруга між поверхнею Землі й проводом при тому самому заряді проводу дорівнюватиме лише половині напруги між двома проводами. Помноживши (3.13)

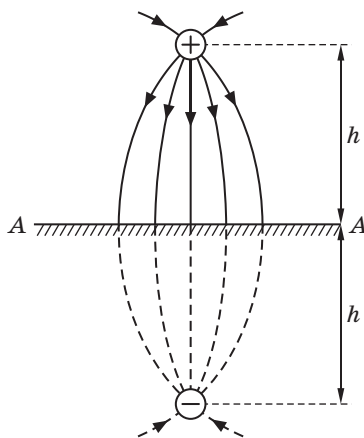


Рис. 3.10

на 2 та беручи до уваги, що $d = 2h$, знайдемо ємність проводу довжиною l над Землею

$$C = \frac{2 \cdot 0l}{\ln(2h/r)}. \quad (3.14)$$

Тоді ємність одиниці довжини проводу над Землею

$$\frac{C}{l} = \frac{2 \cdot 0}{\ln(2h/r)}.$$

3.4. Енергія системи зарядів відокремленого провідника та конденсатора. Енергія електричного поля

Енергія взаємодії нерухомих точкових зарядів

Розглянемо систему двох нерухомих точкових зарядів q_1 та q_2 , що перебувають на відстані r один від одного. Їх взаємодія визначається кулонівською силою, яка є консервативною. Тому їх взаємодію можна описати ще й потенціальною енергією взаємодії.

Кожний з цих зарядів у полі іншого заряду має потенціальну енергію

$$W_{p_1} = q_1 \varphi_{12}; \quad W_{p_2} = q_2 \varphi_{21}, \quad (3.15)$$

де φ_{12} та φ_{21} — відповідно потенціали, створені зарядом q_2 в точці, де перебуває заряд q_1 , та зарядом q_1 у точці, де перебуває заряд q_2 .

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4 \cdot 0} \frac{q_2}{r}, \quad \varphi_{21} = \frac{1}{4 \cdot 0} \frac{q_1}{r}.$$

Енергія зарядів q_1 та q_2 відповідно

$$W_{p_1} = \frac{q_2}{4 \cdot 0r} q_1; \quad W_{p_2} = \frac{q_1}{4 \cdot 0r} q_2. \quad (3.16)$$

Очевидно, що ці енергії дорівнюють одна одній

$$W_{p_1} = W_{p_2} = W_p.$$

Отже,

$$W_p = q_1 \varphi_{12} = q_2 \varphi_{21} = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}).$$

У випадку n нерухомих зарядів енергія взаємодії системи точкових зарядів W_p дорівнює

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (3.17)$$

де φ_i — потенціал поля, створеного в точці, де перебуває заряд q_i , всіма іншими зарядами.

**Енергія
зарядженого
відокремленого
провідника**

Щоб зарядити провідник, слід виконати роботу проти кулонівських сил електростатичного відштовхування між однойменно зарядженими частинками. Елементарна робота dA , яка виконується зовнішніми силами під час перенесення заряду dq із нескінченності на відокремлений провідник, дорівнює

$$dA = dq \cdot C \cdot \varphi,$$

де C та φ — електроємність і потенціал провідника.

При збільшенні потенціалу провідника від 0 до φ , тобто у разі надання провіднику заряду $q = C \cdot \varphi$, виконується робота

$$A = C \cdot \varphi \cdot \frac{\varphi}{2} = \frac{C \cdot \varphi^2}{2}.$$

Відповідно енергія зарядженого відокремленого провідника

$$W_e = \frac{C \cdot \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q \cdot \varphi}{2}. \quad (3.18)$$

**Енергія
зарядженого
конденсатора**

Як будь-який заряджений провідник, конденсатор має енергію.

Нехай q_1 і φ_1 — заряд і потенціал позитивно зарядженої обкладки конденсатора, а q_2 і φ_2 — заряд і потенціал негативно зарядженої обкладки.

Тоді енергія двох обкладок

$$W_p = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2).$$

Враховуючи, що $|q_1| = |q_2| = q$, маємо

$$W_p = \frac{1}{2}[(q_1 \varphi_1) - (q_2 \varphi_2)] = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}qU,$$

де $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ — різниця потенціалів (напруга) між обкладками. Маючи на увазі те, що $C = \frac{q}{U}$, отримаємо вираз для енергії конденсатора

$$W_p = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.19)$$

Знайдемо силу притягання обкладок конденсатора одна до одної.

Нехай відстань між обкладками x змінюється на dx . Діюча сила виконує роботу

$$dA = F dx.$$

Потенціальна енергія при цьому зменшується, тоді

$$F dx = -dW_p,$$

звідки

$$F = -\frac{dW_p}{dx}.$$

Потенціальна енергія такого плоского конденсатора дорівнює

$$W_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2 \epsilon_0 S} x. \quad (3.20)$$

Продиференціювавши цей вираз, знайдемо силу притягання між обкладками конденсатора

$$F = -\frac{dW_p}{dx} = -\frac{q^2}{2 \epsilon_0 S}. \quad (3.21)$$

Знак мінус указує на притягуючий характер сили F .

**Енергія
електростатичного
поля**

Розглянемо плоский конденсатор і запишемо його енергію

$$W_e = \frac{CU^2}{2}.$$

Ємність плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$, тоді енергія конденсатора

$$W_e = \frac{\epsilon_0 S}{2d} U^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{U^2}{d} Sd = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{U^2}{d} V,$$

де $\frac{U}{d}$ — E — напруженість електростатичного поля конденсатора,

V — об'єм, обмежений пластинами конденсатора.

Енергія електростатичного поля

$$W_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V. \quad (3.22)$$

Об'ємна густина енергії електростатичного поля (енергія одиниці об'єму)

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (3.23)$$

Якщо поле однорідне, то його енергія розподіляється зі сталою об'ємною густиною w у просторі.

Для однорідного ізотропного діелектрика вектори індукції \vec{D} та напруженості \vec{E} мають однаковий напрямок та пов'язані співвідношенням $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ або $D = \epsilon_0 E$. Тоді густина

$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0}.$$

У загальному випадку з урахуванням поляризації діелектрика і беручи до уваги

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

густина енергії електричного поля дорівнюватиме

$$w_e = \frac{\vec{E}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}, \quad (3.24)$$

де перший доданок збігається з густиною енергії поля \vec{E} у вакуумі, а другий виражає енергію, що витрачається на поляризацію діелектрика.

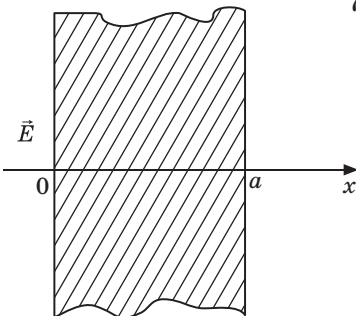
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Що відбувається в провіднику, розташованому в електричному полі?
2. Чому дорівнюють напруженість і потенціал електричного поля на поверхні та всередині провідника?
3. Який розподіл зарядів усередині та на поверхні зарядженого провідника?
4. З чим пов'язаний електростатичний захист?
5. Що таке електроємність відокремленого провідника? Від чого вона залежить?
6. Чому дорівнює електроємність конденсатора і від чого вона залежить?
7. Чому дорівнює електроємність кулі?
8. Виведіть формулу для електроємності плоского конденсатора.
9. Отримайте формулу для електроємності сферичного конденсатора.
10. Виведіть формулу для електроємності циліндричного конденсатора.
11. Чому дорівнює електроємність батареї конденсаторів при їх паралельному та послідовному з'єднанні?

12. Чому дорівнює енергія зарядженого провідника та системи заряджених провідників? Де локалізована ця енергія?
13. Як розрахувати об'ємну густину енергії та енергію електростатичного поля?

Завдання для експрес-контролю

1. Незаряджена металева кулька, яка висить на шовковій нитці, розташованій в однорідному електричному полі напруженістю E . Чому дорівнює напруженість поля в будь-якій точці всередині кульки?
2. Позитивний і негативний точкові заряди притягуються один до одного з силою F . Як зміниться ця сила, якщо між зарядами помістити кульку з діелектрика?
3. Обкладки плоского конденсатора мають заряди $+q$ і $-q$. 1) Як зміниться сила взаємодії обкладок, якщо відстань між ними збільшити втричі? 2) Як зміниться відповідь, якщо обкладки залишити підключеними до акумулятора?
4. Як можна збільшити енергію зарядженого конденсатора, не змінюючи його заряду?
5. Чому дорівнює різниця потенціалів між точкою на поверхні металеві зарядженої кулі і будь-якою точкою, розташованою всередині кулі?
6. Між обкладками зарядженого конденсатора поміщається пластинка з діелектричною проникністю ϵ . Які зміни відбудуться із зарядом конденсатора q , різницею потенціалів U на обкладках; напруженістю електричного поля E в діелектрику, вектором електричної індукції D , енергією конденсатора W ? Розглянути випадки, коли конденсатор: 1) відключений від батареї; 2) приєднаний до батареї.



7. Металева пластинка товщиною a заряджена так, що поверхнева густина заряду дорівнює σ . Далі пластину помістили в однорідне поле напруженістю \vec{E}_0 , перпендикулярне поверхні пластини. Визначити напруженість поля \vec{E} всередині й зовні пластини і поверхневу густину зарядів σ_1 і σ_2 , що з'явиться на лівому та правому боках пластини.

8. Плоский повітряний конденсатор підключили до джерела напруги, потім, не відключаючи його від джерела напруги, зблизили пластини так, що відстань між ними зменшилася вдвічі. Як зміняться: 1) енергія конденсатора; 2) заряд на обкладках конденсатора; 3) густина енергії поля в конденсаторі?
9. Плоский повітряний конденсатор зарядили від джерела напруги, а потім відключили від нього. Після цього зблизили пластини конденсатора, зменшивши проміжок між ними втричі. Як зміниться: 1) енергія конденсатора; 2) заряд на обкладках конденсатора; 3) густина енергії конденсатора?
10. На відстані r від точкового заряду $+q$ розташована металева куля радіусом R , з'єднана тонким довгим дротом з землею. Знайти величину Q індукованого, негативного заряду на кулі. Впливом дроту знехтувати.
11. Незаряджений суцільний металевий циліндр обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю ω . Знайти напруженість E електричного поля в циліндрі на відстані r від його осі.
12. Що відбудеться з поверхневою густиною електричних зарядів на зарядженому металевому листі, якщо йому надати циліндричної форми?

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Ємність плоского повітряного конденсатора $C = 10^{-9}$ Ф, відстань між пластинами $d = 4$ мм. На заряд $q = 4,9 \cdot 10^{-9}$ Кл, розташований між пластинами конденсатора, діє сила $F = 9,8 \cdot 10^{-5}$ Н. Площа пластини конденсатора 100 см^2 . Визначити: 1) напруженість поля і різницю потенціалів між пластинами; 2) густину енергії і енергію поля конденсатора.

Розв'язання

Поле між пластинами конденсатора вважаємо однорідним. Напруженість поля E можна визначити як $E = F/q = 2 \cdot 10^4$ В/м. Різницю потенціалів між пластинами знайдемо зі співвідношення $U = Ed = 80$ В.

Енергія конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 SU^2}{2d}$$

Врахувавши, що $V = Sd$ — об'єм, обмежений пластинами конденсатора, густина енергії

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = 1,75 \cdot 10^3 \text{ Дж/м}^3.$$

Задача 2

Як зміняться ємність і енергія плоского повітряного конденсатора, якщо на одну з обкладок конденсатора помістити металеву пластину завтовшки $d_0 = 1$ мм (рис. 3.11). Площа обкладок конденсатора пластини 150 см^2 , відстань між обкладками $d = 6$ мм. Конденсатор зарядили до напруги 400 В і відімкнули від батареї.

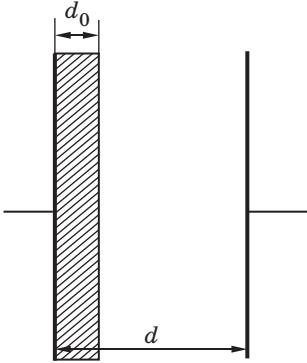


Рис. 3.11

Розв'язання

Ємність і енергія конденсатора, якщо внести в нього металеву пластину, змінюються. Це спричинено зменшенням відстані між пластинами з d до $d - d_0$.

Використавши формулу електроємності плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$,

отримаємо з урахуванням ϵ_0 (вакуум)

$$C = C_2 = C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_0} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{d}{d - d_0} = 4,42 \text{ пФ}.$$

При внесенні металеві пластини об'єм електричного поля зменшився на $V = S(d - d_0) = Sd - Sd_0$.

Об'ємна густина енергії поля конденсатора постійна й дорівнює

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2},$$

тоді енергія зменшиться на величину

$$W = w V = \frac{\epsilon_0 E^2 S d_0}{2}.$$

Напруженість E поля пов'язана з напругою на обкладках конденсатора співвідношенням $E = U/d$. Тоді

$$W = \frac{\epsilon_0 U^2 S d_0}{2d^2} = 2,95 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Задача 3

Знайти ємність системи з двох однакових металевих кульок з радіусами a , відстань між центрами яких b , причому $b \gg a$.

Розв'язання

Нехай ліва кулька має заряд q , а права $-q$ (рис. 3.12).

За визначенням ємність системи

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

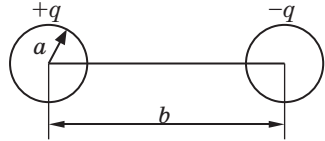


Рис. 3.12

де $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — різниця потенціалів між поверхнями кульок.

Згідно з принципом суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{q}{b-a} \right); \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a} \right),$$

де φ_1 і φ_2 — потенціали на поверхні лівої та правої кульок відповідно.

Тоді

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\frac{q}{a} + \frac{q}{b-a} - \left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a} \right)} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{b}{a(b-a)}.$$

Враховуючи, що $b \gg a$, отримаємо

$$C \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

Ємність системи кульок дорівнюватиме

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \approx 2\pi\epsilon_0 a.$$

Задача 4

Плоский конденсатор заповнений трьома діелектриками, як це показано на рис. 3.13. Чому дорівнює ємність такого конденсатора, якщо площа його пластин $S = 1 \text{ см}^2$, $d = 2 \text{ мм}$, $\epsilon_1 = 4,9$; $\epsilon_2 = 5,6$; $\epsilon_3 = 2,1$?

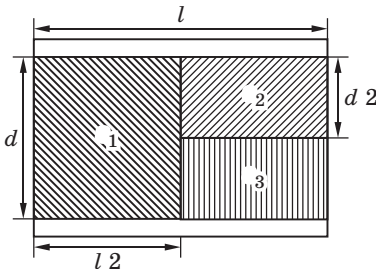


Рис. 3.13

Розв'язання

Можна вважати, що система складається з трьох конденсаторів

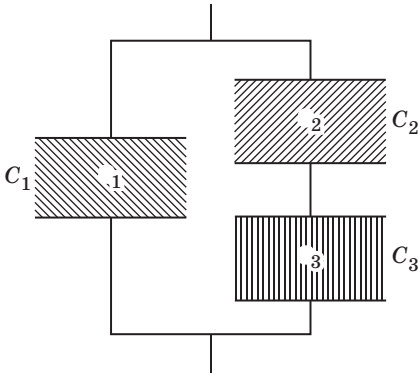


Рис. 3.14

C_1, C_2, C_3 с діелектричними проникностями $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (рис. 3.14). Конденсатори C_2 і C_3 з'єднані послідовно, а до них паралельно приєднаний конденсатор C_1 .

Ємність кожного конденсатора дорівнює

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 \cdot 0 S/2}{d}; C_2 = \frac{\epsilon_2 \cdot 0 S/2}{d/2};$$

$$C_3 = \frac{\epsilon_3 \cdot 0 S/2}{d/2}.$$

Для послідовно з'єднаних конденсаторів C_2 і C_3 маємо

$$C_{23} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{0 S}{d} \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}.$$

Для всієї системи отримаємо

$$C = C_1 + C_{23} = \frac{0 S}{d} \left(\frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \right) = 1,76 \text{ пФ}.$$

Задача 5

Відстань між пластинами плоского повітряного конденсатора $d_0 = 1,5$ см, різниця потенціалів $U = 100$ В. Визначити величину вектора напруженості електричного поля в діелектрику та поверхневу густину зв'язаних зарядів на слюдяній пластині, якщо вона покладена на нижню обкладку конденсатора. Товщина пластинки $d = 5$ мм (рис. 3.15).

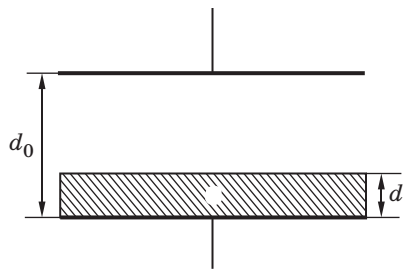


Рис. 3.15

Розв'язання

Напряга на пластинах конденсатора пов'язана з напруженістю поля в діелектрику \vec{E}_2 і напруженістю поля в повітрі \vec{E}_1 .

$$U = E_1 d_1 + E_2 d,$$

де $d_1 = d_0 - d$.

$$E_2 = \frac{E_1}{d_0},$$

звідки

$$E_2 = \frac{U}{d_1} = \frac{U}{d_0} \frac{d_0}{d_1}.$$

Поверхнева густина зв'язаних зарядів на слюдяній пластинці дорівнює

$$P = \sigma_0 E_2 = \frac{1}{d_0} \frac{U}{d_1} = 71 \text{ нКл/м}^2.$$

Задача 6

Заряд $q = 10^{-10}$ Кл рівномірно розподілений по поверхні сфери радіусом $R = 1$ см. Діелектрична проникність середовища, яке оточує сферу, $\epsilon = 1$. Визначити енергію поля, яка пов'язана зі сферою.

Розв'язання

Енергія елементарного сферичного шару об'ємом dV дорівнює

$$dW = w dV,$$

де $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ — об'ємна густина енергії, $dV = 4\pi r^2 dr$ — сферичний шар, радіусом r , товщиною dr .

Повна енергія дорівнюватиме

$$W = \int_R w dV = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr.$$

Напруженість поля зовні сфери знаходиться за теоремою Гаусса

$$E = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{4\pi R^2}{0} \frac{q}{4\pi R^2}, \text{ звідки } E = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

З урахуванням того, що поверхнева густина зарядів

$$\frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2},$$

маємо

$$E = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Тоді енергія поля зовні сфери (1) дорівнюватиме

$$W = \int_R^{\infty} \frac{0}{2} \frac{q}{4} \frac{1}{0r^2} \cdot 4 r^2 dr = \frac{q^2}{8} \int_0^R \frac{dr}{Rr^2} = \frac{1}{4} \frac{q^2}{0} \frac{1}{2R} \quad 4,5 \text{ нДж.}$$

Задача 7

Заряд $Q = 20 \text{ нКл}$ рівномірно розподілений по об'єму кулі радіусом $R = 5 \text{ см}$ у вакуумі. Знайти енергію поля, створеного цією кулею.

Розв'язання

У випадку неоднорідного електричного поля енергія в об'ємі dV може бути обчислена за формулою

$$W = \int_V w_e dV,$$

де w_e — густина енергії; dV — елементарний об'єм, у межах якого густина енергії вважається сталою (рис. 3.16).

Густина енергії в вакуумі

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

де E — напруженість поля.

За теоремою Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

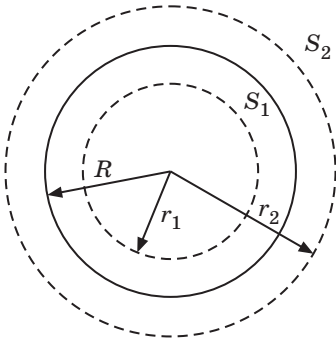


Рис. 3.16

1) Проведемо гауссову поверхню радіусом $r < R$ (поверхня лежить усередині заряду Q). Тоді

$$q_i = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

де ρ — об'ємна густина заряду.

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0};$$

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{2\rho^2 r^2}{9} = \frac{2\rho^2 r^2}{18 \cdot 0}.$$

2) Проведемо гауссову поверхню радіусом $r > R$ (поверхня охоплює весь заряд Q). Тоді

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2},$$

а густина енергії

$$w_{e2} = \frac{1}{2} \cdot 0 \frac{Q^2}{16 \cdot 2 \cdot 0 r^4} - \frac{Q^2}{32 \cdot 2 \cdot 0 r^4}.$$

Виберемо елементарний об'єм dV у формі сферичного шару товщиною dr . Тоді $dV = 4 \pi r^2 dr$.

Повна енергія електростатичного поля у всьому просторі

$$W = \int_0^R w_{e1} dV = \int_0^R w_{e2} dV;$$

$$W = \int_0^R \frac{2 \pi r^2}{18 \cdot 0} \cdot 4 \pi r^2 dr - \int_0^R \frac{Q^2}{32 \cdot 2 \cdot 0 r^4} \cdot 4 \pi r^2 dr$$

$$\frac{2}{9} \int_0^R \frac{2 \pi r^4}{0} dr - \frac{Q^2}{8 \cdot 0} \int_0^R \frac{dr}{r^2} = \frac{2}{9} \int_0^R \frac{R^5}{5} - \frac{Q^2}{8 \cdot 0} \frac{1}{R}.$$

Об'ємна густина заряду дорівнює

$$\frac{3Q}{4 \pi R^3}.$$

Тоді

$$W = \frac{2}{9} \frac{9Q^2}{16 \cdot 2 R^6} \frac{R^5}{5} - \frac{Q^2}{8 \cdot 0 R} \frac{1}{40} \frac{Q^2}{0 R} - \frac{Q^2}{8 \cdot 0 R}$$

$$\frac{6Q^2}{40 \cdot 0 R} - \frac{3Q^2}{20 \cdot 0 R} = 42,8 \text{ мкДж.}$$

Задача 8

Точковий заряд $q = 6 \text{ нКл}$ розташований у центрі сферичного шару з однорідного діелектрика з діелектричною проникністю

6. Внутрішній і зовнішній радіуси шару дорівнюють відповідно $R_1 = 1 \text{ см}$ і $R_2 = 5 \text{ см}$. Знайти електричну енергію діелектричного шару.

Розв'язання

Енергія електричного поля дорівнює

$$W_e = \int w dV,$$

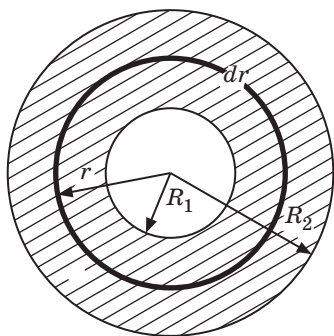


Рис. 3.17

Тоді електрична енергія діелектричного шару дорівнює

$$W_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2};$$

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Задача 9

Знайти роботу, яку потрібно здійснити проти електричних сил, щоб видалити діелектрик з діелектричною проникністю ϵ з конденсатора, зарядженого зарядом $q = 10$ мкКл. Ємність конденсатора без діелектрика $C_0 = 5$ мкФ.

Розв'язання

Робота зовнішніх сил проти електричних сил в системі йде на приріст електричної енергії системи

де $W_{e1} = \frac{q^2}{2C_0}$ — енергія конденсатора за наявності діелектрика;
 $W_{e2} = \frac{q^2}{2C_0}$ — енергія конденсатора за відсутності діелектрика.

Тоді

$$A = \frac{q^2}{2C_0} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C} = 1 \cdot \frac{1}{5} = 5 \text{ мкДж.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Металева сфера радіусом R розташована в однорідному електричному полі. Нарисувати картину еквіпотенціальних поверхонь і ліній напруженості.

3.2. Відстань між вертикальними пластинами в плоскому повітряному конденсаторі дорівнює 6 мм. Його занурюють до половини в мастило (7). Як при цьому зміниться ємність конденсатора?

Відповідь: збільшиться в 4 рази.

3.3. Пластини плоского повітряного конденсатора площею 150 м^2 розсувають так, що відстань між ними збільшується від 5 до 14 мм. Яку роботу слід при цьому виконати, якщо напруга між пластинами конденсатора стала (тобто конденсатор не відключений від джерела) і дорівнює 380 В?

Відповідь: $1,2 \cdot 10^{-6}$ Дж.

3.4. Між обкладками плоского конденсатора площею 100 см^2 кожна розташована слюда. Обкладки притягуються одна до одної з силою 0,03 Н. Визначити напруженість поля конденсатора (6).

Відповідь: $3,3 \cdot 10^5$ В/м.

3.5. На пластинках плоского вакуумного конденсатора рівномірно розподілений заряд $5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Площа обкладок 100 см^2 , а відстань між обкладками 3 мм. Заряджений конденсатор відключений від батареї. Яку потрібно виконати роботу, щоб розсунути пластины до 8 мм?

Відповідь: 70,6 мкДж.

3.6. Вивести формулу електроємності сферичного конденсатора. Радіуси сфер r_1 та r_2 ($r_1 < r_2$). Діелектрична проникність середовища між обкладками .

Відповідь: $C = \frac{4 \pi \epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$.

3.7. У батарею з'єднали послідовно 10 однакових конденсаторів. Ємність кожного дорівнює 100 пФ. Визначити ємність батареї.

Відповідь: 10 пФ.

3.8. Як потрібно з'єднати конденсатори $C_1 = 2$ пФ, $C_2 = 4$ пФ та $C_3 = 6$ пФ, щоб загальна ємність дорівнювала 3 пФ?

3.9. Площа обкладок конденсатора 1 м^2 , відстань між ними 5 мм. Простір між обкладками заповнений двошаровим діелектриком. Діелектрична проникність і товщина першого шару дорівнює ϵ_1 та d_1 , другого — ϵ_2 та d_2 . Знайти ємність конденсатора.

Відповідь: $C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}$.

3.10. Два конденсатори ємністю 5 і 7 мкФ послідовно з'єднані із джерелом з різницею потенціалів 200 В. Якими будуть заряди

і різниця потенціалів батареї, якщо конденсатори відключити від джерела і з'єднати паралельно?

Відповідь: $q_1 = 486 \cdot 10^{-6}$ Кл; $q_2 = 682 \cdot 10^{-6}$ Кл; $U = 97,2$ В.

3.11. Плоский конденсатор, пластини якого великі порівняно з відстанню між ними, приєднано до джерела постійної напруги. Чи зміниться напруженість поля всередині конденсатора, якщо заповнити простір між обкладками конденсатора діелектриком? Розглянути випадки, коли джерело підключено до конденсатора та вимкнено від нього.

Відповідь: не зміниться; $\frac{E_0}{E_1}$.

3.12. Плоский конденсатор заповнений речовиною з діелектричною проникністю ϵ і питомим опором ρ . Чому дорівнює опір конденсатора, якщо його ємність C ?

Відповідь: $R = \frac{\rho}{C}$.

3.13. Який заряд пройде по провідниках, що з'єднують пластини повітряного конденсатора з джерелом струму з напругою U , при зануренні конденсатора в гас (діелектрична проникність ϵ). Площа пластини конденсатора S , відстань між пластинами d .

Відповідь: $q = \frac{\epsilon SU}{d}$.

3.14. Напруженість поля між одкладками повітряного конденсатора дорівнює E , а електричне зміщення D . Половина проміжку між обкладками заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з діелектричною проникністю ϵ (рис. 3.18). Знайти, чому дорівнюють значення напруженості поля і електричної індукції в областях 1 і 2. Розглянути два випадки: а) конденсатор підключений до джерела напруги; б) конденсатор відключений від джерела напруги.

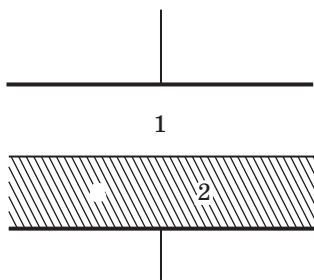


Рис. 3.18

Відповідь: а) $E_1 = E$; $E_2 = \frac{E}{\epsilon}$;

$D_1 = D_2 = D$; б) $E_1 = \frac{2E}{1 + \epsilon}$; $E_2 = \frac{2E}{1 + \epsilon}$; $D_1 = \frac{2}{1 + \epsilon} D$; $D_2 = \frac{2}{1 + \epsilon} D$.

Густина ліній D на всьому проміжку однакова, а ліній E в області 2 в разів щільніша, ніж в області 1.

3.15. Проміжок між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком. Товщина проміжку 1 мм, напруга на пластинах конденсатора 1000 В, а поверхнева густина індукованого на діелектрику заряду дорівнює $11,5 \text{ мкКл/м}^2$. Обчислити діелектричну проникність матеріалу, що заповнює проміжок між пластинами.

Відповідь: 2,3.

3.16. Відстань d між пластинами плоского конденсатора дорівнює 2 мм, різниця потенціалів $U = 1,8 \text{ кВ}$. Діелектрик — скло. Визначити діелектричну сприйнятливість скла і поверхневу густину поляризаційних (зв'язаних) зарядів на поверхні скла.

Відповідь: 7; $47,7 \text{ мкКл/м}^2$.

3.17. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком з діелектричною проникністю 7. Верхній пластині надали заряд $Q = 10^{-8} \text{ Кл}$, а нижню з'єднали з землею. Площа пластин $S = 0,2 \text{ м}^2$. Знайти напруженість електричного поля в діелектрику, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів. Обчислення зробити двома методами: методом суперпозиції та методом Гауса.

Відповідь: $E = 807 \text{ В/м}$; $4,28 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2$.

3.18. Відстань між пластинами плоского конденсатора заповнена двома діелектриками з діелектричними проникностями $\epsilon_1 = 2$ та $\epsilon_2 = 7$. Площа пластин конденсатора $S = 0,2 \text{ м}^2$, заряд $Q = 10^{-8} \text{ Кл}$. Знайти поверхневі густини та зв'язаних зарядів.

Відповідь: $2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$; $4,2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2$.

3.19. Поверхнева густина зв'язаних зарядів на діелектричній пластині, що розташована між пластинами плоского конденсатора, дорівнює $5,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$. Пластини конденсатора притягуються одна до одної з силою $4,9 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Площа пластин дорівнює 100 см^2 . Визначити проникність діелектричної пластини.

Відповідь: 7.

3.20. До однієї з обкладок плоского конденсатора, зарядженого до різниці потенціалів $U = 800 \text{ В}$, щільно присунута пластинка слюди ($\epsilon = 7$) завтовшки $d_1 = 0,3 \text{ мм}$. Площа обкладок $S = 2000 \text{ см}^2$, відстань між ними $d = 0,5 \text{ мм}$. Визначити напруженість поля в діелектрику і вакуумі, а також ємність конденсатора.

Відповідь: $E_1 = 4,7 \cdot 10^5$ В/м; $E_2 = 33 \cdot 10^5$ В/м; $C = 3 \cdot 10^{-9}$ Ф.

3.21. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено послідовно двома діелектричними шарами, товщини яких $d_1 = 7$ мм та $d_2 = 3$ мм, проникності $\epsilon_1 = 7$ (скло) та $\epsilon_2 = 3$ (ебоніт). Площа кожної обкладки дорівнює $S = 0,2$ м². Знайти: а) ємність конденсатора; б) густину зв'язаних зарядів на межі розподілу діелектриків. Напруга на конденсаторі $U = 100$ В, а електричне поле E направлено від шару 1 до шару 2.

Відповідь: $C = 885$ пФ; 55 мкКл/м².

3.22. Дві концентричні металеві сфери радіусами $R_1 = 2$ см та $R_2 = 2,2$ см утворюють сферичний конденсатор. Знайти електроємність конденсатора C , якщо простір між сферами заповнений мастилом ($\epsilon = 2,2$).

Відповідь: $C = 53,8$ пФ.

3.23. Металева кулька, радіус якої $R = 5$ см, має заряд $q = 10$ нКл. Вона оточена парафіном, товщина якого $d = 4$ см, діелектрична проникність $\epsilon = 2$. Знайти енергію електричного поля в парафіні.

Відповідь: $W = 2$ мкДж.

3.24. Куля радіусом $R_1 = 4$ см заряджена до потенціалу $\phi_1 = 800$ В, а куля радіусом $R_2 = 2$ см — до потенціалу $\phi_2 = 200$ В. Знайти потенціал куль після їх з'єднання металевим провідником.

Відповідь: 600 В.

3.25. У повітряний конденсатор ємністю C_0 вносять пластинку з діелектричною проникністю ϵ (рис. 3.19). Який конденсатор слід з'єднати послідовно з даними, щоб ємність батареї дорівнювала C_0 ?

Відповідь: $C_x = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} C_0$.

3.26. Визначити ємність системи однакових конденсаторів, зображеної на рис. 3.20, якщо система підключається до схеми точками: а) A і D ; б) A і K .

Відповідь: а) $C_{\text{екв}} = 2C$; б) $C_{\text{екв}} = 2C$.

3.27. Плоский повітряний конденсатор зарядили до різниці потенціалів U_0 . Далі конденсатор відключили від джерела струму. Якою буде різниця потенціалів між пластинами, якщо відстань між ними збільшити від d_0 до d , а простір між пластинами заповнити слюдою з діелектричною проникністю ϵ ?

Відповідь: $U = \frac{d U_0}{d_0}$.

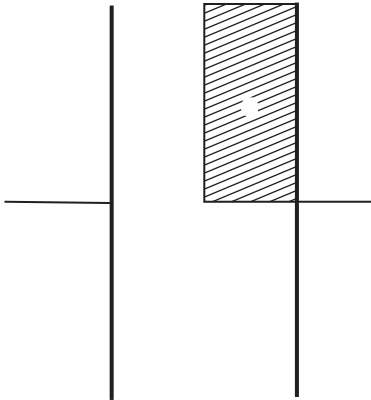


Рис. 3.19

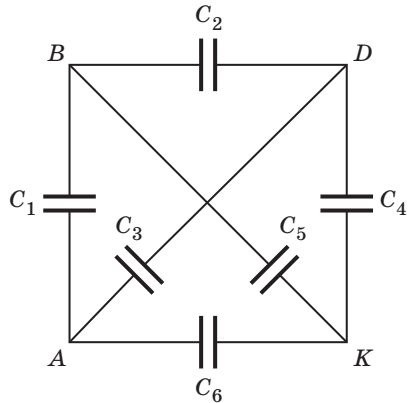


Рис. 3.20

3.28. Електричне поле створено двома паралельними нескінченними зарядженими площинами з поверхневими густинами зарядів σ_1 та σ_2 . Визначити напруженість електричного поля, створеного цими площинами між ними і зовні.

Відповідь: $E_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$; $E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$; $E_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$.

3.29. Конденсатор, що має електричну ємність C_1 , зарядили до різниці потенціалів U_1 . Після відключення від джерела струму конденсатор був з'єднаний паралельно з іншим незарядженим конденсатором ємністю C_2 . Визначити енергію W , що виділяється при утворенні іскри в момент з'єднання конденсаторів.

Відповідь: $W = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2$.

3.30. Два конденсатори зарядили до напруги U_1 та U_2 , після чого їх з'єднали паралельно. Різниця потенціалів між обкладками конденсаторів стала рівною U . Знайти відношення величин ємностей конденсаторів.

Відповідь: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{U + U_2}{U_1 - U}$.

3.31. Дві металеві кулі з радіусами R_1 та R_2 мають довільні заряди. Показати, що після з'єднання їх провідником напруженості електричного поля поблизу поверхонь куль будуть обернено пропорційні їх радіусам.

3.32. На пластинах плоского повітряного конденсатора з площею пластин 150 см^2 розташовано заряд $5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$. Які сили взаємного притягання між пластинами і об'ємна густина енергії поля конденсатора?

Відповідь: $0,94 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$; $0,627 \text{ Дж/м}^3$.

3.33. Два однакових плоских конденсатори з'єднали паралельно і зарядили до різниці потенціалів U_0 . Знайти різницю потенціалів U між пластинами конденсаторів, якщо після відключення конденсаторів від джерела струму в одному з них зменшили відстань між пластинами вдвічі.

Відповідь: $U = \frac{2}{3} U_0$.

3.34. Два конденсатори з ємностями C_1 та C_2 зарядили до різниці потенціалів U_1 та U_2 . Знайти різницю потенціалів U після з'єднання конденсаторів однойменними полюсами.

Відповідь: $U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}$.

3.35. Чому дорівнює ємність батареї конденсаторів, з'єднаних як показано на рис. 3.21? Показати, що ємності цих батарей однакові, якщо виконується умова

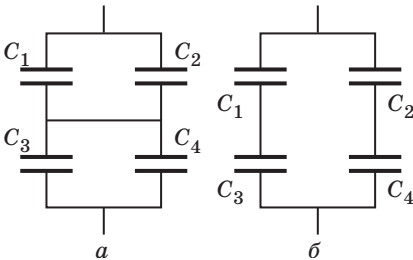


Рис. 3.21

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}.$$

Відповідь:

а) $C = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$;

б) $C = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$.

3.36. Плоский конденсатор, відстань між пластинами якого $d = 4 \text{ мм}$, вертикально занурюють до половини в гас (2). Наскільки потрібно розсунути пластини конденсатора, щоб його ємність не змінилася?

Відповідь: $d = 2 \text{ мм}$.

3.37. Плоский конденсатор підключений до джерела напруги U . Площа обкладок S , відстань між ними d_1 . До нижньої обкладки, зарядженої негативним зарядом, притиснуто металеву пластину тієї ж площі S , товщиною d_2 і масою m . Металеву пластину

відпускають. З якою швидкістю вона вдариться об верхню обкладку конденсатора? Силою тяжіння знехтувати.

Відповідь: $v = U \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 S}{m d_1 d_2}}$.

3.38. Два конденсатори, з'єднані паралельно, мають еквівалентну ємність, що дорівнює 9 пФ, а з'єднані послідовно мають ємність 2 пФ. Якою є ємність кожного конденсатора?

Відповідь: $C_1 = 6$ пФ; $C_2 = 3$ пФ.

3.39. Чотири конденсатори з'єднані, як показано на рис. 3.22. $C_1 = 15$ мкФ; $C_2 = 3$ мкФ; $C_3 = 6$ мкФ; $C_4 = 20$ мкФ. Знайти еквівалентну ємність між точками a і b , а також заряд на кожному конденсаторі, якщо $U_{ab} = 15$ В.

Відповідь: $q_1 = q_2 = 26,3$ мкКл;
 $q_3 = 63,2$ мкКл; $q_4 = 89,5$ мкКл.

3.40. Обкладка a повітряного конденсатора приєднана до пружини, жорсткість якої дорівнює k ,

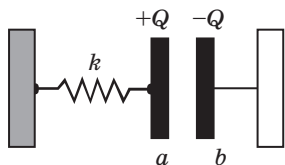


Рис. 3.23

обкладка b закріплена нерухомо (рис. 3.23). Площа кожної обкладки S , заряди $+Q$ і $-Q$. Наскільки розтягнеться пружина?

Відповідь: $x = \frac{Q^2}{2S \epsilon_0 k}$.

3.41. Паралельно обкладкам конденсатора з повітряним проміжком d і з площею обкладок S опускають металеву пластинку товщиною d_1 . Чому дорівнює електроємність конденсатора із вставленою пластинкою?

Відповідь: $C = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1}$.

3.42. Конденсатор ємністю $C_1 = 1$ мкФ розрахований на напругу не більше $U_1 = 6$ кВ, а конденсатор ємністю $C_2 = 2$ мкФ — не більше $U_2 = 4$ кВ. Яку напругу витримає система з цих двох конденсаторів, якщо їх з'єднати послідовно?

Відповідь: $U = 9$ кВ.

3.43. У схемі (рис. 3.24) знайти різницю потенціалів між лівою і правою обкладками кожного конденсатора.

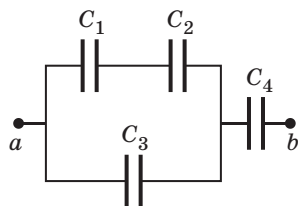


Рис. 3.22

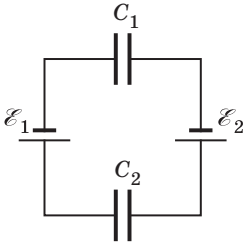


Рис. 3.24

Відповідь: $U_1 = \frac{\mathcal{E}_2}{1} \frac{\mathcal{E}_1}{C_1/C_2}; U_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{1} \frac{\mathcal{E}_2}{C_2/C_1}.$

3.44. У схемі (рис. 3.25) знайти заряд кожного конденсатора.

Відповідь: $q = \frac{(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2)C_1C_2}{C_1 C_2}.$

3.45. Визначити різницю потенціалів між точками А і В на схемі (рис. 3.25). За якою умовою вона дорівнює нулю?

Відповідь:

$$A \quad B \quad \frac{\mathcal{E} C_2 C_3 C_1 C_4}{[(C_1 C_2)(C_3 C_4)]}$$

якщо $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}.$

3.46. Різниця потенціалів між пластинами плоского конденсатора $U = 100$ В. Площа кожної пластини $S = 200$ см², відстань між пластинами $d = 0,5$ мм, простір між ними заповнений парафіном (2). Знайти силу притягання пластин одна до одної.

Відповідь: $F = 7,08$ мН.

3.47. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений слюдою (7). Площа пластин дорівнює 500 см². Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів на слюді, якщо пластины конденсатора притягають одна одну з силою 1 мН.

Відповідь: $4,27$ мкКл/м².

3.48. Знайти силу, що діє на одну з обкладок плоского конденсатора в рідкому діелектрику, якщо відстань між пластинами d , ємність конденсатора C і напруга на конденсаторі U .

Відповідь: $F_x = \frac{CU^2}{2d}.$

3.49. У плоскому конденсаторі діелектрик — скляна пластина (7) товщиною $d = 3$ см, напруга на конденсаторі дорівнює 200 В. Далі скляну пластину видаляють з конденсатора. Якою має бути відстань між пластинами, щоб його енергія залишилась попередньою? Розглянути два випадки: а) конденсатор замикається

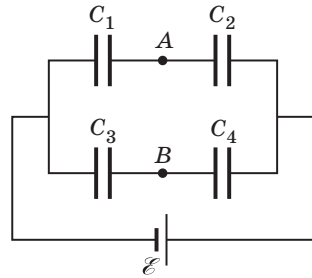


Рис. 3.25

підключенням до джерела напруги; б) конденсатор відокремлений від акумулятора.

Відповідь: а) $d_1 = 0,4$ см; б) $d_2 = 0,4$ см.

3.50. Навести закон, за яким змінюється об'ємна густина енергії електричного поля у разі віддалення: а) від точкового заряду; б) диполя?

Відповідь: $w \propto r^{-4}$; $w \propto r^{-6}$.

3.51. Навести вирази для енергії конденсатора, визначивши її через C та U , C та q , q та U , де C — ємність конденсатора; U — напруга на конденсаторі; q — заряд конденсатора.

3.52. Точковий заряд q розташований у середовищі з діелектричною проникністю ϵ . Визначити енергію поля у шарі, радіуси якого a та b . Заряд перебуває в центрі шару.

Відповідь: $W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \frac{1}{b}$.

3.53. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл рівномірно розподілений по об'єму, що має форму кулі радіусом $r = 1$ см. Визначити: 1) енергію W поля, пов'язану з кулею; 2) енергію W_1 усередині кулі; 3) енергію W_2 у просторі, що оточує кулю.

Відповідь: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q^2}{5r}$; $W_1 = \frac{1}{6}W$; $W_2 = \frac{5}{6}W$.

3.54. Суцільна парафінова куля ($\epsilon = 2$) радіусом $R = 10$ см рівномірно заряджена зарядом, об'ємна густина якого дорівнює 10 нКл/м³. Визначити енергію електричного поля, зосереджену в самій кулі і енергію поля поза кулею.

Відповідь: $W_1 = 7,88$ нДж, $W_2 = 78,8$ нДж.



ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Електродинаміка — це розділ учення про електрику, в якому розглядаються явища та процеси, обумовлені рухом елементарних електричних зарядів або макроскопічних заряджених тіл. Важливим поняттям електродинаміки є *електричний струм*.

4 Постійний електричний струм

4.1. Електричний струм і його характеристики

Електричний струм — це будь-який упорядкований (напрявлений) рух електричних зарядів. У металах електричний струм являє собою дрейф вільних електронів проти електричного поля, в електролітах — іонів різних знаків у протилежних напрямках, у напівпровідниках — електронів і дірок, у газах — електронів та іонів.

Заряди, що створюють електричний струм, називають *носіями струму*.

Струм, що виникає під дією електричного поля в середовищах, які є провідниками, називається *струмом провідності*. При цьому рівноважний (електростатичний) розподіл зарядів у провіднику порушується і його поверхня втрачає еквіпотенціальність. Всередині провідника з'являється електричне поле, а дотична складова напруженості електричного поля у поверхні провідника $E = 0$.

Упорядкований рух зарядів (струм) здійснюватиметься доти, доки всі точки провідника не будуть еквіпотенціальними.

Упорядкований рух заряджених макроскопічних тіл (провідників або діелектриків) називається *конвекційним струмом*.

Для виникнення й існування електричного струму в середовищі, яке є провідником, необхідні такі умови:

наявність у середовищі вільних зарядів (носіїв струму) — заряджених частинок, які могли б упорядковано рухатися; існування внутрішнього електричного поля, енергія якого витрачалася б на упорядковане переміщення цих зарядів. Для підтримання струму енергія джерела поля має неперервно поповнюватися, тобто необхідне джерело електричної енергії — пристрій, у якому відбувається перетворення якогось виду енергії в енергію електричного поля.

Основні характеристики струму
--

Для полегшення аналізу проходження струму у провідниках користуються лініями струму.

Лінією струму називають лінію, в кожній точці якої в даний момент часу дотична збігається з напрямком упорядкованого руху електричних зарядів. Лінії струму утворюють замкнені циліндричні поверхні, які називають *трубками струму*. При цьому носії заряду під час руху не перетинають бокових поверхонь трубок струму.

Кількісними характеристиками електричного струму є скалярна величина — сила струму I та векторна величина — густина струму \vec{j} .

Силою струму називається скалярна фізична величина I , що дорівнює відношенню заряду dq , який переноситься в результаті упорядкованого руху через поперечний переріз провідника за малий проміжок часу dt , до величини цього проміжку:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

За напрямком електричного струму береться напрямок упорядкованого руху позитивних зарядів (так умовилися).

Струм, величина й напрямок якого з часом не змінюються, називається *постійним струмом*. Для постійного струму

$$I = \frac{q}{t},$$

де q — електричний заряд, який переноситься через поверхню, що розглядається, за скінченний проміжок часу від 0 до t .

Для постійного струму виконується умова

$$q_{s_1} = q_{s_2} = 0,$$

де q_{s_1} — сумарний електричний заряд, який надходить за одиницю часу крізь поверхню S в об'єм провідника, обмежений поперечними

перетинами S_1 та S_2 ; q_{s2} — сумарний електричний заряд, який виходить із цього об'єму за одиницю часу через поверхню S_2 .

У загальному випадку електричний струм може бути розподілений по перерізу провідника, крізь який він проходить, нерівномірно. Розподіл електричного струму по перерізу провідника характеризується вектором *густини струму* \vec{j} .

Густина струму в кожній даній точці провідника — це границя, до якої прямує відношення сили струму I до елемента площі перерізу S , розташованого перпендикулярно до напрямку струму, якщо $S \rightarrow 0$, тобто

$$j = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{S} = \frac{dI}{dS}.$$

Якщо електричний струм розподілений рівномірно по перерізу провідника, яким він проходить, то густина струму

$$j = \frac{I}{S},$$

де S — площа поперечного перерізу.

За напрямком вектора густини сили струму взято напрямком вектора швидкості \vec{u} упорядкованого руху позитивних носіїв струму (зарядів).

Густина струму в провідниках, у яких присутні носії обох знаків, дорівнює

$$\vec{j} = n^+ e \vec{u}^+ - n^- e \vec{u}^-, \quad (4.1)$$

де n^+ , n^- — кількість носіїв позитивних і негативних зарядів в одиниці об'єму провідника, тобто концентрація носіїв; e^+ ($e^+ > 0$), e^- ($e^- < 0$) — заряд носіїв; \vec{u}^+ , \vec{u}^- — швидкості упорядкованого руху носіїв зарядів. (Напрямки \vec{u}^+ та \vec{u}^- збігаються, \vec{u}^+ та \vec{u}^- — протилежні.)

Сила струму крізь довільну поверхню S

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j_n dS, \quad (4.2)$$

де j_n — проекція вектора \vec{j} на напрямком нормалі \vec{n} до поверхні S . Інтегрування здійснюється по всій площі поверхні S .

$$[I] = 1 \text{ А (Ампер)},$$

$$[j] = 1 \text{ А/м}^2.$$

4.2. Закон безперервності струму

Запишемо закон збереження електричного заряду в математичній формі.

Для цього уявно виділимо у провіднику об'єм V , який охоплено поверхнею S (рис. 4.1).

Заряд, що витікає з об'єму V через поверхню ds за час dt , дорівнюватиме

$$dq = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS dt = \int_S j_n dS dt.$$

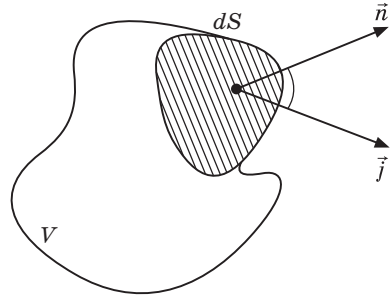


Рис. 4.1

Знак « $-$ » вказує на зменшення заряду в об'ємі V .

Якщо з об'єму V крізь поверхню S витікає заряд dq протягом часу dt , то за одиницю часу витікає заряд, що дорівнює силі струму

$$\frac{dq}{dt} = \int_S j_n dS.$$

Закон збереження електричного заряду (рівняння безперервності) матиме вигляд

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{dq}{dt} = 0. \quad (4.3)$$

Для постійного струму $q = \text{const}$ і

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Рівняння безперервності в диференціальній формі

Установимо зв'язок між об'ємною густиною заряду та густиною струму j .

Об'ємна густина заряду дорівнює

$$\frac{dq}{dV}, \text{ тоді } dq = \frac{dq}{dV} dV, \text{ а } q = \int_V \frac{dq}{dV} dV, \frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} \frac{dq}{dV} dV,$$

або

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{dq}{dt} dV, \quad (4.4)$$

де $\frac{dq}{dt}$ — частинна похідна від q за часом, тому що q може залежати не тільки від часу, а й від координат.

Зі співвідношень (4.3) та (4.4) отримаємо диференціальну форму рівняння безперервності

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{dq}{dt} = 0. \quad (4.5)$$

**Теорема
Остроградського —
Гаусса**

Якщо відома дивергенція вектора \vec{a} (див. дод. 1 «Додаток векторного аналізу», формула 2) у кожній точці простору, то можна розрахувати потік цього вектора крізь будь-яку замкнену поверхню, що має скінченні розміри. Для цього об'єм, обмежений поверхнею S , розіб'ємо на безкінечно велику кількість нескінченно малих об'ємів V_i . Згідно з формулою (2) (дод. 1), потік вектора \vec{a} , що витікає з будь-якого із цих малих об'ємів, дорівнюватиме $\text{div } \vec{a} \cdot V_i$. Якщо підсумувати по всіх об'ємах V_i , то отримаємо

$$\int_V \text{div } \vec{a} dV,$$

тобто потік вектора \vec{a} крізь поверхню S дорівнюватиме

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{a} dV. \quad (4.6)$$

Перетворення поверхневого інтегралу в об'ємний (співвідношення (4.6)) має назву *теорема Остроградського — Гаусса*.

Застосуємо теорему Остроградського — Гаусса до вектора густини струму.

Згідно з формулою (1) додатків маємо

$$\text{div } \vec{j} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{j} d\vec{S}.$$

За теоремою Остроградського — Гаусса

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{j} dV.$$

Потік вектора \vec{j} крізь замкнену поверхню визначається формулою (4.5).

Тоді

$$\int_V \text{div } \vec{j} dV = \frac{1}{t} \int_V dV,$$

звідки

$$\text{div } \vec{j} = \frac{1}{t}. \quad (4.7)$$

або

$$\vec{j} = \frac{1}{t} \vec{e}_r. \quad (4.8)$$

Дивергенція вектора \vec{j} в деякій точці дорівнює зменшенню густини заряду в цій самій точці.

Умовою стаціонарності струму є

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

тобто якщо дивергенція $\vec{j} = 0$, то струм постійний, а поле вектора \vec{j} при цьому не має джерел.

4.3. Закон Ома для однорідної та неоднорідної ділянки кола. Електрорушійна сила

Якщо $I = \text{const}$, то густина струму в кожній точці провідника (тобто густина електричних зарядів) не змінюється з часом, незважаючи на існування потоку зарядів. На місце зарядів, які вийшли з цієї самої точки, надходять інші. Ці заряди утворюють у просторі таке саме кулонівське електричне поле, яке б утворили нерухомі заряди тієї самої густини.

Тобто електричне поле стаціонарних струмів потенціальне.

Але електричне поле постійних струмів і кулонівське поле зарядів не є ідентичними.

У разі рівноваги електричних зарядів кулонівське поле в провіднику дорівнює нулю, тоді як за наявності постійного струму поле всередині провідника відмінне від нуля, інакше струму не було б.

Силкові лінії електростатичного поля завжди перпендикулярні до поверхні провідника, тоді як при стаціонарному струмі в провіднику його поверхня не є еквіпотенціальною, та лінії напруженості поля напрямлені під гострим кутом до провідника в напрямі струму (рис. 4.2), причому

$$\text{tg} \frac{E_n}{E}.$$

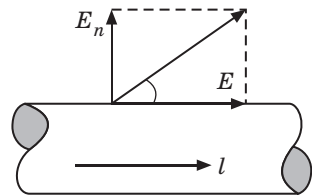


Рис. 4.2

У зв'язку з тим, що поле постійних струмів має потенціальний характер, можна говорити про потенціал окремих точок провідника постійного струму та про різницю потенціалів між ними.

Сторонні сили

Якщо заряди рухаються тільки під дією електростатичного поля, то переміщення зарядів від більшого потенціалу до меншого призведе до зникнення поля. Струм також зникне.

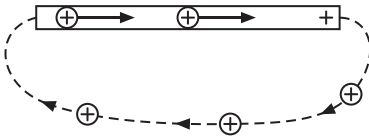


Рис. 4.3

Для досить тривалого існування струму необхідно від кінця провідника з меншим потенціалом (носії зарядів уявляються позитивними) безперервно відводити заряди, які приносить струм, а до кінця з більшим потенціалом безперервно їх підводити (рис. 4.3).

Іншими словами, потрібно здійснити круговорот зарядів, при якому вони рухатимуться по замкненому колу.

Відомо, що циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

$$\oint E_l dl = 0.$$

Тому для підтримання постійного струму необхідно, щоб у замкненому колі були б не тільки ділянки, на яких позитивні заряди рухаються в бік зменшення потенціалу, а й ділянки, на яких перенесення позитивних зарядів відбувалося б у напрямку збільшення потенціалу, тобто проти сил електростатичного поля (на рис. 4.3 — це пунктирна частина кола).

Переміщення носіїв струму на таких ділянках вимагає присутності сил неелектричного походження, так званих *сторонніх сил*.

Походження сторонніх сил різноманітне (хімічні процеси; дифузія носіїв зарядів у неоднорідному середовищі, електричні (але не електростатичні) поля, що виникають за рахунок змінних за часом магнітних полів, тощо). Електричне поле сторонніх сил у колі створюється включенням до нього джерела *електричного струму*.

Сили не електростатичного походження, що діють на заряди з боку джерел струму, називають *сторонніми*.

Електрорушійна сила Сторонні сили виконують роботу з переміщення електричних зарядів.

Фізична величина, що визначається роботою, яку здійснюють сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду, називається електрорушійною силою (ЕРС) \mathcal{E} , яка діє в колі,

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q_0}. \quad (4.9)$$

Ця робота виконується за рахунок енергії, що витрачається в джерелі струму, тому величину \mathcal{E} називають ще електрорушійною силою джерела струму, яке увімкнено в коло.

Стороння сила $\vec{F}_{\text{стор}}$ дорівнює

$$\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{E}_{\text{стор}} q_0,$$

де $E_{\text{стор}}$ — напруженість поля сторонніх сил.

Робота сторонніх сил на ділянці кола 1—2 дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}, \quad (4.10)$$

де $d\vec{l}$ — вектор, модуль якого дорівнює довжині dl малої ділянки кола

Електрорушійна сила, яка діє на ділянці кола 1—2, є лінійним інтегралом

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (4.11)$$

Електрорушійна сила, що діє в замкненому колі, дорівнює

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (4.12)$$

Отже, ЕРС у замкненому колі дорівнює циркуляції вектора напруженості поля сторонніх сил і є *характеристикою джерела сторонніх сил*.

$[\mathcal{E}]$ В (Вольт).

Напруга

Сила, що діє на заряд q_0 у кожній точці електричного кола, є результуючою двох сил — кулонівської та сторонньої

$$\vec{F} = q_0 (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{стор}}),$$

де $\vec{E}_{\text{кул}}$ — напруженість електричного поля кулонівських сил; $\vec{E}_{\text{стор}}$ — напруженість поля сторонніх сил.

Робота, яку здійснює ця сила при переміщенні заряду q_0 на ділянці кола 1—2, є

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

З урахуванням виразів (1.15) та (4.11) маємо

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{l} + q_0 \mathcal{E}_{12}. \quad (4.13)$$

Для замкненого кола робота електростатичних сил дорівнює нулю ($\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$), тому в цьому випадку $A_{12} = q_0 \mathcal{E}_{12}$.

L

Падінням напруги, або просто *напругою* U на даній ділянці 1—2 кола називається фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі,

що її здійснюють електростатичні та сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду. Таким чином, згідно з (4.13)

$$U_{12} = \int_1^2 \mathcal{E}_{12} \cdot dl. \quad (4.14)$$

Ділянка кола, на якій діють сторонні сили, — неоднорідна, а та, на якій діють кулонівські сили, — однорідна.

Напруга на кінцях однорідної ділянки кола збігається з різницею потенціалів на цих кінцях.

Закон Ома.
Опір провідника

Німецький фізик Георг Ом експериментально встановив, що *сила струму, який проходить по однорідному металічному провіднику (тобто провіднику, в якому не діють сторонні сили) пропорційна падінню напруги на кінцях провідника*

$$I = \sigma U, \text{ або } I = \frac{U}{R},$$

де σ — провідність провідника.

Величина, обернена провідності, — опір провідника R .

$$R = \frac{l}{\sigma S}, \text{ тоді } I = \frac{U}{R}.$$

$$[R] = 1 \text{ Ом (Сименс);}$$

$$[\sigma] = 1 \text{ Ом}^{-1}$$

Опір провідника залежить від його форми, розмірів і властивостей матеріалу, з якого він виготовлений, і дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ — питомий опір; l — довжина провідника; S — площа його поперечного перерізу.

$$[\rho] = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Питома електрична провідність (електропровідність) провідника — величина, обернена його питомому опору,

$$\frac{1}{\rho}.$$

$$[\frac{1}{\rho}] = \text{См/м}.$$

Залежність питомого опору провідника від температури T за не дуже низьких температур лінійна:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha T).$$

За низьких температур (у криогенній області) спостерігається відхилення від лінійної залежності.

Рис. 4.4, а ілюструє залежність від T для ідеально чистих металів, а рис. 4.4, б — для реальних металів.

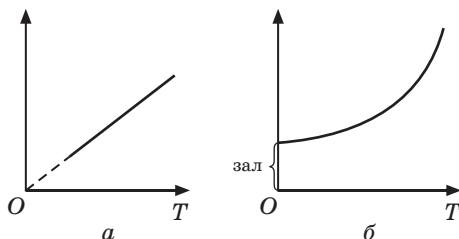


Рис. 4.4

У реальних металів, якщо $T \rightarrow 0$, спостерігається залишковий опір, величина якого залежить від чистоти матеріалу та наявності механічних напружень у зразку.

Надпровідність

Надпровідність — явище, яке полягає в тому, що поблизу температури абсолютного нуля опір провідника за деякої, характерної для конкретної речовини температури (критичної), стрибком зменшується до нуля (рис. 4.5), тобто метал стає абсолютним провідником.

Якщо $T < T_k$, $\frac{1}{R} = 0$.

Це явище вперше було виявлене в 1911 році голландським ученим Камерлінг-Оннесом у ртуті.

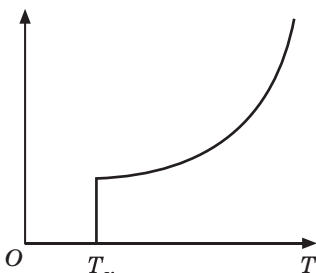


Рис. 4.5

Явище надпровідності пояснюється на основі квантової теорії.

Закон Ома в інтегральній формі для однорідної ділянки кола 1—2

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{U_{12}}{R_{12}}, \quad (4.15)$$

де U — напруга (різниця потенціалів) на цій ділянці кола R — електричний опір цієї ділянки.

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола, як це видно з (4.14), має вигляд

$$I = \frac{(U_{12})}{R_{12} + r} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R_{12} + r}, \quad (4.16)$$

Закон Ома для замкнутого кола

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (4.17)$$

де r — внутрішній опір джерела сторонніх сил; R — опір зовнішнього кола; \mathcal{E} — ЕРС сторонніх сил.

Різниця потенціалів на клеммах джерела ЕРС дорівнює напрузі на зовнішній ділянці кола

$$I R_{\text{вн}} = \mathcal{E} - I r_{\text{вн}}$$

Якщо коло розімкнене ($I = 0$), різниця потенціалів на клеммах джерела дорівнює його ЕРС

$$U_{12} = \mathcal{E}$$

Правило знаків для ЕРС джерел електричної енергії, ввімкнених на ділянці 1—2: якщо всередині джерела струм іде від катода до анода, тобто напрямком напруженості поля сторонніх сил у джерелі збігається з напрямком струму на ділянці кола, то $\mathcal{E}_{12} > 0$, якщо струм всередині джерела йде від анода до катода, то $\mathcal{E}_{12} < 0$ (рис. 4.6, а, б).

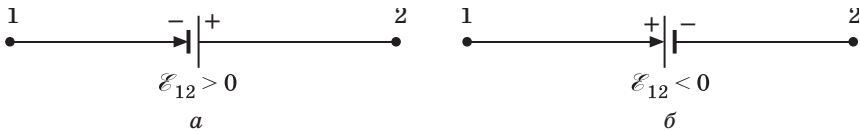


Рис. 4.6

4.4. Закон Ома в диференціальній формі

Уявно виділимо в околі будь-якої точки всередині ізотропного провідника елементарний циліндричний об'єм (рис. 4.7) з твірними, паралельними вектору густини струму \vec{j} в даній точці. Крізь поперечний переріз циліндра проходить струм $I = \int j dS$. Напруга, що прикладена до циліндра, дорівнює $\int E dl$, де E — напруженість поля в даному місці.

Опір циліндра дорівнює $R = \frac{dl}{S \sigma}$. Підставимо ці значення у формулу (3.15), отримаємо

$$\int j dS = \frac{dS}{dl} \int E dl$$

Носії заряду в кожній точці рухаються в напрямку вектора \vec{E} , тому напрямки \vec{j} та \vec{E} збігаються. (Зауважимо, що в анізотропних тілах напрямки векторів \vec{j} та \vec{E} можуть не збігатися.)

Таким чином можна записати

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (4.18)$$

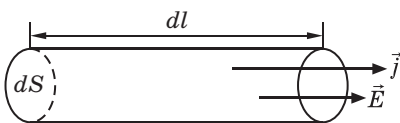


Рис. 4.7

Формула (4.18) виражає закон Ома для ділянки кола в диференціальній формі.

За наявності сторонніх сил узагальнений закон Ома в диференціальній (локальній) формі має вигляд

$$\vec{j} = (\vec{E} - \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (4.19)$$

Закон Ома не можна застосовувати для сильних полів, коли велика напруженість, а також у високовольтних полях.

4.5. Правила Кірхгофа та їх застосування для розгалуженого кола

Під *електричним колом* розуміють систему, яка складається із джерел струму й опорів (споживачів електричної енергії), з'єднаних між собою провідниками. Найпростіше електричне поле — це замкнений контур, утворений джерелом струму та резистором (рис. 4.8).

Якщо в одній точці збігаються більше двох провідників, то кажуть, що коло розгалужене і має вузли.

Розгалужені кола становлять мережу, утворену кількома замкненими електричними колами, які з'єднані між собою в окремих точках і мають спільні ділянки. *Вузлом* електричного кола називається точка розгалуженого кола, в якій сходяться три або більше провідників із струмами. Частина контуру між двома вузлами називається *ділянкою замкненого контуру*.

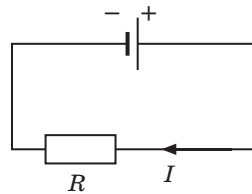


Рис. 4.8

Для розрахунку розгалуженого кола застосовують правила Кірхгофа.

Перше правило Кірхгофа: алгебраїчна сума сил струмів у вузлі дорівнює нулю.

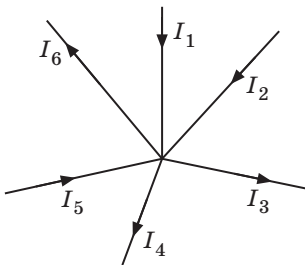


Рис. 4.9

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad (4.20)$$

де n — кількість струмів, які сходяться у вузлі.

Для вузла, в якому сходяться $n > 6$ струмів (рис. 4.9), рівняння (4.20) запишеться так:

$$I_1 + I_2 + I_5 + I_3 + I_4 + I_6 = 0.$$

Виконання рівності (4.20) у вузлах розгалуженого кола є необхідною умовою проходження постійних струмів у колі.

Перше правило Кірхгофа виражає закон збереження заряду в будь-якій точці кола постійного струму.

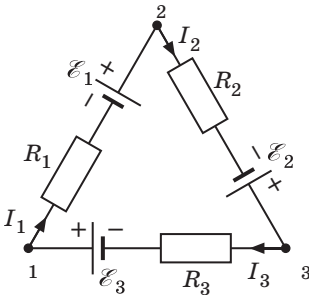
Друге правило Кірхгофа: у замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруги (добутків сил струмів на опори відповідних ділянок) дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, які діють у цьому контурі.

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i, \quad (4.21)$$

де n — кількість ділянок у контурі; m — кількість ЕРС, що діють у контурі.

Друге правило Кірхгофа є узагальненням закону Ома (4.17) на розгалужені електричні кола.

Розглянемо замкнений контур (рис. 4.10), у якому внутрішнім опором джерел струму можна знехтувати. Згідно з законом Ома для кожної ділянки кола маємо



$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \mathcal{E}_1; \\ I_2 R_2 &= \mathcal{E}_2; \\ I_3 R_3 &= \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

Додамо ці рівняння, отримаємо рівність

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3, \quad (4.22)$$

яке виражає друге правило Кірхгофа.

4.6. Робота й потужність електричного струму

Розглянемо довільну ділянку однорідного провідника з опором R і напругою U на його кінцях. Якщо по ділянці проходить струм I , то через поперечний переріз провідника за час dt переноситься електричний заряд

$$dq = Idt.$$

При цьому сили кулонівські та сторонні здійснюють роботу з перенесення заряду dq .

Елементарна робота, що виконується при перенесенні заряду dq , дорівнює

$$dA = Udq = IUdt.$$

Для постійного струму, сила якого I , за скінченний проміжок часу t робота струму на зовнішній ділянці кола становить

$$A = \int_0^t IU \, dt = IU t. \quad (4.23)$$

Згідно із законом Ома (4.15) можна записати

$$A = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (4.24)$$

Якщо $I = \text{const}$, тобто струм змінюється з часом, то робота струму за час t дорівнюватиме

$$A = \int_0^t I^2(t) R dt. \quad (4.25)$$

Завдяки енергії джерела струму загальна робота (сума робіт з перенесення заряду q по зовнішній і внутрішній частинах електричного кола), яку виконують кулонівські та сторонні сили разом, більша за роботу струму на зовнішній ділянці $A_{\text{заг}} = A$. Робота по замкненому колу при постійному струмі I за час t дорівнюватиме

$$A_{\text{заг}} = \mathcal{E} q = \mathcal{E} I t. \quad (4.26)$$

На підставі закону Ома для повного кола

$$A_{\text{заг}} = \frac{\mathcal{E}^2 t}{R + r}. \quad (4.27)$$

Потужністю електричного струму називається величина, що чисельно дорівнює роботі, яку виконує струм за одиницю часу,

$$P = \frac{A}{t}.$$

У зовнішній частині кола, згідно з (4.23) та (4.24)

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \quad (4.28)$$

або з урахуванням (4.17) корисна потужність споживача на опорі R дорівнюватиме

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}. \quad (4.29)$$

Загальна потужність джерела струму із (4.27)

$$P_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}. \quad (4.30)$$

Відношення корисної потужності до загальної потужності джерела визначає *коефіцієнт корисної дії* джерела струму.

$$\frac{P}{P_{\text{дж}}} = \frac{R}{R + r}. \quad (4.31)$$

Із формули (4.31) випливає, що ККД буде тим більший, чим більший опір R порівняно з опором джерела r . У зв'язку з цим опір джерела намагаються зробити якомога меншим.

Корисна потужність, як це видно з формули (4.29), залежить від опору R зовнішньої частини кола. Вона має максимальне значення у разі короткого замикання. Але в цьому випадку вся потужність виділяється в самому джерелі й виявляється зовсім марною. При збільшенні R загальна потужність зменшується й прямує до нуля при $R \rightarrow \infty$.

Знайдемо співвідношення між R та r , за якого корисна потужність буде максимальною.

Для цього дослідимо на максимум функцію $P(R)$, задану рівнянням (4.29). З умови максимуму $dP/dR = 0$ отримаємо

$$(R - r)^2 - 2R(R - r) = 0,$$

$$\text{або } 1 - \frac{2R}{R + r} = 0.$$

Звідси знаходимо, що корисна потужність P має максимум при $R = r$. Тобто оптимальний опір навантаження джерела струму дорівнює внутрішньому опорів цього джерела.

За цієї умови

$$P_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r^2}, \quad P_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{E}^2}{2r}, \quad \text{а} \quad \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{дж}}} = \frac{1}{2},$$

тобто при такому режимі роботи джерела струму половина загальної потужності буде корисною.

$$[A] = 1 \text{ Дж} = 1 \text{ А} \cdot \text{В} \cdot \text{с};$$

$$[P] = 1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ А} \cdot \text{В}.$$

4.7. Теплова дія електричного струму. Закон Джоуля — Ленца

Якщо струм проходить по нерухомому провіднику, останній нагрівається; тобто частина роботи струму перетворюється у внутрішню енергію провідника. Виділення теплоти в провіднику можна пояснити так. Носії заряду під час руху стикаються один з одним і з частинками провідного середовища, зазнаючи дії сили опору. Енергія упорядкованого руху носіїв витрачається на роботу проти сили опору (вона розсіюється). Відомо, що носіями заряду в металах є електрони провідності, а іони розташовані у вузлах кристалічної ґратки. Коли електрони стикаються з іонами, відбувається перетворення енергії упорядкованого руху електронів на енергію хаотичного (неупорядкованого) руху іонів і електронів. Тобто енергія джерела струму передається електронам, а через них і кристалічній ґратці провідника у вигляді кінетичної енергії неупорядкованого руху (коливань) частинок. Ця енергія виділяється в провіднику у вигляді тепла.

Такого висновку дійшли англійський фізик Джеймс Джоуль (1818—1889) та російський фізик Емілій Ленц (1804—1865).

Закон Джоуля — Ленца формулюється так: *кількість теплоти, що виділяється у провіднику при проходженні по ньому постійного електричного струму, прямо пропорційна добуткові квадрата сили струму, опору провідника та часу проходження струму*

$$Q = I^2 R t. \quad (4.32)$$

Кількість теплоти, виділеної у провіднику за час t , дорівнює роботі, виконаній струмом за цей самий час. Згідно з (4.23) та (4.24)

$$Q = \frac{U^2}{R} t, \text{ або } Q = I U t.$$

Якщо струм з часом змінюється, то згідно з (4.25) маємо

$$Q = I^2 R dt. \quad (4.33)$$

<p>Закон Джоуля — Ленца у диференціальній формі</p>
--

Закон Джоуля — Ленца, записаний формулою (4.32), виражає сумарну (інтегральну) кількість теплоти, що виділяється в провіднику. Але можна визначити й кількість теплоти, що виділяється в окремих місцях провідника, якщо відомі локальні характеристики струму й електричного поля в провіднику. Для цього уявно виділимо всередині провідника елементарний об'єм dV у вигляді циліндра (див. рис. 4.7). За законом Джоуля —

Ленца в цьому об'ємі за час dt виділиться елементарна кількість теплоти

$$dQ = I^2 dR dt = j dS^2 \frac{dl}{dS} dt = j^2 dV dt, \quad (4.34)$$

де $dV = dS dl$ — елементарний об'єм; $dR = \frac{dl}{dS}$ — опір частини провідника обмеженої об'ємом dV .

Локальною характеристикою струму в провіднику є *питома потужність струму* w_Q , яка визначається як кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу

$$w_Q = \frac{dQ}{dV dt}.$$

З урахуванням (4.34) маємо

$$w_Q = j^2. \quad (4.35)$$

Скориставшись законом Ома в диференціальній формі (4.18) і співвідношенням $1/\rho = \sigma$, отримуємо закон Джоуля — Ленца в диференціальній (локальній) формі

$$w_Q = E^2 \sigma, \quad (4.36)$$

або

$$w_Q = \vec{j} \vec{E}. \quad (4.37)$$

Кількість теплоти, що виділяється у всьому провіднику за час t , дорівнює

$$Q = \int_0^t \int_V j^2 dV dt. \quad (4.38)$$

Якщо $\rho = \text{const}$, $j = \text{const}$, із (4.38) випливає формула (4.32) закону Джоуля — Ленца в інтегральній формі.

5 Електричний струм у металах, рідинах, газах і вакуумі

5.1. Природа носіїв струму в металах

Носіями струму в металах є електрони провідності або вільні електрони, які утворюються із валентних електронів атомів металів унаслідок колективізації їх при конденсації атомів у кристалічну фазу. Валентні електрони перестають належати окремим атомам. Вони узагальнюються (колективізуються) і належать одночасно всій кристалічній ґратці, у вузлах якої розміщені позитивні іони. Вільні електрони здійснюють хаотичний тепловий рух, а позитивні іони здійснюють теплові коливання (хаотичні) відносно положення рівноваги (вузлів кристалічної ґратки). Концентрація вільних електронів у одновалентному металі (на один атом припадає один вільний електрон) обчислюється як кількість атомів в одиниці об'єму.

Теорія електропровідності металів, створена німецьким фізиком Друде та вдосконалена нідерландським фізиком Лоренцем, ґрунтується на уявленнях про природу носіїв струму, та на результатах ряду класичних дослідів.

Дослід Рікке

Перший дослід з цього приводу був проведений у 1901 р. німецьким фізиком Рікке. Крізь три послідовно з'єднані (з добре відшліфованими основами) металеві циліндри (мідний, алюмінієвий, мідний) однакового радіуса протягом року пропускали електричний струм. Виявилося, що сумарний заряд, який пройшов крізь циліндри, досяг дуже великого значення ($3,5 \cdot 10^6$ Кл). Проте ніяких, навіть мікроскопічних слідів перенесення речовини не було зафіксовано. Це стало експериментальним підтвердженням того, що іони не беруть участі у створенні струму в металах, а перенесення заряду здійснюється частинками, які є спільними для всіх металів і не мають ознак речовини. Такими частинками могли бути відкриті Томсоном у 1897 р. *електрони*.

**Досліди
з визначення
знака носіїв**

Дослідами, що підтверджують електронний характер провідності металів, є досліди з визначення знака носіїв та величини їх питомого заряду (питомий заряд — відношення заряду носія до його маси).

Ідея подібних дослідів полягає в такому: металевий стрижень (провідник) рухається поступально зі швидкістю v у напрямку власної осі. Якщо носії заряду можуть рухатися відносно кристалічної ґратки, то при раптовому гальмуванні провідника ці частинки мають рухатися за інерцією, в результаті буде перенесений деякий заряд, а отже, з'явиться імпульс струму. За напрямком струму можна визначити знак носіїв заряду, а якщо відомі розміри та опір провідника, можна визначити й питомий заряд носіїв.

Існування інерційного руху носіїв заряду в металевому провіднику було підтверджено експериментально в 1913 р. російськими фізиками Л. І. Мандельштамом і М. Д. Папалексі. У своєму досліді вони використовували котушку з намотаним тонким дротом. Кінці дроту були з'єднані з телефонною трубкою. При швидких крутильних коливаннях котушки навколо її геометричної осі в колі з'являвся змінний струм, який спричиняв потріскування в телефоні. Але в цьому досліді неможливо було визначити напрямок струму і, відповідно, знак заряду його носіїв.

Досліди були вдосконалені американським фізиком Р. Толменом і шотландським фізиком Б. Стюартом. Вони замінили телефон чутливим балістичним гальванометром, а крутильні коливання — швидким обертанням котушки з великою кількістю витків тонкого дроту. Використовували дріт мідний, алюмінієвий і срібний. Довжина дроту дорівнювала 500 м, швидкість обертання котушки 300 м/с. Коли котушка рівномірно оберталася, стрілка гальванометра не відхилялася. Коли ж котушка раптово гальмувалася, спостерігалися відхилення стрілки гальванометра. Напрямок відхилення стрілки вказував на те, що струм у металах обумовлений рухом негативно заряджених частинок. Виявилось, що питомий заряд приблизно однаковий для всіх досліджуваних металів, та практично збігався з питомим зарядом електрона $\frac{e}{m}$ $1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

**Досліди
Кеттерінга
і Скотта**

У 1944 р. Кеттерінг і Скотт досліджували природу електричного струму в провідниках й дійшли висновку, що при зміні електричного струму в котушці відбувається зміна її моменту імпульсу.

Котушку було підвішено на пружній нитці, яка збігалася з геометричною віссю котушки. Ця котушка здійснювала крутильні коливання відносно своєї осі: $a \sin t$.

Витками котушки пропускали постійний струм. Відносно осі котушки електрони набували моменту імпульсу. Зміна величини сили струму зумовлювала зміну моменту імпульсу електронів. Оскільки система «кристалічна ґратка — електрони» замкнена, зміна моменту імпульсу електронів дорівнювала зміні моменту імпульсу ґратки, взятому з протилежним знаком. Виміряне цим методом середнє значення питомого заряду електрона відрізнялося від нині прийнятого лише на 0,2 %.

Таким чином, було остаточно доведено, що носіями електричного струму в металах є *вільні електрони*, а струм у металах — це *упорядкований рух електронів*.

5.2. Основні положення класичної електронної теорії провідності металів

В основу класичної електронної теорії провідності металів покладено такі положення.

1. Метал — це система *позитивних іонів*, які утворюють кристалічну ґратку і здійснюють теплові коливання відносно її вузлів та електронів, які вільно рухаються між іонами, утворюючи електронний газ; тобто кристалічна ґратка іонів занурена в газ електронів.

2. Електронний газ вважається ідеальним, тобто таким, у якому електрони не взаємодіють між собою на відстані. В металі вони взаємодіють лише з іонами ґратки.

3. Електронний газ підлягає статистиці Максвелла — Больцмана і всім законам ідеального газу та закону рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи. Середня кінетична енергія, що припадає на одну ступень свободи

$$\overline{E}_{\text{кін}} = \frac{1}{2}kT.$$

Середня кінетична енергія теплового руху, що припадає на один електрон,

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{3}{2}kT. \quad (5.1)$$

Рухаючись хаотично, електрони стикаються з іонами ґратки, які здійснюють теплові коливання відносно вузлів ґратки. Середня довжина вільного пробігу електрона приблизно дорівнює

відстані між вузлами ґратки, тобто $l \sim 10^{10}$ м, а середня швидкість обчислена за законами кінетичної теорії газів при $T = 273$ К $v \sim 10^5$ м/с.

4. У відсутності електричного поля внаслідок хаотичності руху електронів у металі немає домінуючого напрямку переміщення зарядів. За наявності електричного поля всередині металу на тепловий хаотичний рух електронів накладається упорядкований рух — дрейф електронів у напрямку, протилежному до напрямку поля. Середню швидкість u упорядкованого руху електронів можна оцінити із формули (4.1) $j = n_0 e u$.

За допустимої технічними нормами густини струму для мідних провідників $j \sim 10^7$ А/м², концентрації носіїв струму $n_0 = 10^{29}$ м⁻³, середня швидкість дрейфу u дорівнює

$$u = \frac{j}{en_0} = 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Середня швидкість упорядкованого руху електронів u значно менша за швидкість їх теплового руху, тобто

$$u \ll v.$$

5. Вважається, що електрон набуває енергії упорядкованого руху під дією зовнішнього поля тільки на шляху свого вільного пробігу. Зіткнення електрона з іонами непружне. Електрон повністю передає свою енергію іону й повністю втрачає швидкість упорядкованого руху. Внаслідок цього температура ґратки збільшується, метал нагрівається і виділяється джоулева теплота.

На підставі цих положень можна теоретично обґрунтувати основні закони постійного струму, встановлені експериментально.

5.3. Закон Ома

Зовнішнє електричне поле \vec{E} викликає появу упорядкованого руху електронів (дрейфу) внаслідок дії на кожен з них сталої сили $\vec{F} = e\vec{E}$. Ця сила надає електрону прискорення $\vec{a} = e\vec{E}/m$, з яким він рухається до зіткнення з іоном ґратки. У зв'язку з тим, що маса електрона надто мала порівняно з масою іона, вважається, що при кожному зіткненні електрон цілком втрачає упорядковану компоненту руху. Тобто набута електроном до кінця вільного пробігу максимальна швидкість

$$u_{\max} = a t = \frac{eE}{m} t$$

при зіткненні з іоном зникає до нуля й електрон починає рух знову. Середня швидкість між двома зіткненнями, тобто середня швидкість дрейфу електрона дорівнюватиме

$$u = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{eE}{2m} t .$$

Класична теорія провідності металів не враховує розподілу електронів за швидкостями, вважаючи, що

$$t = \frac{l}{u - v} ,$$

де l — середня довжина вільного пробігу електрона; $u - v$ — середня швидкість руху електронів відносно кристалічної ґратки провідника (u — швидкість дрейфу; v — середня швидкість теплового руху електронів).

Як було показано раніше, $u = v + \bar{u}$, і максимальна швидкість дрейфу

$$\bar{u}_{\max} = \frac{e\bar{E} l}{m v} , \quad (5.2)$$

а середня швидкість дрейфу

$$u = \frac{eE l}{2m v} . \quad (5.3)$$

Напрявлений дрейф електронів провідності під дією зовнішнього електричного поля зумовлює у провіднику струм, густина якого

$$\vec{j} = n_0 e \bar{u} , \quad (5.4)$$

де n_0 — концентрація електронів провідності.

Підставимо в (5.4) значення u із (5.3) одержимо

$$\vec{j} = \frac{n_0 e^2 l}{2m v} \bar{E} . \quad (5.5)$$

Це співвідношення збігається з законом Ома в диференціальній формі $\vec{j} = \frac{\bar{E}}{n_0 e} \sigma$ і дає теоретичний вираз питомої електропровідності металів $\sigma = \frac{n_0 e^2 l}{2m v}$. (5.6)

Із (5.6) дістаємося висновку, що електропровідність тим більша, чим більша концентрація електронів провідності n_0 та довжина вільного пробігу електронів l .

**Рухливість
частинки**

Замість часу вільного пробігу t часто користуються іншою, пов'язаною з ним, величиною, яка називається *рухливістю*.

Рухливістю частинки називається величина дрейфової швидкості, якої набуває частинка під дією постійної сили, що дорівнює одиниці, або під дією постійного електричного поля (якщо частинка заряджена), напруженість якого теж дорівнює одиниці. У такому разі дрейфова швидкість визначається

$$\vec{u} = B\vec{F} - b\vec{E},$$

де B — рухливість відносно сили; b — рухливість відносно напруженості поля, $b = eB$.

Тоді електропровідність дорівнюватиме

$$n_0 e^2 B - n_0 e b.$$

5.4. Закон Джоуля — Ленца

Розглянемо перетворення енергії, яке відбувається при зіткненні електронів провідності з кристалічною ґраткою металу. Якщо припустити, що взаємодія електронів з іонами абсолютно не пружна, то в кінці вільного пробігу кожний з електронів провідності втрачає швидкість упорядкованого руху (дрейфу) і повністю передає іонові кінетичну енергію цього руху, середнє значення якої дорівнює

$$W_k = \frac{m u_{\max}^2}{2}.$$

З урахуванням (5.2) для u_{\max} маємо

$$W_k = \frac{e^2 l^2}{2m v^2} E^2. \quad (5.7)$$

За одиницю часу електрон у середньому зазнає z зіткнень з іонами

$$z = \frac{v}{l}. \quad (5.8)$$

В одиниці об'єму провідника за одиницю часу n_0 електронів провідності зазнають $n_0 z$ зіткнень і передають іонній ґратці енергію

$$w = n_0 z W_k. \quad (5.9)$$

Ця енергія перетворюється на енергію теплових коливань іонів металу, тобто витрачається на нагрівання провідника.

Підставляючи у формулу (5.9) вирази для z із рівності (5.8) та для середньої кінетичної енергії з (5.7), визначимо енергію, яка перетворюється в теплоту в одиниці об'єму провідника за одиницю часу

$$w = \frac{n_0 e^2}{2m} \frac{l}{v} E^2. \quad (5.10)$$

Величина w називається *питомою тепловою потужністю струму*. Коефіцієнт пропорційності між w та E^2 згідно з (5.6) є питомою електропровідністю металу.

Таким чином, вираз (5.10) теоретично обґрунтовує закон Джоуля — Ленца в диференціальній формі $w = E^2$.

5.5. Закон Відемана — Франца

Теплопровідність металів, як і їх електропровідність, здійснюється вільними електронами. Тому коефіцієнт теплопровідності κ й питома електропровідність σ мають бути пов'язані між собою.

Німецькі фізики Відеман і Франц ще задовго до створення класичної електронної теорії металів, у 1853 р., експериментально встановили закон, який стверджує: *для всіх металів відношення коефіцієнта теплопровідності κ до питомої електропровідності σ при сталій температурі однакове й лінійно збільшується прямо пропорційно термодинамічній температурі T*

$$\frac{\kappa}{\sigma} = T, \quad (5.11)$$

де T — стала, що не залежить від природи металу.

Наприклад, при кімнатній температурі це відношення дорівнює для алюмінію $5,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Дж Ом}}{\text{с К}}$, для міді — $6,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Дж Ом}}{\text{с К}}$, а для свинцю — $7,0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Дж Ом}}{\text{с К}}$.

Оскільки електронний газ у металі має властивості одноатомного ідеального газу, то для коефіцієнта теплопровідності можна застосувати співвідношення кінетичної теорії газів

$$\kappa = \frac{1}{3} c_V v l.$$

Питома теплоємність одноатомного ідеального газу $c_V = \frac{3R}{2M}$,
 а густина $\frac{m}{V}$, тоді

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{3}{2} \frac{R}{M} \frac{m}{V} v \quad l$$

або

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{R}{N_A} \frac{N}{V} v \quad l = \frac{1}{2} k n_0 v \quad l .$$

Отже, з урахуванням (5.6) відношення κ / дорівнюватиме

$$\frac{\kappa}{v} = \frac{1}{2} \frac{k n_0}{n_0 e^2} \frac{v \quad l}{l} = \frac{2m}{e^2} \frac{v}{2} .$$

Як уже згадувалося, середня кінетична енергія теплового руху,
 що припадає на один електрон,

$$\frac{m}{2} \frac{v^2}{2} = \frac{3}{2} k T . \quad (5.12)$$

Тоді відношення

$$\frac{\kappa}{v} = \frac{2k}{e^2} \frac{3}{2} k T ,$$

або

$$\frac{\kappa}{v} = 3 \frac{k}{e} T . \quad (5.13)$$

Співвідношення (5.13) виражає закон Відемана — Франца, де
 коефіцієнт κ з (5.11) визначається співвідношенням

$$3 \frac{k}{e} T . \quad (5.14)$$

Обчислене за цим виразом $2,23 \cdot 10^8 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл К}}^2$. При $T = 300 \text{ К}$
 для відношення $\frac{\kappa}{v}$ отримане значення $6,7 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж Ом}}{\text{с К}}$, яке добре
 узгоджується з результатами дослідів.

Проте, як виявилось пізніше, це узгодження теоретичного зна-
 чення з дослідним випадкове. Лоренц застосував до електронного
 газу статистику Максвелла — Больцмана, і тим самим врахував
 розподіл електронів за швидкостями. Він отримав $2 \frac{k}{e} T$, що
 призвело до різкого розходження теорії з дослідом.

Таким чином, класична теорія електропровідності металів пояснила закони Ома та Джоуля — Ленца. Вона також дала якісне розуміння закону Відемана — Франца.

5.6. Труднощі класичної теорії електропровідності

Класична теорія електропровідності металів крім розглянутих протиріч у законі Відемана — Франца зіткнулася ще з низкою труднощів при поясненні результатів деяких дослідів. Розглянемо кілька з них.

Температурна залежність опору

Експериментально встановлено, що в широкому інтервалі температур питомий опір (а як наслідок і опір R) $\sim T$. Тоді питома електропровідність $1/\rho \sim 1/T$.

Оскільки концентрація електронів n_0 та середня довжина вільного пробігу електрона l від температури не залежать, а середня швидкість хаотичного руху вільних електронів $v \sim \sqrt{T}$, то із формули питомої електропровідності (5.6) випливає, що $1/\rho \sim 1/\sqrt{T}$, тоді $\sim \sqrt{T}$. Отже, класична електронна теорія не пояснила експериментально встановленої температурної залежності опору в металі.

Оцінка середньої довжини вільного пробігу електронів у металах

При оцінюванні довжини вільного пробігу електронів у металах класична теорія наштовхується на великі труднощі. Електропровідність металевого провідника та концентрацію n_0 електронів провідності можна експериментально точно визначити. Тоді за формулою (5.6) можна обчислити середню довжину вільного пробігу електронів l . Виявляється, що l у сотні разів більша за міжвузлові відстані. Інакше кажучи, щоб за формулою (5.6) одержати l , яке б збігалось з дослідними значеннями, слід прийняти середню довжину вільного пробігу електронів l значно більшою за параметр кристалічної ґратки. Така «прозорість» металів для електронів провідності виявилася одним з найважливіших заперечень теорії Друде — Лоренца.

Теплоємність металів

Згідно з класичною теорією, теплоємність металу складається з теплоємності його іонної ґратки та теплоємності електронного газу. У зв'язку з цим молярна теплоємність металу має бути значно більшою, ніж молярна теплоємність діелектриків, у яких немає вільних електронів. У відповідності до закону Дюлонга та Пті теплоємність будь-якого одноатомного кристала за досить високих температур дорівнює $3R$. З урахуванням теплоємності електронного

газу, яка дорівнює $\frac{3}{2}R$, повна теплоємність металу має бути у 1,5 рази більшою за молярну теплоємність діелектрика. Проте дослід показує, що вона дорівнює $3R$. Тобто для металів, як і для діелектриків, виконується закон Дюлонга та Пті. Таким чином, наявність електронів провідності практично не впливає на теплоємність, що не пояснюється класичною теорією теплоємності.

Розбіжності теорії з експериментом можна пояснити тим, що рух електронів у металах підпорядковується законам не класичної механіки, як вважає класична теорія, а квантової. Тобто поведінку електронів провідності слід описувати не статистикою Максвелла — Больцмана, а квантовою статистикою. Тому зрозуміти і пояснити труднощі елементарної класичної теорії електропровідності металів можна лише застосувавши для опису руху іонів і електронів закони квантової механіки.

5.7. Електричний струм у рідинах

Проходження струму крізь метали й електронні напівпровідники не супроводжується будь-якими хімічними перетвореннями. Такі речовини називають *провідниками першого роду*. Речовини, в яких під час проходження електричного струму відбуваються хімічні перетворення, називаються *провідниками другого роду*, або *електролітами*. Ними є водяні розчини солей, кислот, лугів. Існують і тверді електроліти, наприклад іонні кристали.

Носіями струму в електролітах є іони, на які *диссоціюють* (розщеплюються) у розчині молекули розчиненої речовини.

Упорядкований рух іонів в електролітах виникає в результаті їх взаємодії з електричним полем, що утворюється електродами — провідниками, які підключені до полюсів джерела електричної енергії. Позитивний електрод називається *анодом*, негативний — *катодом*.

Утворення в електролітах носіїв заряду пояснюється тим, що молекули розчиненої речовини розпадаються в розчиннику на складові частини, які під час розчинення набувають різнойменних зарядів, тобто стають позитивними та негативними іонами. Позитивні іони (*катиони*) рухаються до катода, негативні іони (*аніони*) — до анода. Іони обох знаків є носіями не тільки зарядів, а й речовини (маси). Тому електричний струм в електролітах супроводжується *електролізом* — перенесенням і виділенням на електродах складових частин розчинених речовин або інших речовин, які можуть утворюватися в результаті вторинної реакції на електродах.

Закони Фарадея

Явище електролізу кількісно вивчав М. Фарадей. Він уперше зробив поділ продуктів електролізу на первинні та вторинні. У 1833 р. М. Фарадей експериментально встановив два закони електролізу, які названо його ім'ям.

Перший закон Фарадея: *маса m речовини, що виділяється на електроді, прямо пропорційна електричному заряду, який пройшов через електроліт*

$$m = kq = kIt, \quad (5.15)$$

де k — електрохімічний еквівалент речовини; I — сила постійного струму; t — час електролізу.

Якщо сила струму змінюється з часом, то

$$m = k \int_0^t I(t) dt.$$

Електрохімічний еквівалент k різний для різних речовин. Він чисельно дорівнює масі речовини, що виділяється під час електролізу при проходженні крізь електроліт заряду $q = 1$ Кл.

$$[k] = 1 \text{ кг/Кл.}$$

Другий закон Фарадея: *електрохімічні еквіваленти елементів прямо пропорційні їх хімічним еквівалентам*

$$k = C, \quad (5.16)$$

де k — хімічний еквівалент речовини; C — коефіцієнт пропорційності, який має однакове значення для всіх речовин.

Хімічним еквівалентом називають відношення атомної маси A до валентності речовини z : A/z . Величина, обернена сталій C , називається *числом Фарадея* і позначається

$$F = \frac{1}{C}.$$

Рівняння (5.16) перепишеться так:

$$k = \frac{1}{F} \frac{A}{z}. \quad (5.17)$$

Об'єднавши формули (5.15) і (5.17), отримаємо об'єднаний закон Фарадея

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{z} q, \quad (5.18)$$

або

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{z} It. \quad (5.19)$$

Число Фарадея F чисельно дорівнює електричному заряду q , при проходженні якого крізь електроліт на електроді виділяється один моль речовини.

Дослідним шляхом встановлено, що $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

Із законів Фарадея випливає, що електричні заряди всіх іонів складаються із цілого числа елементарних, далі неподільних зарядів. Величина q заряду будь-якого іона (або електрона) дорівнює

$$q = \frac{zF}{N_A} ze,$$

де $e = \frac{F}{N_A}$ — елементарний заряд.

**Електро-
провідність
електролітів**

У разі відсутності електричного поля іони в електроліті перебувають у хаотичному тепловому русі. Переважного напрямку перенесення іонів немає, як наслідок — немає і струму. Після включення електричного поля на хаотичний тепловий рух іонів накладається упорядкований рух позитивних іонів у напрямку поля (по напруженості поля \vec{E}), негативних — у протилежному напрямку. Зауважимо, що рухаються не просто іони, а *сольвати* (утворення іона й утримуваної його силовою оболонкою з молекул розчинника), тобто рухаються цілі комплекси.

Оскільки розміри іонів (а тим більше сольватів) значно перевищують розміри електронів, а їх рух здійснюється у в'язкому середовищі розчину, то сила $\vec{F} = q \vec{E}$ не викликає прискорення, а врівноважується силою в'язкого опору розчину $\vec{F} = k\vec{u}$. Отже,

$$q \vec{E} = k\vec{u},$$

де q — заряд іону; k — коефіцієнт пропорційності між швидкістю іона та силою опору середовища.

Таким чином, під дією електричного поля іон рухатиметься з постійною швидкістю u

$$\vec{u} = \frac{q}{k} \vec{E} = b\vec{E}, \quad (5.20)$$

де $b = q/k$ називається *рухливістю іона*.

Іони різних знаків можуть мати як різні заряди, так і різні коефіцієнти k , тому й рухливості іонів різних знаків різні.

Рух іонів створює електричний струм, густина якого у будь-якому перерізі, перпендикулярному до напрямку руху іонів, дорівнює сумі густин струмів позитивних і негативних іонів

$$\vec{j} = \vec{j}^+ + \vec{j}^-. \quad (5.21)$$

З урахуванням (4.1) та (5.20) маємо

$$\vec{j} = n_0 q \vec{u} - n_0 q b \vec{E}, \text{ а } \vec{j} = n_0 q \vec{u} - n_0 q b \vec{E},$$

де q_i, n_{0i}, b_i — заряди, концентрації та рухливості відповідних іонів, $i = (+), (-)$.

У зв'язку з тим, що в електролітах об'ємних зарядів немає, то

$$n_0 q - n_0 q = 0.$$

Крім того

$$q = ez \frac{F}{N_A} z.$$

Тоді густина струму в електроліті

$$\vec{j} = \frac{F}{N_A} z n_0 (b_+ - b_-) \vec{E} = \vec{E}, \quad (5.22)$$

Це і є закон Ома для електролітів.

Питома електропровідність електроліту дорівнює

$$\frac{Fz n_0 (b_+ - b_-)}{N_A}.$$

Питомий опір електроліту дорівнюватиме

$$\frac{N_A}{Fz n_0 (b_+ - b_-)}.$$

5.8. Електричний струм у газах

Іонізація та рекомбінація

Гази на відміну від металів і електролітів складаються із нейтральних атомів або молекул, і тому вони є діелектриками й у звичайних умовах не проводять електричний струм. Для того щоб газ почав проводити струм (виникла електропровідність), він має бути *іонізованим*.

Іонізацією атома (молекули) називається процес відокремлення одного або декількох електронів від молекули (атома) і перетворення її на позитивний іон.

Зворотний до іонізації процес, коли електрони, приєднуючись до позитивних іонів, утворюючи нейтральну молекулу чи атом, називається *рекомбінацією*. Рекомбінація іонів та електронів супроводжується виділенням енергії найчастіше у вигляді світлового випромінювання. Тому процеси, що відбуваються під час рекомбінації, характерні світінням газу.

Газові розряди

Процес проходження струму крізь газ називається *газовим розрядом*. Носіями струму (зарядів) у газах є електрони та іони.

Несамостійний газовий розряд виникає тоді, коли процес іонізації (появи носіїв струму) ініціюється та підтримується дією зовнішніх причин (наприклад, утворення іонів у полум'ї, опромінювання газу ультрафіолетовим, рентгенівським або -випромінюванням, нагрівання газу до дуже високих температур і таке інше).

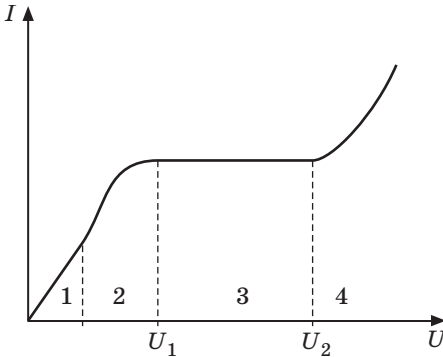


Рис. 5.1

На рис. 5.1 показано вольтамперну характеристику (залежність сили струму I від напруги між електродами U) при несамостійному розряді. Лінійна залежність між I та U виконується лише за невеликих напруг. У цій області (область 1) виконується закон

Ома. Якщо в газі утворюються електрони й однозарядні іони, то за невеликих напруг густина струму \vec{j} в розряді пропорційна напруженості поля \vec{E}

$$\vec{j} = en_0(b_+ + b_-) \vec{E},$$

де n_0 — кількість пар протилежно заряджених частинок в одиниці об'єму (концентрація); b_+ та b_- — рухливості позитивно та негативно заряджених частинок відповідно; e — абсолютне значення заряду електрона; E — напруженість електричного поля.

У разі подальшого збільшення напруги (область 2) закон Ома порушується, зростання сили струму уповільнюється.

В області 3 кривої, починаючи з певної напруги U_1 , сила струму лишається незмінною у разі збільшення напруги ($I_{\text{нас}} = \text{const}$). Струм $I_{\text{нас}}$ називають *струмом насичення*. Той факт, що при $U > U_1$ сила струму не змінюється, обумовлений тим, що за незмінної інтенсивності іонізації в сильних полях усі іони, які утворюються за одиницю часу, досягають електродів раніше, ніж певна кількість їх устигне рекомбінувати.

З підвищенням напруги $U > U_2$ спостерігається значне зростання сили струму (область 4), яке супроводжується тепловими

й світловими ефектами. Це різке зростання струму обумовлене ударною іонізацією. Потім настає пробій газу. При цьому число іонів лавиноподібно росте.

Самостійний газовий розряд — електричний розряд у газі, який продовжується й після того, як зовнішня причина іонізації припиняє діяти. Для існування такого розряду необхідно, щоб у газі відбувалося неперервне утворення нових пар протилежно заряджених частинок. Основним джерелом таких пар є *ударна іонізація*.

Ударна іонізація відбувається за умови, коли кінетична енергія заряджених частинок (електронів) W_k стає більшою ніж робота іонізації A частинок газу

$$W_k \geq A, \text{ або } \frac{W_k}{e} \geq \phi_i,$$

де ϕ_i — потенціал іонізації.

Кінетичну енергію електрон набуває в постійному електричному полі

$$W_k = eEl,$$

де l — середня довжина вільного пробігу електрона. Оскільки

$$E = \frac{U}{d},$$

де d — відстань між електродами, то кінетична енергія дорівнюватиме

$$W_k = e \frac{U}{d} l.$$

Умова ударної іонізації має вигляд

$$El \geq \frac{U}{d} l \quad (5.23)$$

Із нерівності (5.23) випливає, що досягти ударної іонізації частинок газу можна збільшенням напруженості електричного поля $E = U/d$ або збільшенням середньої довжини вільного пробігу електрона, тобто розрідженням газу.

Види самостійного розряду в газі

Самостійний розряд набуває різних форм у залежності від тиску газу, форми і взаємного розташування електродів, а також від параметрів зовнішнього кола. Різновидами самостійного розряду є тліючий, коронний, іскровий і дуговий.

1. *Тліючий розряд* — це розряд, у якому емісія електронів з катода здійснюється внаслідок бомбардування його позитивними іонами і фотонами, які утворюються в газі.

Тліючий розряд спостерігається в розрідженому газі (тиск $\sim 10^3$ Па і менше) та супроводжується *світінням стовпа газу*. Напряга на електродах становить кілька сотень вольт.

2. *Коронний розряд* являє собою слабкий струм крізь газ при атмосферному тиску, який виникає у разі ударної іонізації під дією неоднорідного електричного поля. Таке поле можна створити між двома електродами, якщо поверхня одного з них матиме значну кривизну. Коли напруженість електричного поля біля електрода з більшою кривизною досягає $3 \cdot 10^6$ В/м, навколо нього виникає світіння. Воно має вид корони, що оточує цей електрод.

3. *Іскровий розряд* — це електричний пробій газу при миттєвому лавиноподібному збільшенні числа іонів у ньому, що викликаний ударною іонізацією газу при високих напругах. Він супроводжується звуковими ефектами (тріск або грім). При іскровому розряді в газі виникають канали сильно іонізованого газу — *стримери*, якими розповсюджується іскровий розряд. Приклад іскрового розряду — *блискавка*.

4. *Дуговий розряд* — це струм великої густини крізь газ (порядку декількох сотень ампер на 1 мм^2) за низьких напруг (десятки вольт). Електроди при цьому нагріті до високих температур при атмосферному чи більшому за нього тиску.

Дуговий розряд підтримується *термоелектронною емісією*, що здійснюється з поверхні розігрітого катода та *термічною іонізацією* молекул газу.

Першим практичним застосуванням дугового розряду була електрична свічка Яблучкова як прообраз лампи розжарювання й дугових ламп. Високу температуру дуги використовують у дугових електричних печах, які відіграють важливу роль у сучасній електromеталургії. Дуговий розряд лежить в основі роботи газотронів, тиратронів та інших пристроїв.

Плазма

Плазма — речовина в іонізованому стані в цілому електрично нейтральна. Вона має однакові кількості позитивних і негативних зарядів.

Плазма — найпоширеніший стан речовини у природі. Сонце і зірки можна розглядати як гігантські згустки гарячої плазми. Зовнішня поверхня земної атмосфери вкрита оболонкою плазми — іоносферою. Своєрідними плазмовими утвореннями є і так звані

радіаційні пояси, що містяться за межами іоносфери в навколосемному просторі. Плазму спостерігають під час газових розрядів (блискавка, іскра, дуга тощо).

У залежності від ступеня іонізації розрізняють слабо іонізовану плазму, помірно іонізовану і повністю іонізовану.

Розрізняють низькотемпературну і високотемпературну плазми.

5.9. Електричний струм у вакуумі

Якщо надати електронам у металах енергію, яка перевищувала б роботу виходу, то частина електронів може піти з металу. Спостерігається явище електронної емісії. В залежності від того, яким способом електрони отримують енергію відрізняють термоелектронну, фотоелектронну, вторинну електронну та автоелектронну емісію.

Термоелектронна емісія

Термоелектронна емісія — процес виходу електронів з металу, нагрітого до високої температури.

Концентрація вільних електронів у металах достатньо висока, тому навіть за середніх температур внаслідок розподілу електронів за швидкостями (за енергіями) деякі електрони мають енергію, достатню для подолання потенційного бар'єра (виконання роботи виходу) на поверхні металу. Зі збільшенням температури кількість електронів, кінетична енергія теплового руху яких більша за роботу виходу, зростає. Явище термоелектронної емісії стає помітним.

Явище термоелектронної емісії відкрив у 1883 р. американський учений Т. Едісон. Дослідження закономірності термоелектронної емісії можна провести за допомогою вакуумної лампи з двома електродами — *вакуумного діода*. Один з електродів (катод) являє собою нитку з тугоплавкого металу (вольфрам, молібден тощо), яка розжарюється електричним струмом. Другий електрод — анод. Він найчастіше має форму циліндра, який оточує катод.

Якщо діод увімкнути в електричне коло, то в разі нагрівання катода та подачі на анод позитивної напруги (відносно катода) в анодному колі діода виникає електричний струм. При зміні полярності батареї струму в колі не буде, як би сильно не розжарювали катод. Це свідчить про те, що носіями заряду в вакуумі є електрони.

Залежність анодного струму I_a від анодної напруги U_a — вольт-амперна характеристика. При сталій температурі вона має нелінійний характер (рис. 5.2), тобто для вакуумного діода закон Ома не виконується.

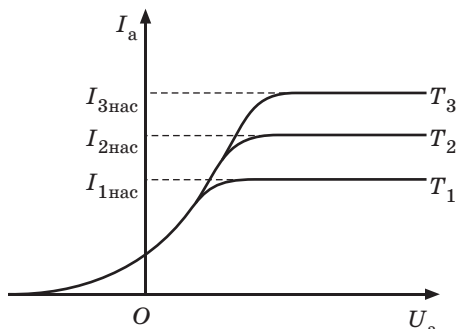


Рис. 5.2

Залежність термоелектронного струму від анодної напруги виражається «законом $3/2$ », законом Богуславського — Ленгмюра

$$I = BU^{3/2}, \quad (5.24)$$

де B — коефіцієнт, що залежить від форми та розмірів електродів, а також від їхньої взаємної орієнтації.

При збільшенні анодної напруги сила термоелектронного струму досягає деякого максимального значення $I_{нас}$, яке називають *струмом насичення*. Це означає, що майже всі електрони, що вилітають із катода, досягають анода, тому подальше збільшення напруги поля не може призвести до збільшення термоелектричного струму. Таким чином, густина струму насичення характеризує емісійну здатність матеріалу катода.

Густина струму насичення залежить тільки від роботи виходу A електрона з катода та температури катода T й описується *формулою Річардсона — Дешмана*, виведеною теоретично на підставі квантової статистики,

$$\bar{j}_{нас} = CT^2 e^{-A/kT}, \quad (5.25)$$

де C — константа, що не залежить від роду металу.

Явище термоелектронної емісії лежить в основі роботи двох-і триелектродних ламп та електронно-променевої трубки.

Контрольні запитання та завдання для самоконтролю

1. Що розуміють під електричним струмом?
2. Назвіть умови виникнення й існування електричного струму.
3. Що називається силою струму? Густиною струму? Дайте визначення одиницям їх вимірювання.
4. Що таке струм провідності? Конвекційний струм?
5. Яке співвідношення має назву «рівняння безперервності»?
6. Що таке сторонні сили? Яка їх природа?
7. У чому полягає фізичний зміст електрорушійної сили, що діє в колі? Напруги? Різниці потенціалів?
8. Чи може існувати струм, що йде від нижчого потенціалу до вищого?

9. Який зв'язок між опором і провідністю? Які одиниці їх вимірювання?
10. Запишіть закон Ома для ділянки кола.
11. Запишіть закон Ома для неоднорідної ділянки кола.
12. Запишіть закон Ома в диференціальному вигляді.
13. Запишіть закон Джоуля — Ленца в інтегральному та диференціальному вигляді.
14. Як формулюються правила Кірхгофа?
15. Які одиниці вимірюванні роботи й потужності електричного струму? Що таке кіловат-година?
16. Які основні ідеї теорії Друде — Лоренца?
17. Порівняйте порядок середніх швидкостей теплового й упорядкованого руху електронів у металах.
18. Чому тепловий рух електронів не може привести до виникнення електричного струму?
19. На підставі класичної теорії електропровідності металів виведіть диференціальну форму запису законів Ома та Джоуля — Ленца.
20. Як класична теорія електропровідності металів пояснює залежність опору провідників від температури?
21. У чому полягають труднощі елементарної класичної теорії електропровідності металів? Які границі її застосування?
22. Чому при підключенні до катода і анода великої напруги ($\sim 10^3$ В) анод дуже розжарюється і може розплавитися?
23. Чи можна змінити силу струму насичення вакуумного діода? Якщо так, то як?
24. Яким чином можна вирвати електрони із холодного катода? Яку назву має це явище?
25. Охарактеризуйте процес іонізації, рекомбінації.
26. Чим відрізняються самостійний і несамостійний газові розряди?
27. Чи може виникнути струм насичення при самостійному газовому розряді?
28. Охарактеризуйте типи самостійного газового розряду. В чому їхні особливості?
29. У чому полягає явище електролізу?
30. Сформулюйте перший закон Фарадея.
31. Від чого залежить та в яких одиницях вимірюється електрохімічний еквівалент?
32. Які величини пов'язує між собою другий закон Фарадея? Як він формулюється?

33. Який фізичний зміст числа Фарадея? Чому воно дорівнює?
 34. Який вигляд має закон Ома для електролітів?
 35. Як визначається питома електропровідність електроліту та від чого вона залежить?
 36. Наведіть приклади застосування електролізу в техніці.

Завдання для експрес-контролю

- У скільки разів алюмінієвий дріт має бути товщим за мідний, щоб мати однаковий з ним опір? ($\rho_{\text{ал}} 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом м}$, $\rho_{\text{міді}} 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом м}$)
- За який час струм, сила якого 5 А, перенесе заряд в 100 Кл?
- Як зміниться густина струму, якщо діаметр провідника зменшити в 5 разів?
- Яка густина струму в провіднику, якщо концентрація електронів провідності $n = 2,8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а середня швидкість напрямленого руху електронів $v = 0,93 \text{ мм/с}$.
- Чому дорівнює провідність речовини, якщо при напруженості поля $E = 2 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ у ньому виникає густина струму $j = 100 \text{ А/м}^2$?

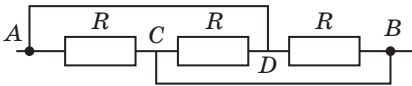


Рис. 5.3

6. Знайти опір схеми, якщо джерело струму підключено до точок А і В (рис. 5.3), а опором з'єднувальних провідників можна знехтувати.

- Два однакових джерела струму з ЕРС $\mathcal{E} = 1,2 \text{ В}$ і внутрішнім опором $r = 0,4 \text{ Ом}$ з'єднані, як показано на рис. 5.4. Знайти силу струму в колі та різницю потенціалів між точками 1 і 2.
- Два однакових джерела струму з ЕРС $\mathcal{E} = 1,2 \text{ В}$ і внутрішнім опором $r = 0,4 \text{ Ом}$ з'єднані, як показано на рис. 5.5. Знайти силу струму в колі та різницю потенціалів між точками 1 і 2.

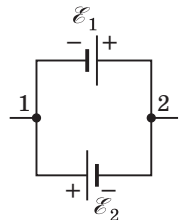


Рис. 5.4

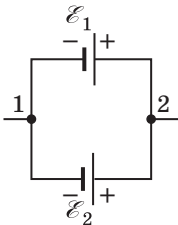


Рис. 5.5

- ЕРС батареї акумуляторів $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, внутрішній опір $r = 4 \text{ Ом}$. Чому дорівнює сила струму короткого замикання?
- Знайти опір схеми, якщо джерело струму підключено до точок А і В (рис. 5.6). Опори однакові і дорівнюють 10 Ом кожний.
- Знайти опір схеми, якщо джерело струму підключити до точок А і D (рис. 5.6). Опори однакові й дорівнюють 10 Ом кожний.

12. Внутрішній опір батареї напругою 12 В дорівнює 0,05 Ом. До батареї підключено провідник опором 0,1 Ом. Який струм проходить по колу?
13. Внутрішній опір батареї напругою 12 В дорівнює 0,2 Ом. До батареї підключено провідник опором 1 Ом. Яка потужність виділяється в провіднику?
14. Внутрішній опір батареї напругою 12 В дорівнює 0,2 Ом. До батареї підключено провідник опором 1 Ом. Яка потужність виділяється всередині батареї?
15. Концентрація електронів провідності в металі дорівнює $2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Визначити середню швидкість їх упорядкованого руху при густині струму 1 А/мм^2 .
16. Робота виходу електронів із металу дорівнює 2,5 еВ. Знайти швидкість електрона, що вилітає з металу, якщо він має енергію 10^{-18} Дж .
17. Струм насичення при несамоційному розряді дорівнює 9,6 пА. Знайти число пар іонів, що їх утворює за 1 с зовнішній іонізатор.
18. Знайдіть час роботи елемента, якщо при розрядженні струмом силою 0,4 А витрачено 10 мг цинку. Електрохімічний еквівалент цинку дорівнює 0,338 мг/Кл.

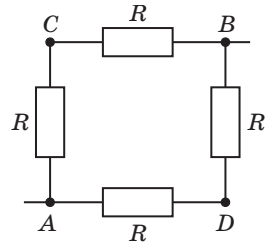


Рис. 5.6

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Паралельно розташовані квадратні пластини приєднані до джерела постійного струму з напругою 600 В. Знайти величину струму в колі, якщо одна з пластин зсуюється відносно іншої зі швидкістю 6 см/с. Сторони пластин дорівнюють 10 см, відстань між пластинами 1 мм.

Розв'язання

Величина струму залежить від зміни з часом електричного заряду, що міститься на пластинах

$$I = \frac{q}{t},$$

де q — зміна заряду за час t .

Під час переміщення однієї пластини відносно другої змінюється ємність конденсатора. У разі постійної різниці потенціалів зміна заряду пропорційна зміні ємності, тобто

$$q = U C = U \frac{0}{d} \frac{S}{t}.$$

Таким чином,

$$I = \frac{U}{d} \frac{0}{t} \frac{S}{t},$$

де $\frac{S}{t}$ — зміна з часом площини пластин, що перебувають одна під одною. Очевидно,

$$\frac{S}{t} = b v,$$

де b — сторона пластин; v — швидкість їх рівномірного руху.

$$I = \frac{U}{d} \frac{0}{t} b v = 3,18 \cdot 10^{-8} \text{ А}.$$

Задача 2

Коло складається з нескінченної кількості комірок (рис. 5.7). Знайдіть опір цього кола.

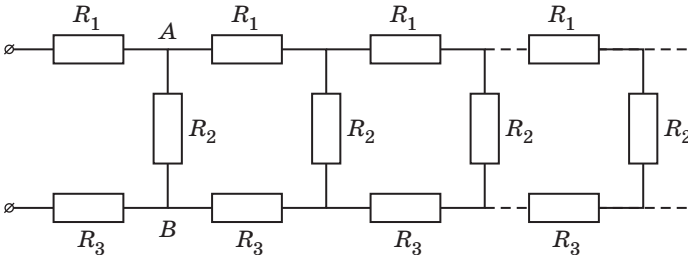


Рис. 5.7

Розв'язання

Це коло нескінченне, тому зменшення його на один елемент не впливатиме на опір частини кола, що залишилася. Тому все коло, що перебуває праворуч АВ, також має опір R_x . Еквівалентну схему наведено на рис. 5.8.

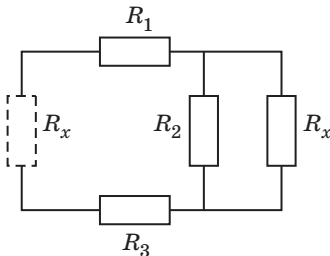


Рис. 5.8

Для цієї схеми

$$R_x = R_1 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x},$$

тоді $R_x^2 = (R_1 + R_3)R_x - (R_1 + R_3)R_2 = 0$. Звідси

$$R_x = \frac{R_1 + R_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2}{4} - R_2(R_1 + R_3)}.$$

Знак мінус перед коренем опустимо, тому що в цьому випадку опір не має фізичного смислу. Якщо $R_1 = R_2 = R_3 = R$, то

$$R_x = R(1 + \sqrt{3}).$$

Задача 3

Знайти заряд на конденсаторі, якщо $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$ (рис. 5.9).

Розв'язання

Оскільки постійний струм через конденсатор не проходить, то $I_0 = I_1 = I_2 = I_4$, $I_2 = I_3$.

Опори R_2 та R_3 з'єднані послідовно, їх сума

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 5R.$$

Опори R_{23} та R_4 з'єднані паралельно, їх сума

$$R_{234} = \frac{R_{23}R_4}{R_{23} + R_4} = \frac{20}{9}R.$$

Повний опір кола

$$R_0 = R_1 + R_{234} = R + \frac{20}{9}R = \frac{29}{9}R;$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{9U_0}{29R}; \quad I_2 = I_3 = I_4 R_4; \quad I_4 = \frac{5}{4}I_2; \quad I_2 = I_4 = I_2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{9}{4}I_2 = I_0;$$

$$\frac{9}{4}I_2 = \frac{9}{29} \frac{U_0}{R}; \quad I_2 = \frac{4}{29} \frac{U_0}{R}.$$

Напруга на конденсаторі

$$U_c = I_1 R_1 + I_2 R_2 = \frac{17}{29}U_0.$$

Заряд на конденсаторі

$$Q = C U_c = \frac{17}{29}U_0 C.$$

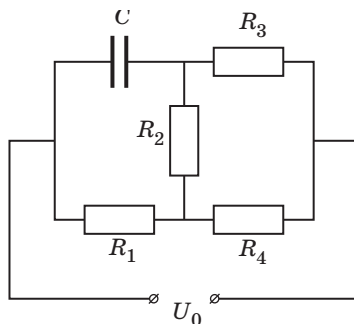


Рис. 5.9

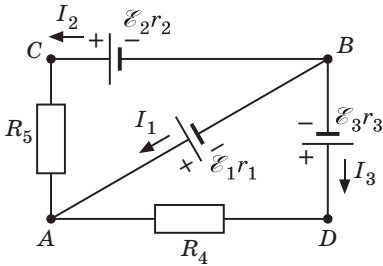


Рис. 5.10

Задача 4

Знайти силу струму, що проходить крізь елементи $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, якщо \mathcal{E}_1 2 В, r_1 0,5 Ом; \mathcal{E}_2 4 В, r_2 1 Ом; \mathcal{E}_3 1 В, r_3 0,5 Ом; R_4 0,5 Ом; R_5 1 Ом (рис. 5.10).

Розв'язання

Перший закон Кірхгофа виконується для вузлів електричного кола. У цій схемі вузлів два, це точки А і В.

Для вузла А

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (1)$$

Другий закон Кірхгофа виконується тільки в замкненому колі. Таких замкнених контурів три: $ACBA, ABDA, ACBDA$.

У замкненому колі $ACBA$

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - I_2(r_2 + R_5) - I_1 r_1 = 0. \quad (2)$$

У замкненому колі $ABDA$

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 - I_1 r_1 - I_3(r_3 + R_4) = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (1), (2) і (3), отримаємо

$$I_1 = \frac{8}{3} \text{ А}, \quad I_2 = \frac{1}{3} \text{ А}, \quad I_3 = \frac{7}{3} \text{ А}.$$

Задача 5

У провіднику опором $R = 10$ Ом за $t = 30$ с сила струму змінилася від нуля до максимального його значення. Знайти кількість теплоти, яка виділилася за цей час у провіднику, якщо швидкість зростання сили струму $k = 0,5$ А/с.

Розв'язання

Закон Джоуля — Ленца у вигляді

$$Q = I^2 R t$$

виконується для постійного струму. У разі зміни струму з часом його можна застосувати для малого інтервалу часу dt . Тоді

$$dQ = I^2 R dt.$$

За умов задачі сила струму зростає рівномірно, так що

$$I = kt;$$

$$dQ = k^2 t^2 R dt;$$

$$Q = \int_0^t k^2 t^2 R dt = \frac{k^2 R t^3}{3} = 22,5 \text{ кДж.}$$

Задача 6

Електричний чайник має дві обмотки. При вмиканні однієї з них вода закипає через 8 хв, а при вмиканні другої — через 24 хв. Через скільки хвилин закипить вода, якщо обидві обмотки ввімкнуті послідовно? Паралельно?

Розв'язання

Оскільки напруга в мережі U стала, то

$$\frac{U^2}{r_1} t_1 = \frac{U^2}{r_2} t_2 = \frac{U^2}{r_1 r_2} t_{\text{послід}} = \frac{U^2}{r_1 r_2} t_{\text{парал}},$$

де r_1 і r_2 — опори обмоток.

З цих рівнянь випливає

$$t_{\text{послід}} = t_1 t_2 / 32 \text{ хв}; \quad t_{\text{парал}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 6 \text{ хв.}$$

Задача 7

По залізного провіднику, діаметр перерізу якого дорівнює 0,6 мм, проходить струм, сила якого дорівнює 16 А. Знайти середню швидкість v напрямленого руху електронів, вважаючи, що концентрація n вільних електронів дорівнює концентрації n атомів провідника.

Розв'язання

Середня швидкість напрямленого (упорядкованого) руху електронів визначається за формулою

$$v = \frac{l}{t},$$

де t — час, за який всі вільні електрони, що перебувають на відріжку провідника між перерізами I і II, пройшовши крізь переріз II (рис. 5.11), перенесуть заряд $q = eN$ та утворять струм, сила якого

$$I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t},$$

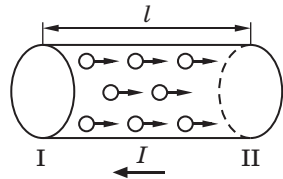


Рис. 5.11

де e — елементарний заряд; N — кількість електронів на відрізка провідника.

$$N = nV = nlS,$$

де S — площа перерізу.

Згідно з умовою задачі $n = n$, тобто

$$n = n \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M} \frac{M}{V_m} = \frac{N_A}{M}.$$

$$I = \frac{N_A l S e}{M t},$$

звідки

$$l = \frac{IMt}{N_A Se},$$

тоді

$$v = \frac{IM}{N_A Se} = 4,2 \text{ мм/с.}$$

Задача 8

Знайти заряд, що проходить крізь розчин нітрату срібла за 20 с, якщо за цей час сила струму зростає від 1 до 4 А. Скільки срібла при цьому виділяється на катоді?

Розв'язання

Закон зміни струму $I = I_0 + kt$, де $k = \frac{I - I_0}{t}$; заряд

$$q = \int_0^{t_2} I dt = \int_0^{t_2} (I_0 + kt) dt = I_0 t_2 + \frac{(I - I_0)}{2} t_2$$

$$I_0 t_2 + \frac{(I - I_0)}{2} t_2 = 50 \text{ Кл.}$$

Маса срібла, що виділилося на катоді, $m = \frac{Mq}{F n} = 56 \text{ мг.}$

Задача 9

Між обкладками конденсатора площею 250 см² кожна перебуває водень об'ємом 375 см³. Концентрація іонів у газі дорівнює $5,3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$. Яку напругу слід прикласти до обкладок, щоб одержати струм силою 2 мкА? Рухомості іонів: позитивних

$$b = 5,4 \frac{\text{см}^2}{\text{В с}}, \text{ негативних } b = 7,4 \frac{\text{см}^2}{\text{В с}}.$$

Розв'язання

Напруга на обкладках конденсатора $U = E d$.

Напруженість знайдемо з виразу густини струму j

$$j = q n_0 (b - b_0) E,$$

звідки

$$E = \frac{j}{q n_0 (b - b_0)} = \frac{U}{d}.$$

Оскільки $j = \frac{I}{S}$, а $d = \frac{V}{S}$, маємо

$$U = \frac{I V}{S^2 q n_0 (b - b_0)} = 110 \text{ В}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. Електрон в атомі водню обертається навколо ядра. Визначити: а) який струм він створює, якщо радіус орбіти дорівнює 53 пм; б) швидкість електрона на цій орбіті.

Відповідь: а) 1,1 мА; б) $2,3 \cdot 10^6$ м/с.

5.2. Сила струму в провіднику рівномірно зменшується від 5 А до нуля протягом 10 с. Знайти заряд, який пройде крізь провідник.

Відповідь: 2,5 Кл.

5.3. Величина струму в провіднику рівномірно збільшується від $I_0 = 0$ до $I = 3$ А за 10 с. Знайти величину заряду, що пройшов.

Відповідь: $q = 15$ Кл.

5.4. Визначити густину струму в залізному провіднику, довжина якого 10 м, якщо провідник перебуває під напругою $U = 6$ В.

Відповідь: $j = 6,1$ МА/м².

5.5. Внутрішній опір гальванометра $r_a = 680$ Ом. Як та який опір слід підключити до нього, щоб за його допомогою можна було б вимірювати струм 2,5 А? Шкала гальванометра розрахована на 300 мкА.

Відповідь: $R_{\text{ш}} = 0,0618$ Ом.

5.6. Внутрішній опір гальванометра $r_a = 720$ Ом, шкала гальванометра розрахована на 300 мкА. Як та який опір слід додати до нього, щоб за його допомогою можна було б вимірювати напругу 300 В?

Відповідь: $R_{\text{ш}} = 10^6$ Ом.

5.7. До амперметра, опір якого $R_A = 0,27$ Ом, підключено паралельно шунт опором $R = 0,09$ Ом. Обчислити силу струму в колі, якщо амперметр показує $I_A = 2$ А.

Відповідь: $I = 8$ А.

5.8. Два провідники виготовлені з одного матеріалу. У скільки разів довжина одного провідника більша від довжини другого, якщо відомо, що $R_1 = 8R_2$, а $m_1 = 2m_2$?

Відповідь: $\frac{l_1}{l_2} = 4$.

5.9. Скільки витків ніхромового провідника діаметром $d = 1$ мм слід намотати на фарфоровий циліндр діаметром 5 см, щоб виготовити нагрівальний прилад, який має опір $R = 48$ Ом?

Відповідь: $N = 200$.

5.10. Знайти повний опір кола, якщо $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 1$ Ом, $R_3 = R_6 = 12$ Ом (рис. 5.12).

Відповідь: $R = 10,9$ Ом.

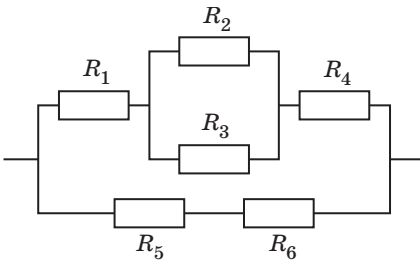


Рис. 5.12

5.11. Знайти опір між точками A і B кола, поданого на рис. 5.13, якщо $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = R_4 = R_6 = 2$ Ом; $R_5 = 4$ Ом.

Відповідь: $R = 1,2$ Ом.

5.12. Знайти опір дротяного каркасу, що має форму куба, якщо його ввімкнути в коло між точками A і B (рис. 5.14). Опір кожного ребра каркасу $r = 3$ Ом.

Відповідь: $R = 2,5$ Ом.

5.13. У колі (рис. 5.15) амперметр показує $I = 1,5$ А. Сила струму через опір R_1 дорівнює $I_1 = 0,5$ А. Опір $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 6$ Ом. Знайти опір R_1 , силу струму I_1 та I_2 .

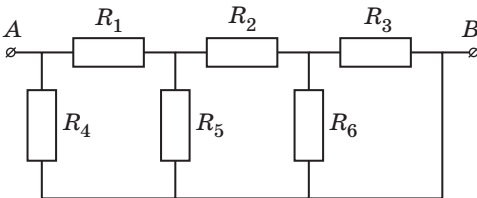


Рис. 5.13

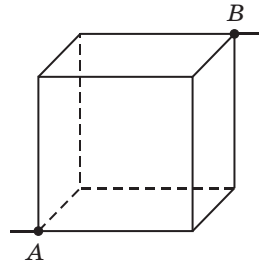


Рис. 5.14

Відповідь: R_1 3 Ом, I_2 0,75 А;
 I_3 0,25 А.

5.14. Температура вольфрамової нитки електричної лампочки дорівнює 2200 С. Її діаметр 0,1 мм. Крізь лампочку проходить струм 0,6 А. Струм підводиться мідним провідником з поперечним перерізом 6 мм². Знайти напруженість електричного поля: 1) у вольфрамі (питомий опір при 0 С 55 нОм м, температурний коефіцієнт опору 0,0045 С⁻¹); 2) у міді (17 нОм м).

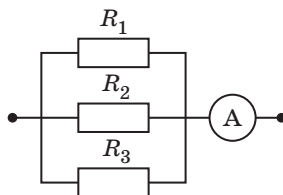


Рис. 5.15

Відповідь: \mathcal{E}_1 45,8 В/м, \mathcal{E}_2 1,7 мВ/м.

5.15. Два однакових джерела струму з \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 1,2 В, внутрішній опір яких r 0,40 Ом, з'єднані, як показано на рис. 5.16. Визначити величину струму в колі та різницю потенціалів між точками a і b в першому та другому випадках.

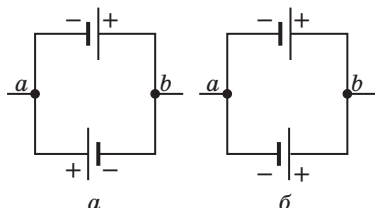


Рис. 5.16

Відповідь: 1) I 3 А; U 0; 2) I 0; U 1,2 В.

5.16. Два елементи \mathcal{E}_1 1,2 В; r_1 0,10 Ом; \mathcal{E}_2 0,9 В; r_2 0,3 Ом з'єднані однойменними полюсами.

Опір R провідників, що їх з'єднує, дорівнює 0,2 Ом. Визначити величину струму в колі.

Відповідь: I 0,5 А.

5.17. Знайти величину струму в окремих витках моста Уітстона (рис. 5.17), якщо величина струму крізь гальванометр дорівнює нулю. ЕРС джерела \mathcal{E} 2 В, R_1 30 Ом, R_2 45 Ом та R_3 200 Ом. Опором генератора знехтувати.

Відповідь: I_1 I_2 26,7 мА;

I_3 I_4 6 мА.

5.18. На рис. 5.18 \mathcal{E}_1 220 В, \mathcal{E}_2 110 В, R_1 R_2 100 Ом, R_3 500 Ом. Яку величину струму покаже амперметр? Опором батареї та амперметра знехтувати.

Відповідь: I 0,4 А.

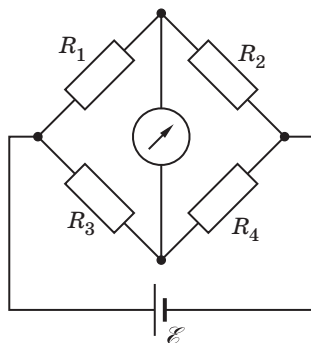


Рис. 5.17

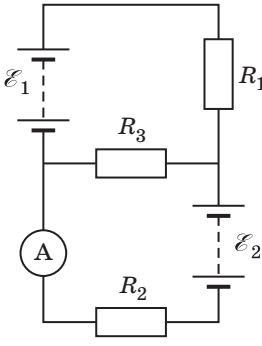


Рис. 5.18

більший за струм, що тече крізь R_2 ? Опором генератора знехтувати.

Відповідь: утричі.

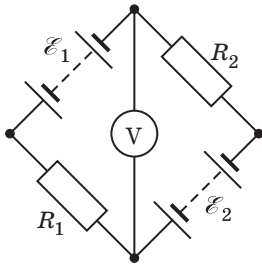


Рис. 5.20

визначити величину струму в батареях та реостаті.

Відповідь: 6,4 А; 5,8 А; 0,6 А.

5.23. Визначити величину струму в резисторі (рис. 5.22), який має опір R_3 та напругу на його кінцях, якщо \mathcal{E}_1 4В, \mathcal{E}_2 3В, R_1 2 Ом, R_2 6 Ом, R_3 10 Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

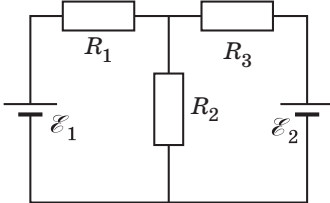


Рис. 5.22

R_3 2 Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

Відповідь: I_1 0,8 А; I_2 0,3 А; I_3 0,5 А.

5.19. Яку величину струму показує міліамперметр (рис. 5.19), якщо \mathcal{E}_1 2 В; \mathcal{E}_2 1 В; R_1 10^3 Ом; R_2 500 Ом; R_3 200 Ом. Опір амперметра R_A 200 Ом. Внутрішнім опором елементів знехтувати.

Відповідь:

I 0,45 мА.

5.20. На схемі (рис. 5.20) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 ; R_2 $2R_1$. У скільки разів струм, що тече крізь вольтметр,

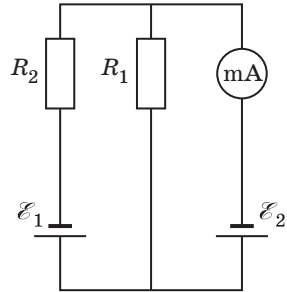


Рис. 5.19

5.21. На схемі (рис. 5.20) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 110 В; R_1 R_2 200 Ом, опір вольтметра 1000 Ом. Знайти напругу, що показує вольтметр. Опором батареї знехтувати.

Відповідь: U 100 В.

5.22. Дві батареї акумуляторів \mathcal{E}_1 10 В; r_1 1 Ом; \mathcal{E}_2 8 В; r_2 2 Ом та реостат R 6 Ом з'єднані так, як показано на рис. 5.21. Визначити величину струму в батареях та реостаті.

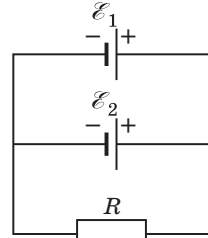


Рис. 5.21

5.23. Визначити величину струму в резисторі (рис. 5.22), який має опір R_3 та напругу на його кінцях, якщо \mathcal{E}_1 4В, \mathcal{E}_2 3В, R_1 2 Ом, R_2 6 Ом, R_3 10 Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

Відповідь: I_3 0; U_3 0.

5.24. Три джерела струму \mathcal{E}_1 11 В, \mathcal{E}_2 4 В та \mathcal{E}_3 6 В з'єднанні, як показано на рис. 5.23. Визначити величину струму в реостатах, якщо R_1 5 Ом, R_2 10 Ом та

5.25. Маємо n однакових джерел з ЕРС \mathcal{E} і внутрішнім опором r . Встановити, коли вигідно вмикати джерела послідовно, а коли паралельно, якщо опір зовнішнього кола дорівнює R .

Відповідь: $R > \frac{r}{n}$, $\frac{I_{\text{пар}}}{I_{\text{пос}}} > n$; $R < \frac{r}{n}$, $\frac{I_{\text{пар}}}{I_{\text{пос}}} < \frac{1}{n}$.

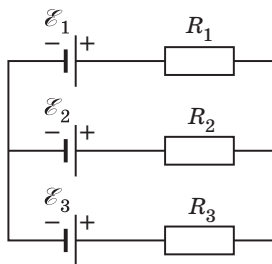


Рис. 5.23

5.26. Батарея з $N = 900$ елементів увімкнена в електричне коло із зовнішнім опором $R = 10$ Ом таким чином, що n_1 паралельно з'єднаних елементів мають n_2 послідовно з'єднаних і в колі проходить максимальна сила струму. Визначити n_1 , n_2 і максимальну силу струму в опорі R , якщо ЕРС елемента $\mathcal{E} = 2$ В і внутрішній опір $r = 0,1$ Ом.

Відповідь: $n_1 = 3$, $n_2 = 300$, $I_{\text{max}} = 30$ А.

5.27. У контурі (рис. 5.24) $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 25$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $\mathcal{E}_1 = 2$ В. Знехтувавши опором гальванометра і внутрішніми опорами елементів, знайти ЕРС другого елемента. Гальванометр показує $I = 25$ А.

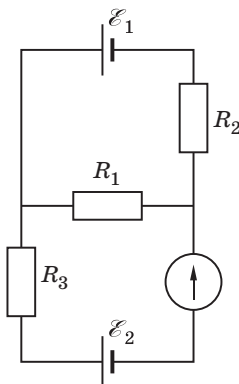


Рис. 5.24

Відповідь: $\mathcal{E}_2 = 2$ В.

5.28. Три батареї з $\mathcal{E}_1 = 1,2$ В, $\mathcal{E}_2 = 0,5$ В, $\mathcal{E}_3 = 1$ В і однаковими внутрішніми опором, які дорівнюють $r = 1$ Ом, з'єднані між собою однойменними полюсами. Знайти величини сил струмів, які проходять крізь кожну батарею. Опором з'єднувальних провідників знехтувати.

Відповідь: $I_1 = 0,3$ А; $I_2 = 0,4$ А; $I_3 = 0,1$ А.

5.29. Котушка і амперметр з'єднані послідовно й підключені до джерела струму. Вольтметр, опір якого $r = 4$ кОм, підключений до клем котушки, показує $U = 120$ В, а амперметр показує силу струму $I = 0,3$ А. Знайти відносну похибку, яку можна зробити при вимірюванні опору, якщо знехтувати силою струму, що тече крізь вольтметр.

Відповідь: $9,9\%$.

5.30. Електрорушійна сила батареї $\mathcal{E} = 12$ В. Максимальна сила струму, яку може дати ця батарея, $I_{\text{max}} = 5$ А. Яка максимальна потужність може виділитися у зовнішньому колі?

Відповідь: $P = 15$ Вт.

5.31. Від батареї $\mathcal{E} = 500 \text{ В}$ потрібно передати енергію на відстань $2,5 \text{ км}$. Споживна потужність дорівнює 10 кВт . Визначити мінімальні втрати потужності в мережі, якщо діаметр мідних провідників $1,5 \text{ см}$.

Відповідь: $P = 212 \text{ Вт}$.

5.32. Від генератора $\mathcal{E} = 110 \text{ В}$ потрібно передати енергію на відстань 250 м . Споживна потужність дорівнює 1 кВт . Знайти мінімальну площу перерізу мідного провідника, якщо витрати потужності в мережі не повинні перевищувати 1% .

Відповідь: $S = 85 \text{ мм}^2$.

5.33. Для нагрівання $4,5 \text{ л}$ води від $23 \text{ }^\circ\text{С}$ до кипіння нагрівач споживає $0,5 \text{ Вт} \cdot \text{год}$. Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії нагрівача?

Відповідь: 80% .

5.34. Електричний чайник з 600 см^3 води при $9 \text{ }^\circ\text{С}$ забули вимкнути. Опір обмотки чайника 16 Ом . За який час після включення вся вода в чайнику википить? Напруга в мережі 120 В , коефіцієнт корисної дії чайника 60% .

Відповідь: за 49 хв .

5.35. Обмотка електричного нагрівача має дві секції. Якщо ввімкнути першу із них, то вода закипить за $t_1 = 15 \text{ хв}$, якщо другу — за $t_2 = 30 \text{ хв}$. При якому з'єднанні секцій (паралельному чи послідовному) вода закипить раніше і в скільки разів?

Відповідь: при паралельному, в $22,4$ рази.

5.36. Швидкість зростання I/t сили струму в провіднику, опір якого $R = 3 \text{ Ом}$, дорівнює 1 А/с . Знайти кількість теплоти, яка виділилась у цьому провіднику за $t = 10 \text{ с}$, якщо сила струму рівномірно збільшувалася від $I_0 = 0$ до своєї максимальної величини.

Відповідь: $Q = 1 \text{ кДж}$.

5.37. Знайти опір провідника, в якому при рівномірному зменшенні сили струму від $I_0 = 5 \text{ А}$ до $I = 0$ за час $t = 10 \text{ с}$ кількість теплоти $Q = 1 \text{ кДж}$.

Відповідь: $R = 12 \text{ Ом}$.

5.38. Сила струму в колі змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-t/\tau}$, де $\tau = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Знайти опір провідника, в якому виділилась кількість теплоти $Q = 430 \text{ Дж}$ за час, протягом якого сила струму зменшилась у e разів. $I_0 = 1 \text{ А}$.

Відповідь: $R = 20 \text{ Ом}$.

5.39. Сила струму в провіднику, опір якого $R = 20 \text{ Ом}$, зростає за лінійним законом від $I_0 = 0$ до $I = 6 \text{ А}$ за час $t = 2 \text{ с}$. Знайти кількість теплоти в цьому провіднику Q , що виділяється за першу секунду.

Відповідь: $Q = 60 \text{ Дж}$.

5.40. Сила струму в провіднику змінюється за законом $I = I_0 \sin t$, де $I_0 = 1 \text{ А}$. За час, який дорівнює чверті періоду (від $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$, $T = 10 \text{ с}$), у провіднику виділилась кількість теплоти $Q = 12,5 \text{ Дж}$. Знайти опір цього провідника.

Відповідь: $R = 10 \text{ Ом}$.

5.41. Яка кількість теплоти виділилась у провіднику, опір якого $R = 25 \text{ Ом}$ за час $t = 10 \text{ с}$, якщо середня сила струму при його рівномірному зростанні від 0 до деякого максимального значення дорівнює $I = 11 \text{ А}$?

Відповідь: $Q = 40 \text{ кДж}$.

5.42. Величина струму в провіднику, який має опір 100 Ом , рівномірно зростає від нуля до $I_{\max} = 10 \text{ А}$ протягом 30 с . Знайти кількість теплоти, що виділяється за цей час у провіднику.

Відповідь: 100 кДж .

5.43. На кінцях залізного провідника довжиною 1 м і радіусом $0,5 \text{ мм}$ підтримується напруга 12 В . Визначити густину струму та число електронів, які проходять крізь поперечний переріз провідника за 1 с .

Відповідь: $j = 0,13 \cdot 10^9 \text{ А/м}^2$; $N = 1,2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-2}$.

5.44. У мідному провіднику, об'єм якого 6 см^3 , при проходженні по ньому постійного струму за 1 хвилину виділилась кількість теплоти 216 Дж . Знайти напруженість електричного поля в провіднику.

Відповідь: $E = 0,1 \text{ В/м}$.

5.45. Яка маса міді виділилась з розчину CuSO_4 за 100 с , якщо струм, що проходив крізь електроліт, змінювався за законом $I = (5 - 0,02t) \text{ А}$.

Відповідь: $m = 132 \text{ мг}$.

5.46. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. В першій ванні виділилась $m_1 = 2,24 \text{ г}$ заліза. За той же час у другій ванні виділилося $m_2 = 3,9 \text{ г}$ цинку. Залізо трьохвалентне. Знайдіть валентність цинку.

Відповідь: $n = 2$.

5.47. Амперметр, увімкнений послідовно з електролітичною ванною з розчином AgNO_3 , показує величину струму 0,9 А. Чи правильно показує амперметр, якщо за 5 хв проходження струму виділилося 316 мг срібла?

Відповідь: амперметр показує менше на 0,04 А.

5.48. Визначити рухливість u одновалентного іона азоту, якщо густина струму дорівнює $5 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2$, концентрація іонів 10^9 м^{-3} , напруженість поля 1000 В/м. Рухливість негативних іонів азоту

$$u = 1,9 \cdot 10^4 \frac{\text{м}^2}{\text{В с}}$$

Відповідь: $u = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{м}^2}{\text{В с}}$.

5.49. В атмосфері поблизу поверхні Землі через радіоактивність ґрунтів та космічне випромінювання утворюється в середньому 5 пар іонів за секунду в 1 см^3 повітря. Визначити струм насичення між плоскими електродами, площа яких 100 см^2 і розташовані вони на відстані 10 см. Іони вважати однозарядними.

Відповідь: $I_{\text{нас}} = 8 \cdot 10^{18} \text{ А}$.

5.50. Якою має бути температура атомарного водню, щоб середня кінетична енергія поступального руху атомів була достатньою для іонізації шляхом зіткнень? Потенціал іонізації атомарного водню дорівнює 13,6 В.

Відповідь: $T = 210 \text{ К}$.



МАГНІТНЕ ПОЛЕ

6 Магнітне поле у вакуумі

6.1. Природа магнітного поля

Постійні магніти та їх здатність взаємодіяти один з одним та з залізом були відомі дуже давно. Але тільки у 1820 р. датський фізик Х. Ерстед (1777—1851) виявив, що постійний прямолінійний струм діє на магнітну стрілку, яка орієнтується у площині, перпендикулярній осі струму. При зміні напрямку струму на протилежний стрілка повертається на 180° . При зростанні відстані між струмом і стрілкою орієнтуюча дія струму зменшується.

У 1820—1823 рр. А. М. Ампер (1775—1836), продовжуючи дослідження Ерстеда, дійшов висновку, що струми взаємодіють не тільки з постійними магнітами, але й один з одним. Однак, якщо хоча б в одному з провідників струму не буде — взаємодія не спостерігається, незважаючи на те, що заряди на провіднику, підключеному до джерела ЕРС, залишаються.

Це означає, що розглянута взаємодія не є електростатичною (кулонівською), а притаманна тільки струмам (тобто зарядам, які упорядковано рухаються, — електронам, протонам, мезонам тощо). З початком руху зарядів виникає нова якість — вони набувають магнітних властивостей. При цьому, в провідному середовищі та навколо нього, окрім електричного поля, існує нова форма матерії — магнітне поле, яке відповідає за передачу магнітної взаємодії у просторі.

Електричне і магнітне поля тісно пов'язані між собою та є окремими проявами електромагнітного поля. Але між електричним та магнітним полями немає повної симетрії.

Відмінність електричного і магнітного полів

По-перше, джерелами електричного поля є електричні заряди, тоді як магнітних зарядів (монополів) у природі не виявлено, тобто магнітне поле джерел не має.

По-друге, якщо електричне поле створюється як нерухомими, так і рухомими зарядами, єдиними матеріальними носіями магнітного поля є рухомі електричні заряди (струми). Діє магнітне поле теж тільки на рухомі електричні заряди. Магнітне поле виникає за будь-якого упорядкованого руху електричних зарядів: це може бути рух зарядів у провіднику (макроструми) або рух електрона навколо ядра (мікроструми). В обох випадках виникає магнітне поле, яке виявляє себе дією магнітної сили на рухомі заряди. Оскільки рух зарядів або їх спокій є відносними, залежними від системи відліку, то і прояв електричної або магнітної взаємодії зарядів також є відносним. Інакше кажучи, заряди створюють електричне поле завжди, але їх магнітні властивості залежать від того, в якій системі відліку проводяться спостереження — в рухомій чи нерухомій відносно визначеного заряду.

Зауважимо, що ми розглядаємо явища *магнітостатики*, які пов'язані зі стаціонарними магнітними полями, створеними постійними струмами або зарядами, які рівномірно рухаються.

**Вектор магнітної індукції.
Лінії магнітної індукції**

Досліди Ерстеда доводять, що магнітне поле призводить до дії сили на магнітну стрілку, тобто ця дія характеризується векторною величиною. Ця величина, яка є основною силовою характеристикою магнітного поля, має назву *вектора магнітної індукції* \vec{B} , вимірюється в одиницях тесла (Тл).

Аналогічно електричному полю, магнітне поле можна зобразити за допомогою *ліній магнітної індукції* — ліній, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямком вектора \vec{B} . Їх напрямки визначається за допомогою **правила свердлика**: якщо вістря свердлика напрямлене вздовж струму і він вкручується, то його ручка обертається в напрямку ліній магнітної індукції. Лінії магнітної індукції завжди замкнені та охоплюють провідник зі струмом, тобто магнітне поле не має джерел, а є вихровим. У цьому суттєва відмінність силових ліній магнітного поля від силових ліній електричного поля, які починаються і закінчуються на електричних зарядах, які є джерелами електричного поля.

На рис. 6.1 зображені силові лінії вектора магнітної індукції для прямого струму (а), постійного магніту (б) та колового струму (в).

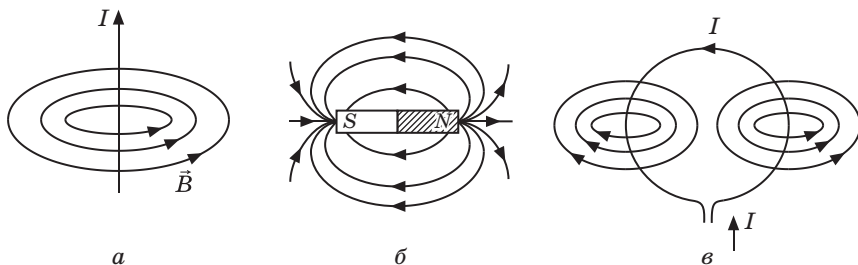


Рис. 6.1

6.2. Сила Ампера

Закон Ампера

Розглянемо силу, з якою магнітне поле діє на провідник зі струмом. Ампер експериментально довів закон: *сила дії магнітного поля на елемент струму дорівнює векторному добутку елемента струму на вектор магнітної індукції*

$$d\vec{F}_A \parallel [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (6.1)$$

У скалярній формі

$$dF_A = IBdl \sin \alpha,$$

де α — кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{B} (рис. 6.2).

З цього виразу можна отримати визначення для величини вектора магнітної індукції:

$$B = \frac{dF_{A \max}}{Idl},$$

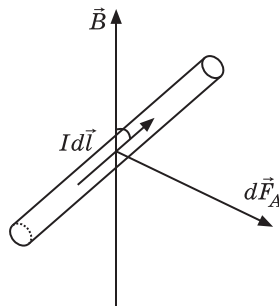


Рис. 6.2

тобто *вектор магнітної індукції* — силова характеристика магнітного поля — фізична величина, яка чисельно дорівнює максимальній силі Ампера, що діє на провідник довжиною 1 м, по якому йде струм 1 А.

Визначення напрямку сили Ампера

Напрямок сили Ампера можна визначити за **правилом лівої руки**: якщо ліву руку розташувати так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а чотири випрямлені пальці показували напрямок струму в провіднику, то поставлений під прямим кутом великий палець покаже напрямок дії сили Ампера.

За одиницю індукції магнітного поля в СІ прийнято 1 тесла (на честь знаменитого сербського електротехніка М. Тесла). Тесла — індукція такого магнітного поля, в якому на провідник довжиною 1 м зі струмом 1 А, розташований перпендикулярно вектору \vec{B} , діє сила 1 ньютон.

При $90^\circ \sin \alpha = 1$

$$B = \frac{dF_A}{I dl}$$

$$[B] = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А } 1 \text{ м}} = 1 \text{ Тл.}$$

Щоб обрахувати повну силу Ампера, що діє на непрямолінійний провідник (рис. 6.3) слід проінтегрувати $d\vec{F}_A$ по всій довжині провідника:

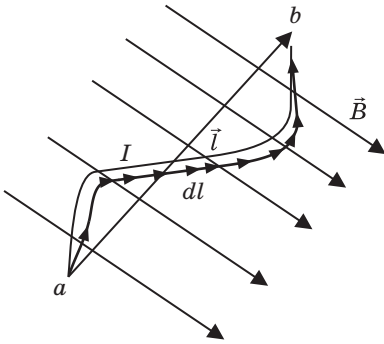


Рис. 6.3

з'єднує початкову точку провідника з кінцевою. Тоді

$$\vec{F}_A = I \int_a^b [\vec{l}, \vec{B}].$$

Якщо провідник зі струмом замкнений (рис. 6.4), то тоді $\oint d\vec{l} = 0$, і сила Ампера, що діє на нього, теж дорівнює нулю.

$$\vec{F}_A = I \int_a^b d\vec{l}, \vec{B}.$$

Візьмемо до уваги, що інтеграл $\int_a^b d\vec{l} = \vec{l}$, тобто дорівнює вектору, що

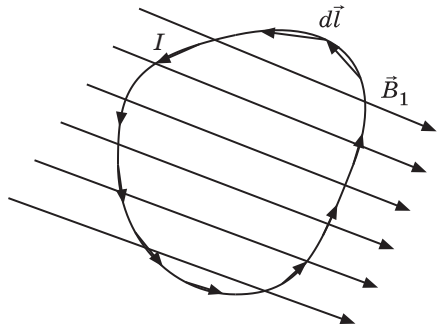


Рис. 6.4

Сила взаємодії паралельних струмів

Знайдемо силу взаємодії паралельних струмів (рис. 6.5).

Потрібно знайти амперову силу, з якою взаємодіють у вакуумі два паралельні нескінченно довгі провідники зі струмами I_1 та I_2 , якщо відстань між провідниками b . Якщо струми I_1 та I_2 в обох провідниках

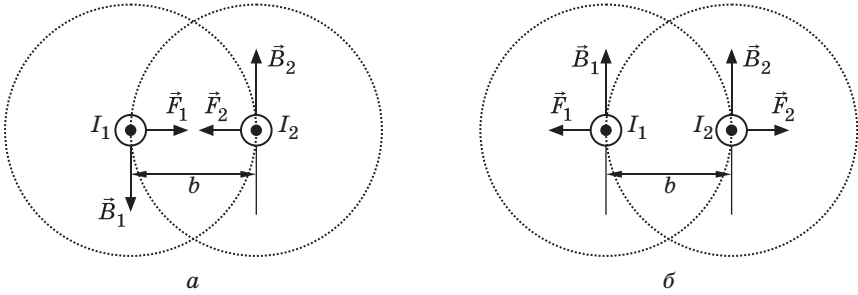


Рис. 6.5

збігаються за напрямком, то провідники притягуються один до одного (рис. 6.5, а), якщо напрямки струмів протилежні, то провідники відштовхуються (рис. 6.5, б).

За законом Ампера (6.1), на елемент $d\vec{l}_2$ провідника зі струмом I_2 діє сила

$$d\vec{F}_2 = I_2 [d\vec{l}_2, \vec{B}_1],$$

де \vec{B}_1 — магнітна індукція поля провідника зі струмом I_1 в точці, де розташований другий провідник. Якщо провідник нескінченної довжини, то

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2 b},$$

де $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнітна стала.

Тоді

$$dF_2 = |d\vec{F}_2| = I_2 B_1 dl_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 b} dl_2.$$

Відповідно на ділянку dl_1 першого провідника зі струмом діє сила

$$d\vec{F}_1 = I_1 [d\vec{l}_1, \vec{B}_2],$$

модуль якої

$$dF_1 = I_1 B_2 dl_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 b} dl_1.$$

Загальна формула для модуля сили, яка діє на одиницю довжини провідника,

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 b}.$$

Ця формула застосовується для визначення одиниці сили струму — ампера як основної одиниці в СІ.

Визначення
одиниці сили
струму —
ампера

Один ампер — сила незмінного струму, який, проходячи по двох паралельних провідниках нескінченної довжини і малого поперечного перерізу, розташованих на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створює силу взаємодії між ними, яка дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожний метр довжини.

З означення ампера можна визначити магнітну сталу μ_0

$$\frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}}{1 \text{ м}} = \mu_0 \frac{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А}}{2 \cdot 1 \text{ м}}; \quad \mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{ Н}}{\text{ А}^2} = 4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{ Гн}}{\text{ м}}$$

6.3. Контур зі струмом у магнітному полі

Розглянемо замкнений провідний прямокутний контур з постійним струмом, розташований у магнітному полі (рис. 6.6). Контур може вільно обертатись навколо осі OO .

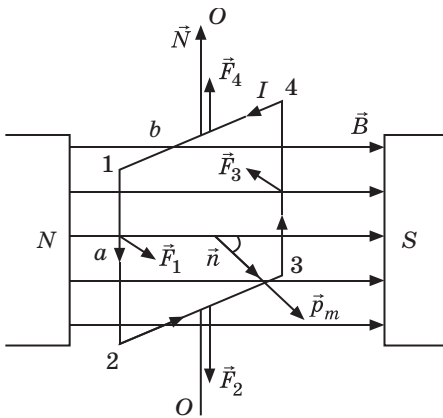


Рис. 6.6

У магнітному полі на кожну сторону контуру зі струмом (a та b) діє сила Ампера

$$\vec{F}_A = I[\vec{a}, \vec{B}],$$

напрямок якої можна знайти за правилом лівої руки. На сторони 23 та 41 діють сили \vec{F}_2 та \vec{F}_4 , величини яких дорівнюють

$$F_2 = F_4 = IbB \sin \frac{\pi}{2}$$

$$IbB \cos$$

та напрямлені вздовж вертикальної осі рамки в протилежні боки, тобто вони урівноважують одна одну і можуть тільки деформувати контур. На сторону 12 діє сила \vec{F}_1 , а на сторону 34 — сила \vec{F}_3 , напрямки яких перпендикулярні \vec{B} (на рис. 6.7 зображено контур 1234 — вигляд зверху). Ці сили однакові за модулем і мають протилежний напрямок $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_3$. Вони утворюють пару сил, плече якої $l = b \sin \alpha$, де α — кут між напрямком магнітного поля \vec{B} та нормаллю \vec{n} до площини контуру.

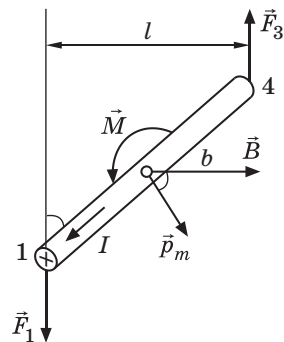


Рис. 6.7

Обертальний момент, діючий на контур зі струмом

Момент цієї пари сил дорівнює результуючому *обертальному моменту*, модуль якого

$$M = F_1 l = Iab \sin \alpha = IS \sin \alpha,$$

де $S = ab$ — площа контуру.

Дію магнітного поля на невеликий контур зі струмом (у межах якого можна вважати магнітне поле сталим) часто застосовують для визначення величини вектора магнітної індукції

$$B = \frac{M_{\max}}{IS}.$$

Вектор магнітної індукції — силова характеристика магнітного поля, що чисельно дорівнює максимальному моменту, який діє на замкнений контур площею 1 м^2 , по якому йде струм 1 А . Тоді

$$[B] = 1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2}.$$

Візьмемо до уваги, що магнітний момент контуру $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ (рис. 6.8), тоді $M = p_m B \sin \alpha$, або у векторній формі обертальний момент пари сил, що діє на контур зі струмом у магнітному полі, дорівнює

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (6.2)$$

Якщо контур складається з k витків, то

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]k.$$

Можна довести, що формула справедлива для контуру будь-якої форми. Тоді

$$\vec{p}_m = I \oint_S \vec{d}\vec{S}.$$

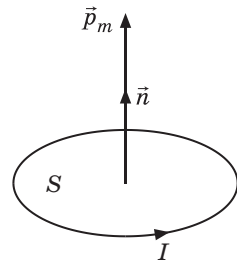


Рис. 6.8

Очевидно, що при повороті площини контуру зі струмом відносно напрямку магнітного поля \vec{B} величина \vec{M} змінюватиметься від максимального значення M_{\max} (якщо $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$), до нуля (коли $\vec{p}_m \perp \vec{B}$). В останньому випадку, при $\vec{M} = 0$, $\vec{p}_m \perp \vec{B}$ спостерігається стійка рівновага контуру в магнітному полі. Якщо \vec{p}_m і \vec{B} мають протилежні напрямки ($\vec{M} = 0$, $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$), рівновага нестійка.

У випадку стійкої рівноваги сили Ампера \vec{F}_A лежать у площині контуру і залежно від напрямків \vec{B} та \vec{l} будуть спрямовані назовні або всередину контуру (рис. 6.9), тобто контур зі струмом під дією

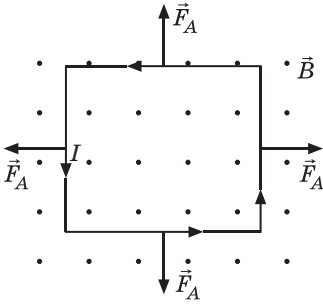


Рис. 6.9

цих сил тільки деформуватиметься: або розтягуватиметься, або стискатиметься.

Для повороту цього контуру на кут d (кут між векторами \vec{p}_m і \vec{B}) слід виконати роботу проти сил магнітного поля, яка дорівнює зростанню потенціальної енергії W_p контуру зі струмом у магнітному полі

$$dW_p = \vec{M} d\vec{p}_m \cdot \vec{B} \sin d .$$

Після інтегрування по d отримаємо

$$W_p = \int_0^{\vec{p}_m, \vec{B}} p_m B \sin d \, d = p_m B \cos (\vec{p}_m, \vec{B}).$$

Потенціальна енергія контуру зі струмом в магнітному полі

Потенціальна енергія контуру зі струмом у магнітному полі дорівнює скалярному добутку магнітного моменту контуру та магнітної індукції зі знаком мінус

$$W_p = - (\vec{p}_m, \vec{B}). \quad (6.3)$$

Якщо контур зі струмом перебуває у неоднорідному магнітному полі, то крім обертального моменту на цей контур діятиме ще й додаткова результуюча сила, що примусить його рухатися у магнітному полі.

На елемент контуру (візьмемо його круговим) діє сила dF , перпендикулярна до \vec{B} (рис. 6.10, а). Сили, які діють на різні елементи контуру, напрямлені по твірних зрізаного конуса. Коли магнітний момент контуру зорієнтований по полю, то результуюча сила дорівнює

$$\vec{F} = \nabla W_p = (\vec{p}_m, \vec{B});$$

$$F_x = p_m \frac{B}{x} \cos \alpha ,$$

має напрямок зростання \vec{B} і втягує контур в область більш сильного поля. (При $B/x > 0$ та якщо α — кут між \vec{p}_m і \vec{B} , менший за $\pi/2$, то $F_x > 0$ (рис. 6.10, б).)

При зміні напрямку струму в контурі на протилежний, \vec{p}_m та \vec{B} антипаралельні, під дією результуючої сили контур виштовхується туди, де поле слабше (рис. 6.10, в). Там контур завдяки дії

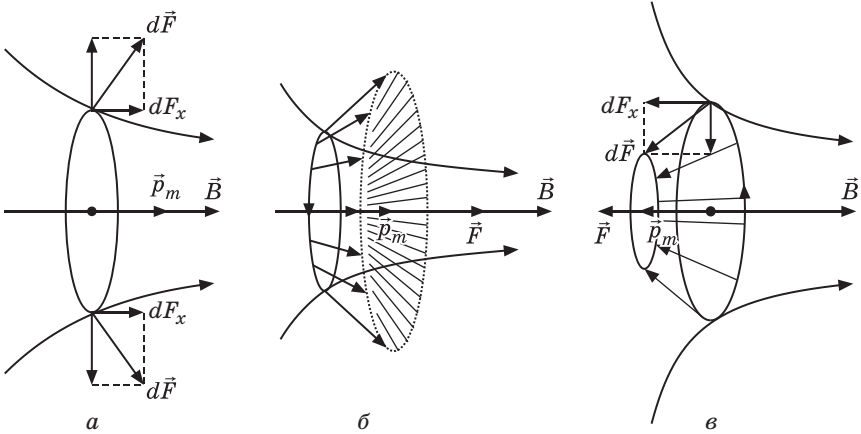


Рис. 6.10

моменту сил Ампера повернуться так, щоб кут між \vec{p}_m і \vec{B} став гострим, і втягнеться в область сильного поля.

6.4. Сила Лоренца

Спостереження за відхиленням електронного променя під дією магнітного поля в електронно-променевої трубці наводить на думку, що силова дія на провідник зі струмом також пояснюється впливом магнітного поля на заряди, які рухаються у ньому.

Тоді можна виразити силу Ампера як суму сил Лоренца \vec{F}_L , що діють на окремі заряди, які створюють струм (у провіднику це електрони \bar{e}),

$$d\vec{F}_A = [Id\vec{l}, \vec{B}] = \vec{F}_L dN,$$

де $dN = n dS dl = n dV$ — кількість зарядів в об'ємі $dV = dS dl$; n — концентрація зарядів у провіднику; S — площа поперечного перерізу провідника.

Знайдемо силу F_L . При середній швидкості напрямленого руху зарядів \bar{v} густина струму дорівнює $\vec{j} = en\bar{v}$, $Id\vec{l} = \vec{j} dS dl = \vec{j} dV$. Тоді

$$d\vec{F}_L = [\vec{j}, \vec{B}] dV = en[\bar{v}, \vec{B}] dV;$$

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{F}_A}{dN} = e[\bar{v}, \vec{B}].$$

У загальному випадку для довільного заряду сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\bar{v}, \vec{B}]. \quad (6.4)$$

У скалярному вигляді

$$F_{\text{Л}} = qvB \sin \alpha,$$

де α — кут між напрямком магнітного поля та швидкості заряду.

Напрямок сили Лоренца (правило лівої руки)

Напрямок сили Лоренца можна знайти за **правилом лівої руки**: якщо ліву руку розташувати так, щоб силові лінії магнітного поля входили в долоню, а чотири витягнуті пальці показували напрямок швидкості позитивного заряду, тоді відігнутий під прямим кутом великий палець вкаже напрямок сили Лоренца (рис. 6.11).

Властивості сили Лоренца

Можна зробити такі висновки відносно сили Лоренца:

Величина і напрямок сили Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$ залежить від швидкості зарядженої частинки і від величини і напрямку індукції магнітного поля \vec{B} .

Якщо заряджена частинка рухається паралельно напрямку магнітного поля, сила Лоренца дорівнює нулю.

Якщо кут між вектором швидкості заряду \vec{v} і вектором \vec{B} відмінний від нуля, то сила Лоренца перпендикулярна площині, в якій лежать вектори \vec{v} і \vec{B} .

Сила Лоренца діє на позитивний і негативний заряди в протилежних напрямках.

Відмінність електричної сили і сили Лоренца

Існує декілька важливих відмінностей сил, що діють на електричний заряд з боку електричного і магнітного полів:

Електрична сила діє в напрямку електричного поля, тоді як сила Лоренца діє в напрямку, перпендикулярному магнітному полю.

Електрична сила діє на заряд незалежно від того, рухається заряд чи ні, в той час як магнітне поле діє на заряд тільки у випадку, коли він рухається.

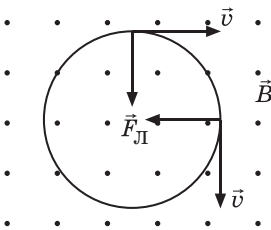


Рис. 6.12

Якщо заряд перебуває в електричному полі, електрична сила виконує роботу з переміщення заряду, в той час як сила, що діє з боку магнітного поля (сила Лоренца), роботу не виконує, не може змінити величину швидкості та кінетичної енергії зарядженої частинки, а тільки викривлює траєкторію її руху та відіграє роль доцентрової сили (рис. 6.12).

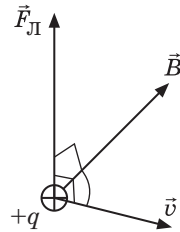


Рис. 6.11

Можна розглядати два випадки руху довільного заряду в однорідному магнітному полі:

1) вектор швидкості складає з напрямком магнітного поля прямий кут ($\vec{v} \perp \vec{B}$);

2) кут між векторами швидкості заряду та магнітної індукції довільний .

Рух заряду при $\vec{v} \perp \vec{B}$

У першому випадку, сила $F_{\text{Л}} = qvB$ і напрямлена перпендикулярно швидкості, тобто відіграє роль доцентрової сили: заряд масою m рухається по колу, площина якого перпендикулярна напрямку магнітного поля (рис. 6.12).

За другим законом Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

звідки знаходимо радіус кола

$$R = \frac{mv}{qB}. \tag{6.5}$$

Він залежить від швидкості зарядженої частинки, величини магнітного поля, та питомого заряду частинки $\frac{q}{m}$.

Період обертання заряду

$$T = \frac{2R}{v} = \frac{2Rm}{qBR} = \frac{2m}{qB}. \tag{6.6}$$

Кутова швидкість зарядженої частинки дорівнює

$$\frac{qB}{m}.$$

З (6.6) очевидно, що період обертання заряду в магнітному полі не залежить від його швидкості і радіуса обертання. Ця властивість була використана для розробки циклотрона — прискорювача з магнітним полем.

Прискорювачі заряджених частинок

Найефективнішими прискорювачами є циклічні резонансні прискорювачі заряджених частинок — циклотрони. В них у вертикальному магнітному полі, що створюється електромагнітами, розташована вакуумна камера з двома півциліндрами — дуантами (рис. 6.13). Під дією сили Лоренца заряджена частинка рухається по колу, і через кожні півперіода потрапляє в проміжок між дуантами, куди подано змінне електричне поле, в якому

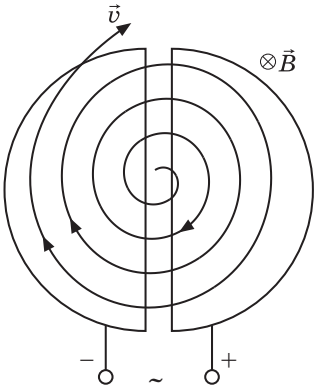


Рис. 6.13

Рух заряду
при $\vec{v} \perp \vec{B}$

(рис. 6.14), рух заряду складається з рівномірного прямолінійного руху вздовж напрямку \vec{B} зі швидкістю $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ та рівномірного обертального руху в площині, перпендикулярній до \vec{B} , зі швидкістю $v_{\perp} = v \sin \alpha$.

Якщо $\vec{v} \perp \vec{B}$, то $\vec{F}_{\perp} \neq 0$, тобто на заряд, який рухається вздовж лінії індукції \vec{B} , магнітне поле не діє. Радіус гвинтової лінії

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Крок гвинтової лінії руху заряду

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Якщо заряджена частинка рухається в неоднорідному магнітному полі, індукція якого зростає в напрямку руху частинки, то радіус і крок гвинтової лінії зменшуються зі зростанням \vec{B} . Це використовується для фокусування заряджених частинок у магнітному полі.

частинка прискорюється. Частота зміни електричного поля має бути синхронізована з частотою обертання частинки. Коли ця умова виконується, частинка рухатиметься по спіралі, радіус якої збільшується. При цьому вона одержує при кожному проходженні крізь проміжок між дуантами додаткову енергію. Якщо енергія частинок досягає максимуму, вони виводяться з циклотрона.

Для прискорення різних частинок, включаючи і релятивістські, застосовуються фазотрони, синхротрони, синхрофазотрони, бетатрони.

У другому випадку, коли між напрямками швидкості заряду та магнітного поля існує довільний кут

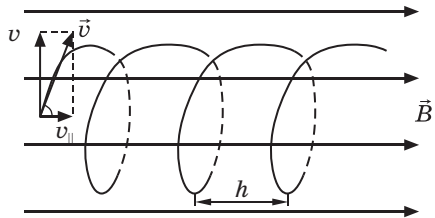


Рис. 6.14

**Рух заряду
в неоднорідному
магнітному полі**

У неоднорідному полі рух зарядженої частинки ускладнюється. Нехай миттєва швидкість позитивно зарядженої частинки перпендикулярна площині рисунка (рис. 6.15). Тоді завдяки складовій індукції \vec{B}_1 заряд під дією сили \vec{F}_1 рухатиметься по колу. Складова B_2 створить силу \vec{F}_2 , що виштовхуватиме частинку в область слабкого поля.

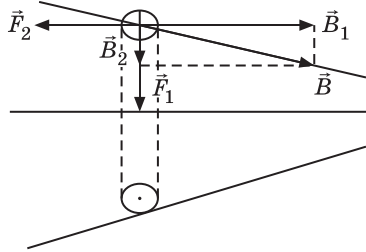


Рис. 6.15

Беручи до уваги, що магнітна складова сили Лоренца роботи не здійснює, можна зробити висновки:

- 1) зберігається повна кінетична енергія, тобто

$$v_{\parallel}^2 + v^2 = v^2 = \text{const};$$

2) зберігається магнітний потік, що пронизує площину, обмежену колом, по якому рухається частинка (магнітний потік може змінюватися тільки завдяки виконаній роботі, але $A = 0$)

$$R^2 B = \text{const};$$

- 3) частота обертання частинки збільшується за законом

$$\frac{q}{m} B;$$

відповідно змінюється (зменшується) і період обертання частинки

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

- 4) радіус кола зменшується за законом

$$R = \sqrt{\frac{A}{B}};$$

- 5) лінійна швидкість частинки зростає згідно з залежністю

$$v = R \frac{q}{m} \sqrt{B} = \sqrt{\frac{2A}{m}} \sqrt{B};$$

6) зменшується поздовжня складова швидкості v_{\parallel} , а також відстань між витками

$$\lambda = v_{\parallel} T;$$

7) в область більш сильного поля частинка рухається по спіралі, що згортається, тобто зменшується радіус і відстань між витками. Рух в область сильного поля припиниться за умови

$$B_{\max} v^2 \frac{m}{q} -;$$

8) частинка обертається по нерухомому колу найменшого радіуса

$$R_{\min} \sqrt{\frac{m}{B_{\max}}}$$

Але цей стан нестійкий, оскільки індукція \vec{B} і магнітний момент частинки, яка рухається по колу, антипаралельні. В результаті частинка при випадковому збуренні почне рухатися по спіралі, що розгортається в область слабого поля, тобто виштовхуватиметься з області більш сильного поля.

Саме цей ефект проявляється, коли магнітне поле Землі захоплює космічні заряджені частинки, наслідком чого є створення радіаційних поясів навколо Землі.

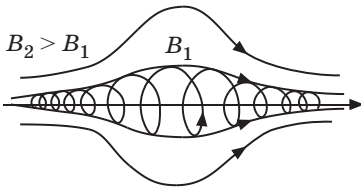


Рис. 6.16

Також ці властивості руху заряду застосовуються в «магнітній пастці» (рис. 6.16), де заряд періодично циркулює між місцями згущення ліній вектора \vec{B} (так званими «магнітними пробками»).

Поле такої конфігурації застосовується для утримання заряджених частинок в обмеженій області простору, що дуже важливо при здійсненні в плазмі термоядерних реакцій.

**Узагальнююча
сила Лоренца**

Якщо, крім магнітного, існує ще й електричне поле, то з боку електричного поля незалежно від того, рухається заряд чи ні, на нього діє сила $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

Відомо, що електричне та магнітне поля діють незалежно, тому, при одночасному існуванні електричного та магнітного полів, заряд рухається під впливом результуючої сили

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (6.7)$$

яка називається *узагальненою силою Лоренца*.

Формула (6.7) справедлива для довільних значень швидкості заряджених частинок, а також як для постійних, так і для змінних магнітних полів.

6.5. Ефект Холла

Ефект Холла, який відкрито у 1879 р. у тонких пластинках золота, належать до так званих поперечних гальваноманітних ефектів. У металі або напівпровіднику зі струмом густиною \vec{j} , розташованому в магнітному полі так, що $\vec{B} \perp \vec{j}$, з'являється електричне поле у напрямку, перпендикулярному і \vec{B} , і \vec{j} .

Основною причиною виникнення цього явища є викривлення траєкторій рухомих заряджених частинок (у твердих тілах електронів і дірок) у магнітному полі внаслідок дії на них сили Лоренца.

Розглянемо механізм виникнення ефекту Холла. Візьмемо провідник прямокутної форми з електронним типом провідності, пропустимо по ньому струм силою I і розташуємо його в однорідному магнітному полі, перпендикулярному до напрямку струму (рис. 6.17).

При такому напрямку струму заряди e (електрони) рухаються ліворуч. Сила Лоренца напрямлена вгору. Тоді верхня сторона провідника матиме підвищену концентрацію електронів (негативний заряд), а нижня сторона зарядиться позитивно.

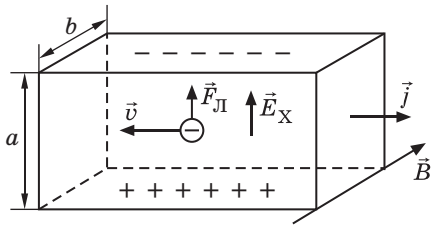


Рис. 6.17

У результаті цього між нижньою і верхньою поверхнями провідника з'явиться додаткове поперечне електричне поле E_X , напрямлене вгору, та пов'язана з ним різниця потенціалів U_X .

Коли напруженість E_X цього поля матиме величину, за якої його дія на заряди зрівноважуватиме силу Лоренца, то встановиться стаціонарний розподіл зарядів в поперечному напрямку

$$eE_X = \frac{e}{a} U_X = evB, \quad U_X = vBa,$$

де a — висота пластинки; U_X — поперечна (холлівська) різниця потенціалів.

Візьмемо до уваги, що сила струму $I = jS = nevS$, ($S = ab$ — площа поперечного перерізу пластинки товщиною b ; n — концентрація електронів; v — середня швидкість упорядкованого руху електронів). Маємо

$$v = \frac{I}{neab}, \quad \text{звідки} \quad U_X = \frac{I}{neab} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{b} = R \frac{IB}{a},$$

де $R = 1/en$ — стала Холла, яка залежить від матеріалу провідника.

Стала Холла R може бути додатною чи від'ємною величиною в залежності від знаку заряду q частинок, які обумовлюють провідність даного матеріалу. За значенням сталої Холла можна визначити концентрацію носіїв струму в провіднику (якщо відомо характер провідності та заряд носіїв) або зробити висновки відносно характеру провідності напівпровідників. Ефект Холла — найпродуктивніший метод вивчення енергетичного спектра носіїв струму в металах і напівпровідниках; використовується для контролю за якістю металів і напівпровідників, у вимірювальній та обчислювальній техніці, в автоматичній та радіоелектроніці.

6.6. Закон Біо — Савара — Лапласа. Принцип суперпозиції магнітних полів

Закон Біо — Савара — Лапласа є одним з основних експериментально установлених законів класичної електродинаміки. Магнітне поле постійних струмів різної форми інтенсивно досліджувалося у 1820 р. французькими вченими Ж. Біо (1774—1862) та Ф. Саваром (1791—1841). Теоретично узагальнив результати цих дослідів П. Лаплас (1749—1827), який отримав формулу для розрахунку магнітного поля \vec{B} , створеного елементом струму лінійного прямого провідника, поперечні розміри якого досить малі порівняно з відстанню до точок, у яких розглядають магнітну індукцію.

Елемент струму — це вектор $I d\vec{l}$, який дорівнює добутку сили струму в провіднику I на вектор елемента довжини провідника $d\vec{l}$, взятого вздовж провідника в напрямку струму (в напрямку руху позитивних зарядів).

Закон Біо — Савара — Лапласа для провідника, елемент струму $I d\vec{l}$ якого створює в точці спостереження A індукцію магнітного поля $d\vec{B}$ (рис. 6.18), має вигляд

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (6.8)$$

де \vec{r} — радіус-вектор, проведений від елемента провідника $d\vec{l}$ у точку спостереження A ; I — сила струму в провіднику; $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнітна стала. Напрямок $d\vec{B}$ перпендикулярний векторам $d\vec{l}$ та \vec{r} і збігається з дотичною до силової лінії магнітної індукції. Силовою лінією вектора \vec{B} є коло, центр якого розташований по осі $d\vec{l}$. Напрямок

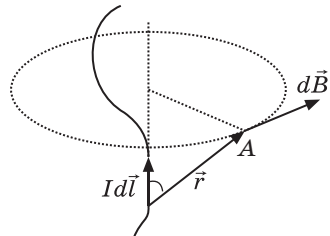


Рис. 6.18

вектора $d\vec{B}$ можна визначити за **правилом правого гвинта** (абсолютно правого гвинта): *напрямок обертання головки гвинта вказує напрямком $d\vec{B}$, якщо поступальний рух гвинта відповідає напрямку елементарного струму $Id\vec{l}$.*

Модуль вектора $d\vec{B}$ визначається як

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (6.9)$$

де α — кут між векторами $d\vec{l}$ та \vec{r} .

**Принцип
суперпозиції
для магнітного
поля**

Для магнітного поля, як і для електричного, справедливий **принцип суперпозиції**, тобто принцип незалежної дії полів: *магнітна індукція результуючого поля \vec{B} , створеного декількома струмами, або рухомими зарядами, дорівнює векторній сумі магнітних індукцій \vec{B}_i полів, створених кожним струмом або рухомим зарядом окремо,*

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i,$$

для елементів струму

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (6.10)$$

Магнітне поле має ще одну характеристику — напруженість магнітного поля \vec{H} , яка пов'язана з вектором магнітної індукції таким чином: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (у вакуумі) (див. розд. 7).

6.7. Магнітне поле рухомого заряду

За допомогою закону Біо — Савара — Лапласа, враховуючи, що $Id\vec{l} = \vec{j}Sdl = \vec{j}dV$, де \vec{j} — густина струму; S — площа поперечного перерізу провідника; $Sdl = dV$ — об'єм елемента провідника довжиною dl , отримуємо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV.$$

Візьмемо до уваги, що $\vec{j} = en\vec{v}$, $ndV = dN$, де n — концентрація носіїв струму в провіднику; \vec{v} — середня швидкість напрямленого руху заряду; dN — число носіїв струму (зарядів) в елементі об'єму dV . Тоді

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]endV}{r^3}.$$

Магнітне поле рухомого заряду

Магнітне поле, створене одним рухомих електронами

$$\vec{B}_e = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Для будь-якого заряду (рис. 6.19)

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

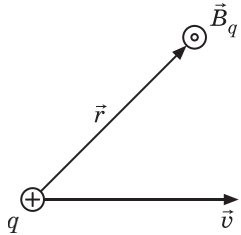


Рис. 6.19

Вектор \vec{B} (псевдовектор) у кожній точці простору напрямлений перпендикулярно площині, в якій лежать вектори \vec{v} і \vec{r} .

Зауважимо, що рух заряду призводить до появи виділеного напрямку (напрямку швидкості заряду), що, в свою чергу, спричиняє порушення сферичної симетрії електричного поля заряду, яке стає вісесиметричним.

Якщо заряд нерухомий, то завдяки ізотропності простору всі напрямки рівноправні й електростатичне поле, створене нерухомим зарядом, сферично-симетричне. Коли заряд рухається, з'являється виділений напрямок, напрямок швидкості \vec{v} , і електричне поле цього заряду втрачає сферичну симетрію та стає вісесиметричним.

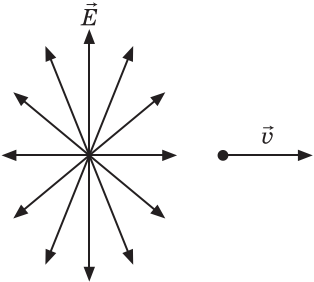


Рис. 6.20

При $v \ll c$ електричне поле заряду майже таке ж, як і у нерухомого заряду, тобто сферично-симетричне. Коли ж $v \sim c$, поле в напрямках, перпендикулярних до швидкості, набагато більше, ніж у напрямку руху на тій же відстані від заряду. Поле стискається в напрямку руху і зосереджено поблизу площини, перпендикулярної вектору \vec{v} (рис. 6.20).

6.8. Приклади визначення вектора індукції магнітного поля

Магнітне поле прямого провідника скінченної довжини

Знайдемо магнітне поле прямого скінченного провідника зі струмом I в точці спостереження A на відстані b від провідника (рис. 6.21).

За законом Біо — Савара — Лапласа елемент струму $I d\vec{l}$ створює в точці A поле

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Неважко переконатися, що для заданого напрямку струму всі елементарні значення $d\vec{B}$ напрямлені в точці A однаково (перпендикулярно до площини рисунка від нас), тоді замість додавання векторів $d\vec{B}$ можна додавати їх модулі. Результуюча індукція в точці A

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}.$$

З рис. 6.21 маємо

$$r = \frac{b}{\sin \theta}, dl = \frac{CK}{\sin \theta} = \frac{rd}{\sin \theta} = \frac{bd}{\sin^2 \theta}.$$

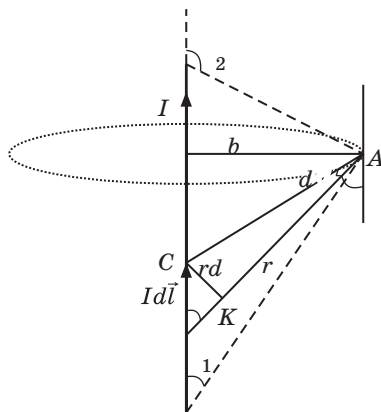


Рис. 6.21

Пряму CK замінили елементом дуги радіуса r , яка спирається на нескінченно малий центральний кут d ($CK = rd$).

Тоді магнітне поле, створене скінченним прямим провідником зі струмом на відстані b від провідника, дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \theta_1 - \sin \theta_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6.12)$$

Індукція магнітного поля нескінченно довгого провідника

Для провідника скінченної довжини кути θ_1 і θ_2 зображено на рис 6.21. Для нескінченного провідника зі струмом I , $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$. За цієї умови

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (6.13)$$

є індукцією магнітного поля нескінченно довгого провідника на відстані b від нього.

Магнітне поле колового струму

Визначимо магнітне поле колового струму радіусом R на осі кола OO' на відстані Z від центра кола (рис. 6.22).

Величина вектора $d\vec{B}$, створеного елементом струму $I d\vec{l}$ в точці A , дорівнює

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Кут між $d\vec{l}$ і \vec{r} θ , тоді $\sin \theta = \frac{R}{r}$ і $dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$

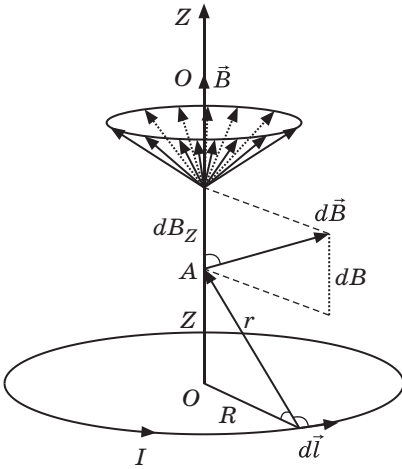


Рис. 6.22

Вектори $d\vec{B}$ напрямлені перпендикулярно площині, проведеній через вектори \vec{r} та $d\vec{l}$.

Тобто для всіх елементів струму вони мають напрям твірних симетричного конуса (рис. 6.22). Результуючий вектор \vec{B} напрямлений уздовж осі контура

$$B = B_z = dB_z = dB \cos \theta .$$

З рис. 6.22 отримаємо

$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{Z^2 + R^2}} ;$$

Магнітна індукція в центрі кругового струму

Величина магнітної індукції на осі кругового струму

$$B = \int dB_z = \int dB \cos \theta = \int \frac{0}{4} \frac{2 R}{(Z^2 + R^2)^{3/2}} IR dl = \frac{0}{4} \frac{2 R^2 I}{(Z^2 + R^2)^{3/2}} \int \frac{0 IR^2}{2(Z^2 + R^2)^{3/2}} . \quad (6.14)$$

При $Z = 0$ отримуємо значення B у центрі колового струму

$$B = \frac{0 I}{2R} . \quad (6.15)$$

Магнітний дипольний момент

Введемо поняття магнітного дипольного моменту.

Магнітним диполем вважають круговий контур зі струмом, магнітний момент якого визначається як добуток величини струму в контурі на площу, охоплену цим контуром. Напрямок магнітного дипольного моменту збігається з напрямком додатної нормалі до контуру і знаходиться за правилом правого гвинта (рис. 6.23)

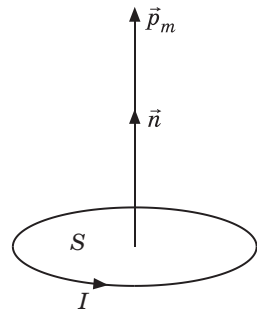


Рис. 6.23

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} .$$

Зважаючи на те, що \vec{B} і \vec{p}_m колового струму мають однаковий напрямок, запишемо (6.14) у векторній формі

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \quad (6.16)$$

6.9. Магнітний потік. Теорема Остроградського — Гаусса для вектора магнітної індукції у вакуумі

Магнітний потік

Магнітним потоком d крізь деяку поверхню площею dS називають фізичну величину

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n dS = B dS \cos \alpha, \quad (6.17)$$

де $d\vec{S} = \vec{n} dS$; \vec{n} — одиничний вектор зовнішньої нормалі до площини dS ; B_n — проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі; α — кут між векторами \vec{n} і \vec{B} (рис. 6.24). Площа dS вибирається настільки малою, щоб її можна було вважати плоскою, а магнітне поле однорідним.

Одиницею магнітного потоку є вебер (Вб).

$$[\Phi] = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Вб}.$$

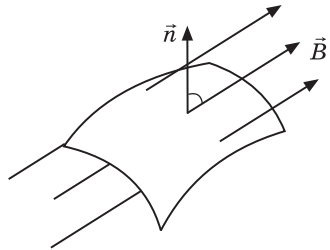


Рис. 6.24

Повний магнітний потік крізь довільну поверхню

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n dS = \int_S B dS \cos \alpha.$$

Теорема Гаусса для магнітного поля

Зважаючи на те, що магнітні силові лінії завжди замкнені, можна сформулювати **теорему Гаусса для магнітного поля**: *магнітний потік крізь будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю*

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (6.18)$$

Оскільки кожна лінія вектора \vec{B} замкнена, то, якщо вона увійде в замкнену поверхню, то повинна і вийти з неї.

Щоб одержати (6.18) у диференціальній формі, візьмемо до уваги, що за теоремою Остроградського — Гаусса (*див.* дод. 1)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV,$$

тому

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (6.19)$$

Вирази (6.18) та (6.19) є інтегральною і диференціальною формою першого основного рівняння макроскопічної електродинаміки стаціонарних магнітних полів.

Фізичний смисл цього твердження полягає у тому, що в природі немає джерел магнітного поля, тобто магнітних зарядів, на яких розпочиналися б або закінчувалися силові лінії магнітного поля. Магнітне поле *вихрове*, або *соленоїдалне*.

Магнітний потік крізь поверхню, обмежену контуром, що складається з N витків, має назву *потокозчеплення* цього контуру і дорівнює

$$N \cdot$$

6.10. Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму

Згадаємо, що в електростатиці робота при переміщенні пробного заряду в електростатичному полі не залежить від форми шляху і по довільному замкненому контуру дорівнює нулю. Таке поле є потенціальним. Силові лінії електричного поля незамкнені, вони розпочинаються і закінчуються на зарядах. При цьому циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

На відміну від електростатичного, магнітне поле вихрове і має замкнені силові лінії.

Циркуляцією вектора індукції магнітного поля по замкненому контуру L є інтеграл

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_e dl,$$

де B_e — проекція вектора \vec{B} на напрямок $d\vec{l}$.

Для спрощення розрахунків розглянемо магнітне поле нескінченного прямого провідника зі струмом. За контур інтегрування L оберемо коло радіуса b , яке збігається з силовою лінією магнітного поля (рис. 6.25).

Тоді

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_e dl = \int_L B \cos \alpha dl, \quad (6.20)$$

де α — кут між векторами \vec{B} і $d\vec{l}$, який у цьому випадку дорівнює нулю ($\cos \alpha = 1$). Вектор \vec{B} однаковий у всіх точках контуру,

є дотичним до контуру і за напрямком збігається з елементом контуру $d\vec{l}$.

Величина вектора магнітної індукції для прямого нескінченного струму $B = \frac{\mu_0 I}{2b}$, тому з (6.20) маємо

$$\oint_L B dl = \frac{\mu_0 I}{2b} \oint_L dl = \mu_0 I.$$

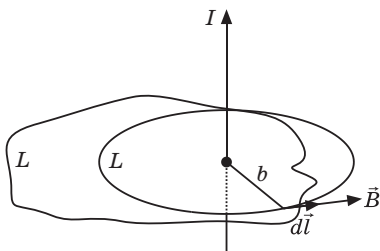


Рис. 6.25

Закон повного струму для вектора \vec{B}

Ця рівність виконується і для контуру довільної форми L , який охоплює струм I

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (6.21)$$

Якщо контур не охоплює струм, то

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0.$$

У загальному випадку, коли контур охоплює декілька струмів, теорема про циркуляцію вектора \vec{B} , або закон повного струму формулюється так: *циркуляція вектора \vec{B} по довільному замкненому контуру дорівнює добутку магнітної сталої μ_0 на алгебраїчну суму струмів, охоплених цим контуром,*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i, \quad (6.22)$$

де n — число провідників зі струмами, охоплених контуром L довільної форми. Додатним вважається струм, напрямок якого складає з напрямком обходу контуру правий гвинт. Наприклад, на рис. 6.26 струми I_1 та I_3 — додатні, а струм I_2 — від'ємний.

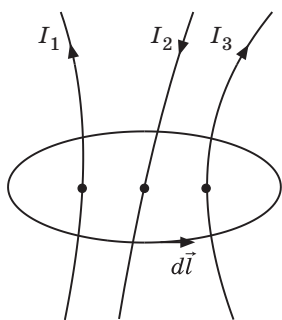


Рис. 6.26

Наслідком (6.22) є те, що робота при перенесенні пробного одиничного елемента струму у магнітному полі в загальному випадку відмінна від нуля. Це є характерним для вихрового поля.

Щоб записати (6.22) в диференціальній формі, візьмемо до уваги, що

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

тоді (6.22) перепишемо так:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (6.23)$$

У математиці вводять поняття ротора векторної функції як векторного добутку оператора Гамільтона на довільний вектор \vec{a}

$$\text{rot } \vec{a} = [\text{grad}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Теорема Стокса

У відповідності з теоремою Стокса

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S},$$

де $\oint_L \vec{a} d\vec{l}$ — циркуляція \vec{a} по довільному контуру L , у правій частині — інтеграл по довільній поверхні S , яка спирається на контур L .

Застосуємо теорему Стокса до лівої частини (6.23)

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S}, \quad (6.24)$$

де S — довільна поверхня, що спирається на контур L . Тоді з (6.23) та (6.24) отримуємо

$$\int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Диференціальна форма закону повного струму

Оскільки поверхня інтегрування довільна, то з рівності інтегралів можна перейти до рівності підінтегральних виразів

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{j}. \quad (6.25)$$

Це рівняння є диференціальною формою закону повного струму або другим з основних диференціальних рівнянь для стаціонарного магнітного поля й означає, що *магнітне поле вихрове і вихорами вектора \vec{B} є струми незалежно від їх походження.*

6.11. Застосування теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції для розрахунку магнітних полів

Визначимо *магнітне поле довгого соленоїда*. Розглянемо соленоїд довжиною l , з кількістю витків N і струмом у витках I .

**Магнітне поле
довгого
соленоїда**

Довжина соленоїда набагато більша за його діаметр, тобто можна вважати соленоїд нескінченно довгим. Тоді всередині соленоїда магнітне поле є однорідним, зовні — дуже слабким (рис. 6.27), яким можна знехтувати.

Для визначення вектора магнітної індукції візьмемо контур $ABCD$ (рис. 6.27). За теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} інтеграл по замкненому контуру можна розглядати як суму чотирьох інтегралів

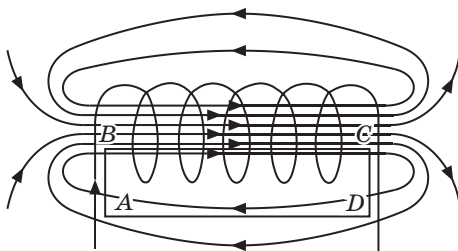


Рис 6.27

$$\oint_{ABCD} \vec{B}_e \cdot d\vec{l} = \int_{AB} B_e dl + \int_{BC} B_e dl + \int_{CD} B_e dl + \int_{DA} B_e dl.$$

На ділянках AB і CD $B_e = 0$ ($\vec{B} \perp d\vec{l}$), на ділянці DA (зовні соленоїда) $B = 0$, а на ділянці BC циркуляція вектора \vec{B} дорівнює Bl , тобто

$$\int_{BC} B_e dl = Bl = \int_0^l 0NI,$$

звідки

$$\int_{ABCD} \vec{B}_e \cdot d\vec{l} = Bl = \int_0^l 0NI.$$

Величина магнітної індукції поля всередині соленоїда (у вакуумі) дорівнює

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI, \quad (6.26)$$

де $n = \frac{N}{l}$ — лінійна густина витків соленоїда.

**Магнітне поле
тороїда**

Знайдемо магнітне поле тороїда. Тороїдом називається котушка зі струмом, витки якої намотані на осердя, що має форму тора (рис. 6.28). Магнітне поле зосереджено всередині тороїда, зовні магнітне поле відсутнє. Лінії магнітної індукції поля тороїда — концентричні кола, центри яких лежать на осі тороїда.

За контур інтегрування виберемо коло радіуса r ($R_1 < r < R_2$). Згідно з теоремою про циркуляцію (6.22),

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \int_0^L 0NI.$$

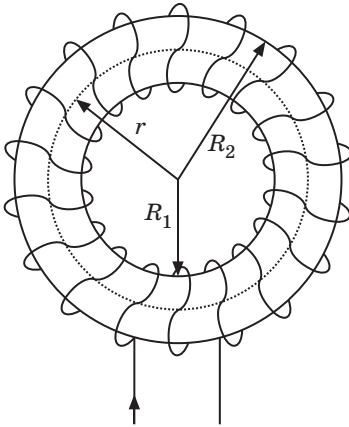


Рис. 6.28

Тоді всередині тороїда з немагнітним осердям індукція магнітного поля дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r}. \quad (6.27)$$

Для тонкого тороїда, діаметр якого малий порівняно з радіусом середньої лінії тороїда,

$$R_{\text{сер}} = \frac{R_1 + R_2}{2} \approx d \quad (R_2 - R_1).$$

Можна вважати поле однорідним по всій площині поперечного перерізу тороїда

$$B = B_{\text{сер}} = \frac{\mu_0 NI}{2 R_{\text{сер}}} = \mu_0 n I,$$

де $n = \frac{N}{2 R_{\text{сер}}}$ — лінійна густина витків тороїда.

6.12. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі

Якщо розглянути контур зі струмом в магнітному полі (рис. 6.29) і вважати, що одна зі сторін контуру довжиною l незакріплена, то на цей провідник діятиме сила Ампера $\vec{F}_A = I[\vec{l}, \vec{B}]$, $F_A = IBl$.

При переміщенні провідника l на відстань dx сила Ампера виконає елементарну роботу

$$dA = F_A dx = IB_n l dx = IB_n dS = Id \cdot d\Phi,$$

оскільки $l dx = dS$ — площа, яка перетинається провідником при переміщенні в магнітному полі; $B_n dS = d\Phi$ — магнітний потік, який пронизує цю площу.

Повна робота, яка виконується при переміщенні провідника з положення 1 в положення 2, дорівнює

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = \int_1^2 IB dS = Id \int_1^2 B_n dS = Id (\Phi_2 - \Phi_1);$$

$$A_{1,2} = Id (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (6.28)$$

Якщо у магнітному полі переміщується замкнений контур, який складається з N витків, то в цьому випадку робота сил Ампера при скінченному переміщенні контуру зі струмом з положення 1 в положення 2 дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 Id \cdot \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Якщо струм залишається постійним $I = \text{const}$, то

$$A_{12} = I \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

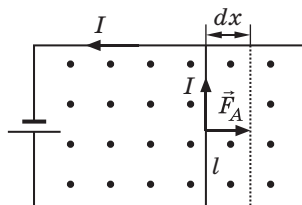


Рис. 6.29

Тобто *робота сил Ампера при переміщенні в сталому магнітному полі замкнутого контуру з постійним струмом дорівнює добутку сили струму в контурі на зміну його потокозчеплення.*

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Яка величина є силовою характеристикою магнітного поля?
2. Як визначають напрямок вектора магнітної індукції?
3. Що характеризують силові лінії магнітного поля і як вони напрямлені?
4. У чому полягає відмінність електричного і магнітного полів?
5. У чому виявляється принципова відмінність силових ліній магнітної індукції від силових ліній електростатичного поля?
6. Чому магнітне поле вважається вихровим?
7. Чому дорівнює сила, діюча в магнітному полі на елемент струму і на провідник скінченної довжини? Як вона напрямлена?
8. Чому дорівнює сила взаємодії двох паралельних провідників?
9. Як визначається одиниця вимірювання сили струму — ампер?
10. Як визначити магнітну сталу μ_0 ?
11. Як поводить себе контур зі струмом в однорідному магнітному полі?
12. Чому дорівнює механічний обертальний момент, що діє на контур зі струмом у магнітному полі?
13. Чому дорівнює потенціальна енергія контуру зі струмом у магнітному полі?
14. Як поводить себе контур зі струмом в неоднорідному магнітному полі?
15. Чому дорівнює і як напрямлена сила, що діє на електричний заряд, який рухається в магнітному полі?
16. Які властивості має сила Лоренца?

17. У чому полягає відмінність електричної сили від сили Лоренца?
18. Чому дорівнює робота сили Лоренца під час руху електричного заряду в магнітному полі?
19. Коли заряджена частинка рухається по гвинтовій лінії? Чому дорівнює радіус кривизни і крок гвинта?
20. У чому полягає ефект Холла? Чому дорівнює холлівська різниця потенціалів?
21. Сформулюйте закон Біо — Савара — Лапласа.
22. За допомогою закону Біо — Савара — Лапласа розрахуйте поле: а) прямого струму, б) на осі колового витка зі струмом.
23. Чому дорівнює магнітний дипольний момент і який напрямок він має?
24. У чому полягає принцип суперпозиції для вектора магнітної індукції?
25. Чому дорівнює і як напрямлене магнітне поле, створене рухомих зарядом?
26. Що таке потік вектора магнітної індукції? Сформулюйте теорему Гаусса для вектора магнітної індукції.
27. Яка теорема доводить вихровий характер магнітного поля? Як вона формулюється?
28. Сформулюйте теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції.
29. У чому полягає відмінність циркуляції для векторів \vec{E} і \vec{B} ?
30. Розрахуйте магнітне поле соленоїда і тороїда.
31. Чому дорівнює робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі? Замкненого контура зі струмом?

Завдання для експрес-контролю

1. Електрон влітає в електричне і магнітне поля, що напрямлені взаємоперпендикулярно. Якою має бути швидкість електрона за величиною і напрямком, щоб він рухався рівномірно і прямолінійно?
2. Поясніть, чому гнучкий замкнений провідник при проходженні по ньому струму намагається прийняти форму кола?
3. Чому дорівнює максимальна робота, що здійснює магнітне поле над зарядом q , що рухається в цьому полі зі швидкістю v ?
4. Позитивно заряджений зразок з пластику перебуває біля північного полюса магніту. Поясніть, як магнітне поле діє на пластик: він притягується до магніту, відштовхується чи залишається нерухомим?

5. По чотирьох провідниках, що перебувають в однорідному магнітному полі \vec{B} , проходить однаковий струм I (рис. 6.30). Укажіть, у якому порядку розташувати рисунки, щоб величина сили, що діє з боку магнітного поля, змінювалась від максимальної до мінімальної. Дайте пояснення.

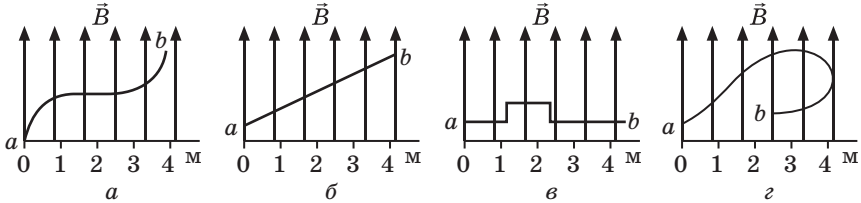


Рис. 6.30

6. Пружна спіраль одним кінцем закріплена на штативі, а другим торкається поверхні ртуті. Що відбудеться, якщо по спіралі пройде електричний струм?
7. Як рухатиметься позитивно заряджена частинка, що влітає під кутом до паралельно напрямлених електричного і магнітного полів?
8. Чому два паралельних провідника, якими йдуть струми в одному напрямку, притягуються, а два паралельних катодних промені (потoki електронів) відштовхуються?
9. Електрон і протон, прискорені однакою різницею потенціалів влітають в однорідне електричне поле перпендикулярно до нього. Порівняйте радіуси кривизни траєкторій електрона і протона.
10. Визначте циркуляцію вектора магнітної індукції для трьох струмів $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 5 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$ і чотирьох контурів a, b, c, d (рис. 6.31).
11. Чи може магнітна індукція в вакуумі визначатися так: 1) $\vec{B} = a(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$, 2) $\vec{B} = a(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$, де $a = \text{const}$. Якщо це так, знайдіть густину струму $\vec{j}(x, y, z)$.
12. По порожнистому мідному циліндру йде постійний струм у напрямку, паралельному його осі. Чи намагнітиться сталевий стрижень, розташований усередині циліндра? Дайте пояснення.

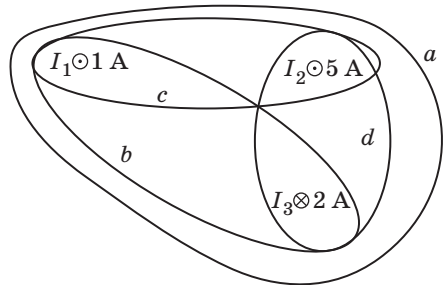


Рис. 6.31

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Квадратний провідний контур, сторона якого дорівнює $a = 40$ см, розташований в одній площині з нескінченним прямолінійним проводом зі струмом $I = 4$ А так, що його дві сторони паралельні проводу (рис. 6.32, а). Сила струму в контурі $I_1 = 2$ А. Визначити силу, яка діє на контур, якщо відстань між проводом і найближчою стороною квадрата дорівнює $b = 5$ см. Напрямки струму у проводі і найближчій до нього стороні квадрата збігаються. Чому дорівнює сила, що діє на сторону a ?

Розв'язання

Результуюча сила, що діє на контур, дорівнює геометричній сумі сил, які діють з боку магнітного поля на кожну зі сторін квадрата, тобто

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4. \quad (1)$$

Відповідно до закону Біо — Савара — Лапласа, магнітна індукція \vec{B} перпендикулярна площині контуру і спрямована від нас.

Сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ мають напрямки відповідно до закону Ампера і показані на рис. 6.32, б.

Сили \vec{F}_2 і \vec{F}_4 , тому вони компенсують одна одну. Отже, результуюча сила

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3.$$

Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_3 спрямовані протилежно одна одній, тому величина результуючої сили

$$F = F_1 - F_3. \quad (2)$$

і спрямована у бік провідника зі струмом I .

Сила взаємодії \vec{F}_1 нескінченного проводу з найближчою до нього стороною квадрата

$$F_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{2 b}. \quad (3)$$

Відповідно для сили \vec{F}_3 маємо

$$F_3 = \frac{\mu_0 I I_1}{2 (b + a)}. \quad (4)$$

Підставляючи (3) і (4) у формулу (2), отримаємо

$$F = \frac{\mu_0 I I_1}{2} a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b + a} \right) = \frac{\mu_0 I I_1 a^2}{2 (a + b)b}. \quad (5)$$

Підставивши у (5) чисельні значення величин, маємо $F = 5,69 \text{ мкН}$.

Щоб знайти силу, що діє на провідник a , розділимо його на елементи dx . Сила, що діє з боку струму I на елемент струму $I_1 d\vec{x}$, дорівнює

$$d\vec{F} [I_1 d\vec{x}, \vec{B}],$$

де $B = \frac{\mu_0 I}{2x}$ — магнітне поле, створене струмом I в місці знаходження $I_1 d\vec{x}$ (рис. 6.32, б). Тоді

$$dF = \frac{\mu_0 I I_1 dx}{2x},$$

де x змінюється від b до $(a + b)$.

У результаті сила, що діє на сторону a зі струмом I_1 , дорівнює

$$F = \frac{\mu_0 I I_1}{2} \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I I_1}{2} \ln \frac{a+b}{b} = \frac{\mu_0 I I_1}{2} \ln 1 + \frac{b}{a} = 0,19 \text{ мкН}.$$

Задача 2

Протон, прискорений різницею потенціалів $U = 500 \text{ кВ}$, пролітає поперечне однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,51 \text{ Тл}$. Ширина області з полем $d = 10 \text{ см}$ (рис. 6.33). Знайти кут відхилення протона від початкового напрямку руху.

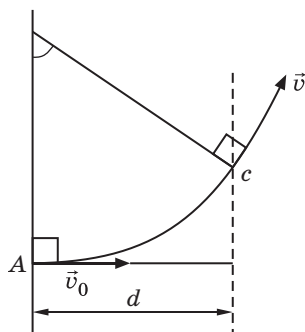


Рис. 6.33

Розв'язання

Перш ніж потрапити в однорідне магнітне поле, протон рухається у прискорювальному електричному полі. Робота сил електричного поля йде при цьому на збільшення його кінетичної енергії

$$|e|U = \frac{m_p v_0^2}{2}, \quad (1)$$

де e — заряд протона; m_p — його маса; v_0 — швидкість, набута протонем в електричному полі.

З рівняння (1)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2|e|U}{m_p}}. \quad (2)$$

На протон, що рухається в магнітному полі, діє сила Лоренца $\vec{F} = |e|[\vec{v}, \vec{B}]$, яка надає протону нормального прискорення,

$$F = m_p a_n; \quad |e|vB = m_p \frac{v^2}{R},$$

Вектори \vec{v}_0 і \vec{v} мають тільки різний напрямок, але однакові за величиною, оскільки сила Лоренца роботу не виконує і величину швидкості заряду змінити не може, отже, з урахуванням (2) отримаємо

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_p U}{|e|}} = 2 \text{ м.}$$

Вийшовши з магнітного поля, протон продовжуватиме рух по прямій під деяким кутом до напрямку вектора початкової швидкості \vec{v}_0 . Вектори \vec{v} і \vec{v}_0 перпендикулярні радіусам відповідно у точках A і C (рис. 6.33), тому кут можна знайти зі співвідношення $R = L \sin \alpha$, де $L = AC$ — довжина дуги.

Для $R = d$, що має місце у нашому випадку, можна вважати $AC = L = d$. Таким чином

$$\frac{d}{R} = 0,51 \text{ рад.}$$

Задача 3

Кутова швидкість, з якою рухається електрон в однорідному магнітному полі коловою орбітою, дорівнює $3,52 \cdot 10^{10}$ рад/с. Визначити магнітну індукцію поля.

Розв'язання

На заряджену частинку, яка рухається в однорідному магнітному полі, діє сила Лоренца (магнітна сила).

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (1)$$

де q — заряд частинки; \vec{v} — її швидкість; \vec{B} — магнітна індукція поля.

У нашому випадку $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Оскільки електрон рухається коловою орбітою, швидкість \vec{v} електрона перпендикулярна магнітній індукції \vec{B} . Тому вираз (1) набуває вигляду

$$F_L = evB. \quad (2)$$

Ця сила Лоренца надає електрону нормального прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (3)$$

де R — радіус колової орбіти.

Відповідно до другого закону Ньютона,

$$F_{\text{Л}} = ma_n, \quad (4)$$

де $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг — маса електрона.

Тоді з виразів (2), (3) і (4) отримаємо рівняння

$$\frac{mv^2}{R} = evB, \quad (5)$$

звідси

$$B = \frac{mv}{eR}. \quad (6)$$

Оскільки $v = R\omega$, маємо

$$B = \frac{m\omega}{e}. \quad (7)$$

Підставивши в (7) чисельні значення величин, маємо $B = 0,2$ Тл.

Задача 4

По коловому витку йде струм силою $I = 30$ А. Напруженість H магнітного поля в центрі витка дорівнює 100 А/м. Визначити магнітний момент витка.

Розв'язання

Магнітний момент колового витка зі струмом знаходимо з виразу

$$p_m = IS, \quad (1)$$

де $S = R^2$ — площа витка, I — сила струму у витку.

Щоб знайти радіус витка, скористаємося виразом для напруженості магнітного поля у центрі витка

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (2)$$

Звідки

$$R = \frac{I}{2H}. \quad (3)$$

Підставляючи в (1) площу витка S з урахуванням (3), знаходимо

$$p_m = \frac{I^3}{4H^2}. \quad (4)$$

Після обчислення за формулою (4) знаходимо $p_m = 2,12 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Задача 5

Відстань між двома паралельними прямими нескінченно довгими проводами, якими течуть у протилежних напрямках струми силою $I_1 = 30$ А і $I_2 = 40$ А, дорівнює $d = 5$ см. Визначити магнітну індукцію B у точці, яка знаходиться від першого провідника на відстані $r_1 = 10$ см і $r_2 = 20$ см від другого.

Розв'язання

Вектор магнітної індукції \vec{B} у зазначеній точці згідно з принципом суперпозиції полів \vec{B}_1 і \vec{B}_2 , що створені струмами відповідно у першому та другому проводах окремо у цій точці, дорівнює геометричній сумі полів \vec{B}_1 і \vec{B}_2 , тобто

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Напрямки векторів \vec{B}_1 і \vec{B}_2 визначаються за законом Біо — Савара — Лапласа (рис. 6.34).

Абсолютне значення магнітної індукції B знайдемо за теоремою косинусів з трикутника ACD , у якому сторона $CD = B$ і сторона $AC = B_1$. Кут ACD позначимо як α . Тоді

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \alpha}. \quad (1)$$

Значення величин магнітних індукцій B_1 і B_2 знаходимо за формулами:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2 r_1} \quad \text{і} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2 r_2}. \quad (2)$$

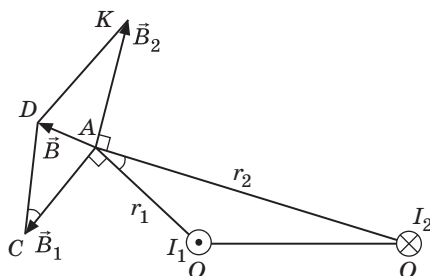


Рис. 6.34

Кут ACD дорівнює куту AOA як кути, що знаходяться між взаємно перпендикулярними сторонами ($OA \perp AC$, $OA \perp AK$, $AK \parallel CD$), тому значення $\cos \alpha$ знайдемо з трикутника OAO . Згідно з теоремою косинусів $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha$, звідки

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}. \quad (3)$$

Підставляючи (2), (3) у вираз (1), знаходимо

$$B = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} - \frac{I_1 I_2}{r_1^2 r_2^2} (r_1^2 + r_2^2 - d^2)}. \quad (4)$$

Підставивши у формулу (4) числові значення I_1, I_2, r_1, r_2 і d , знаходимо $B = 57,4$ мкТл.

Задача 6

По циліндру радіусом R і висотою h йде рівномірно розподілений на висоті струм I . Визначити модуль вектора магнітної індукції в довільній точці на осі циліндра.

Розв'язання

Застосуємо метод диференціювання й інтегрування. Розділимо циліндр на дуже вузькі кільця товщиною dx , кожне з яких можна вважати за кільцевий провідник (рис. 6.35). Нехай довільне кільце знаходиться на відстані x від точки O . Елементарний струм, що йде по цьому кільцю, дорівнює

$$dI = \frac{I}{h} dx.$$

Величина елементарної магнітної індукції, створеної цим струмом у точці O (див. формулу 6.14), дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 dx}{2h(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

За змінну обираємо кут α (кут між напрямком на кільце і віссю циліндра). Тоді

$$x = R \operatorname{ctg} \alpha; \quad dx = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}; \quad R^2 + x^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha},$$

звідки

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{2h}.$$

Магнітне поле, створене струмом у циліндрі по осі циліндра, після інтегрування дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2h} \int_0^\pi (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

1

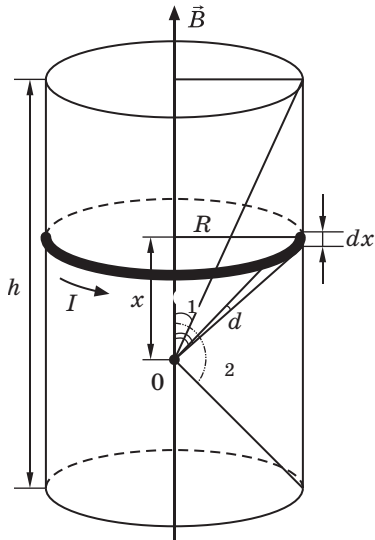


Рис. 6.35

Ця формула може бути використана і для соленоїда, якщо взяти до уваги, що сила струму в соленоїді $I_c = I/hn$, де n — число витків на одиницю довжини соленоїда. В результаті для соленоїда магнітна індукція на осі така:

$$B = \frac{\mu_0 n I_c}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Задача 7

Тонке дротяне кільце радіусом $R = 10$ см розташоване відносно нескінченного прямого проводу так, що його площина паралельна цьому проводу. Перпендикуляр, проведений із центра кільця до проводу, є нормаллю до площини кільця. Струм у проводі $I_1 = 1$ А. Струм у кільці $I_2 = 2$ А. Відстань від провідника до центра кільця $d_1 = 20$ см, а відстань до точки A на осі кільця дорівнює $d_2 = 30$ см (рис. 6.36). Знайти магнітну індукцію в точці A .

Розв'язання

Відповідно до принципу суперпозиції полів магнітна індукція \vec{B} у точці A , яка розташована на осі колового струму на відстані d_2 від центра кільця, дорівнює геометричній сумі векторів

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (1)$$

де \vec{B}_1 — магнітна індукція, яка створюється у точці A нескінченим прямим проводом, а \vec{B}_2 — відповідно кільцем.

Модуль $|\vec{B}|$ відповідно до рис. 6.36, б

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}. \quad (2)$$

Магнітна індукція \vec{B}_1 прямого нескінченного проводу у точці A

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2 (d_1 + d_2)}. \quad (3)$$

Щоб знайти магнітну індукцію B_2 кільця у точці A , скористаємось законом Біо — Савара — Лапласа

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (4)$$

Кожний елемент струму $d\vec{l}$ створює у точці A магнітну індукцію $d\vec{B}_2$. Усі вектори $d\vec{B}_2$ перпендикулярні до площин, що проходять через відповідний елемент струму $d\vec{l}$ і точку A , в якій визначаємо поле (рис. 6.36, а).

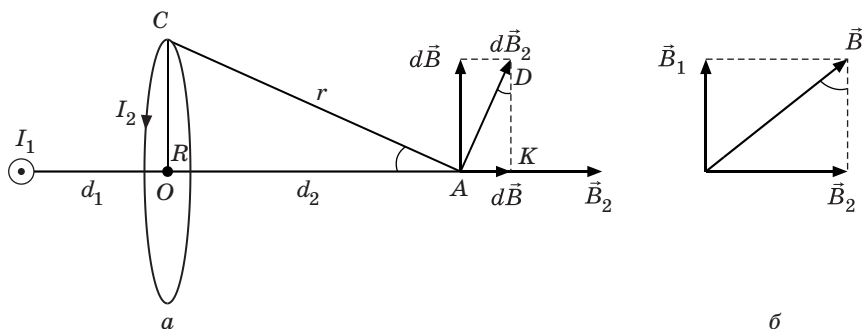


Рис. 6.36

Розкладемо вектор $d\vec{B}_2$ на нормальну до OA і паралельну складові, тобто

$$d\vec{B}_2 = d\vec{B} + d\vec{B}_{\parallel}. \quad (5)$$

Сумарне поле у точці A від кільця

$$\vec{B}_2 = \oint d\vec{B}_2 = \oint d\vec{B} + \oint d\vec{B}_{\parallel}. \quad (6)$$

Внаслідок симетрії $\oint d\vec{B} = 0$. Отже, $\vec{B}_2 = \oint d\vec{B}_{\parallel}$ і результуючий вектор \vec{B}_2 напрямлений уздовж осі контуру. Кожний з векторів $d\vec{B}_2$ вносить у результуючий вектор \vec{B}_2 внесок $d\vec{B}_{\parallel}$, що за модулем дорівнює

$$dB_{\parallel} = dB_2 \sin \theta. \quad (7)$$

Розглянемо трикутники OCA і ADK . Кути OAC і ADK рівні один одному як такі, що вміщені між взаємно перпендикулярними сторонами.

Тоді з трикутника OCA

$$\sin \theta = \frac{R}{r}. \quad (8)$$

Отже, відповідно до закону Біо — Савара — Лапласа (4) з урахуванням (7) і (8) маємо

$$dB_{\parallel} = \frac{0}{4} \frac{I_2 dl R}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{0}{4} \frac{I_2 R^2}{r^3} dl. \quad (9)$$

Оскільки $r = \sqrt{R^2 + d_2^2}$, то вираз (9) має вигляд

$$dB_{\parallel} = \frac{0}{4} \frac{I_2 R dl}{(R^2 + d_2^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Проінтегруємо (10) по контуру й отримаємо модуль вектора \vec{B}_2

$$B_2 = \oint dB_{\parallel} = \frac{0}{4} \frac{I_2 R}{(R^2 - d_2^2)^{3/2}} \int_0^{2R} dl = \frac{0}{4} \frac{I_2 R}{(R^2 - d_2^2)^{3/2}} 2R,$$

або

$$B_2 = \frac{0 I_2 R^2}{2(R^2 - d_2^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Таким чином, результуюча магнітна індукція B у точці відповідно до (2), (3) і (11) має вигляд

$$B = \frac{0}{2} \sqrt{\frac{I_1^2}{2(d_1 - d_2)^2} + \frac{I_2^2 R^4}{(R^2 - d_2^2)^3}}.$$

Підставляючи значення I_1, I_2, R, d_1 і d_2 , отримуємо $B = 0,29$ мкТл.

Задача 8

Застосовуючи теорему про циркуляцію вектора \vec{B} , визначити індукцію і напруженість магнітного поля на осі тороїда без осердя, який має $N = 300$ витків і по обмотці якого тече струм силою $I = 3$ А. Зовнішній діаметр тороїда $D_1 = 40$ см, внутрішній $D_2 = 30$ см.

Розв'язання

Знайдемо радіус r середньої лінії тороїда

$$r = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = \frac{1}{4}(D_1 + D_2). \quad (1)$$

Обчислимо циркуляцію вектора \vec{B} по контуру L , який являє собою коло радіусом r ,

$$\oint_L B_{\perp} dl = \int_0^{2\pi r} B dl = B \int_0^{2\pi r} dl = B 2\pi r. \quad (2)$$

Відповідно до теореми про циркуляцію вектора \vec{B} , ця циркуляція дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються контуром, помноженій на μ_0 , де $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнітна стала, тобто

$$\oint_L B dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k. \quad (3)$$

Контур, що проходить уздовж середньої лінії тороїда, охоплює число струмів, яке дорівнює числу витків тороїда. Отже,

$$\mu_0 \sum_{k=1}^n I_k = NI. \quad (4)$$

Прирівнявши відповідно вирази (2) і (4), маємо

$$B = \mu_0 N I, \quad (5)$$

звідки

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2 r}. \quad (6)$$

Напруженість магнітного поля H пов'язана з магнітною індукцією співвідношенням $B = \mu_0 H$. Тоді

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{N I}{2 r}. \quad (7)$$

З урахуванням (1) вирази (6) і (7) набувають вигляду

$$B = \frac{2 \mu_0 N I}{(D_1 + D_2)}; \quad (8)$$

$$H = \frac{2 N I}{(D_1 + D_2)}. \quad (9)$$

Підставляючи значення відповідних величин у вирази (8) і (9), отримуємо $B = 1,03$ мТл; $H = 0,82$ кА/м.

Задача 9

По суцільному нескінченному циліндричному провіднику радіусом R йде струм I . Розрахуйте магнітне поле всередині і зовні провідника.

Розв'язання

Незважаючи на те, що провідник прямий, але він не тонкий, тому закон Біо — Савара — Лапласа застосувати не можна. Для розрахунку магнітного поля застосуємо теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (1)$$

1) У першому випадку $r < R$, тобто радіус контуру менший за радіус провідника і величина струму, що проходить крізь контур 1, дорівнює I_1 (рис. 6.37)

$$I_1 = I_0 \frac{r^2}{R^2} = I_0 \frac{r^2}{R^2}.$$

Вектор \vec{B}_1 збігається за напрямком з вектором $d\vec{l}$, тоді рівняння (1) перетворюється на рівняння

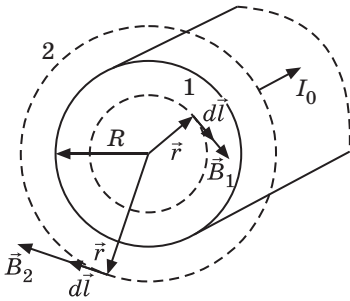


Рис. 6.37

2) Для $r < R$ після аналогічних розрахунків отримаємо

$$B_2 = 2 \pi r \cdot 0 I_0; \quad B_2 = \frac{0 I_0}{2 r}.$$

На рис. 6.38 зображено залежність $B(r)$ усередині і зовні провідника.

$$B_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{I_0}{R^2} dl;$$

$$B_1 = 2 \pi r \cdot 0 I_0 \frac{r^2}{R^2},$$

$$B_1 = \frac{0 I_0}{2 R^2} r.$$

звідки

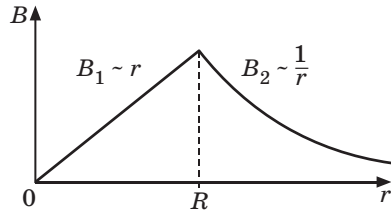


Рис. 6.38

Задача 10

В однорідному магнітному полі індукцією $B = 1,26$ мТл перебуває рамка у формі еліпса, велика вісь якого дорівнює $2a = 10$ см, а мала — $2b = 6$ см. Площина рамки складає з напрямком магнітного поля кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити магнітний потік, який пронизує рамку.

Розв'язання

За визначенням магнітний потік, що пронизує плоску поверхню, у випадку однорідного магнітного поля дорівнює

$$\Phi = BS \cos \alpha, \tag{1}$$

де B — магнітна індукція; S — площа контуру; α — кут між нормаллю до площини контуру і вектором магнітної індукції.

Отже, в даному випадку $\alpha = 60^\circ$. Площа еліпса дорівнює

$$S = ab. \tag{2}$$

Тоді підставивши (2) у (1), маємо

$$\Phi = ab \cos \alpha. \tag{3}$$

І в результаті чисельних розрахунків отримуємо $\Phi = 295,8$ мкВб.

Задача 11

Плоский коловий контур діаметром 8 см, по якому тече струм силою $I = 20$ А, вільно підвішений в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,63$ Тл. Визначити роботу, яку потрібно здійснити, щоб повернути контур на кут $\pi/4$ відносно осі, яка збігається з діаметром кола.

Розв'язання

На контур зі струмом в однорідному магнітному полі діє механічний момент

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (1)$$

модуль якого визначається як

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (2)$$

де \vec{B} — магнітна індукція поля; \vec{p}_m — магнітний момент контуру; α — кут між векторами \vec{p}_m і \vec{B} .

Коли контур вільно встановлений у магнітному полі, кут $\alpha = 0$ і механічний момент теж дорівнює нулю, а вектори \vec{p}_m і \vec{B} збігаються за напрямком. Якщо вивести контур зі стану рівноваги, то механічний момент, який виникає при цьому, намагається повернути його у стан рівноваги. Отже, проти цього моменту здійснюватиметься робота зовнішніми силами

$$dA = \vec{M} d\alpha. \quad (3)$$

З урахуванням формули (2) маємо

$$dA = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (4)$$

Повна робота при повороті контуру на кут $\pi/4$

$$A = \int_0^{\pi/4} p_m B \sin \alpha d\alpha = p_m B \cos \alpha \Big|_0^{\pi/4} = p_m B \cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 = p_m B \frac{\sqrt{2}}{2} - 1. \quad (5)$$

Магнітний момент контуру

$$p_m = IS = I \frac{d^2}{4}. \quad (6)$$

Отже, з урахуванням (6) вираз (5) набуває вигляду

$$A = \frac{I d^2}{4} B \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Підставивши числові значення, маємо $A = 18,5$ мДж.

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Провідник, по якому йде струм 2 А розташований горизонтально в напрямку з півночі на південь. Маса провідника на одиницю довжини $0,5$ г/см. Яку мінімальну величину і напрямком повинно мати магнітне поле, щоб провідник почав рухатися вгору?

Відповідь: $B = 0,245$ Тл, на схід.

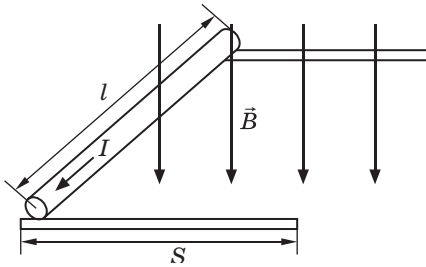


Рис. 6.39

6.2. Товстий циліндричний провідник, по якому йде струм 30 А, може котитись по двох паралельних рейках довжиною $S = 0,65$ м без ковзання (рис. 6.39). Маса провідника $0,5$ кг, його довжина $l = 17$ см. Уся система розташована в вертикальному однорідному магнітному полі $B = 0,2$ Тл. Яку

швидкості набуває провідник, коли досягне кінця рейок?

Відповідь: $v = 2,3$ м/с.

6.3. Стрижень розташований перпендикулярно рейкам, відстань між якими $l = 0,5$ м. Кут між рейками і лінією обрію 30° . Яку величину повинна мати індукція магнітного поля, перпендикулярного площині рейок, щоб стрижень почав рухатись, якщо по ньому йтиме струм силою $I = 40$ А? Коефіцієнт тертя ковзання $0,6$. Маса стрижня 1 кг.

Відповідь: $B_1 = 0,5$ Тл; $B_2 = 9,6$ мТл.

6.4. В однорідному магнітному полі з індукцією, напрямленою під кутом 30° до вертикалі, вертикально вгору рухається прямий провідник масою $0,2$ кг, по якому йде струм 4 А. Через 3 с після початку руху провідник набуває швидкості 12 м/с. Знайдіть довжину провідника l .

Відповідь: $l = 0,69$ м.

6.5. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 3$ мТл (рис. 6.40) розташований тонкий провідник у вигляді півкола

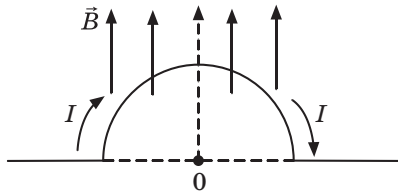


Рис. 6.40

радіусом $R = 10$ см, по якому йде струм $I = 5$ А. Знайти силу, що діє на провідник.

Відповідь: $F = 3$ мН.

6.6. Сила взаємодії двох однакових плоских контурів у формі квадратів, якими проходять однакові струми, дорівнює 192 мН. Відстань між відповідними сторонами контурів 1 мм. Сторона квадрата дорівнює 30 см. Визначити силу струму.

Відповідь: $I = 20$ А.

6.7. Довгий прямий провідник і квадратна рамка з дроту розташовані в одній площині так, що дві її сторони паралельні провіднику. По рамці і провіднику проходять однакові струми. Найближча до провідника сторона рамки знаходиться на відстані, яка дорівнює її довжині. Сила взаємодії між рамкою і провідником дорівнює 0,4 Н. Знайти силу струмів.

Відповідь: $I = 2000$ А.

6.8. Двома паралельними провідниками довжиною 1,2 м кожний проходять струми однакової сили $I = 4,6$ А. Відстань між провідниками дорівнює 1 см. Знайти силу взаємодії струмів між собою.

Відповідь: $F = 0,5$ мН.

6.9. Два тонкі дротяні кільця радіусом 20 см кожне розташовані у паралельних площинах, відстань між якими дорівнює 2 мм. Кільцями проходять однакові струми. Сила взаємодії цих кілець дорівнює 28,2 мН. Знайти силу струмів у кільцях.

Відповідь: $I = 15$ А.

6.10. Дротяне кільце радіусом 3,19 см розташоване в однорідному магнітному полі, індукція якого дорівнює 0,1 Тл. Площина кільця складає кут 45° з напрямком магнітного поля. По кільцю протікає струм. У результаті взаємодії магнітного поля з кільцем на останній діє обертальний момент $4,5 \cdot 10^4$ Н·м. Знайти силу струму у кільці.

Відповідь: $I = 2$ А.

6.11. Дротяний квадратний контур розташований у магнітному однорідному полі, індукція якого 0,1 Тл. Площина контуру складає деякий кут з напрямком магнітного поля. По контуру

протікає струм силою 2 А. Знайти цей кут, якщо довжина сторони квадрата 5 см, а обертальний момент сил, що діє на контур, дорівнює $3,53 \cdot 10^{-4}$ Н·м.

Відповідь: 45 .

6.12. Квадратну рамку площею $S = 10 \text{ см}^2$ розташували в однорідному магнітному полі так, що нормаль до площини рамки складає з напрямком магнітного поля кут 30° . Магнітна індукція поля $B = 0,2$ Тл. Сила струму, який протікає по рамці, дорівнює 0,5 А. Визначити обертальний момент, який діє на цю рамку.

Відповідь: $M = 50 \text{ мкН м}$.

6.13. Двома довгими паралельними провідниками протікають струми в одному напрямку $I_1 = 5 \text{ А}$ і $I_2 = 10 \text{ А}$. Провідники, які спочатку перебувають на відстані $d_1 = 15 \text{ см}$, розсовують до відстані $d_2 = 30 \text{ см}$. Яка робота (на одиницю довжини провідника) при цьому виконується?

Відповідь: $\frac{A}{l} = 6,98 \cdot 10^{-7} \text{ Дж/м}$.

6.14. Сила, що діє на провід зі струмом $I = 70 \text{ А}$, який розташований перпендикулярно силовим лініям однорідного магнітного поля, дорівнює 4,9 Н. Визначити довжину l цього проводу, якщо індукція магнітного поля $B = 0,1$ Тл.

Відповідь: $l = 70 \text{ см}$.

6.15. У скільки разів потрібно збільшити відстань між двома прямолінійними паралельними провідниками, якими течуть струми одного напрямку й однієї величини $I_1 = I_2 = 20 \text{ А}$, щоб здійснена при цьому робота (на одиницю довжини провідника) складала $A/l = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}$?

Відповідь: удвічі.

6.16. Визначити силу струму I , який проходить двома паралельними прямими провідниками довжиною 3 м кожний, якщо сила їх взаємодії дорівнює 64 Н. Струми в провідниках однакові за величиною, а відстань між провідниками 15 см.

Відповідь: $I_1 = I_2 = 4 \text{ кА}$.

6.17. Напруженість H магнітного поля в центрі колового витка дорівнює 100 А/м. Магнітний момент p_m витка дорівнює $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Обчислити силу струму у витку.

Відповідь: $I = 23,4 \text{ А}$.

6.18. Магнітний момент p_m колового витка дорівнює $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$. Сила струму у витку 37 А . Знайти напруженість H магнітного поля в центрі витка.

Відповідь: $H = 200 \text{ А/м}$.

6.19. Обчислити радіус колового витка, яким протікає струм, якщо напруженість H магнітного поля в центрі витка дорівнює 150 А/м , а магнітний момент має величину $0,75 \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

Відповідь: $R = 9,25 \text{ см}$.

6.20. Радіус колового витка, яким протікає струм, дорівнює 10 см . Напруженість магнітного поля H у центрі цього витка дорівнює 100 А/м . Знайти магнітний момент витка.

Відповідь: $p_m = 0,628 \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

6.21. Сила струму в коловому витку дорівнює 40 А . Напруженість H магнітного поля в центрі цього витка складає 100 А/м . Знайти магнітний момент p_m витка.

Відповідь: $p_m = 5,02 \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

6.22. По кільцю протікає струм. Магнітна індукція на осі кільця на відстані $d = 80 \text{ см}$ від його площини $B = 20 \text{ нТл}$. Вважаючи, що радіус кільця $R = d$, визначити магнітний момент кільця зі струмом.

Відповідь: $p_m = 51,2 \text{ мА}\cdot\text{м}^2$.

6.23. Магнітний момент кільця зі струмом $p_m = 50 \text{ мА}\cdot\text{м}^2$. На осі кільця на деякій відстані d від його площини магнітна індукція $B = 10 \text{ нТл}$. Визначити цю відстань за умови, що радіус кільця R набагато менший відстані d .

Відповідь: $d = 1 \text{ м}$.

6.24. Знайти магнітний момент тонкого кільця радіусом $R = 5 \text{ см}$, на якому рівномірно розподілений заряд $q = 100 \text{ нКл}$, відносно осі, що збігається з одним з діаметрів кільця, якщо кільце рівномірно обертається з частотою $n = 10 \text{ с}^{-1}$.

Відповідь: $p_m = 3,92 \text{ нА}\cdot\text{м}^2$.

6.25. Тонке кільце радіусом $R = 10 \text{ см}$ рівномірно заряджене. Кільце обертається з кутовою швидкістю 25 рад/с відносно осі, що збігається з одним з діаметрів кільця. Знайти заряд кільця,

якщо магнітний момент, обумовлений обертанням кільця, дорівнює $p_m = 5 \text{ нАм}^2$.

Відповідь: $q = 80 \text{ нКл}$.

6.26. По тонкому стрижню довжиною $l = 10 \text{ см}$ рівномірно розподілений заряд q . Стрижень обертається з кутовою швидкістю 10 рад/с відносно осі, перпендикулярної стрижню і такою, що проходить крізь його середину. Магнітний момент, обумовлений обертанням зарядженого стрижня, дорівнює $p_m = 5 \text{ нА} \cdot \text{м}^2$. Визначити величину заряду q .

Відповідь: $q = 1,2 \text{ мкКл}$.

6.27. Стрижень довжиною $l = 20 \text{ см}$ заряджений рівномірно розподіленим зарядом з лінійною густиною $0,2 \text{ мкКл/м}$. Стрижень обертається з частотою $n = 20 \text{ с}^{-1}$ відносно осі, що перпендикулярна стрижню і проходить через його кінець. Визначити магнітний момент, обумовлений обертанням стрижня.

Відповідь: $p_m = 3,36 \cdot 10^8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

6.28. Тонке кільце радіусом 10 см рівномірно обертається відносно осі, яка проходить крізь його центр перпендикулярно площині кільця. По кільцю рівномірно розподілений заряд 5 нКл . Знайти частоту обертання кільця, якщо магнітний момент колового струму, що створюється кільцем, дорівнює $3,14 \text{ нА} \cdot \text{м}^2$.

Відповідь: $n = 20 \text{ с}^{-1}$.

6.29. По поверхні диску, радіусом 20 см рівномірно розподілений заряд $0,3 \text{ мкКл}$. Диск рівномірно обертається з частотою 15 с^{-1} відносно осі, що проходить крізь його центр перпендикулярно площині поверхні. Знайти магнітний момент p_m кругового струму, створеного диском.

Відповідь: $p_m = 0,28 \text{ мкА} \cdot \text{м}^2$.

6.30. Диск радіусом $R = 8 \text{ см}$ заряджений рівномірно з поверхневою густиною заряду 100 нКл/м^2 . Чому дорівнює кутова швидкість обертання диску відносно осі, що проходить крізь його центр перпендикулярно площині диску, якщо його магнітний момент, обумовлений обертанням диску, дорівнює $p_m = 1,93 \cdot 10^{10} \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Відповідь: 60 рад/с .

6.31. З провідника довжиною $l = 6 \text{ м}$ і масою $0,1 \text{ кг}$ зроблено квадратну рамку зі стороною $0,1 \text{ м}$. По ній йде струм $14,2 \text{ А}$. Рамка розташована в вертикальному магнітному полі $B = 0,1 \text{ Тл}$ так, що

кут між площиною рамки і горизонтальною площиною дорівнює .
Визначити кут , при якому рамка буде в рівновазі, а також
механічний момент, що діє на рамку з боку магнітного поля.

Відповідь: 13 ; M $4,8 \cdot 10^2$ Н·м.

6.32. Протон рухається перпендикулярно силовим лініям
однорідного магнітного поля зі швидкістю v 10^6 м/с напрямле-
ний вздовж осі Z . Прискорення протона дорівнює $2 \cdot 10^{13}$ м/с² по осі
 $-x$. Визначте напрямок і величину магнітної індукції.

Відповідь: B $0,21$ Тл, напрямок $-y$.

6.33. На екваторі біля поверхні Землі величина магнітної індук-
ції 50 мкТл (напрямок на північ), а напруженість електричного
поля 100 Н/Кл (напрявлена вниз до землі). Знайти сили (і їх на-
прямок), які діють на електрон, що рухається на схід зі швидкістю
 $6 \cdot 10^6$ м/с, з боку гравітаційного, електричного і магнітного полів.

Відповідь: F_g $8,93 \cdot 10^{30}$ Н; F_e $1,60 \cdot 10^{17}$ Н;

F_B $4,80 \cdot 10^{17}$ Н.

6.34. Протон рухається зі швидкістю \vec{v} ($2\vec{i}$ $4\vec{j}$ \vec{k}) м/с у маг-
нітному полі величиною \vec{B} (\vec{i} $2\vec{j}$ $3\vec{k}$) Тл. Чому дорівнює сила, що
діє на протон з боку магнітного поля?

Відповідь: $|F_B|$ $2,34 \cdot 10^{18}$ Н.

6.35. Електрон рухається в однорідному магнітному полі
 \vec{B} ($1,4\vec{i}$ $2,1\vec{j}$) Тл зі швидкістю \vec{v} $3,7 \cdot 10^5 \vec{j}$ м/с. Знайти силу, що
діє на електрон з боку магнітного поля.

Відповідь: \vec{F}_B ($8,3 \cdot 10^{14} \vec{k}$) Н.

6.36. Заряджена частинка, що має питомий заряд
 q/m $96,3$ МКл/кг, влетіла в однорідне магнітне поле з індукцією
 B $0,52$ Тл і описала дугу кола радіусом 4 см. Визначити швидкість
цієї частинки.

Відповідь: v $2 \cdot 10^6$ м/с.

6.37. На заряджену частинку з енергією W 1 кеВ, що рухається
в однорідному магнітному полі по колу радіусом R , діє з боку поля
сила F $0,32$ пН. Знайти радіус кола.

Відповідь: R 1 мм.

6.38. Частота обертання електрона коловою орбітою в магніт-
ному полі 562 МГц. Визначити індукцію B магнітного поля.

Відповідь: B $0,2$ Тл.

6.39. Радіус кола, яким рухається протон, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів U і влетів у однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,3$ Тл, дорівнює 12 мм. Визначити цю різницю потенціалів.

Відповідь: $U = 600$ В.

6.40. Заряджена частинка рухається прямолінійно, не відхиляючись, перпендикулярно схрещеним під прямим кутом електричному і магнітному полям. Індукція магнітного поля $B = 0,1$ Тл. Швидкість частинки 10^6 м/с. Визначити напруженість E електричного поля.

Відповідь: $E = 100$ кВ/м.

6.41. Електрон рухається по колу в однорідному магнітному полі. Період обертання електрона $T = 2,84$ нс. Визначити напруженість H магнітного поля.

Відповідь: $H = 10$ кА/м.

6.42. Знайти період обертання електрона, що рухається в однорідному магнітному полі, індукція якого дорівнює $B = 0,01$ Тл.

Відповідь: $T = 3,57$ нс.

6.43. Електрон абсолютно пружно стикається з іншим електроном, що перебуває у спокої. Після зіткнення електрони починають рухатись перпендикулярно магнітному полю $B = 6$ мТл круговими траєкторіями радіусами $R_1 = 2,5$ см і $R_2 = 1,5$ см. Визначити початкову кінетичну енергію першого електрона.

Відповідь: $W_k = 2,69$ кеВ.

6.44. На електрон, що рухається в однорідному магнітному полі перпендикулярно лініям індукції по колу радіусом $R = 0,6$ см, діє сила $F = 2$ пН. Визначити індукцію магнітного поля B .

Відповідь: $B = 0,14$ Тл.

6.45. Кутова швидкість електрона, що рухається в однорідному магнітному полі, $2,5 \cdot 10^{10}$ рад/с. Визначити індукцію магнітного поля.

Відповідь: $B = 0,14$ Тл.

6.46. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,2$ Тл обертається коловою орбітою заряджена частинка. Частота обертання 562 МГц. Визначити питомий заряд q/m частинки. Яка це частинка?

Відповідь: $\frac{q}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

6.47. Іон, що несе один елементарний заряд, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,015$ Тл по колу радіусом $R = 10$ см. Визначити імпульс p іона.

Відповідь: $p = 2,4 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

6.48. Електрон рухається в магнітному полі з індукцією $B = 0,02$ Тл по колу радіусом $R = 1$ см. Визначити кінетичну енергію W_k електрона (у джоулях і електрон-вольтах).

Відповідь: $W_k = 0,563$ Дж (3,52 кеВ).

6.49. Заряджена частинка влетіла перпендикулярно лініям індукції в однорідне магнітне поле, утворене в середовищі. Внаслідок взаємодії з речовиною частинка, перебуваючи у полі, втратила половину своєї початкової енергії. У скільки разів відрізнятимуться радіуси кривизни R траєкторії початку і кінця шляху?

Відповідь: $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{W_1}{W_2}} = \sqrt{2}$.

6.50. Протон влітає в однорідне магнітне поле $B = 30$ мТл зі швидкістю $v = 2$ Мм/с під кутом 30° до ліній магнітної індукції. Визначити радіус і крок гвинтової лінії, якою рухається протон.

Відповідь: $R = 0,7$ м; $h = 2,06$ мм.

6.51. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 100$ мкТл рухається електрон по гвинтовій лінії. Визначити швидкість v електрона, якщо крок h гвинтової лінії дорівнює 20 см, а радіус $R = 5$ см.

Відповідь: $v = 1,04$ Мм/с.

6.52. Протон прискорюється електричним полем зі сталою напруженістю $E = \text{const}$. Через $0,01$ с він влітає в магнітне поле з $B = 10^5$ Тл, перпендикулярне електричному полю. У скільки разів нормальне прискорення протона в цей момент буде більшим за його тангенціальне прискорення?

Відповідь: $\frac{a_n}{a} = 9,6$.

6.53. Негативно заряджена частинка влітає зі швидкістю $v = 5 \cdot 10^6$ м/с під кутом 60° до паралельно напрямлених електричному і магнітному полям. Знайти, скільки обертів N зробить частинка до моменту початку руху в напрямку, зворотному полям. Напруженість електричного поля $E = 200$ Н/Кл, індукція магнітного поля $B = 3$ мТл.

Відповідь: $N = 6$.

6.54. Знайти магнітну індукцію B поля, що утворюється двома протилежно спрямованими струмами силою $I = 5$ А кожний, які протікають по прямолінійних дротах, що розташовані на відстані $r = 10$ см один від одного, у точці посередині між цими дротами.

Відповідь: $B = 4 \cdot 10^{-5}$ Тл.

6.55. Двома нескінченно довгими взаємно перпендикулярними проводами протікають струми силою $I = 20$ А кожний. Відстань між проводами дорівнює $r = 10$ см. Визначити магнітну індукцію B поля у точці, що розташована посередині між проводами. Напрямки струмів наведені на рис. 6.41.

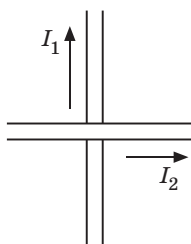


Рис. 6.41

Відповідь: $B = 113$ мкТл.

6.56. Два паралельні нескінченно довгі проводи, якими протікають в одному напрямку струми силою $I = 20$ А, розташовані на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити магнітну індукцію B у точці, рівновіддаленій від кожного зі струмів і знаходиться на відстані $l = 20$ см від прямої, що з'єднує ці два струми.

Відповідь: $B = 37$ мкТл.

6.57. По двох паралельних нескінченно довгих проводах, що розташовані на відстані 10 см один від одного, протікають однакові струми в одному напрямку. Магнітна індукція у точці, яка перебуває від одного проводу на відстані 5 см, а від другого — на відстані 12 см, дорівнює 286 мкТл. Визначити силу струму у проводах.

Відповідь: $I = 60$ А.

6.58. Два нескінченно довгі прямі паралельні проводи йдуть на відстані $d = 20$ см один від одного. По цих проводах протікають струми силою $I_1 = 40$ А і $I_2 = 60$ А в одному напрямку. Обчислити магнітну індукцію B у точці, рівновіддаленій на однакову відстань $r = 10$ см від обох проводів.

Відповідь: $B = 174$ мкТл.

6.59. Коловим витком радіуса $R = 150$ мм циркулює струм силою $I = 2$ А. Знайти магнітну індукцію B : а) у центрі витка, б) на осі витка на відстані $b = 150$ мм від його центра.

Відповідь: а) $B = 5,3 \cdot 10^{-6}$ Тл; б) $B = 2,97 \cdot 10^{-6}$ Тл.

6.60. По тонкому металевому кільцю протікає струм силою $I = 80$ А. Магнітна індукція у точці, рівновіддаленій від усіх точок

кільця на відстань $r = 20$ см, дорівнює $B = 6,28 \cdot 10^{-5}$ Тл. Знайти радіус кільця.

Відповідь: $R = 10$ см.

6.61. По тонкому металевому кільцю радіусом $R = 20$ см протікає струм $I = 160$ А. Знайти магнітну індукцію B у точці, що лежить на осі, перпендикулярній площині кільця і проведеної до його центра, на відстані $l = 20$ см.

Відповідь: $B = 500$ мкТл.

6.62. По тонкому дротяному кільцю протікає струм. Магнітна індукція в точці, що лежить на осі, перпендикулярній до площини кільця, на відстані $d = 10$ см від його центра, дорівнює $B = 11,2$ мкТл. Визначити силу струму, якщо радіус кільця $R = 5$ см.

Відповідь: $I = 10$ А.

6.63. По провіднику у вигляді тонкого кільця радіусом $R = 20$ см протікає струм. Чому дорівнює сила струму I , якщо магнітна індукція в точці A дорівнює $0,5$ мкТл. Кут 30° . Вісь OA перпендикулярна до площини кільця (рис. 6.42).

Відповідь: $I = 127$ А.

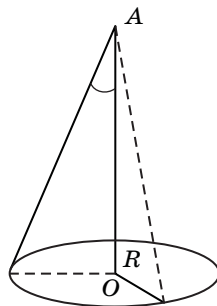


Рис. 6.42

6.64. Довгий провід зі струмом силою $I = 50$ А вигнутий під деяким кутом так, як показано на рис. 6.43. Магнітна індукція у точці A , що знаходиться на відстані $d = 5$ см, дорівнює $B = 34,6$ мкТл. Визначити кут.

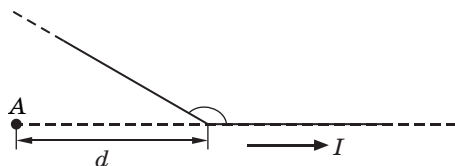


Рис. 6.43

Відповідь: 120° .

6.65. Нескінченно довгий прямий провідник, по якому йде струм $I = 5$ А, зігнутий під прямим кутом. Знайти індукцію магнітного поля на відстані $a = 10$ см від вершини кута в точці A , що лежить на бісектрисі прямого кута, і в точці C — на продовженні однієї зі сторін.

Відповідь: $B_A = 2,4 \cdot 10^{-5}$ Тл; $B_C = 0,5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

6.66. По замкненому колу, яке містить у собі прямолінійну ділянку довжиною 40 см, протікає струм силою 10 А. До середини цієї ділянки проведений перпендикуляр. У деякій точці P , що лежить на цьому перпендикулярі, магнітна індукція B дорівнює

17,7 мкТл. Знайти відстань d цієї точки від прямолінійної ділянки кола.

Відповідь: $d = 10$ см.

6.67. Дротом, який зігнутий у вигляді шестикутника, вписаного у коло радіусом $R = 10$ см, протікає струм силою $I = 10$ А. Знайти магнітну індукцію B у центрі шестикутника.

Відповідь: $B = 69$ мкТл.

6.68. Знайти силу струму, що циркулює в контурі у вигляді рівнобічної трапеції, відношення основ якої дорівнює 2. Магнітна індукція у точці A дорівнює 8,9 мкТл. Відстань цієї точки $b = 50$ мм (рис. 6.44), менша основа трапеції $l = 100$ мм.

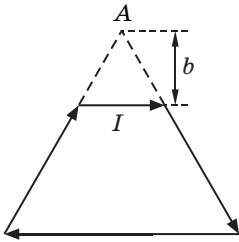


Рис. 6.44

Відповідь: $I = 6,28$ А.

6.69. Дріт, зігнутий у формі квадрата, вписаного у коло радіусом $R = 20$ см. По ньому протікає струм силою $I = 10$ А. Знайти магнітну індукцію B у центрі квадрата.

Відповідь: $B = 40$ мкТл.

6.70. Дротом, який зігнутий у вигляді правильного трикутника, вписаного у коло радіусом $R = 10$ см, протікає струм силою $I = 20$ А. Знайти магнітну індукцію B у центрі трикутника.

Відповідь: $B = 207$ мкТл.

6.71. Нескінченно довгий провід зігнутий так, як показано на рис. 6.45. Магнітна індукція поля, що утворюється в точці O струмом силою $I = 80$ А, який протікає по цьому проводу, дорівнює $B = 331$ мкТл. Визначити радіус R дуги кола.

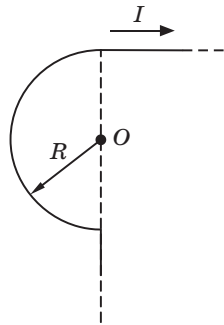


Рис. 6.45

Відповідь: $R = 10$ см.

6.72. Визначити індукцію магнітного поля в точці O , якщо радіус дуги $R = 10$ м, кут 60° , сила струму, який протікає по контуру ABC , дорівнює 20 А (рис. 6.46).

Відповідь: $B = 13,6$ мкТл.

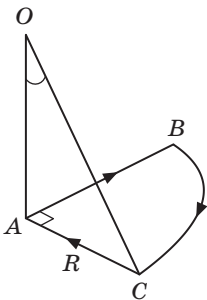


Рис. 6.46

6.73. Струм протікає по нескінченно довгому проводу. Відрізок цього проводу довжиною $l = 20$ см створює у точці, яка рівновіддалена від

кінців відрізка і знаходиться на відстані $b = 4$ см від його середини, магнітну індукцію $B = 46,4$ мкТл. Знайти силу струму I .

Відповідь: $I = 10$ А.

6.74. Струм $I = 2$ А іде по довгому прямому провіднику поперечний переріз якого має форму тонкої дуги довжиною $l = 0,3$ м. Визначити магнітну індукцію \vec{B} у точці O (рис. 6.47).

Відповідь: $B = 1,5$ мкТл.

6.75. Діелектрична куля радіусом $R = 5$ см заряджена рівномірно зарядом з поверхневою густиною 10 мкКл/м². Куля обертається навкруги своєї осі з кутовою швидкістю 100 рад/с. Знайти магнітну індукцію в центрі кулі.

Відповідь: $B = 42$ пТл.

6.76. Невелика котушка зі струмом, яка має магнітний момент \vec{p}_m , знаходиться на осі колового витка радіуса R , по якому проходить струм I . Знайти модуль сили, яка діє на котушку, якщо її відстань від центра витка Z , а вектор \vec{p}_m збігається за напрямком з віссю витка.

Відповідь: $F = \frac{3}{2} \frac{0R^2 I p_m Z}{(R^2 - Z^2)^{5/2}}$; $F = p_m \frac{B}{Z}$, де $B = \frac{0IR^2}{2(R^2 - Z^2)^{3/2}}$.

6.77. Магнітна індукція поля у точці, розташованій на відстані 15 см від прямого нескінченно довгого провідника, дорівнює 30 мкТл. Визначити силу струму в цьому провіднику, використовуючи теорему про циркуляцію вектора \vec{B} .

Відповідь: $I = 22,5$ А.

6.78. Обчислити циркуляцію вектора індукції уздовж контуру, який охоплює струми $I_1 = 25$ А, $I_2 = 15$ А, що течуть в одному напрямку, і струми $I_3 = 5$ А, $I_4 = 10$ А, які течуть в протилежному напрямку.

Відповідь: $3,14$ мкТл·м.

6.79. Циркуляція вектора напруженості H магнітного поля вздовж кола радіусом $R = 4$ мм, яке проходить усередині провідника і орієнтоване так, що його площина складає кут з вектором густини струму, дорівнює $25,12$ А. Знайти кут, якщо густина струму $j = 1$ МА/м² рівномірно розподілена по перерізу провідника.

Відповідь: 30° .

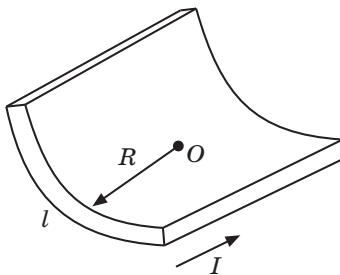


Рис. 6.47

6.80. По перерізу провідника рівномірно розподілений струм густиною $j = 1,5 \text{ MA/m}^2$. Знайти циркуляцію вектора напруженості H уздовж контуру у вигляді квадрата зі стороною $a = 5 \text{ мм}$, який проходить усередині провідника й орієнтований так, що його площина складає кут 30° з вектором густини струму.

Відповідь: $18,75 \text{ A}$.

6.81. Знайти циркуляцію вектора напруженості H уздовж контуру у вигляді еліпса з великою віссю $a = 6 \text{ мм}$ і малою віссю $b = 4 \text{ мм}$, який проходить усередині провідника й орієнтований так, що його площина складає кут 45° з вектором густини струму. Струм по перерізу провідника розподілений рівномірно з густиною $j = 1 \text{ MA/m}^2$.

Відповідь: $53,3 \text{ A}$.

6.82. Напряга на кінцях обмотки соленоїда довжиною 60 см дорівнює 120 В . Магнітна індукція B усередині соленоїда складає 2 мТл . Знайти опір R обмотки соленоїда, якщо він вміщує 1000 витків.

Відповідь: $R = 125,6 \text{ Ом}$.

6.83. Соленоїд вміщує 500 витків. Напряга на кінцях обмотки соленоїда 120 В , а її опір — 120 Ом . Обчислити довжину соленоїда, якщо магнітна індукція поля всередині нього дорівнює $3,14 \text{ мТл}$.

Відповідь: $l = 20 \text{ см}$.

6.84. Різниця потенціалів U на кінцях обмотки соленоїда дорівнює 4 В . Соленоїд виготовлений з мідного дроту ($\rho = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$) діаметром $d = 1 \text{ мм}$. Довжина соленоїда $l = 0,5 \text{ м}$, діаметр $D = 6 \text{ см}$. Визначити напруженість H магнітного поля у соленоїді.

Відповідь: $H = 1,96 \text{ кА/м}$.

6.85. Визначити питомий опір дроту, з якого виготовлений соленоїд довжиною $l = 50 \text{ см}$ і діаметром $D = 4 \text{ см}$, якщо в ньому створене магнітне поле з напруженістю $H = 1 \text{ кА/м}$, різниця потенціалів на кінцях обмотки $U = 2,08 \text{ В}$. Діаметр дроту $d = 1 \text{ мм}$.

Відповідь: $26 \text{ нОм}\cdot\text{м}$.

6.86. Соленоїд довжиною $l = 45 \text{ см}$ і діаметром $D = 5 \text{ см}$ виготовлений із залізного дроту діаметром $1,2 \text{ мм}$. У соленоїді створюється магнітне поле з напруженістю $H = 1 \text{ кА/м}$. Визначити різницю потенціалів U на кінцях обмотки соленоїда. Питомий опір заліза $98 \text{ нОм}\cdot\text{м}$.

Відповідь: $U = 6,12 \text{ В}$.

6.87. Плоский контур у вигляді витка радіусом $R = 4$ см перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,04$ Тл. Визначити магнітний потік, що пронизує контур, якщо його площина складає кут 60° з лініями індукції.

Відповідь: 173,8 мкВб.

6.88. Соленоїд довжиною $l = 0,8$ м і перерізом $S = 10$ см² містить 1800 витків. Визначити потокозчеплення, якщо сила струму $I = 4$ А в обмотці.

Відповідь: 20,3 мВб.

6.89. В однорідному магнітному полі, напруженість якого $H = 8 \cdot 10^4$ А/м, знаходиться квадратна рамка. Нормаль до цієї рамки складає з напрямком магнітного поля кут 60° . Сторона рамки $a = 8$ см. Визначити потік магнітної індукції, що пронизує контур.

Відповідь: 321,5 мкВб.

6.90. У площині з довгим прямим провідником, яким проходить струм силою 30 А, розташована прямокутна рамка так, що дві великі її сторони довжиною $l = 60$ см паралельні провіднику, а відстань від провідника до найближчої зі сторін дорівнює її ширині. Знайти магнітний потік, який пронизує рамку.

Відповідь: 2,49 мкВб.

6.91. У магнітному полі з індукцією $B = 25$ мТл обертається стрижень довжиною l . Вісь обертання паралельна силовим лініям магнітного поля і проходить крізь один з кінців стрижня. Потік магнітної індукції, що перетинається стрижнем при кожному оберті, дорівнює 314 мВб. Знайти довжину стрижня.

Відповідь: $l = 2$ м.

6.92. Дипольний момент соленоїда без осердя довжиною $l = 15$ см дорівнює $p_m = 0,2$ А·м². Знайти потік магнітної індукції крізь площу поперечного перерізу соленоїда.

Відповідь: 1,675 мкВб.

6.93. Квадратна рамка розташована в одній площині з довгим прямим проводом спочатку так, що відстань від проводу до її найближчої сторони дорівнює довжині сторони квадрата. Потім рамку віддалили від початкового положення в тій самій площині на відстань, яка дорівнює стороні квадрата. У скільки разів зменшиться при цьому потік магнітної індукції, який пронизує рамку?

Відповідь: $\frac{1}{2} = 0,5$

6.94. Напруженість однорідного магнітного поля всередині соленоїда з осердям, магнітна проникність якого 200 , дорівнює $H = 15$ кА/м. Діаметр колового поперечного перерізу соленоїда $D = 4$ см. Повний магнітний потік крізь соленоїд (потокозчеплення) дорівнює $0,611$ Вб. Знайти кількість витків соленоїда.

Відповідь: $N = 130$.

6.95. Потік магнітної індукції, який перетинається стрижнем під час його кожного оберта навколо осі, що проходить крізь один з кінців стрижня паралельно силовим лініям магнітного поля, дорівнює 200 мВб. Довжина стрижня $l = 50$ см. Знайти напруженість H магнітного поля.

Відповідь: $H = 202$ кА/м.

6.96. У магнітному полі, індукція якого $B = 0,06$ Тл, обертається стрижень довжиною $l = 1,5$ м. Силові лінії магнітного поля паралельні осі обертання, яка проходить крізь один з кінців стрижня. Знайти потік магнітної індукції, який перетинається стрижнем при кожному оберті.

Відповідь: $0,424$ Вб.

6.97. На відстані $l = 15$ см від довгого прямого провідника знаходиться найближча до нього сторона квадратної рамки, якою проходить струм силою $I_1 = 20$ А. Сторона рамки $a = 30$ см. По провіднику протікає струм силою $I = 2$ А. Визначити роботу сил поля A при переміщенні рамки в область простору, де магнітне поле відсутнє.

Відповідь: $A = 2,63$ мкДж.

6.98. Коловий провідний контур з діаметром $0,2$ м і струмом $I = 20$ А вільно підвішений в однорідному магнітному полі, індукція якого складає $B = 0,1$ Тл. Визначити роботу, яку необхідно здійснити, щоб повернути контур на 90° навколо осі, перпендикулярної напрямку магнітного поля.

Відповідь: $A = 62,8$ мДж.

6.99. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл розташований прямий провід довжиною $l = 20$ см зі струмом. Провід перпендикулярний до ліній магнітної індукції. Робота сил поля, під дією яких провідник перемістився на 2 см, дорівнює 2 мДж. Знайти силу струму.

Відповідь: $I = 5$ А.

6.100. Провідний виток радіусом $R = 5$ см зі струмом розташований у магнітному полі. Площина контуру перпендикулярна

напрямку поля. Контур повертають на кут $\pi/2$ навколо осі, яка збігається з діаметром витка. Робота, яка здійснюється при цьому, дорівнює $A = 98,7$ мкДж. Визначити напруженість H магнітного поля.

Відповідь: $H = 10$ кА/м.

6.101. По коловому провідному витку тече струм силою $I = 10$ А. Виток вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,2$ Тл. Робота, яку потрібно здійснити, щоб повернути контур на 180° навколо осі, що збігається з діаметром витка, дорівнює $31,4$ мДж. Знайти діаметр витка.

Відповідь: $D = 10$ см.

6.102. Плоский контур у вигляді квадрата з довжиною сторони $a = 10$ см знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,02$ Тл. Площина контуру перпендикулярна лініям індукції. У контурі протікає постійний струм силою $I = 5$ А. Визначити роботу A зовнішніх сил при переміщенні контуру в область простору, в якій магнітне поле відсутнє.

Відповідь: $A = 1$ мДж.

6.103. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,04$ Тл розміщений прямий провідник довжиною $l = 6$ см. По провіднику проходить струм силою $I = 1$ А. Під дією сил поля провідник перемістився на відстань $d = 8$ см. Знайти роботу A сил поля.

Відповідь: $A = 192$ мкДж.

6.104. Робота зовнішніх сил з переміщення колового контуру радіусом R в магнітному однорідному полі з індукцією $B = 0,05$ Тл в область простору, де поле відсутнє, дорівнює $A = 31,4$ мДж. У контурі протікає струм силою $I = 5$ А. Знайти радіус колового контуру.

Відповідь: $R = 20$ см.

6.105. В однорідному магнітному полі з магнітною індукцією $B = 0,1$ Тл знаходиться квадратний провідний контур зі стороною $a = 10$ см і струмом $I = 20$ А. Площина квадрата складає з напрямком поля кут α . Робота видалення контуру за межі поля $A = 0,01$ Дж. Знайти кут α .

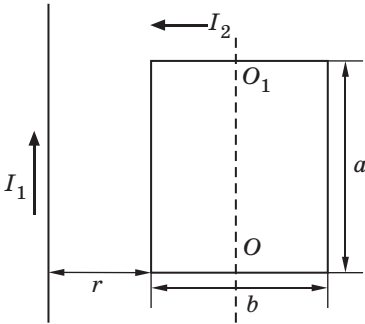
Відповідь: $\alpha = 30^\circ$.

6.106. Квадратний провідний контур зі стороною $a = 10$ см і струмом $I = 10$ А вільно підвішений в однорідному магнітному полі з індукцією B . Контур повернули на кут $\alpha = 180^\circ$ навколо осі,

що перпендикулярна напрямку магнітного поля. Робота, яку було виконано при цьому, дорівнювала $A = 0,02$ Дж. Знайти магнітну індукцію B поля.

Відповідь: $B = 0,1$ Тл.

6.107. Прямий нескінченний струм $I_1 = 10$ А і прямокутна рамка зі струмом $I_2 = 5$ А розташовані в одній площині так, що сторона



рамки $a = 0,5$ м паралельна прямому струму і знаходиться від нього на відстані $r = 0,1$ м. Довжина другої сторони рамки $b = 0,3$ м (рис. 6.48). Визначити, чому дорівнює робота, яку необхідно здійснити, щоб повернути рамку на кут 90° відносно осі OO_1 , яка паралельна прямому струму і проходить через середину сторони b рамки.

Рис. 6.48

Відповідь: $A = 7$ мкДж.

7

Магнітне поле в речовині

7.1. Магнітні моменти атомів

У попередньому розділі ми зробили висновок, що магнітне поле створюється лише струмами провідності (макрострумами) або рухомими зарядами. Тоді виникає абсолютно закономірне запитання: як з'являється магнітне поле постійного магніту і, нарешті, що таке магнітне поле Землі?

Гіпотеза Ампера

Щоб відповісти на це запитання, Ампер у 1789 р., ще задовго до відкриття електрона, висунув гіпотезу існування в молекулах молекулярних кругових струмів, що створюють магнітні моменти. Це призводить до того, що всі молекули або атоми речовини являють собою елементарні магнітики. За відсутності зовнішнього магнітного поля вони розташовані хаотично і їх сумарний магнітний момент дорівнює нулю. У зовнішньому магнітному полі ці елементарні магнітики орієнтуються за полем, у результаті чого створюється додаткова магнітна індукція — речовина намагнічується. На той час ця ідея була дуже слушною.

З сучасної точки зору дослідження магнітних властивостей речовини потребує знання квантової механіки (ці розділи розглядатимуться в третій частині посібника). Зараз ми спробуємо пояснити магнітні явища в речовині, беручи за основу модель атома Н. Бора. Незважаючи на те, що ця модель має напівкласичний і напівквантовий характер і має багато недоліків, її результати добре збігаються з результатами, отриманими із застосуванням квантової теорії.

Згідно з моделлю атома Бора, електрони рухаються круговими орбітами, в центрі яких розташовано позитивно заряджене ядро. Рух електрона можна розглядати як мікрострум (молекулярний струм), напрямом якого протилежний напрямку руху негативного заряду (електрона) зі швидкістю \vec{v} по колу радіусом r (рис. 7.1). Його момент імпульсу дорівнює

$$\vec{L} \quad [\vec{r}, \vec{p}] \quad [\vec{r}, m\vec{v}].$$

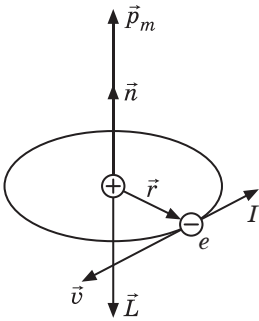


Рис. 7.1

**Орбітальний
магнітний
момент**

Зважаючи на те, що кут між \vec{r} і \vec{p} дорівнює 90° , маємо

$$L = rmv. \quad (7.1)$$

Магнітний момент такого струму дорівнює $\vec{p}_{me} = IS\vec{n}$, де $I = e/T$ — величина струму; e — заряд електрона; $T = 2\pi r/v$ — період його обертання навколо ядра; $S = \pi r^2$ — площа всередині орбіти електрона. Магнітний момент такого струму аналогічний електричному дипольному моменту, тобто кожний атом можна розглядати як маленький елементарний магнітик.

Величина орбітального магнітного моменту електрона

$$p_{me} = \frac{ev}{2r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$

Якщо порівняти величини (7.1) і вираз для p_{me} , отримаємо

$$p_{me} = \frac{e}{2m} L, \quad (7.2)$$

тобто величина орбітального магнітного моменту пропорційна величині орбітального механічного моменту електрона в атомі і з урахуванням протилежних напрямків цих моментів (рис. 7.1), маємо

$$\vec{p}_{me} = -\frac{e}{2m} \vec{L},$$

де $\frac{e}{2m}$ має назву *гіромагнітного відношення*.

З квантової точки зору орбітальний момент імпульсу електрона квантується, тобто набуває дискретних значень:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с) — стала Планка; $l = 0, 1, 2, \dots$ — орбітальне квантове число. Тоді й орбітальний магнітний момент також квантується:

$$p_{me} = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)}.$$

Величина $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл — магнетон Бора.

Але виявляється, що додатково до орбітального механічного моменту імпульсу електрон має власний механічний момент імпульсу — *спін* \vec{L}_s що не пов'язаний з рухом електрона, а є його фундаментальною характеристикою.

Спіну електрона відповідає *власний (спіновий) магнітний момент* \vec{p}_{ms} , пропорційний L_s і напрямлений у протилежний бік

$$\vec{p}_{ms} = -\frac{e}{m} \vec{L}_s.$$

У цьому випадку гіромагнітне відношення спінових моментів дорівнює e/m і є вдвічі більшим, ніж для орбітальних моментів.

Тоді повний магнітний момент електрона \vec{p}_{mi} є векторною сумою орбітального \vec{p}_{me} і спінового \vec{p}_{ms} магнітних моментів

$$\vec{p}_{mi} = \vec{p}_{me} + \vec{p}_{ms}.$$

Взагалі *магнітний момент атома* — це векторна сума магнітних моментів усіх електронів і магнітного моменту ядра атома. Але магнітні моменти ядер у тисячі разів менші за магнітні моменти електронів, тому ними можна знехтувати.

Загальний магнітний момент атома \vec{p}_m дорівнює векторній сумі орбітальних і спінових магнітних моментів електронів, що входять в атом,

$$\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{mi} + \sum \vec{p}_{ms}.$$

Однак, незважаючи на наявність магнітних моментів у електронів, слід зауважити, що не у всіх матеріалів спостерігається спонтанна намагніченість. Це пояснюється тим, що електронні орбіти мають довільну орієнтацію у просторі і сумарний магнітний момент атома (особливо при парній кількості електронів в атомі) може дорівнювати нулю без впливу зовнішнього магнітного поля.

7.2. Магнетика та їх намагнічування. Вектор намагнічування

З усього викладеного вище очевидно, що в зовнішньому магнітному полі будь-яка речовина набуває магнітного моменту, тобто є магнетиком.

<p>Намагнічування магнетика</p>

Набуття магнітних властивостей речовиною під дією зовнішнього магнітного поля називається намагнічуванням магнетика.

Намагнічена речовина створює додаткове магнітне поле B мікрострумів, яке накладається на зовнішнє магнітне поле \vec{B}_0 .

Щоб описати поле, яке створюється молекулярними струмами, розглянемо магнетик у вигляді циліндра, розташованого в зовнішньому магнітному полі \vec{B}_0 , паралельному твірній циліндра.

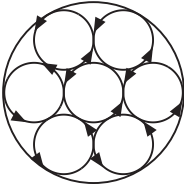


Рис. 7.2

У перерізі такого зразка ми бачимо, що на внутрішніх ділянках перерізу магнетика молекулярні струми сусідніх атомів напрямлені назустріч один одному і взаємно компенсуються (рис. 7.2). Нескомпенсованими будуть лише молекулярні струми, що виходять на бокову поверхню циліндра. Тоді струм, що йде по боковій поверхні циліндра, аналогічний струму в соленоїді, який створює всередині соленоїда магнітне поле.

Вектор намагнічування

Ступінь намагніченості магнетика характеризується сумарним магнітним моментом молекулярних струмів одиниці об'єму. Ця величина називається вектором намагнічування і позначається \vec{J}

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V}, \quad (7.3)$$

де \vec{p}_m — магнітний момент окремої молекули (атома); V — фізично нескінченно малий об'єм, який має бути настільки малим, щоб поле в ньому можна було вважати однорідним і достатньо великим, щоб до нього можна було застосувати статистичні методи.

Одиниця вимірювання намагніченості

$$[J] = 1 \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3} = 1 \text{ А/м}.$$

Вектор намагніченості схожий на вектор поляризації, тому його можна було б назвати вектором магнітної поляризації.

Сума зовнішнього \vec{B}_0 і внутрішнього \vec{B} магнітних полів утворює результуюче поле \vec{B} , яке залежить від магнітних властивостей магнетика,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}.$$

Теорема Гаусса для магнетика

Поле \vec{B} , як і поле \vec{B}_0 , не має джерел (магнітних зарядів), тому і для магнетика теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (7.4)$$

Потік результуючого вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню дорівнює нулю.

7.3. Теорема про циркуляцію (закон повного струму) для магнітного поля в речовині

**Теорема про
циркуляцію \vec{B}
для магнітного
поля в речовині**

Закон повного струму для магнітного поля в вакуумі (6.22) можна узагальнити для магнітного поля в речовині

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I_m), \quad (7.5)$$

де $I = \sum_{i=1}^n I_i$ — алгебраїчна сума макрострумів; $I_m = \sum_{i=1}^n I_{mi}$ — алгебраїчна сума мікрострумів, які охоплюються контуром L .

Розрахуємо алгебраїчну суму молекулярних струмів, охоплених деяким контуром L . Нехай на цей контур спирається довільна поверхня S (рис. 7.3). Струми, які перетинають поверхню двічі (в протилежних напрямках), не дають ніякого внеску в результуючий струм намагнічення I крізь поверхню S . Струми, які проходять крізь поверхню S один раз, створюють сумарний молекулярний струм, що пронизує поверхню S . Припустимо, що молекула з магнітним моментом \vec{p}_m еквівалентна замкненому витку молекулярного струму

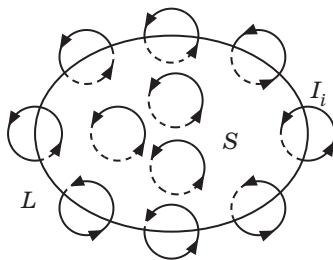


Рис. 7.3

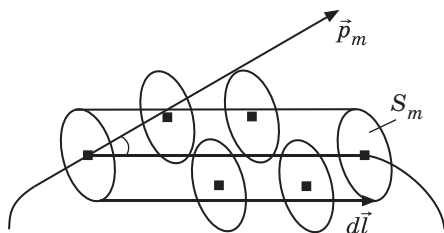


Рис. 7.4

$$I_m = \frac{p_m}{S_m}, \quad (7.6)$$

де S_m — площа, охоплена витком.

Елемент dl контуру L охоплює ті молекулярні струми, центри яких потрапляють усередину косою циліндра (рис. 7.4) з об'ємом

$$dV = S_m dl \cos \theta,$$

де dl — твірна циліндра; S_m — площа основи циліндра; θ — кут між вектором $d\vec{l}$ і вектором магнітного моменту витка \vec{p}_m .

Кількість молекулярних струмів у цьому об'ємі dn дорівнює кількості молекул

$$dn = n_0 dV = n_0 S_m dl \cos \theta,$$

де n_0 — концентрація молекул.

Таким чином, малому елементу dl відповідає мікрострум dI

$$dI = I_M dn = I_M n_0 dV = I_M S_M n_0 dl \cos \theta = p_m n_0 dl \cos \theta = J dl \cos \theta = \vec{J} d\vec{l},$$

тут $I_M S_M = p_m$ (див. (7.6)); $J = p_m n_0$ — магнітний момент одиниці об'єму речовини, тобто намагніченість.

Закон повного струму для \vec{J}

Після інтегрування вздовж всього контуру L отримаємо закон повного струму для вектора намагніченості \vec{J} .

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I. \quad (7.7)$$

Циркуляція вектора намагніченості \vec{J} по довільному замкненому контуру L дорівнює алгебраїчній сумі молекулярних струмів, охоплених контуром L .

Підставимо вираз (7.7) у (7.5) і отримаємо

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{всередині}} = \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l};$$

$$\oint_L \left(\vec{B} - \mu_0 \vec{J} \right) d\vec{l} = 0. \quad (7.8)$$

Напруженість магнітного поля

Уведемо допоміжний вектор \vec{H} — вектор напруженості магнітного поля, який дорівнює

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (7.9)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (7.10)$$

Закон повного струму для вектора \vec{H}

Тоді (7.8) перетвориться на

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (7.11)$$

де $I = \sum_i I_i$ — алгебраїчна сума макрострумів (струмів провідності).

Тобто циркуляція вектора напруженості по довільному замкненому контуру L дорівнює алгебраїчній сумі струмів провідності (макрострумів) крізь поверхню S , що спирається на цей контур.

У вакуумі $\vec{J} = 0$, тому $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$.

Одиниця напруженості магнітного поля — ампер на метр

$$[H] = 1 \text{ А/м.}$$

Щоб отримати рівняння (7.11) в диференціальній формі, застосуємо теорему Стокса

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S}. \quad (7.12)$$

Сила струму пов'язана з густиною струму так:

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{s}. \quad (7.13)$$

Із (7.12) і (7.13) маємо

$$\oint_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \oint_S \vec{j} d\vec{s},$$

звідки

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (7.14)$$

Ротор вектора напруженості магнітного поля дорівнює густині струмів провідності в даній точці.

Слід зауважити, що поле вектора \vec{H} в однорідних ізотропних магнетиках таке саме, як і у вакуумі, тобто \vec{H} визначає лише ту частину магнітного поля, яка збуджується струмами провідності.

Очевидно, що можна провести аналогію вектора напруженості магнітного поля \vec{H} з вектором електричної індукції \vec{D} , а вектора магнітної індукції \vec{B} — з вектором напруженості електричного поля \vec{E} .

**Зв'язок
векторів \vec{J} і \vec{H}**

У випадку однорідного ізотропного магнетика вектор намагніченості пропорційний вектору напруженості магнітного поля.

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (7.15)$$

де χ — магнітна сприйнятливості речовини, безрозмірна стала величина, яка характеризує здатність магнетика намагнічуватись у зовнішньому магнітному полі.

Якщо $[H] = 1 \text{ А/м}$, $|\vec{J}|$, тобто магнітна сприйнятливості чисельно дорівнює намагніченості J магнетика при одиничній напруженості магнітного поля.

На відміну від діелектричної сприйнятливості речовини ϵ , яка завжди тільки додатна, магнітна сприйнятливості може бути як додатною, так і від'ємною. Для вакууму $\chi_0 = 0$.

**Зв'язок
векторів \vec{B} і \vec{H}**

Знайдемо зв'язок напруженості магнітного поля з магнітною індукцією. З (7.10) і (7.15) маємо

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

1 — магнітна проникність речовини, тоді

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (7.16)$$

де — безрозмірна величина, макроскопічний параметр, що характеризує магнітні властивості речовини.

7.4. Граничні умови для векторів \vec{B} і \vec{H}

Розглянемо границю двох однорідних ізотропних магнетиків з різними магнітними проникностями μ_1 і μ_2 (рис. 7.5). Як і для діелектриків, ці умови можна отримати, застосувавши теорему Гаусса для вектора \vec{B} , $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ і теорему про циркуляцію для вектора \vec{H} , $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$.

Граничні умови для \vec{B}

Як поверхню інтегрування вибираємо циліндр невеликої висоти, що розташований на границі розділу магнетиків (рис. 7.5). Потік вектора \vec{B} крізь бокову поверхню дорівнює нулю, а потік крізь основи дорівнює

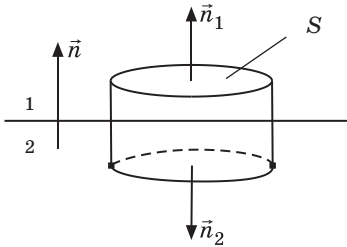


Рис. 7.5

$$B_{n1} S - B_{n2} S = 0,$$

звідки

$$B_{n1} = B_{n2}.$$

Тобто нормальна складова вектора \vec{B} однакова в обох середовищах.

Виходячи з (7.16), отримаємо для нормальної складової вектора \vec{H}

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}; \quad \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Очевидно, що на границі двох магнетиків нормальна складова вектора напруженості магнітного поля \vec{H} зазнає стрибка.

Граничні умови для \vec{H}

Припустимо, що на межі магнетиків немає струмів провідності. За контур інтегрування беремо прямокутник, висота якого набагато менша, ніж його довжина l (рис. 7.6) ($h \ll l$).

Тоді

$$\begin{aligned} H_1 l - H_2 l &= 0, \\ H_1 &= H_2, \\ H_1 &= H_2. \end{aligned}$$

За відсутності на границі поділу магнетиків струмів провідності тангенціальна складова вектора \vec{H} не зміниться. (Якщо спостерігається струм провідності то H змінюватиметься стрибком.)

Для вектора \vec{B}

$$\frac{B_1}{0} \quad \frac{B_2}{1}; \quad \frac{B_1}{B_2} \quad \frac{1}{2}.$$

Тангенціальна складова вектора \vec{B} на границі двох магнетиків зазнає стрибка.

Повна система рівнянь для граничних умов має вигляд

$$\begin{aligned} B_{n1} &= B_{n2}; & \frac{B_1}{B_2} &= \frac{1}{2}; \\ \frac{H_{n1}}{H_{n2}} &= \frac{2}{1}; & H_1 &= H_2. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Зауважимо, що на межі поділу вектор \vec{B} поводить себе аналогічно вектору \vec{D} , а вектор \vec{H} — аналогічно вектору \vec{E} .

Заломлення силових ліній вектора \vec{B}

На границі поділу двох магнетиків вектор магнітної індукції заломлюється. Знайдемо відношення тангенсів кутів α_1 і α_2 (рис. 7.7).

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_1}{B_2} \frac{B_{n2}}{B_{n1}} = \frac{B_1}{B_2} \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Таким самим буде закон заломлення ліній і для вектора \vec{H} (у відсутності струмів провідності). Очевидно, що в області з більшою магнітною проникністю силові лінії будуть розташовані більш щільно, ніж в області з малим значенням μ .

Більша концентрація силових ліній \vec{B} у речовині з більшою магнітною

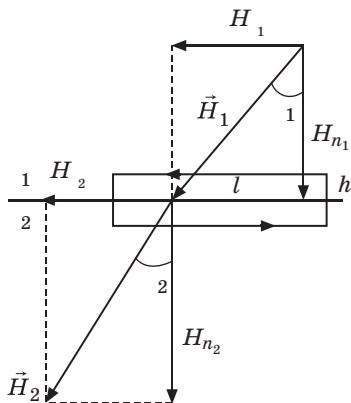


Рис. 7.6

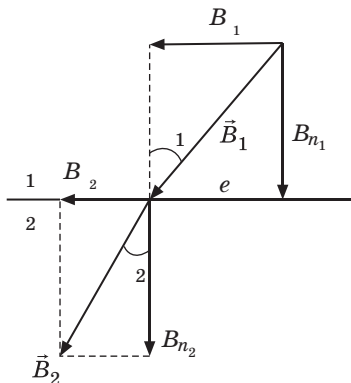


Рис. 7.7

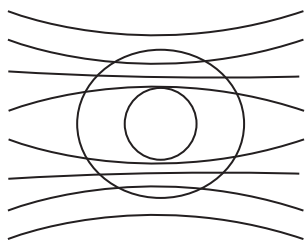


Рис. 7.8

проникністю дає можливість формувати магнітні пучки. Зокрема, для магнітного захисту приладів їх оточують залізною оболонкою. На рис. 7.8 видно, що магнітні силові лінії в оболонці набагато щільніші, ніж усередині, тож усередині магнітного екрана поле значно послаблюється.

7.5. Класифікація магнетиків

За магнітними властивостями всі речовини поділяються на три типи: *діамагнетики*, *парамагнетики*, що є *слабомагнітними*, і *сильномагнітні* — *феромагнетики*.

У *діамагнетиків* магнітна сприйнятливості — від’ємна величина $\chi < 0$, а магнітна проникність трохи менша одиниці $\mu < 1$. Це означає, що напрямок магнітного поля мікрострумів протилежний напрямку зовнішнього магнітного поля $\vec{J} \uparrow \vec{H}$.

Для *парамагнетиків* характерна однакова напрямленість магнітного поля мікро- і макрострумів $\vec{J} \uparrow \vec{H}$. У цьому випадку $\chi > 0$, $\mu > 1$.

У табл. 7.1 наведено значення магнітної сприйнятливості для деяких парамагнетиків і діамагнетиків.

Таблиця 7.1

Парамагнетики		Діамагнетики	
Алюміній	$2,3 \cdot 10^{-5}$	Вісмут	$-1,66 \cdot 10^{-5}$
Кальцій	$1,9 \cdot 10^{-5}$	Мідь	$-9,8 \cdot 10^{-6}$
Хром	$2,7 \cdot 10^{-4}$	Алмаз	$-2,2 \cdot 10^{-5}$
Літій	$2,1 \cdot 10^{-5}$	Золото	$-3,6 \cdot 10^{-5}$
Магній	$1,2 \cdot 10^{-5}$	Свинець	$-1,7 \cdot 10^{-5}$
Ніобій	$2,6 \cdot 10^{-4}$	Ртуть	$-2,9 \cdot 10^{-5}$
Кисень	$2,1 \cdot 10^{-6}$	Азот	$-5 \cdot 10^{-5}$
Платина	$2,9 \cdot 10^{-4}$	Срібло	$-2,6 \cdot 10^{-5}$
Вольфрам	$6,8 \cdot 10^{-5}$	Кремній	$-4,2 \cdot 10^{-6}$

Феромагнетики відрізняються нелінійною залежністю намагніченості від напруженості зовнішнього магнітного поля, що характеризується явищем гістерезису $\vec{J} = \vec{J}(\vec{H})$, а також дуже великим значенням магнітної сприйнятливості і проникності $\chi \gg 0$, $\mu \gg 1$, 10^3 10^5 .

7.6. Діамагнетизм

До діамагнетиків належать речовини, атоми яких не мають власного магнітного моменту, тобто у яких сумарний магнітний момент (орбітальний і спіновий) дорівнює нулю. Це переважно атоми з цілком заповненими електронними оболонками. Приклади таких речовин наведені в табл. 7.1, а також до них належать: інертні гази, вода, водень H_2 , однократно іонізовані атоми Li, Na, більшість органічних сполук та інші. Хоча діамагнітний ефект виникає у будь-яких речовин, цей ефект набагато слабший, ніж парамагнетизм або феромагнетизм, тому діамагнетизм спостерігається тільки за відсутності інших ефектів.

**Атом
у магнітному
полі**

Розглянемо механізм виникнення діамагнетизму. На електрон, який рухається по круговій орбіті і нагадує дзигу з моментом імпульсу $\vec{L} [\vec{r}, \vec{p}]$ (див. розділ 7.1), у магнітному полі діє обертальний механічний момент

$$\vec{M} [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (7.18)$$

який намагається повернути магнітний момент електрона вздовж поля. Спостерігати- меться прецесія орбіти елек- трона і моменту імпульсу навколо напрямку магнітного поля \vec{B} (рис. 7.9).

За час dt вектор \vec{L} набуває приросту $d\vec{L} = \vec{M} dt$ (з рівняння моментів). Вектори $d\vec{L}$ і \vec{M} перпендикулярні площині, що проходить крізь вектори \vec{L} і \vec{p}_m .

Модуль вектора

$$|d\vec{L}| = p_m B \sin \theta dt,$$

де θ — кут між \vec{p}_m і \vec{B} . За час dt вектори \vec{L} і \vec{p}_m повернуться навколо \vec{B} на кут d

$$d = \frac{|d\vec{L}|}{L \sin \theta} = \frac{p_m B \sin \theta dt}{L \sin \theta} = \frac{p_m}{L} B dt.$$

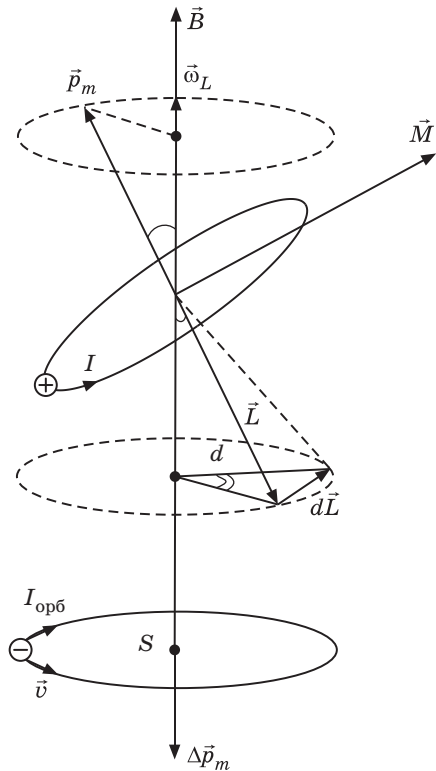


Рис. 7.9

З цього виразу знайдемо *кутову швидкість прецесії*

$$L \frac{d}{dt} \frac{p_m}{L} B.$$

Із застосуванням (7.2) отримаємо

$$L \frac{e}{2m} B; \quad (7.19)$$

у векторному вигляді

$$\dot{L} = \frac{e}{2m} \vec{B}. \quad (7.20)$$

Частота (7.19) має назву *ларморової частоти*. Вона однакова для всіх електронів і не залежить ні від кута нахилу орбіти відносно магнітного поля, ні від радіуса орбіти, ні від швидкості електронів, а залежить тільки від величини магнітного поля і збігається з ним за напрямком (7.20).

Завдяки прецесії Лармора з'являється додатковий орбітальний струм

$$I_{\text{орб}} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2} \frac{L}{4 m},$$

якому відповідає *наведений магнітний момент*

$$\vec{p}_m = \frac{e^2 S}{4 m} \vec{B},$$

де S – площа проекції прецесуючої орбіти електрона на площину, перпендикулярну \vec{B} (рис. 7.9).

Очевидно, що \vec{p}_m за напрямком протилежний напрямку зовнішнього магнітного поля \vec{B} .

Таким чином, у атомів і діамагнетиків, і парамагнетиків у зовнішньому магнітному полі внаслідок ларморової прецесії з'являється додатковий магнітний момент, напрямлений проти зовнішнього магнітного поля. Але зважаючи на те, що діамагнетики не мають власного магнітного моменту, поява наведеного магнітного моменту є домінуючою, внаслідок чого речовина намагнічується проти зовнішнього поля.

Слід зауважити, що *магнітна сприйнятливість діамагнетиків визначається тільки атомними характеристиками і не залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля і температури.*

**Діамагнетизм
Ландау**

Л. Д. Ландау передбачив існування діамагнетизму вільних електронів у зовнішньому магнітному полі (1930). Це явище, що одержало назву *діамагнетизму Ландау*, обумовлене тим, що траєкторії електронів у зовнішньому магнітному полі викривлюються, так що в проекції на площину, перпендикулярну вектору \vec{B} , електрони рухаються замкненими орбітами. Відповідні орбітальні магнітні моменти електронів напрямлені в бік, протилежний напрямку зовнішнього магнітного поля.

**Діамагнетик
у неоднорідному
магнітному полі**

Дуже цікавою є поведінка діамагнетиків у неоднорідному магнітному полі. Стрижень з діамагнетика виштовхується в область слабшого поля, а в однорідному полі встановлюється так, що його вісь перпендикулярна \vec{B} . Гази, що з'являються в результаті згоряння речовини, теж мають діамагнетичні властивості, то жолум'я свічки відхиляється у бік слабшого поля.

Діамагнетичні властивості мають надпровідники. Ще в 1933 р. В. Мейснер експериментально довів, що при поміщенні зразка надпровідника в зовнішнє магнітне поле, при температурі, меншій за критичну, він поводить себе як ідеальний діамагнетик: зразок виштовхується з магнітного поля. Дослідження показали, що магнітна проникність надпровідника дорівнює нулю: під дією зовнішнього магнітного поля в тонкому поверхневому шарі зразка виникає струм, магнітне поле якого цілком компенсує зовнішнє магнітне поле.

Якщо над надпровідною площиною помістити невеликий магніт, то завдяки відштовхуючій дії площини магніт висітиме над нею (так звана «магнітна левітація»). Цю властивість надпровідників можливо застосовувати в техніці для створення транспорту, що рухається в повітрі над магнітною подушкою.

7.7. Парамагнетизм

Парамагнетизм спостерігається у тих речовин, атоми яких мають власні магнітні моменти, відмінні від нуля. Для них $0 < \chi < 1$ (табл. 7.1). Але за відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів розташовані хаотично, а тому і результуючий магнітний момент дорівнює нулю, тобто речовина немагнітна.

У магнітному полі магнітні моменти атомів $\vec{\mu}_m$ починають орієнтуватись по полю — речовина намагнічується. В сильному зовнішньому магнітному полі всі магнітні моменти орієнтуються по полю і настає магнітне насичення.

З підвищенням температури збільшується дезорієнтуючий тепловий рух атомів і магнітна сприйнятливість парамагнетиків зменшується.

Закон Кюрі

За класичною електронною теорією, розробленою П. Ланжевром (1872—1946), у звичайних магнітних полях парамагнітна сприйнятливість зворотно залежить від температури

$$\frac{C}{T},$$

де C — стала Кюрі.

Цю залежність, ще до появи відповідної теорії, експериментально встановив у 1896 р. П. Кюрі, тому вона одержала назву **закону Кюрі**.

Особливістю парамагнетиків є зникнення намагніченості після відключення зовнішнього магнітного поля. Внаслідок дезорієнтуючої дії теплового руху впорядкована орієнтація магнітних моментів атомів порушується — намагніченість зникає.

Експериментально парамагнітні речовини визначаються за їх поведінкою в зовнішньому магнітному полі: в неоднорідному полі стрижень з парамагнетика втягується в область сильнішого поля, а в однорідному — орієнтується за полем.

7.8. Феромагнетизм

Серед магнетиків найбільш цікаві і своєрідні властивості мають феромагнетики, з якими пов'язана майже вся електрична технологія. До феромагнетиків належать залізо, кобальт, нікель, гадоліній та деякі сплави.

На відміну від парамагнетиків феромагнетики мають досить складну нелінійну залежність намагніченості від напруженості зовнішнього магнітного поля $\vec{J} = \vec{J}(\vec{H})$ та від передісторії зразка речовини. Магнітна сприйнятливість феромагнетиків дуже велика

і практично не відрізняється від магнітної проникності ($\sim 10^3 - 10^6$ для різних речовин, наприклад, для заліза $5 \cdot 10^3$, для супермалою $8 \cdot 10^6$).

Розглянемо основну криву намагнічення $J(H)$ для попередньо цілком розмагніченого зразка. Крива намагнічення (рис. 7.10) спочатку йде полого, потім крутизна різко зростає, після чого намагніченість досягає насичення $J_{\text{нас}}$.

Магнітна індукція також зростає зі збільшенням H (рис. 7.11) і продовжує зростати навіть після досягнення стану насичення завдяки зв'язку $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$.

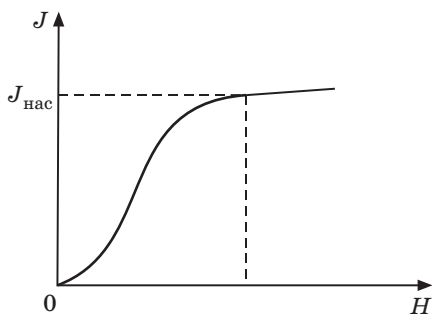


Рис. 7.10

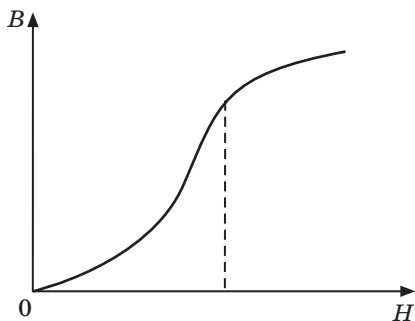


Рис. 7.11

Залежність B від H нелінійна, тому $\frac{B}{H}$ теж не є сталою величиною, а залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля H (рис. 7.12)

(H).

Поняття магнітної проникності застосовують тільки для основної кривої намагнічення, оскільки залежність B від H неоднозначна.

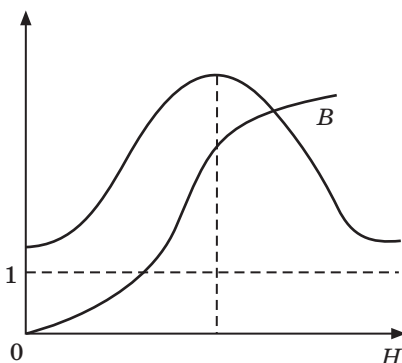


Рис. 7.12

Магнітний гістерезис

Під час дії на феромагнетик магнітного поля, що змінюється, магнітна індукція спочатку нелінійно зростає у відповідності з кривою 01 (рис. 7.13) і виходить на насичення (в точці 1), далі при зменшенні магнітного поля до нуля (розмагнічення зразка) значення магнітної індукції змінюється не за первісною кривою, а у відповідності з кривою 12. Коли напруженість зовнішнього магнітного поля зменшується до нуля,

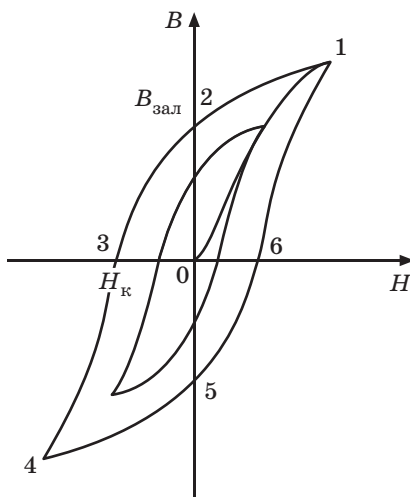


Рис. 7.13

намагніченість не зникає, а характеризується величиною *залишкової індукції* $B_{\text{зал}}$ (точка 2 на рис. 7.13), з наявністю якої пов'язано існування постійних магнітів. Щоб розмагнітити зразок остаточно ($B = 0$), слід прикласти магнітне поле зворотного напрямку з величиною $H_{\text{к}}$, що має назву *коерцитивної сили* (точка 3). Подальша зміна \vec{H} призводить до досягнення насичення в точці 4, а у разі зміни напрямку \vec{H} на зворотний крива індукції пройде нижче по 4561.

Отримана замкнена крива 1234561 має назву *петлі гістерезису*. Якщо в точках 1 і 4 спостерігається насичення, то це — *максимальна петля гістерезису*. В інших випадках (без насичення) петля меншого розміру вписується в максимальну петлю (рис. 7.13). Підкреслимо, що таке поведіння феромагнетика в магнітному полі виявляє не тільки складну залежність $B(H)$, а і залежність магнітної індукції і намагніченості від попередніх станів магнітного поля, тобто від передісторії зразка.

На особливостях петлі гістерезиса заснований практичний метод розмагнічування феромагнетика. Намагнічений зразок поміщують у котушку зі змінним струмом, амплітуда якого повільно зменшується до нуля. При цьому феромагнетик багаторазово перемагнічується, що супроводжується зменшенням петлі гістерезису до нуля, тобто намагніченість зникає.

При перемагніченні феромагнетик нагрівається. Кількість теплоти, що виділяється одиницею об'єму феромагнетика за один цикл перемагнічення Q_V , чисельно дорівнює площі петлі гістерезису

$$Q_V = \oint \vec{H} d\vec{B}.$$

У залежності від технічних потреб застосовуються феромагнетики з різними характеристиками.

Для електричних машин, трансформаторів та осердя електромагнітів, де феромагнетик має постійно перемагнічуватися, застосовують *магнітом'які матеріали* (рис. 7.14, а) з малою коерцитивною силою ($H_{\text{к}} \sim 0,8 \dots 8 \text{ А/м}$), у яких дуже малі втрати енергії на перемагнічування. Для виготовлення постійних магнітів потрібні *магнітожорсткі матеріали* з високою коерцитивною силою і залишковою індукцією (рис. 7.14, б). Для них $H_{\text{к}} \sim 10^4 \dots 10^5 \text{ А/м}$, $B_{\text{зал}} \sim 1 \text{ Тл}$.

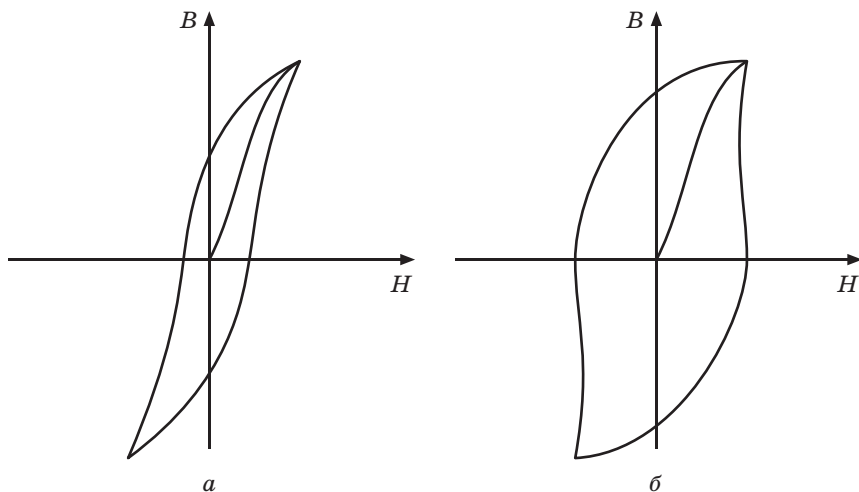


Рис. 7.14

Температура Кюрі

Магнітні властивості феромагнетиків суттєво залежать від температури. У разі збільшення температури намагніченість насичення зменшується і за деякої температури, що називається *температурою* або *точкою Кюрі* (T_K), феромагнетик перетворюється на парамагнетик (рис. 7.15). За цієї температури відбувається фазовий перехід другого роду, що супроводжується зміною теплоємності, електропровідності і деяких інших фізичних характеристик, але не відбувається виділення або поглинання теплоти. Феромагнітні властивості відновлюються у разі зниження температури менше температури Кюрі.

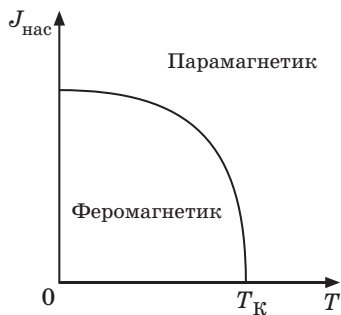


Рис. 7.15

При $T > T_K$ магнітну сприйнятливості описують законом Кюрі — Вейса.

$$\frac{C}{T - T_K},$$

де C — константа, значення якої залежить від речовини.

У табл. 7.2 наведено значення температури Кюрі для деяких феромагнетиків.

Таблиця 7.2

Речовина	Залізо	Кобальт	Нікель	Гадоліній	Fe ₂ O ₃
T _K , K	1043	1394	631	317	893

**Природа
феромагнетизму**

Великий внесок в експериментальне дослідження феромагнетизму був зроблений російським фізиком О. Г. Столетовим (1839—1896). Перша класична теорія феромагнетизму була створена французьким фізиком П. Вейсом (1865—1940) у 1907 р. Явище гістерезису відкрив у 1880 році німецький вчений Е. Варбург (1846—1931). Квантова теорія феромагнетиків була започаткована в 1928 році Я. І. Френкелем (1894—1952) та В. Гейзенбергом (1901—1976). Це стало можливим тільки після відкриття існування власного механічного моменту електрона — спіну (*див.* розділ 7.1).

Згідно з теорією, феромагнетик складається з окремих мікроскопічних областей — *доменів*, які спонтанно намагнічені до насичення. Домени мають лінійні розміри $\sim 10^3 \cdot 10^2$ см і можуть спостерігатися за допомогою оптичного мікроскопа, якщо відшліфований зразок феромагнетика покрити шаром феромагнітного порошку. Частинки порошку концентруватимуться на границях доменів, де існує досить сильне магнітне поле зі значним градієнтом.

Появу доменів можна пояснити наявністю *обмінної взаємодії* спінових магнітних моментів електронів. Так звані *обмінні сили* змушують спіни електронів сусідніх атомів у доменах встановлюватися паралельно, що стає причиною спонтанного намагнічування феромагнетиків і є енергетично вигідним.

Це спостерігається для кристалів, в атомах яких є недобудовані внутрішні електронні оболонки з некомпенсованими спінами.

За відсутності зовнішнього магнітного поля сумарні магнітні моменти доменів орієнтовані хаотично і зразок у цілому буде не намагнічений (рис. 7.16, *а*).

У разі зростання зовнішнього магнітного поля домени, магнітні моменти яких орієнтовані в напрямку магнітного поля, збільшуються внаслідок зсуву границь сусідніх доменів (рис. 7.16, *б*). Це супроводжується зростанням намагніченості J і магнітної індукції B . Подальше збільшення магнітного поля супроводжуватиметься одночасною стрибкоподібною переорієнтацією за напрямком магнітного поля магнітного моменту в межах домену (рис. 7.16, *в*).

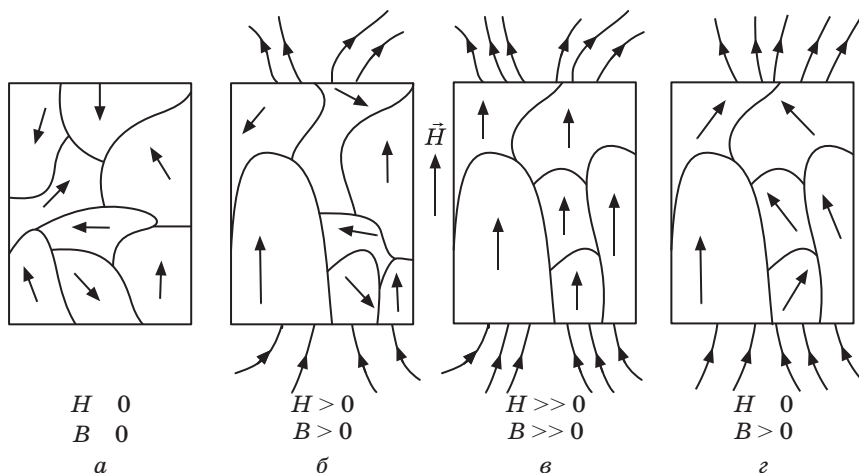


Рис. 7.16

Зменшення зовнішнього магнітного поля до нуля не приводить до розмагнічення феромагнетика, тому що тепловий рух не може швидко розорієнтувати магнітні моменти доменів, зберігається залишкове намагнічення — спостерігається явище гістерезису (рис. 7.16, з).

Антиферомагнетики

Антиферомагнетики характеризуються антипаралельним розташуванням спінів сусідніх атомів. До антиферомагнетиків належать хром,

-марганець, MnO , NiO , $CuCl_2$, FeS та інші. Кристалічну ґратку антиферомагнітного кристалу можна уявити як дві вміщені одна в одну тотожні підґратки з антипаралельним напрямком спінів (рис. 7.17). У результаті антиферомагнетики мають дуже малу магнітну сприйнятливість. Таке впорядковане розташування спінів спостерігається при температурі, нижчій за *антиферомагнітну точку Кюрі* або *точку Нееля*. Вище цієї температури впорядкування спінів зникає, і кристал стає парамагнетиком.

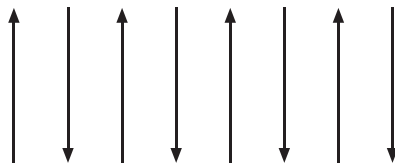


Рис. 7.17

Сумарний магнітний момент антиферомагнетика за відсутності магнітного поля дорівнює нулю і збільшується зі зростанням \vec{H} , пропорціональної \vec{H} , що супроводжується переорієнтацією частини спінів.

Ферити

Існують речовини більш складної структури, наприклад $MnOFe_2S_3$ — це особливі антиферомагнетики — *ферити*, які мають власний магнітний момент, що наближається за величиною до магнітного моменту феромагнетиків. Власний магнітний момент з'являється завдяки протилежному напрямку спінів підґраток, різних за величиною (рис. 7.18). Ферити вигідніші за

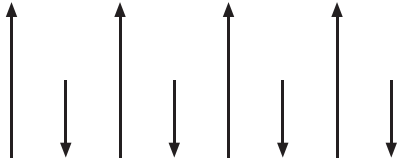


Рис. 7.18

феромагнетики, що є провідниками і дуже нагріваються у високочастотних електромагнітних полях. Ферити — напівпровідники, струми в них значно менші і нагріваються вони менше. Крім того, багато феритів мають дуже зручну для застосування петлю гістерезису (рис. 7.19) — з великим значенням залишкової намагніченості (до 96 % максимальної величини) і з малою коерцитивною силою.

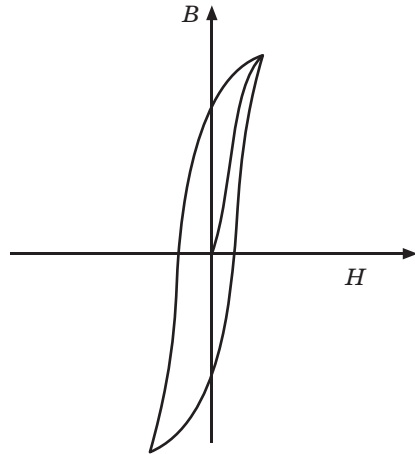


Рис. 7.19

Ферити широко застосовуються в радіотехніці (магнітні схеми, осердя та інші), в обчислювальній техніці (магнітні комірки пам'яті).

7.9. Магнітне поле Землі

Те, що магніт може служити компасом, а Земля має магнітне поле, було відомо ще в XI ст. у Китаї, а взагалі про магнетизм знали давні греки ще в 600 р. до нашої ери. Ще Фалес Мілетський, якого іноді називають батьком античної науки, знав про існування мінералу (магнетиту), що притягує звичайне залізо і дійшов висновку, що саме залізо може намагнічуватися після контакту з цим магнітним матеріалом.

Думка, що Земля — це великий магніт, з'явилась у 1600 р. у Вільяма Гілберта, який працював при дворі англійської королеви Єлизавети.

У першому наближенні приймаємо, що Земля — однорідно намагнічена куля, магнітна вісь якої складає з віссю обертання Землі кут близько $11,5^\circ$.

Магнітні полюси Землі — точки на земній поверхні, в яких вектор напруженості геомагнітного поля напрямлений вертикально: вниз на Північному полюсі і догори на Південному. Положення магнітних полюсів визначається розрахунками і безперервно змінюється.

При цьому південний геомагнітний полюс розташований у північній півкулі. На цей час він недалеко від північного географічного полюса Землі в Північній Гренландії. Його координати $78,7^\circ$ північної широти і $70,3^\circ$ західної довготи. Північний магнітний полюс — у південній півкулі і має координати 75° південної широти і $120,4^\circ$ східної довготи (в Антарктиді) (рис. 7.20).

Геомагнітний полюс прецесує відносно географічного полюса з періодом 1200 років.

Реальні магнітні силові лінії магнітного поля Землі близькі до силових ліній магнітного диполя з деякими аномаліями, пов'язаними з наявністю намагнічених порід у земній корі. Такими аномаліями являються Бразильська, Канадська, Курська, Сибірська. Ці аномалії дають відхилення від еквівалентного поля диполя до 20 % напруженості поля Землі.

Дипольний магнітний момент Землі дорівнює $\sim 8,3 \cdot 10^{22}$ А·м², а напруженість поля на поверхні змінюється від 33 А/м біля екватора до 55 А/м біля магнітних полюсів.

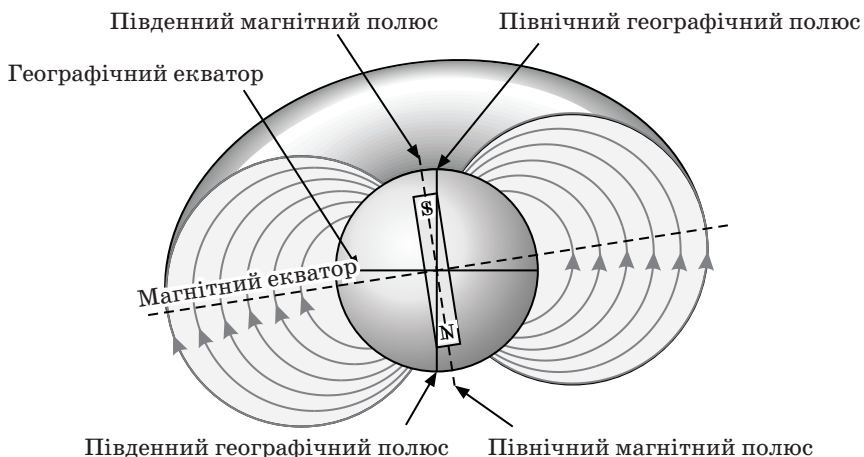


Рис. 7.20

Існує низка гіпотез, які пояснюють виникнення магнітного поля Землі.

Найбільш імовірною є теорія, пов'язана з механізмом гідромагнітного динамо. При цьому магнітне поле з'являється в результаті конвекційного або турбулентного руху електропровідної речовини в рідкому ядрі планети. Заряджені частинки (електрони, іони), які циркулюють у ядрі Землі, можна розглядати як кругові струми, що створюють постійне земне магнітне поле. На користь такої ідеї говорить досить сильний зв'язок величини магнітного поля зі швидкістю обертання планети навколо своєї осі. Наприклад, Венера обертається повільніше ніж Земля, і її магнітне поле менше, ніж у Землі. Юпітер обертається швидше і його магнітне поле більше. Але з іншого боку, якщо пов'язувати виникнення магнітного поля планет зі струмами в рідкому ядрі, то слід чекати, що планети сонячної системи, які мають однаковий напрямок обертання, повинні мати однаковий напрямок магнітних полів. Але Юпітер, що обертається в тому ж напрямку, що і Земля, має магнітне поле, протилежне земному. Пояснення цьому факту поки ще немає.

Існує гіпотеза появи магнітного поля завдяки наявності струмових шарів навколо Землі — в іоносфері. Сонце в результаті ядерних реакцій, які в ньому відбуваються, випромінює велику кількість заряджених частинок (протонів, електронів, ядер гелію, іонів кисню, кремнію, сірки, заліза тощо), що мають дуже велику енергію — так званий сонячний вітер. Ці частинки захоплюються верхніми шарами атмосфери в бік обертання Землі й утворюють електричний струм, який породжує магнітне поле Землі.

Але всі ці теорії є тільки гіпотезами і поки що не мають практичного підтвердження.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки й експрес-контролю

1. У чому полягає гіпотеза Ампера?
2. Чому орбітальні магнітний і механічний моменти електрона в атомі протилежно напрямлені?
3. Що таке гіромагнітне відношення? Чому воно дорівнює?
4. З яких магнітних моментів складається магнітний момент атома?
5. Що таке намагнічування магнетика?
6. Чому дорівнює вектор намагнічення?
7. Сформулюйте теорему Гаусса для магнетика. Поясніть фізичний зміст теореми.

8. Сформулюйте теорему про циркуляцію вектора \vec{B} для магнітного поля в речовині. Поясніть її фізичний смисл.
9. Сформулюйте закон повного струму для вектора намагнічення. Поясніть його фізичний смисл.
10. Знайдіть зв'язок між векторами магнітної індукції, напруженості магнітного поля і намагнічення.
11. Який фізичний смисл закону повного струму для вектора напруженості магнітного поля?
12. Що характеризує магнітна сприйнятливості речовини? Як вона пов'язана з характеристиками магнітного поля?
13. Виведіть і поясніть умови для векторів \vec{B} і \vec{H} на границі розділу двох магнетиків.
14. Як заломлюються силові лінії векторів \vec{B} і \vec{H} ?
15. Що таке діамагнетики? Парамагнетики? У чому полягає різниця їх магнітних властивостей?
16. Які особливості магнітних властивостей феромагнетиків?
17. Поясніть виникнення петлі гістерезису для феромагнетика.
18. Що таке залишкова намагніченість і коерцитивна сила?
19. Які феромагнетики є магнітом'якими і магнітожорсткими? Де їх застосовують?
20. Яка температура для феромагнетика називається точкою Кюрі?
21. Чи є аналогія між намагнічуванням парамагнетика і поляризацією діелектрика з полярними молекулами?
22. Чи є аналогія між намагнічуванням діамагнетика і поляризацією діелектрика з неполярними молекулами?
23. Чому втрати енергії в магнітом'яких феритах значно менші, ніж у металевих феромагнетиках?
24. Чому на заводах для перенесення розжарених деталей не застосовують електромагнітні підйомні крани?
25. При перенесенні вантажів електромагнітним краном буває, що частина вантажу не відривається від осердя при вимкненні струму. Що в такому випадку слід зробити?
26. Що відбудеться з магнітним полем нескінченного соленоїда при заповненні його однорідним ізотопним магнетиком з проникністю ?

Приклади розв'язання задач

Задача 1

На залізному осерді у вигляді тора з середнім діаметром $d = 500$ мм намотано обмотку, кількість витків якої $N = 1000$.

В осерді вирізаний поперечний проміжок шириною $b = 1$ мм. Напруженість поля в проміжку $H_0 = 600$ кА/м при силі струму в обмотці $I = 0,85$ А.

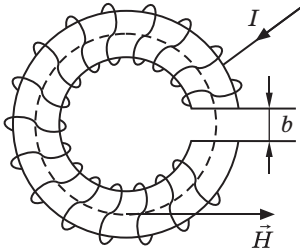


Рис. 7.21

Визначити магнітну проникність заліза за цих умов, нехтуючи розсіюванням поля біля краю проміжка.

Розв'язання

Згідно з теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} маємо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I,$$

де контур L вибираємо вздовж середньої лінії тора (на рис. 7.21 — пунктир).

Тоді

$$H(d - b) = H_0 b = NI, \quad (1)$$

де H — напруженість магнітного поля в осерді.

На границі осердя з проміжком маємо

$$B_0 = B,$$

де B_0 — магнітна індукція в проміжку; B — магнітна індукція в осерді. Зважаючи на те, що $B = \mu H$, а $B_0 = \mu_0 H_0$, маємо

$$\mu_0 H = \mu_0 H_0, \text{ звідки } H = \frac{H_0}{\mu}. \quad (2)$$

Тоді з рівнянь (1) і (2) отримаємо

$$\frac{H_0}{\mu}(d - b) = H_0 b = NI,$$

звідки

$$\frac{H_0(d - b)}{NI} = \mu b H_0; \quad 3770.$$

Задача 2

Замкнений тороїд зі сталевим осердям має 600 витків дроту, намотаного в один шар. Середній діаметр тороїда 0,2 м. Сила струму в обмотці тороїда 0,3 А.

Визначити величину напруженості й індукції магнітного поля всередині тороїда, а також магнітну проникність і намагніченість сталюого осердя. (Використати графік $B(H)$ на рис. 7.22.)

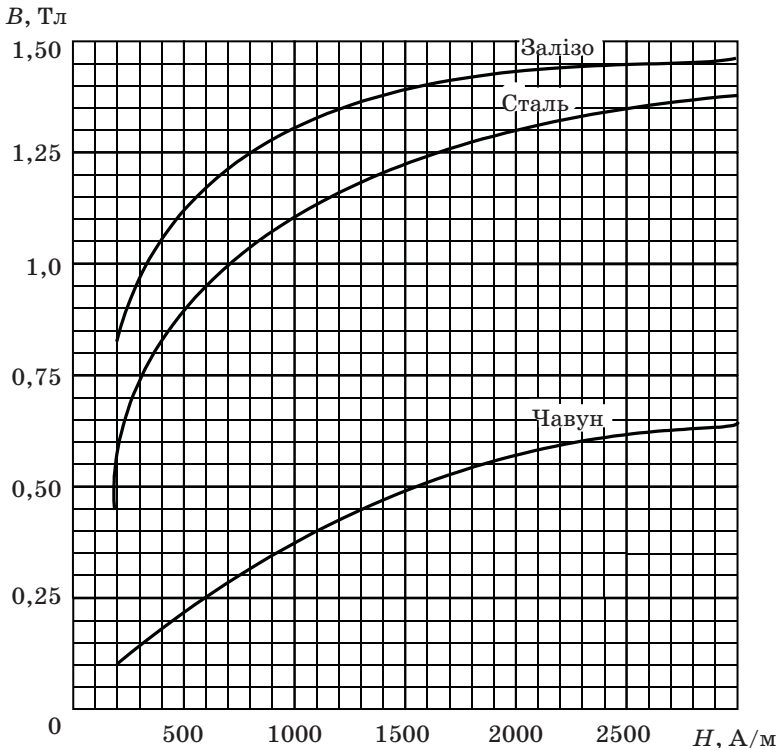


Рис. 7.22

Розв'язання

Використаємо закон повного струму для напруженості магнітного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i.$$

Тоді

$$H d = NI,$$

звідки

$$H = \frac{NI}{d}; \quad H = 287 \text{ А/м.}$$

На рис. 7.22 цій напруженості магнітного поля для сталі відповідає величина магнітної індукції $B = 0,75$ Тл. Магнітну проникність знайдемо зі співвідношення

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

тобто у скалярному вигляді

$$\frac{B}{H_0}; \quad 2080.$$

Величину намагніченості розрахуємо, беручи до уваги зв'язок намагніченості з напруженістю магнітного поля

$$J = \chi H \quad (1)H,$$

де χ — магнітна сприйнятливість магнетика

$$J = \frac{B}{H_0} - 1 H; \quad J = 596 \text{ кА/м.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Платинову кульку радіусом 0,20 см розташовано в однорідному магнітному полі ($B_0 = 0,2$ Тл). Визначити магнітний момент, набутий кулькою, якщо магнітна сприйнятливість платини $2,9 \cdot 10^{-4}$.

Відповідь: $p_m = 1,55 \text{ мкА} \cdot \text{м}^2$.

7.2. Постійний магніт у вигляді кільця з проміжком між полюсами $b = 1$ мм має середній діаметр кільця $d = 2,8$ см. Величина магнітної індукції в проміжку $B = 0,4$ Тл. Знайти модулі векторів \vec{H} і \vec{J} у середині речовини.

Відповідь: $|\vec{H}| = 3,6 \text{ кА/м}; |\vec{J}| = 318 \text{ кА/м.}$

7.3. На чавунне кільце з поперечним перерізом $S = 5 \text{ см}^2$ намотано в один шар обмотку. Магнітний потік у тороїді $\Phi = 250 \text{ мкВб}$ при силі струму 1 А. Визначити, яка кількість n витків обмотки припадає на 1 см середньої лінії кільця.

Відповідь: $n = 15$.

7.4. В однорідне магнітне поле вносять довгий вольфрамовий стрижень, магнітна проникність якого $1,0176$. Визначте, яка частка сумарного магнітного поля в цьому стрижні зв'язана з молекулярними струмами?

Відповідь: $\frac{B}{B_0} = 0,0173$.

7.5. Залізне осердя довжиною 0,6 м із малим поперечним перерізом ($d = l$) має 300 витків. Знайдіть магнітну проникність заліза, якщо сила струму $I = 1,5$ А. (Використайте рис. 7.22.)

Відповідь: 1300 .

7.6. На чавунному кільці з середнім діаметром $d = 60$ мм намотано обмотку, кількість витків якої дорівнює $N = 500$. У кільці зроблено проріз шириною $b = 2$ мм. Магнітна проникність чавуну за цих умов 400 . Визначте напруженість магнітного поля в чавуні H і в прорізі H_0 при силі струму $I = 3$ А.

Відповідь: $H = 1,52$ кА/м; $H_0 = 0,608$ МА/м.

7.7. Чавунний тороїд має повітряний проміжок $b = 3$ мм. На один метр довжини тороїда припадає 1000 витків дроту. Діаметр тороїда 30 см. За якої сили струму в обмотці тороїда індукція в проміжку дорівнює 0,3 Тл?

Відповідь: $I = 1,46$ А.

7.8. У соленоїд довжиною $l = 0,1$ м, що має 300 витків, введено магнітне осердя. Величина струму в соленоїді $I = 1$ А. Знайти вектор намагнічення заліза всередині соленоїда, беручи до уваги рис. 7.22.

Відповідь: $J = 1,27 \cdot 10^6$ А/м.

7.9. Тороїд зі сталевим осердям має $n = 15$ витків на кожний сантиметр довжини. Розрахуйте магнітний потік в осерді, якщо площа його попереднього перерізу $S = 6$ см², а по обмотці йде струм $I = 5$ А.

Відповідь: $\Phi = 0,87$ мВб.

7.10. Довжина чавунного кільця по середній лінії дорівнює 1,2 м, поперечний переріз $S = 20$ см². По обмотці кільця йде струм, що створює в прорізі кільця довжиною $b_0 = 8$ мм, магнітний потік $\Phi = 0,5$ мВб. Якою має бути довжина прорізу, щоб магнітний потік збільшився вдвічі за незмінної сили струму?

Відповідь: $b = 1,8$ мм.

7.11. На залізному осерді у вигляді тора, з середнім діаметром $d = 70$ мм, намотана обмотка з загальною кількістю витків $N = 600$. В осерді зроблено проріз шириною $b = 1,5$ мм. Магнітна індукція в прорізі $B_0 = 1,5$ Тл за сили струму в обмотці $I = 4$ А. Знайдіть магнітну проникність заліза.

Відповідь: 428.

8 Електромагнітна індукція

8.1. Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея

У попередніх розділах розглядалися властивості статичних, незмінних у часі електричних і магнітних полів. Переходячи в область електродинаміки змінних полів, ми зустрічаємося з новими властивостями полів і їхніми закономірностями.

Було показано, що електричні струми утворюють навколо себе магнітні поля. Зв'язок магнітного поля зі струмом призвів до чисельних спроб збудити струм у контурі за допомогою магнітного поля.

Цю фундаментальну задачу було блискуче вирішено англійським фізиком М. Фарадеєм, який у 1831 р. відкрив *явище електромагнітної індукції*. Суть цього явища полягає у тому, що в замкненому провідному контурі при зміні потоку магнітної індукції через площину, що охоплюється цим контуром, виникає електричний струм, який було названо *індукційним (наведеним)*.

Розглянемо досліди Фарадея, за допомогою яких було виявлено явище електромагнітної індукції.

Дослід I

Котушку L замкнено на гальванометр (рис. 8.1, *a*). Постійний магніт NS вводили в котушку й витягували з неї. У момент уведення магніту і його витягування гальванометр фіксував наявність струму (виникав індукційний струм). Напрямки відхилення стрілки при введенні та витягуванні магніту протилежні, а її відхилення тим більше, чим більша швидкість руху магніту відносно котушки. При зміні полюсів магніту напрямку відхилення стрілки змінюється. Індукційний струм можна отримати також, якщо котушку переміщувати відносно нерухомого магніту.

Дослід II

Кінці однієї з котушок, вставлених одна в одну, приєднувалися до гальванометра, а через іншу котушку пропускали струм. Відхилення стрілки гальванометра зафіксоване в моменти ввімкнення або вимкнення струму,

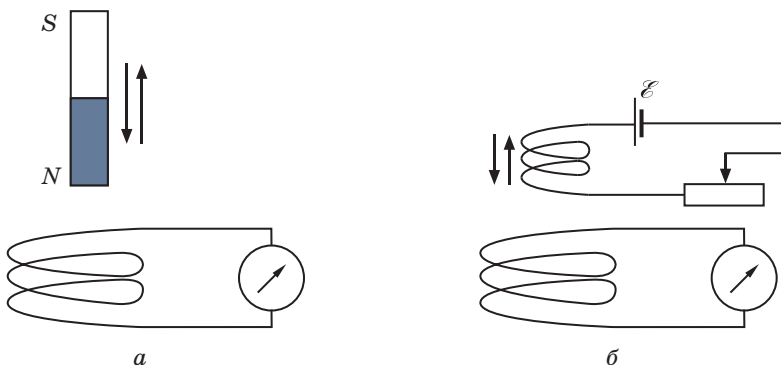


Рис. 8.1

в моменти його збільшення або зменшення за допомогою реостата або при переміщенні однієї котушки відносно іншої (рис. 8.1, б). Напрямки відхилення стрілки гальванометра також протилежні при вмиканні та вимиканні струму, його збільшенні й зменшенні, зближенні та віддаленні котушок.

Узагальнюючи результати своїх чисельних дослідів, Фарадей дійшов висновку: *індукційний струм у замкненому провідному контурі виникає щоразу при зміні магнітного потоку, який пронизує провідний контур.*

8.2. Закон електромагнітної індукції Фарадея і правило Ленца

Експериментальні спостереження Фарадея встановили ще один зв'язок між електричним і магнітним полями, а саме: щоразу, коли змінюється магнітне поле (змінюється зчеплений з контуром потік магнітної індукції), в контурі виникає *електричне поле (індукційний струм)*. Виникнення індукційного струму вказує на існування в колі електромагнітної сили, яка має назву *електрорушійної сили електромагнітної індукції*.

Величина індукційного струму, а як наслідок і електрорушійна сила електромагнітної індукції в контурі, пропорційна швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, яка спирається на цей контур,

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{d}{dt}, \quad (8.1)$$

тобто при цьому змінюється кількість силових ліній, що пронизують замкнений контур.

Як відомо, знак магнітного потоку залежить від вибору напрямку позитивної нормалі до контуру. В свою чергу, позитивний

напрямок нормалі пов'язаний з напрямком струму за правилом правого гвинта. Таким чином, вибором певного позитивного напрямку нормалі визначається як знак потоку магнітної індукції, так і напрямок індукційного струму та ЕРС індукції в контурі. Користуючись цими уявленнями, можна сформулювати **закон електромагнітної індукції Фарадея**: *електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкненому провідному контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь довільну поверхню, обмежену цим контуром*

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.2)$$

Якщо контур, у якому індукується ЕРС, складається з N витків, тобто являє собою соленоїд (або тороїд), то \mathcal{E}_i дорівнюватиме сумі ЕРС, що індукуються в кожному з витків окремо,

$$\mathcal{E}_i = - N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Величину Φ називають *потокозчепленням*, або *повним магнітним потоком*. Якщо потік, який пронизує кожний з витків, однаковий, то

$$\Phi = N \cdot \phi. \quad (8.3)$$

У такому разі вираз для ЕРС індукції в соленоїді можна записати у вигляді

$$\mathcal{E}_i = - N^2 \frac{d\phi}{dt}. \quad (8.4)$$

Правило Ленца

У 1833 році російський вчений Ленц для визначення напрямку індукційного струму запропонував правило, яке тепер носить його ім'я.

Правило Ленца: *за будь-якої зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену замкненим провідником, у цьому провіднику виникає індукційний струм такого напрямку, що створене ним власне магнітне поле протидіє зміні магнітного поля, яке збуджує індукційний струм.*

Знак мінус у формули (8.2) вказує на те, що збільшення потоку ($d\Phi/dt > 0$) викликає ЕРС $\mathcal{E}_i < 0$, тобто магнітне поле індукційного струму напрямлене назустріч потоку; зменшення потоку ($d\Phi/dt < 0$) викликає $\mathcal{E}_i > 0$, тобто напрямки потоку й поля індукційного току збігаються.

8.3. Електрорушійна сила електромагнітної індукції

Явище електромагнітної індукції можна описати аналітично.

Причиною виникнення індукційного струму є те, що на електрони провідності, які рухаються в магнітному полі разом із провідником, діє сила Лоренца $\vec{F}_L = e[\vec{v}, \vec{B}]$. Вона відіграє роль сторонньої сили. Під її дією електрони впорядковано рухаються вздовж провідника. Якщо провідник розімкнений, то цей рух призводить до перерозподілу електронів уздовж провідника. Виникає градієнт їх концентрації. Це означає, що на кінцях провідника виникають некомпенсовані заряди (з одного кінця мінус, з іншого — плюс), які утворюють стороннє електричне поле. Це поле напрямлене проти сили Лоренца. Тому процес перерозподілу зарядів припиниться за умови рівності сил, що діють на кожний електрон у стані динамічної рівноваги $e\vec{E} = \vec{F}_L$. Звідси напруженість стороннього поля

$$\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_L}{e} = [\vec{v}, \vec{B}], \quad (8.5)$$

де e — заряд електрона; \vec{B} — вектор індукції магнітного поля перпендикулярний до площини, в якій рухається провідник.

Електрорушійна сила індукції, що створюється полем $\vec{E}_{\text{стор}}$, дорівнює

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (8.6)$$

З урахуванням (8.5) формулу (8.6) буде переписано у вигляді:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l}. \quad (8.7)$$

При переміщенні провідника l на малу відстань x індукцію магнітного поля можна вважати сталою ($B = \text{const}$). Оскільки швидкість $v = dx/dt$, тоді ЕРС індукції дорівнюватиме

$$\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt}(Blx) = \frac{d}{dt}, \quad (8.8)$$

де d — зміна магнітного потоку, який пронизує замкнений провідний контур.

Ця ЕРС індукції підтримуватиме електричний струм доти, доки рухатиметься контур L .

Очевидно, що формула (8.8) описує закон електромагнітної індукції Фарадея. Знак мінус у правій частині цієї рівності узгоджується з правилом Ленца стосовно напрямку індукційного струму.

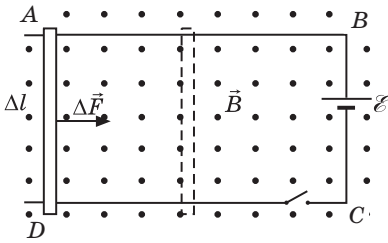


Рис. 8.2

Закон електромагнітної індукції можна отримати із всеосяжного закону збереження енергії. Вперше такі розрахунки зробив німецький фізик Гельмгольц.

Провідний контур $ABCD$ помістимо в однорідне магнітне поле, індукція якого \vec{B} . Контур складається з рухомої частини l і нерухомих провідників AB і CD .

Провідник l може вільно переміщуватися по нерухомих провідниках (рис. 8.2). На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера

$$F = IB l.$$

При елементарному переміщенні dx провідника l сила Ампера виконує роботу

$$dA = F dx = IB l dx = Id \cdot dx.$$

За час dt у провіднику виділиться кількість теплоти

$$dQ = I^2 (R + r) dt,$$

де $(R + r)$ — повний опір контуру.

За цей же час джерело енергії витратить енергію

$$dU = I \mathcal{E} dt.$$

Виходячи зі закону збереження енергії (першого початку термодинаміки)

$$dU = dA + dQ,$$

маємо

$$I \mathcal{E} dt = Id \cdot dx + I^2 (R + r) dt.$$

Звідси сила струму

$$I = \frac{\mathcal{E} + d/dt}{R + r}. \quad (8.9)$$

Чисельник цієї формули складається з двох доданків — ЕРС джерела \mathcal{E} та d/dt , який дорівнює ЕРС індукції, тобто

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.10)$$

Потік вектора магнітної індукції крізь довільну поверхню S за визначенням дорівнює

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

Врахуємо той факт, що індукція магнітного поля \vec{B} є функцією не тільки часу, а й координат, тоді формулу (8.10) можна записати у вигляді:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (8.11)$$

Прирівнявши формули (8.6) і (8.11), отримаємо

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (8.12)$$

Співвідношення (8.12) виражає закон електромагнітної індукції, поглиблене формулювання якого належить Максвеллу, і який стверджує: *будь-яке змінювання магнітного поля в часі збуджує в навколишньому просторі електричне поле. Циркуляція вектора напруженості цього поля по будь-якому нерухомому замкненому контуру L дорівнює швидкості зміни потоку магнітної індукції крізь довільну поверхню S , що спирається на цей контур L .*

Між Фарадеевим і Максвелловим розумінням суті електромагнітної індукції є різниця. У розумінні першого явище електромагнітної індукції полягає в збудженні електричного струму (бо таким був його експеримент). Для спостереження цього явища необхідно мати замкнений контур.

Максвелл вбачає в цьому явищі глибший смисл. Суть його полягає перш за все в збудженні електричного поля, а виникнення індукovanого струму в замкненому контурі — один з проявів цього поля, яке виникає в результаті змінювання магнітного поля. Індукване електричне поле може здійснювати й інші дії. Електромагнітну індукцію можна спостерігати (виявити електричне поле) й тоді, коли в магнітному полі взагалі немає ніяких провідників.

За формулою (8.12) циркуляція вектора \vec{E} не дорівнює нулю. А це означає, що поле вектора \vec{E} , як і магнітне, є *вихровим*. Лінії напруженості цього поля замкнені.

Збуджене змінним у часі магнітним полем, електричне поле суттєво відрізняється від електростатичного поля нерухомих зарядів. Електростатичне поле *потенціальне*, його лінії напруженості

починаються й закінчуються на зарядах. Циркуляція його вектора \vec{E}_q по довільному контуру дорівнює нулю: $\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0$.

Струми Фуко

Індукційні струми, які з'являються в масивних провідниках при їх русі в магнітному полі або під впливом змінного магнітного поля, називаються *вихровими струмами*, або *струмами Фуко*. Ці струми замикаються безпосередньо в об'ємі провідника у вигляді вихороподібних замкнених ліній. Як і індукційні струми в лінійних провідниках, струми Фуко підпорядковуються правилу Ленца: їх магнітне поле спрямоване так, щоб протидіяти зміні зовнішнього магнітного потоку, який індукуює ці вихрові струми. Тому провідники, що рухаються в сильному магнітному полі, зазнають сильного гальмування, обумовленого взаємодією струмів Фуко з магнітним полем. Цим користуються для заспокоєння (демпфірування) рухомих частин різних приладів.

Вихрові струми викликають нагрівання провідників. Тому з метою зменшення витрат на нагрівання, якоря генераторів і сердечники трансформаторів виготовляють з тонких пластин, відокремлених одна від одної прошарками ізоляторів. Встановлюють пластини так, щоб вихрові струми були напрямлені поперек пластин.

Вихрові струми, що виникають під час проходження по провіднику змінного струму, спричиняють підсилення струму біля поверхні провідника і послаблення його всередині провідника (вздовж центральної осі). Явище концентрації змінного струму в поверхневому шарі провідника має назву *скін-ефекту*, або *поверхневого ефекту*. Через скін-ефект у внутрішніх частинах провідників у електричних колах з високочастотним струмом струм майже не проходить, тому їх найчастіше виготовляють у вигляді трубок з тонкими стінками.

8.4. Явище самоіндукції. Індуктивність

Електричний струм, що проходить у будь-якому контурі, утворює магнітний потік, який пронизує цей контур. Якщо в провідному замкненому контурі змінюється струм, то змінюється й потік магнітної індукції. Зміна магнітного потоку призводить до виникнення в цьому ж провіднику додаткового, *індукційного струму*.

Явище виникнення індукційного струму внаслідок зміни власного магнітного потоку має назву явища самоіндукції.

Згідно з правилом Ленца індукційний струм завжди матиме напрямок, при якому він перешкоджатиме зміні первинного струму.

Відповідно до закону Біо — Савара — Лапласа величина, індукції магнітного поля \vec{B} прямо пропорційна силі струму в контурі ($B \sim I$). Зважаючи на визначення потоку Φ , можна стверджувати, що потік магнітної індукції крізь певну фіксовану поверхню буде також пропорційний силі струму, тобто

$$\Phi \sim I, \text{ або } \Phi = LI, \quad (8.13)$$

де L — коефіцієнт пропорційності, який має назву *індуктивності контуру*.

Індуктивність контуру L не залежить ні від сили струму, ні від індукції магнітного поля, а є однозначною характеристикою провідного контуру. Вона залежить від форми й розмірів контуру, а також від магнітних властивостей навколишнього середовища.

При зміні струму в контурі виникає ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_S , яка дорівнює

$$\mathcal{E}_S = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt} = -I \frac{dL}{dt}. \quad (8.14)$$

Якщо контур не деформується і магнітна проникність середовища не змінюється (тобто при відсутності феромагнетиків), то $L = \text{const}$ і тоді

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}. \quad (8.15)$$

Електрорушійна сила самоіндукції викликає в контурі струм, який, за правилом Ленца, перешкоджає змінюванню струму в контурі, уповільнюючи його зменшення або зростання.

Якщо струм з часом зростає, то $dI/dt > 0$ і $\mathcal{E}_S < 0$, тобто струм самоіндукції напрямлений назустріч струму, обумовленому зовнішнім джерелом і гальмує його.

Якщо струм з часом зменшується, то $dI/dt < 0$, і $\mathcal{E}_S > 0$, тобто індукційний струм збігається за напрямком зі спадаючим струмом у контурі і тим самим уповільнює його спадання.

Таким чином, індуктивність контуру є мірою його інертності стосовно змінювання в ньому струму.

За наявності феромагнетика $L = L(I)$ тому, що від I залежить напруженість магнітного поля \vec{H} . У такому разі $dL/dt \neq 0$ і цю похідну можна записати так:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt}.$$

Тоді ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}, \quad (8.16)$$

звідки видно, що за наявності феромагнетиків коефіцієнт пропорційності між dI/dt і \mathcal{E}_S не дорівнює L .

Цей коефіцієнт дорівнює $L_{\text{еф}}$ і має назву *ефективної індуктивності*.

За одиницю індуктивності взято індуктивність такого провідника, в якому при зміні сили струму в 1 А за 1 с виникає ЕРС самоіндукції 1 В. Ця одиниця має назву *генрі* на честь американського фізика Дж. Генрі.

$$[L] = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = 1 \text{ Гн.}$$

**Індуктивність
соленоїда**

Обчислимо індуктивність соленоїда. Соленоїд — це рівномірно намотана на циліндричну поверхню дровава спіраль, по якій проходить електричний струм. Візьмемо соленоїд такої довжини, що його можна вважати нескінченним. За законом Фарадея ЕРС індукції

$$\mathcal{E}_S = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де Φ — повний магнітний потік крізь усі N витків соленоїда.

Потік індукції крізь поверхню площею S , яку охоплює один виток довжиною l у вакуумі,

$$\Phi_S = \mu_0 I \frac{N}{l} S,$$

тоді

$$\Phi = N \mu_0 I \frac{N^2}{l} S,$$

а ЕРС індукції

$$\mathcal{E}_S = -\mu_0 \frac{N^2}{l} S \frac{dI}{dt}.$$

З іншого боку,

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}.$$

Прирівнявши дві останні формули, отримаємо індуктивність соленоїда

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Оскільки $S l = V$ — об'єм соленоїда, то

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V = \mu_0 n^2 V, \tag{8.17}$$

де n — кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда (густина витків).

8.5. Явище взаємної індукції

Розглянемо два нерухомих контури 1 і 2, що розташовані досить близько один від одного (рис. 8.3). У них течуть струми I_1 та I_2 . Магнітні потоки кожного з контурів частково перекривають потік сусіднього. Електрорушійна сила ЕРС у кожному контурі виникає не тільки внаслідок зміни потоку індукції магнітного поля, створеного струмом цього ж самого контуру (явище самоіндукції), а й завдяки зміні потоку індукції магнітного поля, створеного струмом сусіднього контуру (явище взаємної індукції).

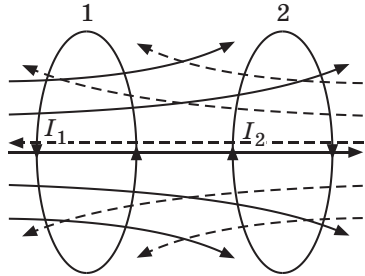


Рис. 8.3

Явище виникнення ЕРС індукції в одному з контурів при зміні сили струму в іншому контурі називається взаємною індукцією.

Якщо в першому контурі проходить струм I_1 , то утворений цим струмом магнітний потік через другий контур пропорційний I_1 і дорівнює

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1. \tag{8.18}$$

Магнітне поле, яке утворює цей потік, зображено на рис. 8.3 суцільними лініями.

При зміні струму I_1 у другому контурі індукується ЕРС \mathcal{E}_{i2} , яка за законом Фарадея дорівнює

$$\mathcal{E}_{i2} = - \frac{d \Phi_{21}}{dt} = - L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \tag{8.19}$$

Аналогічно, при проходженні у другому контурі струму I_2 виникає пов'язаний з першим контуром потік

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2. \quad (8.20)$$

Магнітне поле, яке утворює цей потік, на рис. 8.3 зображено пунктирними лініями.

При зміні струму I_2 у першому контурі індукується ЕРС \mathcal{E}_{i1} , яка дорівнює

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (8.21)$$

Контури 1 та 2 взаємопов'язані, коефіцієнти пропорційності L_{12} та L_{21} називаються *коефіцієнтами взаємної індукції*, або *просто взаємною індуктивністю*.

Коефіцієнти L_{12} та L_{21} залежать від геометричної форми, розмірів і взаємного розташування контурів, а також від магнітної проникності оточуючого середовища.

На основі **теорему взаємності**, яка стверджує, що у неферомагнітному середовищі при зміні ролі контурів (струм проходить у контурі 2, а індукується у контурі 1 і навпаки) взаємна індуктивність двох довільних контурів дорівнює одна одній

$$L_{12} = L_{21}.$$

Взаємна індуктивність двох котушок на тороїдальному осерді

Розрахуємо взаємну індуктивність двох котушок намотаних на загальне тороїдальне осердя (рис. 8.4).

Нехай перша обмотка має N_1 витків і по ній проходить струм I_1 . Згідно з теоремою про циркуляцію

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1 I_1, \quad (8.22)$$

де l — довжина осердя; H — напруженість магнітного поля тороїда.

Потік магнітної індукції крізь один виток другої котушки

$$\Phi_{21} = \int_0^S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \mu H S,$$

де S — площа поперечного перерізу осердя; μ_0 — магнітна стала; μ — магнітна проникність середовища.

З урахуванням (8.22)

$$\Phi_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l} S.$$

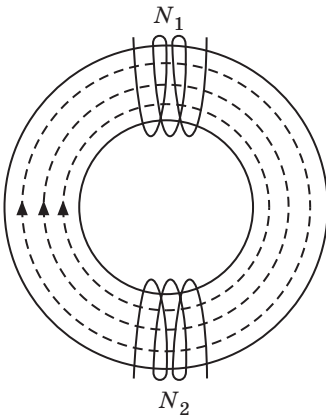


Рис. 8.4

Повний потік (потокозчеплення) крізь другу обмотку, яка має N_2 витків, дорівнюватиме

$$\Phi_{21} = \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Потік утворюється струмом I_1 , тому згідно з (8.18) отримаємо

$$L_{21} = \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Якщо підрахувати магнітний потік, пов'язаний з першою обмоткою, припустивши, що по другій обмотці проходить струм I_2 , то для L_{12} отримаємо вираз, узгоджений з формулою (8.20), а саме:

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Таким чином, взаємна індуктивність двох котушок, намотаних на загальне тороїдальне осердя

$$L_{21} = L_{12} = \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (8.23)$$

8.6. Закон зміни сили струму в електричному колі при вимиканні та вмиканні джерела ЕРС

При будь-якій зміні сили струму у провідному контурі виникає ЕРС самоіндукції. Внаслідок цього в контурі з'являються додаткові струми, які мають назву *екстраструмів самоіндукції*. За правилом Ленца, екстраструми самоіндукції завжди напрямлені так, щоби перешкоджати зміні струму в колі, тобто напрямлені протилежно струму, що його утворює джерело.

**Екстраструм
розмикання**

Розглянемо процес вимикання струму в електричному колі, що складається з джерела струму з ЕРС \mathcal{E}_0 , резистора з опором R і котушки з індуктивністю L , з'єднаних послідовно (рис. 8.5).

Під дією зовнішньої ЕРС в колі тече постійний струм

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}. \quad (8.24)$$

У деякий момент часу $t = 0$ відключимо джерело струму і замкнемо коло. Це досягається перемиканням ключа з контакту 1 на контакт 2.

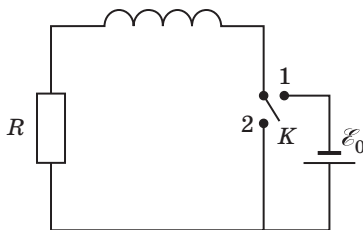


Рис. 8.5

Сила струму у колі спадає від I_0 до нуля не миттєво, а за деякий час $dt > 0$. Це спадання призводить до зменшення індукції магнітного поля навколо котушки з індуктивністю L . Спадає з часом і магнітний потік, що пронизує витки котушки; виникає ЕРС \mathcal{E}_S самоіндукції, і як наслідок — додатковий струм (*струм самоіндукції*), який, за правилом Ленца, направлений так, щоб протидіяти зміні струму в колі.

Струм самоіндукції, що виникає при розмиканні електричного кола, називається *екстраструмом розмикання*.

У будь-який момент часу після відключення джерела ЕРС \mathcal{E}_0 сила струму в колі дорівнюватиме $I = \mathcal{E}_S / R$ та задовольнятиме рівнянню

$$IR = \mathcal{E}_S = L \frac{dI}{dt}.$$

Цей вираз можна подати у вигляді

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0. \quad (8.25)$$

Рівняння (8.25) — це однорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Розподілимо змінні в цьому рівнянні

$$\frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} dt. \quad (8.26)$$

Проінтегруємо рівняння (8.26) і отримаємо закон зміни струму в колі при вимиканні джерела ЕРС

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (8.27)$$

де I_0 — стала інтегрування, яка дорівнює початковому значенню сили струму (8.24).

Отже, при вимиканні джерела ЕРС сила струму в колі не стає нульовою миттєво, а спадає з часом за експоненціальним законом.

Графік зменшення струму подано на рис. 8.6 (крива 1).

Швидкість зменшення струму визначається *сталю часу*

$$\frac{L}{R}. \quad (8.28)$$

Використавши позначення (8.28), формулі (8.27) можна надати вигляду

$$I = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (8.29)$$

Згідно з цією формулою — це час, за який струм зменшиться в e разів. Цю сталу називають *часом релаксації*.

Зі співвідношення (8.28) видно, що чим більшою є індуктивність L і меншим активний опір R , тим більший час релаксації і тим повільніше спадає струм в електричному колі (8.27).

З урахуванням (8.24) закон зміни струму при вимиканні джерел ЕРС набуває вигляду

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

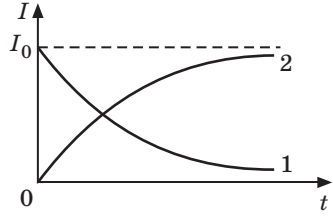


Рис. 8.6

**Екстраструм
замикання**

Тепер розглянемо процес вмикання струму в електричному колі (рис. 8.5). Для цього потрібно перемкнути вимикач K з контакту 2 на контакт 1. Крізь котушку індуктивності починає проходити зростаючий з часом від нуля до I_0 струм. Внаслідок цього збільшується індукція магнітного поля соленоїда. Збільшується з часом і магнітний потік, що пронизує витки котушки; виникає ЕРС самоіндукції, і як наслідок, струм самоіндукції, який, за правилом Ленца, напрямлений проти зростаючого основного струму і тим самим спричиняє уповільнення цього зростання.

Струм самоіндукції, що виникає при вмиканні джерел струму в електричне коло називається *екстраструмом замикання*.

Зрозуміло, що доки сила струму не набуде усталеного значення (8.24) в колі, крім зовнішньої ЕРС \mathcal{E}_0 , діятиме й ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_S = L \frac{dI}{dt}.$$

За правилом Кірхгофа можна записати

$$IR = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_S,$$

або

$$IR = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt}. \tag{8.30}$$

Перепишемо рівняння (8.30) у вигляді

$$\frac{dI}{dt} = \frac{R}{L} I - \frac{\mathcal{E}_0}{L}. \tag{8.31}$$

Рівняння (8.31) є неоднорідним диференціальним рівнянням. Воно відрізняється від рівняння (8.25) тим, що в правій його частині

замість нуля стоїть стала величина \mathcal{E}_0/L . Загальний розв'язок такого рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого його частинного розв'язку.

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння було знайдено у попередньому прикладі, це

$$I = C e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Частинним розв'язком неоднорідного рівняння (8.31) є рівняння (8.24)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Остаточно загальний розв'язок рівняння (8.31) можна записати таким чином:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Сталу інтегрування C визначимо з початкових умов. Якщо $t = 0$, то $I(0) = 0$, тоді

$$C = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Таким чином, закон зміни струму в електричному колі при вмиканні джерела струму набуває остаточного вигляду

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad \text{або} \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (8.32)$$

Отже, при вмиканні джерела ЕРС \mathcal{E}_0 зростання сили струму в колі відбувається не миттєво, а поступово, за законом (8.32). Графік зростання струму подано на рис. 8.6 (крива 2). Сила струму зростає від початкового значення $I = 0$ і асимптотично наближається до усталеного значення $I_0 = \mathcal{E}_0/R$. Швидкість наростання струму визначається тим самим *часом релаксації* L/R , що й спадання струму. Формулі (8.32) можна надати вигляду

$$I = I_0 (1 - e^{-t/\tau}).$$

Таким чином, усталення струму відбувається тим швидше, чим менший час релаксації, тобто менша індуктивність і більший опір системи.

8.7. Енергія магнітного поля замкненого провідного контуру зі струмом. Енергія й густина енергії магнітного поля

Макроскопічні магнітні поля створюються макроскопічними струмами намагнічування.

При вмиканні джерела електрорушійної сили в електричне коло (соленоїд зі сталою індуктивністю L) у цьому колі установлюється струм, який обумовлює зчеплене з витками соленоїда магнітне поле (рис. 8.7). Якщо з електричного кола вилучити джерело ЕРС і замкнути соленоїд на опір R , то в цьому колі деякий час за рахунок ЕРС самоіндукції проходитиме спадаючий з часом струм. Робота, яка здійснюється цим струмом за час dt , дорівнює

$$dA = \int_s Idt = L \frac{dI}{dt} Idt = LI dI.$$

Розрахуємо роботу за весь час, за який відбувається зникнення магнітного поля,

$$A = \int_0^I LI dI = L \int_0^I IdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.33)$$

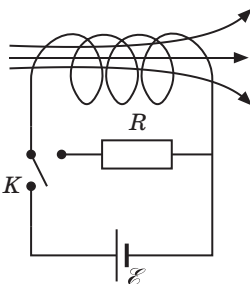


Рис. 8.7

Робота (8.33) йде на приріст внутрішньої енергії опору соленоїда та з'єднувальних провідників, тобто на їх нагрівання. Здійснення цієї роботи супроводжується зникненням магнітного поля, попередньо існуючого в оточуючому соленоїд середовищі. Можна зробити висновок, що магнітне поле є носієм енергії, за рахунок якої здійснюється робота нагрівання. Таким чином, провідник з індуктивністю L , по якому проходить струм I , має енергію

$$W_M = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.34)$$

Оскільки енергія магнітного поля розподілена в усьому просторі, де локалізоване поле, то формула (8.34) визначає повну енергію магнітного поля струму.

Часто важливо знати не повну енергію, а енергію в окремих областях, а інколи й окремих точках заданого магнітного поля.

Виразимо енергію магнітного поля як функцію величин, які є локальними характеристиками поля в кожній точці.

Для цього розглянемо окремий випадок — однорідне магнітне поле всередині дуже довгого соленоїда. Індуктивність такого соленоїда (за відсутності феромагнетиків)

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad (8.35)$$

де μ_0 — магнітна стала; μ — магнітна проникність середовища; n — густина витків; V — об'єм соленоїда.

Напруженість соленоїда $H = nI$, звідки $I = \frac{H}{n}$, тоді енергія магнітного поля соленоїда

$$W_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \frac{H^2}{2n^2} = \frac{1}{4} \mu_0 H^2 V. \quad (8.36)$$

Якщо врахувати, що $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, то формула (8.36) матиме вигляд

$$W_M = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} V. \quad (8.37)$$

Магнітне поле соленоїда однорідне й зосереджено всередині нього, тому енергія (8.37) розподілена в соленоїді з постійною об'ємною густиною

$$w_M = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (8.38)$$

Отже, об'ємна густина енергії магнітного поля в околі кожної точки простору визначається значенням характеристик цього поля в даній точці.

Вираз (8.38) для об'ємної густини енергії магнітного поля має вигляд, аналогічний формулі (3.24) для об'ємної густини енергії електростатичного поля, з тією різницею, що електричні величини замінені магнітними.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає явище електромагнітної індукції?
2. Що є причиною виникнення ЕРС індукції в замкненому провідному контурі? Від чого і як залежить ЕРС індукції, що виникає в контурі?
3. Чому для виявлення індукційного струму краще використовувати замкнений провідник у вигляді котушки, а не у вигляді одного витка провідника?
4. Сформулюйте правило Ленца та проілюструйте його застосування.
5. Чи завжди при зміні потоку магнітної індукції в провідному контурі в ньому виникає ЕРС індукції? Індукційний струм?
6. Чи виникає індукційний струм у провідній рамці, яка поступально рухається в однорідному магнітному полі?

7. Доведіть, що закон Фарадея є наслідком закону збереження енергії.
8. Яка природа ЕРС електромагнітної індукції?
9. Виведіть вираз для ЕРС індукції у плоскій рамці, яка рівномірно обертається в однорідному магнітному полі. За рахунок чого її можна збільшити?
10. Що таке вихрові струми? Корисні вони чи шкідливі?
11. Чому сердечники трансформаторів не роблять суцільними?
12. У чому полягають явища самоіндукції та взаємної індукції? Визначте ЕРС індукції в обох випадках.
13. У чому полягає фізичний зміст часу релаксації L/R ? Доведіть, що він має розмірність часу.
14. Наведіть співвідношення між струмами в первинній і вторинній обмотках підвищувального трансформатора.
15. Коли ЕРС самоіндукції більша — при замиканні чи при розмиканні кола постійного струму?
16. Яка фізична величина вимірюється в генрі? Дайте визначення генрі.
17. У чому полягає фізичний зміст індуктивності контуру? Взаємної індуктивності двох контурів? Від чого вони залежать?
18. Запишіть та проаналізуйте вираз для об'ємної густини енергії електростатичного та магнітного полів. Чому дорівнює об'ємна густина енергії електромагнітного поля?
19. Напруженість магнітного поля виросла вдвічі. Як змінилася об'ємна густина енергії магнітного поля?
20. Чому при розмиканні кола струм не зникає миттєво?

Завдання для експрес-контролю

1. Яку форму необхідно надати відрізку провідника заданої довжини, щоб його індуктивність була максимальною? Мінімальною?
2. Чи буде сталою протягом досить тривалого часу індуктивність соленоїда із залізним осередям?
3. Скільки витків має котушка індуктивністю 1 мГн, якщо при силі струму 1 А магнітний потік крізь котушку дорівнює 2 мкВб?
4. Який магнітний потік створюється котушкою з 1000 витків, яка має індуктивність 5 Гн, якщо в контурі проходить струм силою 0,6 А?
5. Автомобіль рухається зі швидкістю 30 м/с. Знайти різницю потенціалів на кінцях передньої осі машини, якщо довжина осі

- 1,8 м, а вертикальна складова індукції магнітного поля Землі дорівнює $5 \cdot 10^5$ Тл.
6. Різниця потенціалів між кінцями крил літака дорівнює 1 мВ, розмах крил 20 м. Літак прямує на південь на висоті h , де вертикальна складова індукції магнітного поля Землі становить $6 \cdot 10^5$ Тл. Якою буде швидкість літака?
 7. Що таке час релаксації? Яким він буде, якщо джерело струму замкнено на котушку опором 10 Ом й індуктивністю 0,4 Гн?
 8. Довгий соленоїд індуктивністю 4 мГн має 600 витків. Площа поперечного перерізу соленоїда 20 см^2 . Знайти магнітну індукцію всередині соленоїда, якщо сила струму, що проходить по його обмотці, дорівнює 6 А.
 9. Дві довгі котушки намотані на загальне осереддя, їхні індуктивності 0,64 Гн і 0,04 Гн. У скільки разів кількість витків першої котушки більша за другу?
 10. Котушка має індуктивність 0,1 Гн і опір 0,8 Ом. У скільки разів зменшиться сила струму в контурі за 30 мс, якщо джерело струму вимкнути і котушку закоротити?
 11. Індуктивність соленоїда при довжині 1 м й площі поперечного перерізу 20 см^2 дорівнює 0,4 мГн. Знайти силу струму в соленоїді, за якої об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда дорівнює 1 Дж/м^3 .
 12. Магнітний потік $\Phi = 40 \text{ мВб}$ пронизує замкнений контур. Знайти середнє значення ЕРС індукції, що виникає в контурі, якщо магнітний потік змінюється до нуля за $t = 2 \text{ мс}$.
 13. Прямий провідник, довжина якого $l = 0,4 \text{ м}$, рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю $v = 5 \text{ м/с}$ перпендикулярно до ліній індукції. Різниця потенціалів між кінцями провідника дорівнює $U = 6 \text{ В}$. Знайти індукцію магнітного поля.
 14. По обмотці соленоїда індуктивністю $L = 0,2 \text{ Гн}$ проходить струм $I = 10 \text{ А}$. Знайти енергію магнітного поля соленоїда.
 15. Індуктивність котушки (без осереддя) дорівнює 0,1 мГн. При якій силі струму енергія магнітного поля дорівнюватиме 100 мкДж?

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Сила струму в прямому нескінченному провіднику дорівнює I_1 . На відстані r_0 (рис. 8.8) від провідника знаходиться плоский контур, утворений двома паралельними шинами, якими переміщується

прямий провідник, та резистором з опором R . Відстань між шинами дорівнює a , швидкість руху провідника v . Визначити, за якими законами змінюється з часом: магнітний потік, що пронизує контур (t); ЕРС індукції $\mathcal{E}_i(t)$; індукційний струм у контурі $I_i(t)$; кількість тепла, що виділяється в контурі за проміжок часу від t_1 до t_2 .

Розв'язання

Контур, утворений рухомих провідником, двома шинами та резистором, перебуває в неоднорідному магнітному полі, створеному прямим нескінченним провідником зі струмом (рис. 8.8). Внаслідок того, що провідник рухається, площа контуру змінюється, тому змінюється і магнітний потік, що пронизує контур. Знайдемо закон зміни магнітного потоку.

За означенням, магнітний потік крізь контур $\vec{B}d\vec{S}$, де B — індукція магнітного поля, створеного прямим нескінченним струмом. Знайдемо зміну площі контуру за невеликий проміжок часу dt . Нехай вісь Ox збігається з однією з паралельних шин, якими рухається провідник. Тоді $dS = a dx$.

Індукція магнітного поля, створеного прямим нескінченним провідником зі струмом I_1 на відстані x від нього,

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2x}$$

Вектор \vec{B} перпендикулярний площині контуру, кут між \vec{B} та $d\vec{S}$ дорівнює нулю, тому магнітний потік у даний момент часу t знаходимо, інтегруючи вираз BdS

$$\Phi(t) = \int_{r_0}^x \frac{\mu_0 I_1}{2x} a dx = \frac{\mu_0 I_1 a}{2} \ln \frac{x}{r_0} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2} \ln \frac{vt}{r_0}$$

Магнітний потік крізь контур змінюється, тому в контурі виникає ЕРС індукції, миттєве значення якої за основним законом електромагнітної індукції

$$\mathcal{E}_i(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_1 a v}{2t}$$

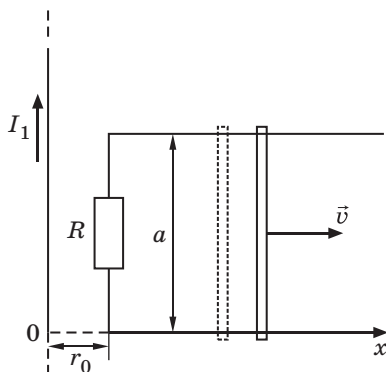


Рис. 8.8

а індукційний струм

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{0 I_1 a}{2 R t}$$

Кількість тепла, що виділяється в контурі, знаходимо за законом Джоуля — Ленца

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I_i^2 R dt = \frac{2 I_1^2 a^2}{4 R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t^2} = \frac{2 I_1^2 a^2}{2 R} \left[\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right]$$

Задача 2

Ізольований металевий диск радіусом $r = 0,25$ м обертається з кутовою швидкістю 100 с^{-1} навколо осі, що проходить крізь його центр перпендикулярно площині диска (рис. 8.9). Визначити

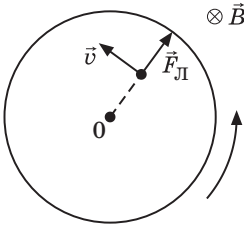


Рис. 8.9

різницю потенціалів між центром та краєм диска, яка виникає за відсутності магнітного поля; в однорідному магнітному полі, перпендикулярному площині диска ($B = 10$ мТл).

Розв'язання

Якщо розглядати електрони металевого диска в неінерційній системі відліку, пов'язаній з диском, то на вільні електрони діє відцентрова сила інерції $F_{\text{ин}} = m \omega^2 l$, де ω — кутова швидкість обертання диска; l — відстань від центра диска. Внаслідок дії сили інерції електрони переміщуються до краю диска і виникає різниця потенціалів між центром і краєм диска. Ця різниця потенціалів дорівнює електрорушійній силі

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{1}{q} \int \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l},$$

де $A_{\text{стор}}$ — робота сторонніх сил з переміщення заряду q ; $F_{\text{стор}}$ — стороння сила.

У цій задачі сторонньою силою є сила інерції, тому

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_0^r F_{\text{ин}} dl = \frac{1}{q} \int_0^r m \omega^2 l dl = \frac{m \omega^2 r^2}{2q}$$

Різниця потенціалів між краєм і центром диска

$$\mathcal{E} = \frac{m \omega^2 r^2}{2q} = 1,8 \text{ нВ.}$$

Якщо диск обертається в магнітному полі, на вільні електрони діє сила Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]$. Тоді ЕРС індукції, що виникає внаслідок дії сили Лоренца,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int \vec{F}_L d\vec{l} = [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l}.$$

Якщо вектор індукції \vec{B} має напрямок, вказаний на рис. 8.9, а вектор $d\vec{l}$ напрямлений від центра диска до краю, то на електрони діє сила Лоренца, яка переміщує їх до краю диска. Різниця потенціалів між краєм диска і його центром тоді дорівнює сумі ЕРС, що виникають унаслідок дії сили Лоренца та сили інерції:

$$\mathcal{E}_i = \int_0^r [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l} = \int_0^r v B dl = \int_0^r B \omega r dr = \frac{B \omega r^2}{2} = \frac{m}{2q} \omega^2 r^2 = 3,08 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$$

У формулі для \mathcal{E}_2 другий доданок набагато менший за перший, тобто дією сил інерції при обертанні диска в магнітному полі можна знехтувати (при невеликій швидкості обертання).

Задача 3

Котушка без осердя діаметром $D = 10$ см, довжиною $l = 40$ см, має $N = 800$ витків. На котушку надіто кільце з мідного дроту такого самого діаметра, як і котушка. Площа поперечного перерізу мідного дроту дорівнює $S_1 = 2 \text{ мм}^2$. Струм у котушці за допомогою реостата рівномірно збільшується на $0,1 \text{ А}$ за секунду. Вважаючи, що магнітні потоки, які пронизують котушку і кільце в будь-який момент часу, однакові, знайти струм у кільці.

Розв'язання

Величину струму індукції I_i у кільці можна знайти за законом Ома

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}, \quad (1)$$

де \mathcal{E}_i — ЕРС індукції у кільці; R — опір кільця.

За законом Фарадея, ЕРС у кільці дорівнює

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

де Φ — повний магнітний потік крізь котушку.

Величину повного магнітного потоку крізь котушку знайдемо за формулою

$$\Phi = n^2 l S I, \quad (3)$$

де l ; n $\frac{N}{l}$; S $\frac{D^2}{4}$; I — сила струму у котушці.

Таким чином, ЕРС індукції у кільці

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - n^2 l S \frac{dI}{dt} = - \frac{N^2}{l} \frac{D^2}{4} \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

Опір кільця

$$R = \frac{l_1}{S_1}, \quad (5)$$

де ρ — питомий опір міді ($\rho = 17$ нОм·м); l_1 — довжина дротяного кільця; S_1 — площа поперечного перерізу дроту, з якого виготовлено кільце. Враховуючи, що $l_1 = \pi D$, маємо

$$R = \frac{D}{S_1}. \quad (6)$$

Тоді з урахуванням (4), (5) і (6) вираз (1) набуває вигляду:

$$I_i = - \frac{N^2 D S_1}{4 l} \frac{dI}{dt} = 0,59 \text{ А}. \quad (7)$$

Знак мінус, який має місце, пояснюється тим, що він відбиває закон Ленца. Зростання струму у котушці призводить до зростання магнітного потоку поля котушки, а струм індукції у кільці тече у такому напрямку, щоб створене магнітне поле індукваного струму послабляє підсилення поля котушки. У цьому полягає істотний фізичний зміст знака мінус в індукваному струмі кільця.

Задача 4

В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл рівномірно з частотою $n = 10$ с⁻¹ обертається рамка, яка містить $N = 1000$ витків. Площа рамки $S = 150$ см². Визначити миттєве значення ЕРС \mathcal{E}_i , що відповідає куту повороту рамки в 30° .

Розв'язання

Миттєве значення ЕРС індукції \mathcal{E}_i визначається основним рівнянням електромагнітної індукції Фарадея — Максвелла

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Потокозчеплення N , де N — кількість витків, що пронизуються магнітним потоком. Підставимо вираз у попередню формулу, отримаємо

$$\mathcal{E}_i = N \frac{d}{dt}.$$

При обертанні рамки магнітний потік, що пронизує рамку в момент часу t , змінюється за законом $BS \cos t$, де $2n$ — кутова швидкість (циклічна частота).

Тоді

$$\mathcal{E}_i = N \frac{d}{dt}(BS \cos t) = NBS 2n \sin t = 47,1 \text{ В.}$$

Задача 5

Визначити індуктивність котушки із 800 витків, якщо магнітний потік крізь поперечний переріз дорівнює 4 мкВб. У котушці проходить струм силою 2 А.

Розв'язання

Індуктивність котушки (соленоїда)

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{l},$$

де N — потокозчеплення, тоді

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{l} = 1,6 \text{ мГн.}$$

Задача 6

При швидкості зміни сили струму $I/t = 50 \text{ А/м}$ в соленоїді, на його кінцях виникає ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_S = 0,08 \text{ В}$. Визначити індуктивність соленоїда.

Розв'язання

Згідно з законом електромагнітної індукції для самоіндукції маємо

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}.$$

У даній рівності напрямок \mathcal{E}_S не суттєвий, знак мінус можна вилучити, тоді

$$L = \frac{\mathcal{E}_S}{dI/dt} = 1,6 \text{ мГн.}$$

Задача 7

Два соленоїди однакової довжини l та з радіусами R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$) мають відповідно n_1 та n_2 витків на одиницю довжини. Менший соленоїд цілком помістили всередину більшого так, що їх осі співпали. Визначити модуль взаємної індуктивності L_{12} соленоїдів.

Розв'язання

За означенням взаємна індуктивність

$$L_{12} = \frac{\Phi_1}{I_2},$$

де Φ_1 — повний магнітний потік крізь усі витки першого соленоїда, якщо в другому соленоїді тече струм I_2 .

$$\Phi_1 = n_1 B_2 S_1 = n_1 l B_2 \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

де N_1 — число витків у першому соленоїді; S_1 — площа поперечного перерізу цього соленоїда; B_2 — індукція магнітного поля, створеного другим соленоїдом, $B_2 = \mu_0 n_2 I_2$.

Тоді

$$|L_{12}| = \mu_0 n_1 n_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} l.$$

Зверніть увагу на те, що цей вираз можна записати

$$|L_{12}| = \mu_0 n_1 n_2 S_1 l = \mu_0 n_1 n_2 V_1,$$

де V_1 — об'єм першого соленоїда.

Якщо площі поперечного перерізу першого та другого соленоїдів майже однакові, то

$$|L_{12}| = \sqrt{\mu_0 n_1^2 V} \sqrt{\mu_0 n_2^2 V} = \sqrt{L_1 L_2},$$

де L_1 та L_2 — індуктивності першого та другого соленоїдів. У цьому випадку взаємна індуктивність буде максимальною.

Задача 8

8. Магніторушійна сила соленоїда довжиною $l = 60$ см і малого діаметра дорівнює $F_m = 600$ А. Знайти об'ємну густину енергії магнітного поля і магнітну індукцію всередині соленоїда.

Розв'язання

Магніторушійна сила F_m — це скалярна фізична величина, яка дорівнює циркуляції вектора напруженості магнітного поля \vec{H} по

замкненому контуру l , що охоплює струми, які створюють магнітне поле,

$$F_m = \oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_l H_l dl, \quad (1)$$

де dl — елемент контуру інтегрування.

Оскільки $H_l = H$, то вираз (1) має вигляд:

$$F_m = Hl. \quad (2)$$

Звідси

$$H = \frac{F_m}{l}. \quad (3)$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w = \frac{0}{2} H^2. \quad (4)$$

Оскільки $l = 1$, то вираз (4) з урахуванням (3) має вигляд

$$w = \frac{0}{2l^2} F_m^2 = 0,628 \text{ Дж/м}^3. \quad (5)$$

Магнітна індукція і напруженість магнітного поля зв'язані співвідношенням

$$B = \mu_0 H. \quad (6)$$

Або з урахуванням (3)

$$B = \mu_0 \frac{F_m}{l} = 1,256 \text{ мТл}. \quad (7)$$

Задачі для самостійного розв'язання

8.1. Рамка площею 200 см^2 рівномірно обертається з частотою 10 с^{-1} в однорідному магнітному полі з індукцією $0,2 \text{ Тл}$. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції поля. Чому дорівнює середнє значення ЕРС індукції за час, протягом якого магнітний потік змінюється від нуля до максимального значення?

Відповідь: $\mathcal{E}_i = 1 \text{ В}$.

8.2. У магнітному полі з індукцією 500 Тл обертається стрижень з кутовою швидкістю 20 рад/с . Вісь обертання проходить крізь

кінець стрижня паралельно силовим лініям магнітного поля. Знайти ЕРС індукції, яка виникає на кінцях стрижня.

Відповідь: \mathcal{E}_i 0,5 В.

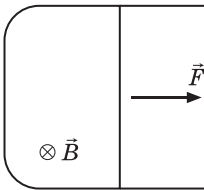
8.3. Виток у вигляді кільця площею 100 см^2 знаходиться в однорідному полі, індукція якого 1 Вб/м^2 . Площина витка перпендикулярна до напрямку магнітного поля. Чому дорівнюватиме середнє значення ЕРС індукції, яка виникає у витку при вимиканні поля протягом $0,01 \text{ с}$.

Відповідь: \mathcal{E}_i 1 В.

8.4. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,35 \text{ Тл}$ рівномірно обертається з частотою $n = 8 \text{ с}^{-1}$ рамка. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна лініям індукції. Площа рамки $S = 50 \text{ см}^2$, кількість витків $N = 1500$. Визначити максимальну ЕРС індукції, яка виникає в рамці.

Відповідь: \mathcal{E}_{max} 132 В.

8.5. По П-подібному провіднику (рис. 8.10) переміщується зі сталою швидкістю v під дією сили F перемичка. Контур розташований в перпендикулярному його площині однорідному магнітному полі. Чому дорівнює сила F , якщо кожної секунди в контурі виділяється кількість тепла Q ?



Відповідь: $F = \frac{Q}{v}$.

Рис. 8.10

8.6. Провідник, що має форму параболи $y = kx^2$, розташований в однорідному магнітному полі з індукцією B (рис. 8.11). З вершини параболи в момент часу $t = 0$ почали переміщувати перемичку 1—2. Знайти ЕРС індукції в контурі як функцію y , якщо перемичка рухається зі сталою швидкістю v .

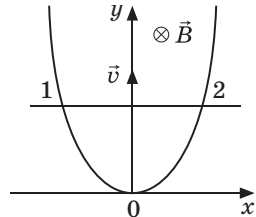


Рис. 8.11

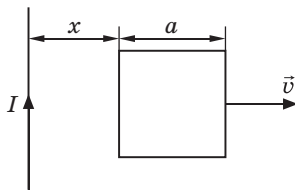


Рис. 8.12

Відповідь:
 $\mathcal{E}_i = 2Bv\sqrt{y/k}$.

8.7. Квадратна рамка і довгий прямий провідник зі струмом I перебувають в одній площині (рис. 8.12), сторона рамки дорівнює a .

Рамку переміщують вправо зі сталою швидкістю v . Знайти ЕРС індукції як функцію відстані x .

$$\text{Відповідь: } \mathcal{E} = \frac{0Ia^2v}{2x(x+a)}.$$

8.8. Соленоїд діаметром $d = 4$ см, який має $N = 600$ витків, розташовано у магнітному полі, індукція якого змінюється зі швидкістю $dB/dt = 1,2$ мТл/с. Вісь соленоїда складає з вектором магнітної індукції кут 60° . Визначити ЕРС індукції, що виникає в соленоїді.

$$\text{Відповідь: } \mathcal{E}_i = 452 \text{ мкВ.}$$

8.9. В однорідному магнітному полі розташовано прямокутну рамку, одна сторона якої є рухомою. Сторона рухається перпендикулярно лініям магнітної індукції зі швидкістю $v = 20$ м/с. Визначити ЕРС індукції, що виникає у рамці, якщо індукція магнітного поля $B = 0,4$ Тл, а довжина сторони рамки $l = 10$ см.

$$\text{Відповідь: } \mathcal{E}_i = 0,8 \text{ В.}$$

8.10. Індукція магнітного поля змінюється за законом $B = B_0 \cos t$, де $B_0 = 0,2$ Тл; $\omega = 1$ с⁻¹. У цьому полі розташовано провідне кільце радіусом $R = 20$ см, нормаль до площини якого складає з напрямком поля кут 45° . Визначити ЕРС індукції, яка виникає у кільці в момент часу $t = 2$ с.

$$\text{Відповідь: } \mathcal{E}_i = 16,1 \text{ мВ.}$$

8.11. Квадратна рамка з мідного дроту ($\rho = 17$ нОм·м) діаметром $d = 2$ мм перебуває в магнітному полі перпендикулярно лініям магнітної індукції. Визначити швидкість зміни магнітного поля, якщо струм у рамці $I = 2$ А, а її сторона $a = 10$ см.

$$\text{Відповідь: } \frac{dB}{dt} = 0,108 \text{ Тл/с.}$$

8.12. ЕРС індукції, що виникає у прямокутній рамці з рухомою стороною, яка переміщується перпендикулярно лініям магнітної індукції, дорівнює $\mathcal{E}_i = 0,4$ В. Довжина сторони рамки $l = 20$ см. Визначити швидкість v , з якою ця сторона рухається у магнітному полі з індукцією $B = 0,2$ Тл.

$$\text{Відповідь: } v = 10 \text{ м/с.}$$

8.13. Максимальний магнітний потік крізь прямокутну рамку, яка з частотою $n = 10 \text{ с}^{-1}$ обертається в однорідному магнітному полі, дорівнює 100 мВб . Визначити амплітуду індукованої ЕРС.

Відповідь: $\mathcal{E}_0 = 6,28 \text{ В}$.

8.14. Визначити максимальну ЕРС індукції, що виникає у рамці площею $S = 40 \text{ см}^2$, яка вміщує $N = 1000$ витків, при її обертанні в однорідному магнітному полі $B = 0,2 \text{ Тл}$ з частотою $n = 600 \text{ хв}^{-1}$. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна лініям індукції.

Відповідь: $\mathcal{E}_i = 50,2 \text{ В}$.

8.15. Площа поперечного перерізу довгого соленоїда, що має $N = 1000$ витків, дорівнює $S = 20 \text{ см}^2$. По обмотці соленоїда протікає струм силою $I = 5 \text{ А}$ і створює всередині магнітне поле з індукцією $B = 15 \text{ мТл}$. Визначити індуктивність соленоїда.

Відповідь: $L = 6 \text{ мГн}$.

8.16. Визначити, у скільки разів більше потрібно намотати витків на одну котушку порівняно з іншою, щоб її індуктивність у 25 разів перебільшувала індуктивність другої котушки за умови, що ці обидві котушки намотані на загальне осердя.

Відповідь: $\frac{N_1}{N_2} = 5$.

8.17. Взаємна індуктивність двох котушок, намотаних на одне загальне осердя, дорівнює $L_{12} = 0,2 \text{ Гн}$. Визначити ЕРС \mathcal{E}_{12} у другій котушці, якщо швидкість зміни сили струму у першій котушці $dI/dt = 5 \text{ А/с}$.

Відповідь: $\mathcal{E}_{12} = 1 \text{ В}$.

8.18. Котушка з індуктивністю $L = 250 \text{ м Гн}$ і опором $R = 0,3 \text{ Ом}$ підключається до джерела постійної напруги. За який проміжок часу сила струму в котушці досягне 50% від установленого значення?

Відповідь: $0,58 \text{ с}$.

8.19. У колі проходив струм $I_0 = 50 \text{ А}$. Джерело струму можна вимкнути, не розриваючи кола. Визначити силу струму в цьому колі за $t = 0,01 \text{ с}$ після відключення його від джерела струму. Опір кола дорівнює 20 Ом , індуктивність $L = 0,1 \text{ Гн}$.

Відповідь: $I = 6,75 \text{ А}$.

8.20. До джерела струму з внутрішнім опором $R_i = 2$ Ом підключили котушку індуктивністю $L = 0,5$ Гн і опором $R = 8$ Ом. Знайти проміжок часу, за який струм у котушці, збільшуючись, досягне значення, що відрізняється від максимального на 1 %.

Відповідь: $t = 0,23$ с.

8.21. Кільце з провідника радіусом $r = 0,1$ м лежить на столі. Який електричний заряд пройде по кільцю, якщо його перевернути з одного боку на інший? Опір кільця $R = 1$ Ом. Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі $B = 50$ мкТл.

Відповідь: $Q = 3,14$ мкКл.

8.22. Квадратну рамку зі стороною $a = 5$ см і опором 10 мОм розташовано в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 40$ мТл. Нормаль до площини рамки розташована під кутом 30° до ліній магнітної індукції. Знайти заряд, що пройде по рамці, якщо магнітне поле вимкнути.

Відповідь: $Q = 8,67$ мКл.

8.23. Тонкий провідник довжиною $l = 1$ м зігнуто у вигляді квадрата, кінці якого замкнено. Квадрат розташовано в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл. Визначити заряд, що пройде по провіднику, якщо квадрат, потягнувши за протилежні вершини, витягнути в лінію. Опір провідника дорівнює 3 Ом.

Відповідь: $q = 2,08 \cdot 10^{-3}$ Кл.

8.24. Соленоїд площею перерізу 5 см² має $N = 1200$ витків. При силі струму $I = 2$ А індукція магнітного поля всередині соленоїда $B = 0,01$ Тл. Знайти індуктивність соленоїда.

Відповідь: $L = 3$ мГн.

8.25. Магнітна індукція B поля між полюсами двополюсного генератора дорівнює $0,8$ Тл. Ротор має $N = 100$ витків площею $S = 400$ см². Визначити частоту обертання якоря, якщо максимальне значення ЕРС індукції $\mathcal{E}_{\max} = 200$ В.

Відповідь: $n = 600$ хв⁻¹.

8.26. Скільки метрів тонкого дроту потрібно для виготовлення соленоїда довжиною 100 см та індуктивністю 1 мГн, якщо діаметр перерізу соленоїда значно менший за його довжину.

Відповідь: $l = 100$ м.

8.27. По котушці радіусом 2 см, яка має 500 витків, проходить струм силою 2 А. Визначити індуктивність котушки, якщо напруженість магнітного поля в центрі дорівнює 10 кА/м.

Відповідь: $L = 16$ мГн.

8.28. Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю, що складається з двох тонкостінних коаксіальних металевих циліндрів радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$). Сили струмів у циліндрах однакові та протилежно напрямлені. Магнітна проникність середовища дорівнює одиниці.

Відповідь: $\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

8.29. Дві котушки, індуктивності яких дорівнюють $L_1 = 3$ мГн та $L_2 = 5$ мГн, з'єднані послідовно. При цьому індуктивність системи $L = 11$ мГн. Як зміниться індуктивність системи, якщо в одній з котушки напрямок змінити на протилежний, не змінюючи взаємне положення котушок.

Відповідь: $L = 5$ мГн.

8.30. Визначити сталу часу прямого соленоїда довжиною 1 м, який має одношарову обмотку з мідного дроту масою 1 кг. Діаметр перерізу соленоїда значно менший від його довжини.

Відповідь: 0,7 мс.

8.31. На немагнітний стрижень, поперечним переріз якого є квадрат зі стороною $a = 3$ см, намотаний в один шар дрiт. Загальна кількість витків такого соленоїда $N = 1000$, а довжина $l = 50$ см. Сила струму в обмотці $I = 1$ А. Визначити енергію W усередині соленоїда.

Відповідь: $W = 1,13$ мДж.

8.32. На стрижні із заліза довжиною $l = 25$ см намотано $N = 250$ витків із проводу. По обмотці соленоїда тече струм силою $I = 3$ А. Знайти об'ємну густину енергії w магнітного поля в осерді. Скористайтеся графіком $B = f(H)$ (розділ 4.1).

Відповідь: $w = 2,175$ кДж/м³.

8.33. Енергія магнітного поля в соленоїді $W = 1$ Дж, сила струму в обмотці $I = 6$ А, а кількість витків обмотки $N = 1800$. Визначити магнітний потік крізь поперечний переріз соленоїда.

Відповідь: 185 мкВб.

8.34. Об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда дорівнює $w = 0,15 \text{ Дж/м}^3$. Довжина соленоїда $l = 0,8 \text{ м}$, площа поперечного перерізу $S = 20 \text{ см}^2$, сила струму, що тече в обмотці, складає $I = 2 \text{ А}$. Визначити індуктивність соленоїда.

Відповідь: $L = 60 \text{ мкГн}$.

8.35. Соленоїд має осердя з немагнітного матеріалу. Довжина соленоїда $l = 60 \text{ см}$, кількість витків $N = 1200$. Сила струму в обмотці $I = 1 \text{ А}$. Визначити об'ємну густина магнітного поля всередині соленоїда.

Відповідь: $w = 2,512 \text{ Дж/м}^3$.

8.36. За час $t = 0,002 \text{ с}$ в обмотці електромагніту виділяється кількість теплоти, яка дорівнює енергії магнітного поля в осерді. Визначити індуктивність обмотки, якщо вона має опір $R = 20 \text{ Ом}$ і перебуває під постійною напругою.

Відповідь: $L = 0,8 \text{ Гн}$.

8.37. Енергія магнітного поля соленоїда $W = 100 \text{ мДж}$. Магнітний потік крізь його поперечний переріз $\Phi = 0,2 \text{ мВб}$. Сила струму в обмотці соленоїда $I = 2 \text{ А}$. Визначити кількість витків соленоїда.

Відповідь: $N = 500$.

8.38. Котушка з малим перерізом довжиною $l = 40 \text{ см}$ з осердям зі сталі має 400 витків. Визначити магнітну проникність сталі і об'ємну густина w енергії магнітного поля в осерді, якщо сила струму в обмотці $I = 0,8 \text{ А}$. Скористайтеся графіком $B = f(H)$ (розд. 4.1).

Відповідь: 1) 1045 ; 2) $w = 840 \text{ Дж/м}^3$.

8.39. Соленоїд без осердя довжиною $l = 60 \text{ см}$ вміщує $N = 300$ витків. Визначити силу струму I в обмотці, якщо об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $w = 0,2 \text{ Дж/м}^3$.

Відповідь: $I = 1,13 \text{ А}$.

8.40. Соленоїд має $N = 1000$ витків. Його діаметр дорівнює $D = 5 \text{ см}$, а сила струму в обмотці $I = 4 \text{ А}$. Магнітна індукція всередині соленоїда $B = 0,02 \text{ Тл}$. Визначити енергію магнітного поля в соленоїді.

Відповідь: $W = 78,5 \text{ мДж}$.

9 Основи теорії Максвелла електромагнітного поля

На початок XIX ст. завдяки роботам таких учених, як Ампер, Ерстед, Ом, Гаусс, Фарадей і багатьох інших, було накопичено величезний експериментальний матеріал з вивчення електромагнітних явищ і процесів, одержано експериментальні закони, показано зв'язок електричних і магнітних явищ. Але об'єднати опис усіх електричних і магнітних законів у єдину цілісну теорію вдалося тільки в другій половині XIX ст. шотландському фізику Джеймсу Клерку Максвеллу (1831—1879).

Максвелл запровадив поняття електромагнітного поля і показав, що всі електромагнітні явища можна описати за допомогою чотирьох рівнянь, до яких входять електричні й магнітні характеристики. Ці рівняння Максвелла є такими ж *фундаментальними*, як і закони Ньютона в механіці, і дозволяють вирішити основну задачу електродинаміки: знайти характеристики електромагнітного поля заданої системи електричних зарядів і струмів.

Основні рівняння *макроскопічного* електромагнітного поля були сформульовані за таких припущень:

1. *Усі матеріальні тіла, що знаходяться в полі, нерухомі.*
2. *У кожній точці поля значення діелектричної і магнітної проникності середовища залишаються сталими, тобто не змінюються з часом, не залежать від напруженості поля і вважаються заданими величинами.*
3. *Постійні магніти і феромагнетики в полі відсутні.*

Окрім того, Максвелл передрік існування електромагнітних хвиль і постулював електромагнітну природу світла, об'єднавши, таким чином, дві, здавалося б, різні галузі фізики: електромагнетизм і оптику.

9.1. Струм зміщення

Однією з найважливіших ідей Максвелла є гіпотеза про симетрію електричного і магнітного полів. Тобто, якщо за законом

електромагнітної індукції Фарадея зміна магнітного поля \vec{B}/t спричиняє появу електричного поля, то має бути і зворотний зв'язок: зміна електричного поля \vec{E}/t має супроводжуватися появою магнітного поля.

Коли ми розглядали постійний струм, то бачили, що необхідною умовою його існування є замкненість кола, тобто наявність електропровідності у всіх її точках. Однак для непостійних струмів ця вимога не обов'язкова. Наприклад, якщо в колі є конденсатор, який заряджається та розряджається, то у діелектрику або вакуумі між обкладками відсутня електропровідність, але в іншій частині кола йде струм провідності, заряд на конденсаторі змінюється, а в самому конденсаторі змінюється електричне поле. Максвелл впровадив поняття про *струм зміщення*, пов'язаний зі змінним електричним полем у конденсаторі, що доповнює струм провідності.

Це можна пояснити, якщо розглянути заряджений конденсатор, що розряджається через зовнішній опір (рис. 9.1).

Згідно з законом повного струму для вектора \vec{H}

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{макро}} + \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (9.1)$$

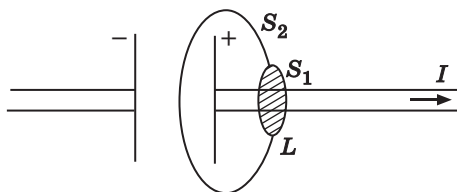


Рис. 9.1

Контур L охоплює провідник. На цей контур може спиратися дві поверхні, які мають бути рівноцінними, але крізь поверхню S_1 струм проходить, а крізь поверхню S_2 — ні. Це приводить до нерівноцінності поверхонь, чого не повинно бути, тому що поверхня має бути довільною. Щоб розв'язати цю проблему, згадаємо, що згідно з теоремою Гаусса $\vec{D} d\vec{S} = q$, тоді

$$\int_S \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S} = \frac{q}{t}. \quad (9.2)$$

З іншого боку, згідно з рівнянням безперервності

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \frac{q}{t}. \quad (9.3)$$

Додамо ліві і праві частини рівнянь (9.2) і (9.3) і отримаємо

$$\int_S \vec{j} - \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S} = 0. \quad (9.4)$$

**Густина струму
зміщення**

Це рівняння аналогічне рівнянню безперервності для постійного струму. Тут \vec{j} — *густина струму провідності*, а

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\vec{D}}{t} \quad (9.5)$$

є густиною струму зміщення, тобто *струм зміщення* — це *змінне електричне поле*.

Струм зміщення і струм провідності доповнюють одне одного, тому їх сума має назву *повного струму*. Лінії повного струму безперервні, струми провідності замикаються струмами зміщення.

Густина повного струму дорівнює

$$\vec{j}_{\text{повн}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\vec{D}}{t} \quad (9.6)$$

Повний струм має вигляд

$$I_{\text{повн}} = \int_S \vec{j} \cdot \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S} \quad (9.7)$$

Ці струми не розділені у просторі і можуть існувати одночасно і йти паралельно.

Тоді *теорема про циркуляцію для вектора \vec{H} (9.1) набуває вигляду, в якому вона справедлива завжди:*

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S} \quad (9.8)$$

**Зв'язок струму
зміщення
з магнітним
полем**

Максвелл припустив, що струми зміщення пов'язані з такими самими магнітними полями, як і струми провідності, тому вони повинні враховуватись при розрахунках циркуляції вектора напруженості магнітного поля по контуру L .

Вектор електричного зміщення в діелектрику дорівнює

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

де \vec{P} — поляризованість, що характеризує дійсний зсув електричних зарядів у неполярних молекулах і орієнтацію полярних молекул в одиниці об'єму діелектрика; \vec{E} — вектор напруженості поля — не залежить від присутності зарядів у цьому елементі.

Тоді

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\vec{D}}{t} = \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t} + \frac{\vec{P}}{t} \quad (9.9)$$

Із (9.9) очевидно, що струм зміщення складається з двох доданків

$$\vec{j}_{\text{вак}} = \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t} \text{ — густина струму зміщення у вакуумі, і}$$

$\vec{j}_{\text{пол}} = \frac{\vec{P}}{t}$ — густина струму поляризації (густина поляризаційного струму), обумовленого зсувом зв'язаних зарядів у діелектрику при його поляризації.

У вакуумі $\vec{P} = 0$ і густина струму зміщення

$$j_{\text{зм}} = \epsilon_0 \frac{\vec{E}}{t}. \quad (9.10)$$

Найважливіша ідея Максвелла полягає в твердженні, що частина струму зміщення, обумовлена тільки зміною електричного поля, також збуджує магнітне поле. Це може відбуватись навіть у вакуумі: будь-яка зміна з часом електричного поля збуджує в навколишньому просторі магнітне поле.

9.2. Рівняння Максвелла

Тепер можна підсумувати всі основні закони електродинаміки.

Їх можна сформулювати у вигляді системи чотирьох фундаментальних рівнянь електродинаміки, які мають назву **рівняння Максвелла в нерухомому середовищі**.

Ці рівняння є такими ж фундаментальними, як і три закони руху і закон всесвітнього тяжіння Ньютона в механіці. У деякому сенсі рівняння Максвелла навіть більш фундаментальні через те, що на відміну від законів Ньютона вони справедливі й у релятивістському випадку.

Теорія Максвелла є найбільш видатним досягненням класичної фізики.

**Рівняння
Максвелла
в інтегральній
формі**

І. Перше рівняння Максвелла — це по суті закон електромагнітної індукції Фарадея

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (9.11)$$

Зі змінним магнітним полем нерозривно пов'язане вихрове індуковане електричне поле, яке не залежить від присутності у ньому провідників зі струмом. Іншими словами: **циркуляція вектора напруженості електричного поля \vec{E} по будь-якому замкнутому**

контур дорівнює зі знаком мінус похідній за часом від магнітного потоку крізь будь-яку поверхню, обмежену цим контуром.

II. Друге рівняння Максвелла — це теорема про циркуляцію вектора \vec{H} (або закон повного струму для вектора напруженості магнітного поля)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}. \quad (9.12)$$

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля \vec{H} по будь-якому замкнутому контуру дорівнює повному струму (струму провідності і струму зміщення) крізь будь-яку поверхню, обмежену заданим контуром.

III. Третє рівняння Максвелла — це теорема Гаусса для вектора електричної індукції \vec{D}

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{вільн} dV = q_{\text{вільн}}. \quad (9.13)$$

Потік вектора зміщення \vec{D} (електричної індукції) крізь будь-яку замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних (сторонніх) зарядів, охоплених цією поверхню.

Тобто джерелом вектора \vec{D} є тільки вільні заряди.

IV. Четверте рівняння Максвелла — це теорема Гаусса для вектора магнітної індукції

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (9.14)$$

Магнітний потік крізь будь-яку замкнену поверхню завжди дорівнює нулю, тобто магнітне поле джерел (магнітних зарядів) не має, воно завжди вихрове (соленоїдальне).

З рівнянь (9.11) та (9.12) очевидно, що електричне і магнітне поле взаємозалежні: зміна з часом одного призводить до появи іншого. Тому має сенс тільки сукупність цих полів, що описує єдине електромагнітне поле.

Якщо поля стаціонарні ($\vec{E} = \text{const}$ і $\vec{B} = \text{const}$), то рівняння Максвелла розпадаються на дві групи незалежних рівнянь

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= 0; & \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= q_{\text{вільн}}; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= I; & \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

У цьому випадку електричне і магнітне поля незалежні одне від одного. Перший рядок (10.15) — рівняння електростатики, другий рядок — рівняння магнітостатики.

**Рівняння
Максвелла
в диференціальній
формі**

Рівняння Максвелла (9.11—9.14) частіше використовуються в диференціальній формі, яка дозволяє описати характеристики електромагнітного поля в будь-якій точці простору, одержати самі поля \vec{E} і \vec{B} , якщо відомі густини електричних зарядів і струмів у тій самій точці простору. Диференціальну форму рівнянь Максвелла досить легко отримати з інтегральних рівнянь, якщо застосувати теореми Остроградського — Гаусса і Стокса, відомі з векторного аналізу. Ці теореми встановлюють зв'язок між лінійними, поверхневими й об'ємними інтегралами.

Теорема Остроградського — Гаусса пов'яже об'ємний інтеграл з інтегралом по поверхні для довільного вектора \vec{A}

$$\operatorname{div} \vec{A} dV = \int_S \vec{A} d\vec{S},$$

де скалярна функція — дивергенція (розбіжність) у декартових координатах має вигляд

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Теорема Стокса пов'яже інтеграл по поверхні з лінійним

$$\operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \int_L \vec{A} d\vec{l},$$

де векторна функція — ротор (вихор) у декартових координатах виражається так:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{i} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} - \vec{j} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} - \vec{k} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння (9.11)—(9.14) переформулюються на такі:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{E} d\vec{l} &= \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} - \int_S \frac{\vec{B}}{t} d\vec{S}; \\ \int_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} - \int_S \vec{j} \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}; \end{aligned}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \text{div} \vec{D} \int_V dV;$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \text{div} \vec{B} \int_V dV = 0.$$

Візьмемо до уваги, що контури, поверхні та об'єми, за якими відбувається інтегрування, довільні і, як наслідок, відповідні підінтегральні функції рівні. Таким чином, отримаємо рівняння Максвелла в диференціальній формі

$$\text{I} \quad \text{rot} \vec{E} = \frac{\vec{B}}{t}; \quad \vec{E} = \frac{\vec{B}}{t}; \quad (9.16)$$

$$\text{II} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}; \quad \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}; \quad (9.17)$$

$$\text{III} \quad \text{div} \vec{D} = \text{вільн}; \quad (\vec{D} = \text{вільн}); \quad (9.18)$$

$$\text{IV} \quad \text{div} \vec{B} = 0; \quad (\vec{B} = 0). \quad (9.19)$$

Рівняння Максвелла не симетричні відносно електричного і магнітного полів. Це пов'язано з тим, що в природі існують електричні заряди, але немає магнітних.

Для областей поля, де відсутні макроструми ($\vec{j} = 0$), рівняння (9.16) і (9.17) симетричні (з точністю до знака)

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{\vec{B}}{t}; \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{\vec{D}}{t}. \quad (9.20)$$

Напрямки векторів \vec{D}/t і \vec{H} відповідають правогвинтовій системі (рис. 9.2, а), а напрямки векторів \vec{B}/t і \vec{E} — лівогвинтовій системі (рис. 9.2, б).

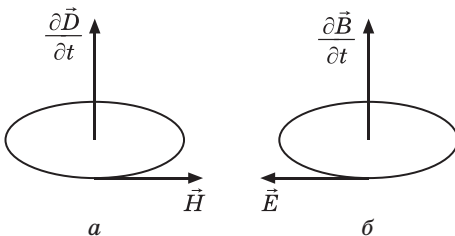


Рис. 9.2

Згадаємо, що знак мінус у першому з рівнянь (9.20) пов'язаний з правилом Ленца і є наслідком закону збереження енергії.

Зауважимо, що рівнянь (9.16—9.19) недостатньо для визначення зарядів і струмів. Рівняння Максвелла слід

доповнити так званими *матеріальними рівняннями*, які характеризують властивості середовища

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = (\vec{E} - \vec{E}^*), \quad (9.21)$$

де ϵ , μ і σ — діелектрична і магнітна проникності й електропровідність середовища; E^* — напруженість поля сторонніх сил.

Щоб урахувати силові взаємодії зарядів, струмів і магнітних полів, рівняння Максвелла слід доповнити виразом для сили Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (9.22)$$

Рівняння Максвелла в інтегральній формі більш узагальнені ніж диференціальні, тому що вони справедливі у випадку наявності поверхонь, де властивості середовища змінюються стрибком (коли на границі між середовищами є вільні заряди або струми провідності). Диференціальна форма рівнянь Максвелла передбачає безперервність усіх величин у просторі і часі.

Але ці рівняння також можна узагальнити, якщо їх доповнити *граничними умовами* на межі розділу двох середовищ.

Для електричного поля

$$D_{n_1} = D_{n_2}; \quad \frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1};$$

$$\frac{D_{t_1}}{D_{t_2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}; \quad E_{t_1} = E_{t_2}.$$

Для магнітного поля

$$B_{n_1} = B_{n_2}; \quad \frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1};$$

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \quad H_{t_1} = H_{t_2}.$$

Тепер система рівнянь Максвелла з матеріальними рівняннями (9.21), граничними та початковими умовами, характерними для задачі, що розглядається, є повною і достатньою для розв'язання практичних задач.

У табл. 9.1 узагальнено властивості різних полів, які впливають з теорії Максвелла.

Властивості полів

Вектор	Джерела	Вихори	Граничні умови	
			Нормальна складова	Тангенціальна складова
\vec{E} напруженість електричного поля	Вільні та зв'язані заряди, поле потенціальне	Змінне магнітне поле, вихрове	Розривна	Безперервна
\vec{D} електричне зміщення	Вільні заряди, поле потенціальне	Змінне магнітне поле, вихрове	Безперервна	Розривна
\vec{B} магнітна індукція	—	Макро- і мікροструми, змінне елект- ричне поле (струм зміщен- ня), вихрове	Безперервна	Розривна
\vec{H} напруженість магнітного поля	—	Макроструми, змінне елект- ричне поле (струм зміщен- ня), вихрове	Розривна	Безперервна

9.3. Властивості рівнянь Максвелла

Лінійність
рівнянь
Максвелла

Рівняння Максвелла лінійні. Вони мають перші похідні полів \vec{E} і \vec{B} за часом і за координатами.

Властивість лінійності рівнянь пов'язана з принципом суперпозиції: якщо два поля задовольняють рівнянням Максвелла, то і їх сума теж є розв'язком цих рівнянь.

Зв'язок рівнянь
Максвелла
з рівнянням
безперервності

З рівнянь (9.18) і (9.17) можна отримати закон збереження заряду.

Для цього знайдемо дивергенцію (9.17)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} - \operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} \vec{D}.$$

Але $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$, тоді з урахуванням (9.18) маємо

$$-\operatorname{div} \vec{D} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (9.23)$$

Інтегруємо (9.23) за деяким об'ємом V і застосуємо теорему Стокса. Тоді отримаємо

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

тобто швидкість зміни заряду в деякому об'ємі V дорівнює потоку вектора густини струму провідності крізь поверхню S , що оточує цей об'єм. Якщо заряди не виходять з об'єму або струм постійний, то $\int_S \vec{j} d\vec{S} = 0$ і, як наслідок

$$\int_V dV = \text{const},$$

а це і є закон збереження заряду.

**Відносність
електричного
і магнітного
полів**

Електричне і магнітне поля — різні компоненти єдиного електромагнітного поля. Поділ електромагнітного поля на електричне і магнітне має відносний характер і залежить від системи відліку, в якій існує явище.

Наприклад, якщо розглянути заряд, який рухається, то у лабораторній інерціальній нерухомій системі координат спостерігатиметься як електричне, так і магнітне поле, а в рухомій інерціальній системі, пов'язаній із зарядом, спостерігається тільки електричне поле.

Тобто в різних системах відліку співвідношення між електричним і магнітним полями будуть різними.

**Інваріантність
заряду**

Заряд є інваріантною величиною — його величина не залежить від того, рухається заряд чи ні.

**Інваріантність
рівнянь
Максвелла**

Рівняння Максвелла виконуються у всіх інерціальних системах відліку. Вони є релятивістськи інваріантними щодо перетворень Лоренца, що є наслідком принципу відносності

і підтверджується великою кількістю дослідів.

Вигляд рівнянь Максвелла при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої не змінюється, але величини \vec{E} і \vec{B} , що входять до рівнянь, перетворюються за певними правилами. Закони перетворення полів мають вигляд

$$\begin{aligned} \vec{E}_{||} &= \vec{E}_{||}; & \vec{B}_{||} &= \vec{B}_{||}; \\ \vec{E} &= \frac{\vec{E} + [\vec{v}_0, \vec{B}]}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}; & \vec{B} &= \frac{\vec{B} + [\vec{v}_0, \vec{E}]/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Позначками \parallel і \perp позначені поздовжні і поперечні (по відношенню до вектора \vec{v}_0) складові електричного і магнітного полів, $\frac{v_0}{c}$, $c \frac{1}{\sqrt{0 \ 0}}$ — швидкість світла у вакуумі.

**Інваріанти
електромагніт-
ного поля**

Незважаючи на те, що вектори \vec{E} і \vec{B} залежать від системи відліку, існують два інваріанти, що не залежать від неї. Це

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{B} \text{ inv}; \quad E^2 - c^2 B^2 \text{ inv}; \\ \vec{H} \cdot \vec{D} \text{ inv}; \quad D^2 - \frac{H^2}{c^2} \text{ inv}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Інваріантність цих величин відносно перетворень Лоренца є наслідком формул перетворення полів (9.24).

**Межа застосу-
вання теорії
Максвелла**

Теорія Максвелла може застосовуватися у випадках:

1. Для відстані r між зарядами, що перевищує внутрішньоатомні відстані, тобто має бути $r \gg 10^{-10}$ м.
2. Для частот зміни поля, менших $10^{13} - 10^{14}$ Гц. Це обмеження пов'язане з проявом квантових властивостей випромінювання і речовини за високих частот.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки й експрес-контролю

1. Що таке струм зміщення? Чому виникла необхідність уведення цієї величини?
2. Виведіть і поясніть вираз для густини струму зміщення.
3. У якому смислі можна порівняти струм зміщення і струм провідності?
4. Чи задовольняє струм зміщення закону Джоуля — Ленца?
5. Сформулюйте теорему про циркуляцію напруженості магнітного поля в загальному вигляді.
6. За яких умов виникає вихрове електричне поле? Чим воно відрізняється від електростатичного поля?
7. Чому дорівнює циркуляція вихрового електричного поля?
8. Узагальненням яких законів електростатики й електромагнетизму є теорія Максвелла для електромагнітного поля?
9. За яких умов сформульовані рівняння Максвелла?
10. Запишіть рівняння Максвелла в інтегральному вигляді і поясніть фізичний смисл кожного рівняння.

11. Запишіть рівняння Максвелла в диференціальному вигляді.
12. У чому полягає відмінність рівнянь Максвелла в інтегральному і диференціальному вигляді?
13. Що таке матеріальні рівняння? Напишіть їх і поясніть їх смисл.
14. За яких умов рівняння Максвелла переходять у рівняння електростатики і магнітостатики?
15. Покажіть, що наслідком рівнянь Максвелла є закон збереження електричного заряду.
16. Яке значення мають рівняння Максвелла?
17. Які основні висновки можна зробити на основі теорії Максвелла?
18. У чому полягає відносність електричного і магнітного полів?
19. Які характеристики електромагнітного поля перетворюються згідно з перетвореннями Лоренца? Запишіть ці перетворення.
20. Запишіть інваріантні величини електромагнітного поля.

Приклади розв'язання задач

Задача 1

По довгому прямому соленоїду радіусом R проходить струм, який змінюється так, що магнітне поле всередині соленоїда змінюється в залежності від часу за законом $B = At^2$, де A — стала величина. Знайти густину струму зміщення як функцію відстані r від соленоїда.

Розв'язання

Густина струму зміщення

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\vec{D}}{t}, \quad (1)$$

де $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ — вектор електричної індукції в вакуумі.

Знайдемо напруженість вихрового електричного поля \vec{E} . Для цього скористуємось I рівнянням Максвелла для циркуляції вектора \vec{E}

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\vec{B}}{t} d\vec{S}. \quad (2)$$

Якщо $r < R$, то з (2) отримаємо

$$2\pi r E = r^2 \frac{B}{t}, \quad \text{звідки} \quad E = \frac{r}{2} \frac{B}{t}.$$

Беручи до уваги умови задачі $B = At^2$, маємо

$$E = \frac{B}{2t} = \frac{At}{2}.$$

тоді

$$E(r) = Ar, \quad r \leq R.$$

У випадку $r > R$ з (2) випливає

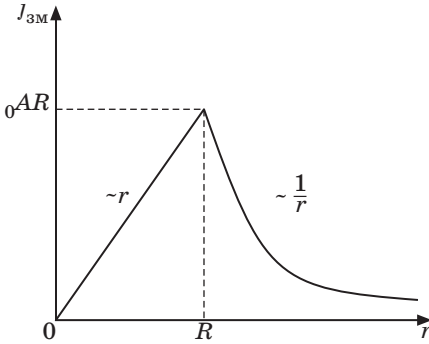


Рис. 9.3

$$2 \pi r E = R^2 \frac{B}{t}, \quad \text{і}$$

$$E(r) = \frac{AR^2 t}{r}, \quad r > R.$$

З (1) знайдемо густину струму зміщення

$$j_{\text{зм}} = 0 \frac{E}{t} = 0 Ar, \quad r \leq R;$$

$$j_{\text{зм}} = 0 \frac{E}{t} = \frac{0 AR^2}{r}, \quad r > R.$$

Залежність $j_{\text{зм}}(r)$ показано на рис. 9.3.

Задача 2

Покажіть, що силу струму зміщення в плоскому конденсаторі можна записати у вигляді $I_{\text{зм}} = C \frac{dU}{dt}$, де U — миттєве значення напруги на обкладках конденсатора ємністю C .

Розв'язання

Струм зміщення дорівнює

$$I_{\text{зм}} = \int_S \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S} = \int_S \frac{D_n}{t} dS = \frac{D}{t} dS, \quad (1)$$

де $\vec{D} = 0 \vec{E}$ — вектор електричної індукції.

Тоді

$$\frac{D}{t} = 0 \frac{E}{t}. \quad (2)$$

Зв'язок вектора \vec{E} в плоскому конденсаторі з напругою на конденсаторі U

$$E = \frac{U}{d}; \quad (3)$$

d — відстань між пластинами конденсатора.

З виразу (3) маємо

$$\frac{E}{t} = \frac{1}{d} \frac{U}{t}. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (2) і отримаємо

$$\frac{D}{t} = \frac{0}{d} \frac{U}{t}. \quad (5)$$

І, нарешті, струм зміщення $I_{\text{зм}}$ дорівнює

$$I_{\text{зм}} = \int_S \frac{D}{t} dS = \frac{D}{t} S = \frac{0}{d} \frac{S}{t} U.$$

Враховуючи, що ємність плоского конденсатора дорівнює $C = \frac{0}{d} \frac{S}{d}$, маємо

$$I_{\text{зм}} = C \frac{U}{t},$$

де U — миттєве значення напруги на обкладках конденсатора.

Задача 3

Кульовий конденсатор заряджається від джерела ЕРС. Нехтуючи крайовими ефектами, доведіть, що струм зміщення в діелектрику, що заповнює простір між обкладками конденсатора, дорівнює струму в колі джерела ЕРС.

Розв'язання

Струм зміщення дорівнює

$$I_{\text{зм}} = \int_S \vec{j}_{\text{зм}} d\vec{S}, \quad (1)$$

де густина струму зміщення

$$\vec{j} = \frac{\vec{D}}{t}. \quad (2)$$

За теоремою Гаусса $\oint_S D_n dS = q$, $D_n = D$ (рис. 9.4):

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad \frac{D}{t} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt} = I,$$

Тоді з (1) і (2) маємо

$$I_{\text{зм}} = \int_S \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt} \int_S dS = \frac{dq}{dt} = I,$$

тобто струм зміщення дорівнює струму в колі джерела ЕРС.

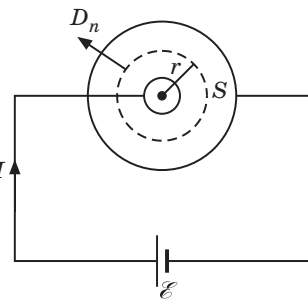


Рис. 9.4

Задачі для самостійного розв'язання

9.1. Розрахуйте силу струму зміщення між квадратними пластинами конденсатора зі стороною 1 см, якщо напруженість електричного поля змінюється зі швидкістю $3 \cdot 10^6$ В/м·с.

Відповідь: $I_{\text{зм}} = 2,66 \cdot 10^{-9}$ А.

9.2. У деякий момент сила струму в провідниках, з'єднаних з пластинами плоского конденсатора, дорівнює 2,8 А. З якою швидкістю змінюється напруженість електричного поля в конденсаторі з квадратними пластинами зі стороною 1 см?

Відповідь: $\frac{E}{t} = 3,16 \cdot 10^{15}$ В/м·с.

9.3. Індукція однорідного магнітного поля всередині циліндра радіусом $r = 0,1$ м зростає лінійно з часом $B = kt$ (коефіцієнт 10^3 Тл/с). Магнітне поле напрямлене вздовж осі циліндра. Чому дорівнює напруженість вихрового електричного поля на відстані $l = 0,2$ м від осі циліндра?

Відповідь: $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$ В/м.

9.4. Індукція магнітного поля всередині циліндра радіусом 8 см зростає з часом за законом $B = kt^2$ (коефіцієнт 10^4 Тл/с²). Магнітне поле напрямлене вздовж осі циліндра. Чому дорівнює напруженість вихрового електричного поля на відстані $l = 0,1$ м від осі циліндра в моменти часу $t_1 = 1$ с? $t_2 = 4$ с?

Відповідь: $E_1 = 6,4 \cdot 10^6$ В/м; $E_2 = 2,56 \cdot 10^5$ В/м.

9.5. Доведіть, що рівняння Максвелла містять закон збереження заряду.

9.6. Доведіть за допомогою рівнянь Максвелла, що змінне за часом магнітне поле не може існувати без електричного поля.

9.7. Доведіть, що рівняння Максвелла $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}$ і $\text{div } \vec{B} = 0$ сумісні, тобто перше не суперечить другому.

9.8. Якби існували магнітні монополі q_m , то які з рівнянь Максвелла слід було б змінити і яким би був їх новий вигляд?



ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ. МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

10 Електромагнітні коливання

При електричних коливаннях у колі струм або заряд змінюються з часом. Зважаючи на те, що швидкість розповсюдження електричних збурень скінченна, значення сили струму в кожний момент часу різне на різних ділянках кола.

Зауважимо, що закон Ома і правила Кірхгофа встановлені для постійного струму, але якщо зміни відбуваються не дуже швидко, ці закони можна застосувати для миттєвих значень струму і напруги.

**Умова квазі-
стаціонарності**

Струм називається *квазістаціонарним*, якщо миттєві значення на всіх ділянках кола однакові. При цьому всі зміни з часом усіх характеристик струму мають відбуватись настільки повільно, щоб швидкість розповсюдження електромагнітних збурень по колу могла вважатись нескінченно великою.

Якщо l/c — час проходження збурення (l — довжина кола, c — швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль), а T — період зміни струму, то *умовою квазістаціонарного струму є*

$$T.$$

У разі виконання цієї умови можна застосувати закон Ома і правила Кірхгофа для миттєвих значень характеристик струму.

10.1. Коливальний контур і його рівняння

Для збудження і підтримки електромагнітних коливань використовується коливальний контур — це коло, яке складається

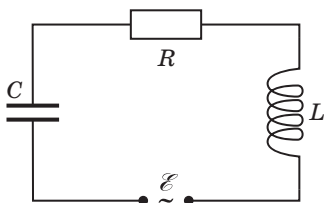


Рис. 10.1

**Рівняння
коливального
контурі**

з послідовно з'єднаних котушки індуктивності L , конденсатора ємністю C і резистора опором R (рис. 10.1). Отримати незагасаючі коливання в реальній коливальній системі можна, якщо компенсувати втрати енергії підключивши до контуру зовнішнє джерело електро-рушійної сили \mathcal{E} (ЕРС).

Згідно з другим законом Кірхгофа для контура (рис. 10.1) маємо

$$IR + \frac{q}{C} - \mathcal{E}_S = \mathcal{E}, \quad (10.1)$$

де $IR = U_R$ — напруга на резисторі; $\frac{q}{C} = U_C$ — напруга на конденсаторі; $\mathcal{E}_S = L \frac{dI}{dt}$ — ЕРС самоіндукції, що з'являється в котушці при проходженні по ній змінного струму; \mathcal{E} — зовнішня ЕРС.

Тоді з (10.1) отримаємо

$$L \frac{dI}{dt} + IR - \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (10.2)$$

З урахуванням того, що $I = dq/dt$, (10.2) перетворюється на лінійне диференціальне неоднорідне рівняння другого порядку для коливального контуру

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (10.3)$$

Поділивши всі доданки на L , отримаємо

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} - \frac{q}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} - \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L}, \quad (10.4)$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$ — коефіцієнт загасання; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — частота власних коливань у контурі.

Зауважимо, що рівняння (10.3) тотожне рівнянню (6.32) (див. [1]), тобто можна провести *електромеханічну аналогію* між величинами, що характеризують механічні та електромагнітні коливання (табл. 10.1). Така аналогія дозволяє використовувати отримані в механіці результати, не повторюючи їх доказу.

Таблиця 10.1

Електромеханічна аналогія

Механічні величини	Електричні величини
x — зсув	q — заряд
$v \frac{dx}{dt}$ — швидкість	$I \frac{dq}{dt}$ — сила струму
$\frac{dv}{dt}$ — прискорення	$\frac{dI}{dt}$ — швидкість зміни струму
m — маса	L — індуктивність
k — жорсткість	$\frac{1}{C}$ — величина, зворотна ємності
F — сила	U (або \mathcal{E}) — напруга (або ЕРС)
r — коефіцієнт опору	R — опір
$p \quad mv$ — імпульс	LI — магнітний потік
$W_k \quad \frac{mv^2}{2}$ — кінетична енергія	$W_M \quad \frac{LI^2}{2}$ — енергія магнітного поля
$W_p \quad \frac{kx^2}{2} \quad \frac{F^2}{2k} \quad \frac{Fx}{2}$ — потенціальна енергія деформації	$W_e \quad \frac{q^2}{2C} \quad \frac{CU^2}{2} \quad \frac{qU}{2}$ — енергія зарядженого конденсатора
$P \quad Fv$ — механічна потужність	$P \quad UI$ — електрична потужність
$0 \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$ — власна частота коливань	$0 \quad \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — власна частота коливань

10.2. Вільні незагасаючі гармонічні коливання в коливальному контурі

Розглянемо ідеалізований коливальний контур, у якого опір $R = 0$ і немає зовнішньої ЕРС ($\mathcal{E} = 0$) (рис. 10.2).

Для збудження коливань у контурі конденсатор повинен бути заряджений зарядом q . Тоді в початковий момент часу енергія електричного поля зарядженого конденсатора максимальна і дорівнює $W_e = q^2/2C$ (рис. 10.2, а). Далі конденсатор починає розряджатись через котушку з індуктивністю L . Заряд конденсатора

зменшується — зменшується його енергія, а згідно з законом збереження енергії

$$W = \frac{q^2}{2C} - \frac{LI^2}{2} = \text{const},$$

енергія коливального контуру — стала величина, тобто збільшуватиметься енергія магнітного поля котушки. У момент часу $t = T/4$, коли конденсатор повністю розрядився, його енергія дорівнює нулю, а енергія магнітного поля котушки (а також струму) досягає максимуму (рис. 10.2, б). Далі струм у котушці починає зменшуватись, зменшується і величина магнітного поля. Це приводить до появи індукційного струму, який, за правилом Ленца, має той самий напрямок, що і струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатись. Коли струм у контурі зменшиться до нуля в момент часу $t = T/2$, заряд на конденсаторі досягне максимального значення, але з протилежними знаками на обкладках (рис. 10.2, в). Далі процес розрядки і зарядки конденсатора циклічно повторюватиметься, тобто в контурі зберігатимуться періодичні незагасаючі вільні коливання, періодично змінюватимуться заряд q і напруга U_C на конденсаторі і сила струму I в котушці

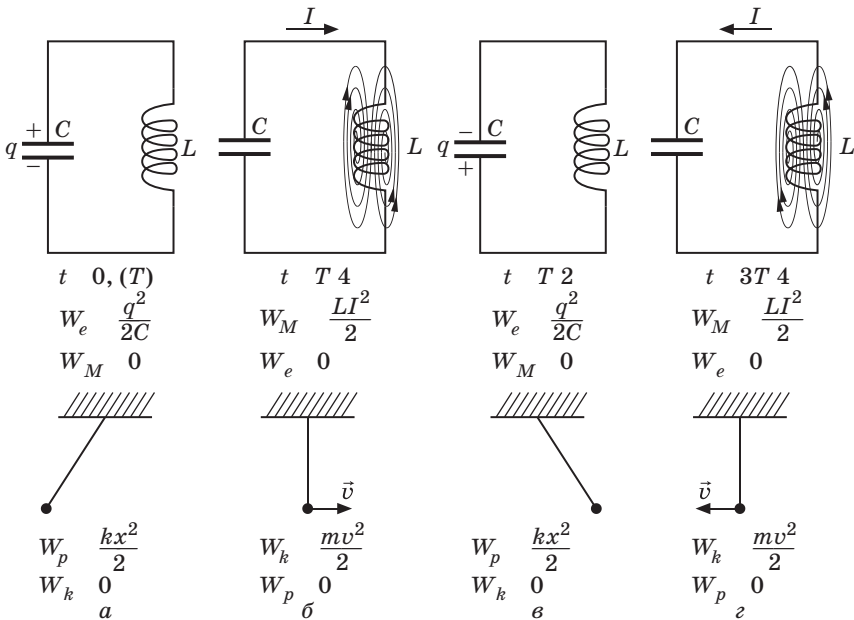


Рис. 10.2

індуктивності. Ці коливання супроводжуватимуться перетвореннями енергії електричного і магнітного полів.

Аналогія між електричними і механічними коливаннями

Можна провести аналогію між електричними коливаннями в коливальному контурі та механічними коливаннями математичного маятника (рис. 10.2, $a-z$). У цьому випадку енергія елект-

ричного поля конденсатора $W_e = \frac{q^2}{2C}$ аналогічна потенціальній енергії маятника $W_p = \frac{kx^2}{2}$, а енергія магнітного поля $W_M = \frac{LI^2}{2}$ — кінетичній енергії маятника $W_k = \frac{mv^2}{2}$, індуктивність L відіграє роль маси, сила струму I — швидкості руху маятника.

Рівняння (10.4) перетворюється на диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду в контурі

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (10.5)$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0), \quad (10.6)$$

де q_0 — амплітудне значення заряду на обкладках конденсатора; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — власна частота коливань контуру; ϕ_0 — початкова фаза.

Формула Томсона

Період власних коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (10.7)$$

носить назву *формули Томсона*, тому що вперше цей вираз був отриманий У. Томсоном.

Сила струму в коливальному контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi_0) = I_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0 - \frac{\pi}{2}), \quad (10.8)$$

де $I_0 = q_0 \omega_0$ — амплітудне значення струму.

Напруга на обкладках конденсатора дорівнює

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t - \phi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0), \quad (10.9)$$

де $U_0 = q_0/C$ — амплітудне значення напруги.

Порівнявши (10.6), (10.8) і (10.9), можна зробити висновок, що коливання напруги і заряду відбуваються з однаковою фазою, у той час як коливання струму випереджають коливання заряду і напруги по фазі на $\pi/2$ (чверть періоду), тобто коли заряд (і напруга) на конденсаторі досягає максимуму, сила струму в контурі дорівнює нулю і навпаки.

10.3. Вільні загасаючі коливання

У будь-якому реальному контурі є завжди активний опір R , який відіграє роль сили тертя при механічних коливаннях. Наявність опору приводить до зменшення амплітуди коливань внаслідок втрат енергії на нагрівання, тобто вільні коливання будуть загасаючими.

Рівняння загасаючих коливань

У рівнянні (10.4) $\mathcal{E} = 0$, тоді диференціальне рівняння вільних загасаючих коливань має вигляд

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + \frac{2}{0}q = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{q} + 2\dot{q} + \frac{2}{0}q = 0, \quad (10.10)$$

де $\frac{R}{2L}$ — коефіцієнт загасання; $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ — частота власних незагасаючих коливань.

Розв'язок рівняння (10.10) шукаємо у вигляді

$$q = x e^{-\gamma t}. \quad (10.11)$$

Тоді рівняння (10.10) перетвориться на рівняння

$$\ddot{x} + \left(\frac{2}{0} - \gamma^2\right)x = 0, \quad \ddot{x} + \frac{2}{0}x = 0. \quad (10.12)$$

При малому загасанні $\gamma^2 \ll \frac{2}{0}$ розв'язок рівняння (10.12) має вигляд:

$$x = q_0 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (10.13)$$

і з урахуванням (10.11) отримаємо рівняння загасаючих коливань (розв'язок диференціального рівняння (10.10))

$$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi_1).$$

Частота і період загасаючих коливань

У цій формулі

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{0} - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (10.14)$$

— частота загасаючих коливань; φ_1 — початкова фаза.

Період загасаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.15)$$

Із (10.14) і (10.15) очевидно, що частота загасаючих коливань завжди менша за частоту незагасаючих коливань (ω_0), а період T більший за період вільних незагасаючих коливань (T_0).

Слід зауважити, що загасання порушує періодичність коливань, тому загасаючі коливання, строго кажучи, не є періодичними і до них взагалі непридатне поняття періоду і частоти. Але якщо загасання мале, то можна умовно використовувати поняття періоду як проміжку часу між двома послідовними максимумами (рис. 10.3).

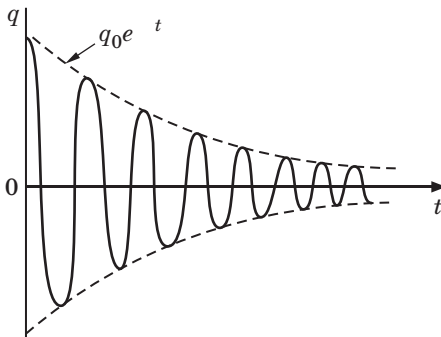


Рис. 10.3

Амплітуда загасаючих коливань

Амплітуда загасаючих коливань зменшується за експоненціальним законом

$$q_m = q_0 e^{-\gamma t}. \quad (10.16)$$

Напруга на конденсаторі

Напруга на конденсаторі в коливальному контурі дорівнює

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi_1) = U_0 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (10.17)$$

де $U_0 = \frac{q_0}{C} e^{-\gamma t}$.

Очевидно, що фази заряду і напруги однакові.

Сила струму в контурі

Сила струму в контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \cos(\omega t - \varphi_1) - \omega \sin(\omega t - \varphi_1)]. \quad (10.18)$$

Вираз в квадратних дужках помножимо і поділимо на ω і введемо кут

$$\varphi = \omega t - \varphi_1. \quad (10.19)$$

Тоді сила струму (10.18) перетвориться на величину

$$I = q_0 e^{-t/T} \cos(\omega t - \varphi_1).$$

Із (10.19) випливає, що кут $\varphi/2$, тобто лежить у другій чверті. Це означає, що струм у контурі випереджає за фазою напругу на конденсаторі (10.17) більше ніж на $\varphi/2$.

Графіки $U_C(t)$ і $I(t)$ мають вигляд, аналогічний залежності $q(t)$ (див. рис. 10.3).

10.4. Величини, що характеризують загасання

Час релаксації

Час, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів, називається часом релаксації.

Коефіцієнт загасання — величина, зворотна часу релаксації

$$\frac{1}{T}; [T] = 1 \text{ с}^{-1}. \quad (10.20)$$

Логарифмічний декремент загасання

Логарифмічний декремент загасання — логарифм відношення двох послідовних значень амплітуд (A_m — амплітуда відповідної величини — q, U, I)

$$\ln \frac{A_m(t)}{A_m(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-t/T}}{A_0 e^{-(t+T)/T}} = T; \\ T = \frac{T}{N_e}, \quad (10.21)$$

де N_e — кількість коливань за час T , тобто за той час, протягом якого амплітуда зменшиться в e разів.

Логарифмічний декремент загасання — постійна величина для даної коливальної системи.

Якщо загасання мале ($\frac{2}{0} > 0$), то $N_e \approx 1/\sqrt{LC}$, і в цьому випадку логарифмічний декремент загасання дорівнює

$$T = \frac{2}{0} R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (10.22)$$

Добротність

Добротність коливального контуру

$$Q = 2 \frac{W}{W'}$$

де W — енергія, яку має контур у визначений час; W' — зменшення енергії за період коливань T .

Зважаючи на те, що енергія пропорційна квадрату амплітуди заряду $W \sim e^{2t}$ і за умови малого загасання, маємо

$$Q \approx \frac{e^{2t}}{e^{2(t-T)}} \approx \frac{1}{e^{2T}} \approx \frac{1}{1 - 2T} \quad ;$$

$$Q \approx N_e; \quad (10.23)$$

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.24)$$

У випадку, коли $\omega > \omega_0$, замість коливань буде аперіодичний розряд конденсатора. Опір контуру, при якому почнеться аперіодичний процес, називають *критичним опором*.

Значення критичного опору визначається за умови $\omega = \omega_0$; тоді

$$\frac{R_{кр}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}; \quad R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.25)$$

10.5. Вимушені електричні коливання

Для спостереження вимушених коливань до коливального контуру (рис. 10.1) вводять електрорушійну силу (рис. 10.4), що змінюється за гармонічним законом,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (10.26)$$

де ω — частота зовнішньої ЕРС.

Тоді лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (10.3), яке описує вимушені електромагнітні коливання, матиме вигляд

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (10.27)$$

або

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t. \quad (10.28)$$

Його розв'язок — сума загального розв'язку однорідного рівняння (рівняння (10.28) без правої частини — рівняння загасаючих коливань) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (10.28).

Нас цікавлять тільки усталені коливання, тому впливом розв'язку однорідного рівняння за деякий короткий час після початку коливань можна знехтувати.

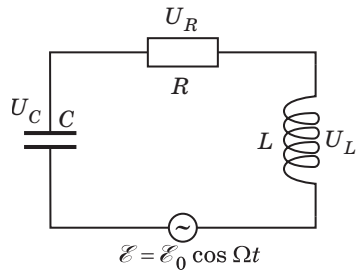


Рис. 10.4

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (10.29)$$

тобто у разі усталених коливань заряд на конденсаторі змінюється за гармонічним законом з частотою зовнішньої ЕРС \mathcal{E} .

Тут q_0 — амплітуда заряду на конденсаторі; φ — різниця фаз між коливаннями заряду і зовнішньою ЕРС (10.26), заряд завжди відстає за фазою від ЕРС.

Продиференціюємо (10.29) і знайдемо силу струму

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) = I_0 \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad (10.30)$$

де $I_0 = \omega q_0$ — амплітудне значення сили струму; $\frac{\pi}{2}$ — зсув фаз між струмом і зовнішньою ЕРС.

Для визначення амплітудної величини сили струму I_0 і фази застосуємо метод векторної діаграми (див. [1], розд. 6.8).

Для цього ліву частину рівняння (10.27) подамо як суму напруг на індуктивності U_L , опорі U_R і ємності U_C .

У кожний момент часу сума цих напруг має дорівнювати зовнішній електрорушійній силі \mathcal{E}

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (10.31)$$

Напруга на індуктивності

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \sin(\omega t - \varphi) = U_{L_0} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad (10.32)$$

де $U_{L_0} = \omega L I_0$ — амплітуда напруги на індуктивності L .

За фазою U_L випереджає струм на $\pi/2$.

Напруга на опорі R

$$U_R = R I_0 \cos(\omega t - \varphi) = U_{R_0} \cos(\omega t - \varphi), \quad (10.33)$$

де $U_{R_0} = R I_0$ — амплітуда значення напруги на опорі R , U_R за фазою збігається зі струмом.

Напруга на конденсаторі C

$$U_C = \frac{q_0}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{C_0} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (10.34)$$

З урахуванням (10.30) отримаємо амплітудне значення напруги на конденсаторі C

$$U_{C_0} = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega C}.$$

$\pi/2$, U_C відстає за фазою від струму на $\pi/2$.

**Векторна
діаграма**

Формули (10.31)—(10.34) можна подати у вигляді векторної діаграми (рис. 10.5).

Довжина векторів дорівнює амплітудному значенню напруг, а напрямок визначається початковою фазою.

З цієї векторної діаграми легко отримати формули для амплітудного значення сили струму I_0 і величину зсуву фази між струмом і \mathcal{E} .

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L - \frac{1}{C}\right)^2}}. \quad (10.35)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left(L - \frac{1}{C}\right) I_0}{R I_0} = \frac{L - \frac{1}{C}}{R}. \quad (10.36)$$

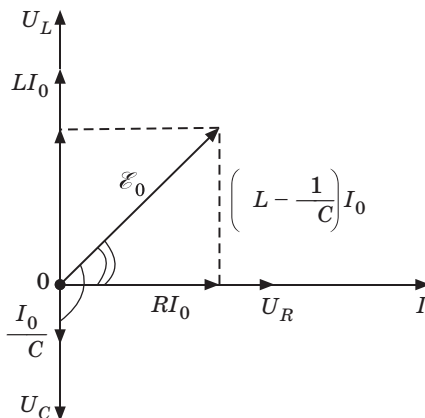


Рис. 10.5

Якщо $0 < L - \frac{1}{C}$ — струм відстає за фазою від \mathcal{E} ;
при $0 > L - \frac{1}{C}$ — струм випереджає за фазою ЕРС.

Амплітудне значення величини заряду отримаємо з (10.35) з урахуванням зв'язку I_0 і q_0 : $I_0 = \dot{q}_0$.

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L - \frac{1}{C}\right)^2}} \quad (10.37)$$

або

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{LC}\right)^2}}; \quad (10.38)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1 - \frac{1}{LC}}{\frac{R}{L}};$$

Резонанс

З формули (10.38) випливає, що амплітудне значення заряду має максимум. Це відповідає умові мінімуму підкореневого виразу. Продиференціюємо підкореневий вираз і дорівнюємо його нулю

$$4 \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 8 \left(1 - \frac{1}{LC}\right) = 0;$$

Резонансна частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{2}{0} \frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (10.39)$$

(фізичний зміст має тільки додатне значення).

Явище різкого зростання амплітуди заряду та напруги на конденсаторі при вимушених коливаннях, за умови наближення частоти змінної ЕРС до частоти $\omega_{\text{рез}}$, називається *електричним резонансом*.

Резонансні криві для заряду

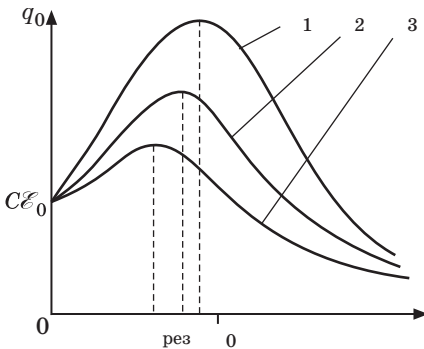


Рис. 10.6

Конденсаторі — стала величина $q_0(0) = C\mathcal{E}_0$.

Резонансні криві для сили струму

Із (10.35) очевидно, що амплітудне значення сили струму максимальне, коли

$$L = \frac{1}{C} \omega^2$$

тобто резонансна частота для сили струму збігається з власною частотою контуру

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.40)$$

Резонансні криві для сили струму показані на рис. 10.7. Максимум кривої тим більший, чим менший коефіцієнт загасання (чим менший омичний опір контуру).

Амплітуда сили струму при резонансі $I_0(\omega_{\text{рез}}) = \mathcal{E}_0/R$, а зсув фаз між силою струму і ЕРС дорівнює нулю ($\varphi(\omega_{\text{рез}}) = 0$).

Резонанс — дуже впливове явище в радіотехніці. Воно застосовується для виділення зі складного сигналу певної частоти, що досягається зміною C і L коливального контуру, що дозволяє настроїти контур, тобто добитися збігу його власної частоти з частотою випромінюваних електромагнітних хвиль.

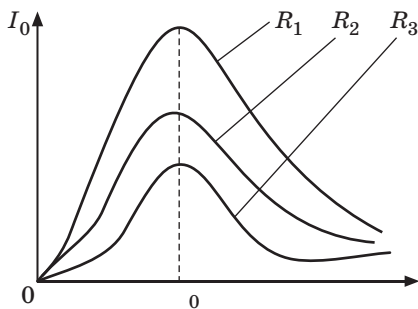


Рис. 10.7

Резонансні криві та добротність

У випадку слабого загасання $Q \gg 1$ досить простим є зв'язок добротності з формою резонансних кривих.

У цьому випадку $\omega_{рез} \approx \omega_0$ і згідно з (10.34)

$$U_{C_{0рез}} = \frac{I_0}{\omega_0 C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 CR},$$

або

$$\frac{U_{C_{0рез}}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q.$$

Тобто $\frac{U_{C_{0рез}}}{\mathcal{E}_0} = Q$, іншими словами, добротність контуру (при $Q \gg 1$) показує, у скільки разів максимальне значення амплітуди напруги на конденсаторі перевищує амплітуду зовнішньої ЕРС.

Окрім того, добротність контуру пов'язана також з шириною резонансної кривої на висоті, що дорівнює $0,7$ від максимальної. Цей зв'язок при $Q \gg 1$

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

де ω_0 — резонансна частота.

10.6. Змінний струм

Розглянуті вище усталені електромагнітні коливання в контурі з омичним опором, ємністю та індуктивністю можна вважати змінним струмом з частотою ω .

Послідовне коло змінного струму

Послідовне коло змінного струму зображене на рис. 10.8. Зовнішня напруга змінюється за гармонічним законом

$$U = U_0 \cos t.$$

Сила струму в колі

$$I = I_0 \cos(t - \varphi),$$

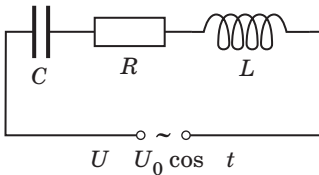
де амплітудне значення струму (див. (10.35))

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L \frac{1}{C}\right)^2}}. \quad (10.41)$$

Фазовий зсув між напругою і струмом (див. (10.36))

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \frac{1}{C}}{R}. \quad (10.42)$$

Вираз (10.41) можна розглядати як закон Ома для амплітудних значень струму і напруги. Тоді знаменник у цьому виразі відіграє роль повного опору Z або імпедансу



$$Z = \frac{U_0}{I_0} \sqrt{R^2 + \left(L \frac{1}{C}\right)^2}, \quad (10.43)$$

де $R = \frac{U_R}{I_0}$ — активний опір; $X_L = \frac{U_L}{I_0} = L \frac{1}{C}$ — індуктивний опір; $X_C = \frac{U_C}{I_0} = \frac{1}{C}$ — ємнісний опір; $X = X_L - X_C = L \frac{1}{C}$ — реактивний опір.

Тоді формули (10.41) і (10.42) можна переписати так:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}; \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}. \quad (10.44)$$

Резонанс напруг

Резонанс напруг спостерігається у послідовному колі.

Резонансна частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

У цьому випадку $X_L = X_C$, повний опір мінімальний і дорівнює активному опорі $Z = R$, а амплітудне значення сили струму досягає максимуму (рис. 10.7)

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Падіння напруги на активному опорі дорівнює зовнішній ЕРС (напрузі) $U_R = U_0$, а падіння напруг на конденсаторі U_C і котушці індуктивності U_L однакові за амплітудою і протилежні за фазою, тобто

$$U_{C_0} = U_{L_0} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

Діаграму для цієї ситуації наведено на рис. 10.9. Це явище називається *резонансом напруг*.

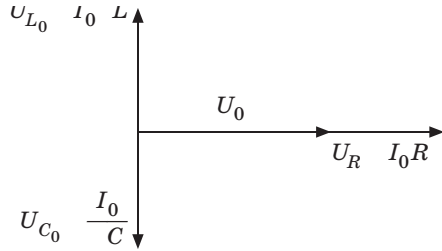


Рис. 10.9

Резонанс струмів

Розглянемо коло змінного струму з паралельно підключеними конденсатором C і ємністю L (рис. 10.10). Активний опір R вважатимемо малим і знехтуємо ним.

У цьому випадку обидві гілки кола перебувають під однаковою напругою.

Аналіз, який ми не наводимо, показує, що різниця фаз струмів у гілках aCb і aLb майже дорівнює π , тобто струми у цих гілках протилежні за фазою. Амплітуда сили струму в зовнішньому колі aUb дорівнює

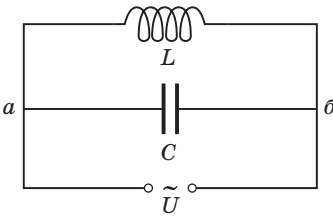


Рис. 10.10

$$I_0 = |I_{C_0} - I_{L_0}| = U_0 C \frac{1}{L}.$$

Якщо частота дорівнює резонансній частоті, $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$, то при малому опорі R $I_{C_0} = I_{L_0}$ і сила струму в зовнішньому колі I_0 майже дорівнюватиме нулю.

Явище різкого зменшення амплітуди сили струму в зовнішній частині паралельного кола при наближенні частоти зовнішньої ЕРС до резонансної частоти називається *резонансом струмів* (рис. 10.11).

При цьому сили струмів I_{L_0} і I_{C_0} можуть бути значно більшими, ніж струм I_0 .

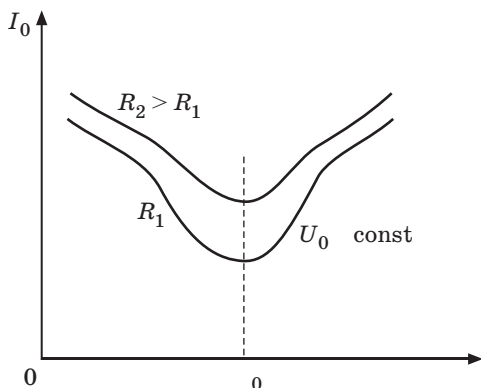


Рис. 10.11

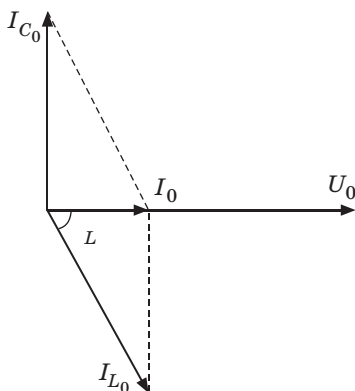


Рис. 10.12

Збільшення опору змінному струму такого кола при частоті, близькій до резонансної, дозволяє застосовувати його в резонансних підсилювачах для виділення певного сигналу з сигналу складної форми.

На рис. 10.12 наведено векторну діаграму для паралельного резонансу.

Сила струму в ємності й індуктивності майже однакова, сила повного струму I_0 зменшується, фазовий кут — кут між I_0 і U_0 обертається на нуль — спостерігається явище *резонансу струмів*.

Потужність
у колі змінного
струму

Миттєве значення потужності змінного струму дорівнює добутку миттєвих значень напруги і сили струму

$$P(t) = U(t)I(t),$$

де $U(t) = U_0 \cos \omega t$; $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$, тоді

$$P(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi). \quad (10.45)$$

Візьмемо до уваги, що $\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$, тоді (10.45) перетвориться на

$$P(t) = U_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi).$$

З практичного погляду цікавим є не миттєве, а середнє значення потужності за період. У цьому випадку $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ і $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

Середнє значення потужності дорівнює

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (10.46)$$

З векторної діаграми (рис. 10.5) маємо $U_0 \cos \varphi = RI_0$ (тут $U_0 = \mathcal{E}_0$), тому

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$

Таку саму потужність матиме і постійний струм $I_d = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.
Величини

$$I_d = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_d = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (10.47)$$

називають *діючими (або ефективними) значеннями струму і напруги*. Усі амперметри і вольтметри градуйовані за діючими значеннями струму і напруги.

З урахуванням (10.47) середня потужність за період матиме вигляд:

$$\langle P \rangle = U_d I_d \cos \varphi. \quad (10.48)$$

Із (10.48) випливає, що середня потужність залежить не тільки від величини струму і напруги, а також від зсуву фаз між ними.

Якщо в колі реактивний опір дорівнює нулю, то $\cos \varphi = 1$ і $\langle P \rangle = U_d I_d$.

У випадку, коли існує тільки реактивний опір, а $R = 0$, то $\cos \varphi = 0$ і $\langle P \rangle = 0$, незалежно від значення струму і напруги.

У цьому випадку вся енергія марно коливається між генератором і зовнішнім колом.

На практиці завжди намагаються збільшити $\cos \varphi$, найменше значення якого для промисловості припустимо $\sim 0,85$.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Який струм називається квазістаціонарним? Яка умова квазістаціонарності струму?
2. Які елементи входять до коливального контуру? Нарисуйте схему.
3. Виведіть рівняння, якому задовольняють вільні коливання в контурі. Який вигляд має розв'язок цього рівняння?
4. Чому дорівнюють частота і період власних коливань?
5. Яка аналогія існує між механічними величинами, що характеризують коливання, і електричними?
6. Чому в контурі LC коливання не припиняються зовсім у той момент, коли конденсатор повністю розряджається?
7. Виведіть рівняння загасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв'язок цього рівняння?

8. Які характеристики загасаючих коливань ви знаєте?
9. Що таке логарифмічний декремент загасання і добротність? Поясніть їх фізичний смисл.
10. Як змінюється амплітуда заряду для загасаючих коливань?
11. Нарисуйте залежність величин заряду і струму від часу.
12. Чому дорівнює частота і період загасаючих коливань і як вони пов'язані з частотою і періодом вільних незагасаючих коливань?
13. Чому дорівнює ЕРС, що виникає в рамці, яка рівномірно обертається в магнітному полі?
14. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань у колівальному контурі. Як знайти його розв'язок? Яким він буде?
15. Нарисуйте і поясніть векторну діаграму для послідовного кола змінного струму.
16. Запишіть закон Ома для повного кола змінного струму.
17. Отримайте амплітудне значення величини струму і зсуву фаз за допомогою векторної діаграми.
18. Якою буде амплітуда струму і фаза при резонансі?
19. Якою буде напруга на опорі, ємності й індуктивності? Яке її амплітудне значення і чому дорівнює зсув фаз між цими напругами і струмом?
20. Що таке активний, ємнісний та індуктивний опори і чому вони дорівнюють?
21. Чому дорівнює реактивний опір кола змінного струму?
22. За яких умов спостерігається резонанс напруг? Нарисуйте графік залежності напруги на конденсаторі від частоти при частотах, близьких до резонансної?
23. За яких умов спостерігається резонанс струмів? Чому дорівнює резонансна частота? Який вигляд має залежність величини струму від частоти при частотах, близьких до резонансної?
24. Що таке діюче значення змінного струму і напруги? Чому воно дорівнює?
25. Як розрахувати миттєву потужність змінного струму? Активну потужність?
26. Що таке коефіцієнт потужності? Яка його роль?
27. Що треба зробити, щоб зменшити втрати під час передачі електроенергії від генератора до споживача?

Завдання для експрес-контролю

1. Назвіть усі можливі варіанти збудження вільних коливань у контурі.
2. Як можна збільшити добротність контуру, не змінивши частоти вільних коливань?
3. Як зміниться власна частота коливань у контурі, якщо між обкладками повітряного конденсатора контуру ввести діелектрик?
4. Як зміниться власна частота коливань, якщо в котушку індуктивності контуру ввести: 1) осердя з феромагнетика; 2) осердя з діамагнетика?
5. Як впливають активний опір, електроємність і індуктивність коливального контуру на його резонансні характеристики?
6. Як впливає коефіцієнт загасання на період загасаючих коливань? Чи зміниться цей період, якщо коефіцієнт загасання залежить від часу?
7. Чому дорівнює імпеданс послідовного RLC кола при резонансі? Чому дорівнює струм у колі при резонансі?
8. Як має змінюватись напруга в електричному колі, яке складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності L і опору R , щоб струм в ньому: 1) лінійно зростає: $I \propto t$; 2) змінювався синусоїдально: $I = I_0 \sin \omega t$?
9. Для послідовного кола RLC знайти середню потужність $\langle P \rangle$, що виділяється в опорі R . Відповідь виразити за допомогою: 1) амплітуд сили струму I_0 , напруги U_0 і зсуву фаз між напругою і струмом; 2) амплітуди струму I_0 і R ; 3) амплітуди U_0 і параметрів R, L, C .

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Коливальний контур складається з конденсатора з двома пластинами площею $S = 10 \text{ см}^2$ кожна, які розташовані на відстані $d = 0,7 \text{ мм}$ одна від одної, і котушки індуктивністю $L = 1 \text{ мкГн}$. Простір між пластинами конденсатора заповнений діелектриком. Коливальний контур має резонанс на довжині хвилі $\lambda = 17,73 \text{ м}$. Визначити діелектричну проникність середовища, яке заповнює конденсатор.

Розв'язання

Діелектричну проникність середовища, яке заповнює конденсатор, можна визначити з формули електроємності плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d};$$
$$\frac{Cd}{\epsilon_0 S}. \quad (1)$$

Електроємність C конденсатора знайдемо з формули Томсона, яка визначає період коливань в електричному контурі

$$T = 2\sqrt{LC};$$
$$C = \frac{T^2}{4L}. \quad (2)$$

Щоб знайти період коливань, скористаємося співвідношенням cT , яке пов'язує довжину хвилі, на якій резонує контур, з періодом коливань T контуру. (Тут c — швидкість світла.)

$$T = \frac{c}{\nu}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2), а потім електроємність C у формулу (1), отримаємо

$$\frac{2d}{4Lc^2\epsilon_0 S}. \quad (4)$$

Виконавши обчислення, знаходимо 7.

Задача 2

Визначити індукцію магнітного поля всередині котушки ідеального контуру в момент часу $t = 10^{-4}$ с, якщо при $t = 0$ заряд на конденсаторі $q_1 = 10^{-5}$ Кл, а сила струму $I_1 = 0$. Індуктивність котушки $L = 10^{-3}$ Гн, кількість витків на 1 м довжини котушки $n = 10^3$ м⁻¹, ємність конденсатора $C = 10^{-5}$ Ф. Середовище — вакуум.

Розв'язання

Контур без активного опору, тому в ньому відбуваються вільні незагасаючі електромагнітні коливання.

Диференціальне рівняння таких коливань має вигляд:

$$\ddot{q} + \frac{2}{0}q = 0,$$

розв'язком якого є рівняння гармонічних коливань

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0).$$

Кутову частоту ω_0 знайдемо з рівняння

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

а амплітуду q_0 і початкову фазу ϕ_0 — з початкових умов

$$q = q_1 \text{ при } t = 0, \quad I_1 = \frac{dq}{dt} = 0,$$

тоді $q_1 = q_0 \sin \phi_0$, $0 = q_0 \omega_0 \cos \phi_0$, звідки

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad q_0 = q_1.$$

Таким чином, рівняння гармонічних електромагнітних коливань в контурі має вигляд

$$q = q_1 \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t \frac{\pi}{2}.$$

Розрахуємо силу струму в контурі в будь-який момент часу

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q_1}{\sqrt{LC}} \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \frac{\pi}{2}, \quad I = 5 \cdot 10^{-2} \text{ А},$$

а також індукцію магнітного поля

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 n q_1}{\sqrt{LC}} \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \frac{\pi}{2}, \quad B = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}.$$

Якщо використати рівняння, що зв'язують отримані величини з іншими, можна отримати будь-яку фізичну величину, що характеризує цей процес.

Наприклад, різниця потенціалів на обкладках конденсатора дорівнює

$$\frac{q_1}{C} \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t \frac{\pi}{2},$$

напруженість електричного поля в конденсаторі (вважаємо його плоским з площею пластини S)

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{q_1}{\epsilon_0 S} \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t \frac{\pi}{2},$$

густина енергії електричного поля всередині конденсатора

$$w_e = \frac{q_1^2}{2C} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

густина енергії магнітного поля всередині котушки

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \cos^2 \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

Задача 3

Визначити час t_0 , за який амплітуда коливань у контурі з добротністю Q зменшиться в разів, якщо частота загасаючих коливань дорівнює .

Розв'язання

Для загасаючих коливань струм змінюється з часом за законом

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

тобто амплітуда струму $I_m \sim e^{-\gamma t}$. Тоді час t_0 , за який амплітуда зменшиться в разів, можна визначити з $e^{-\gamma t_0} = \frac{1}{e}$

$$t_0 = \frac{\ln e}{\gamma} \tag{1}$$

Зв'язок добротності Q з коефіцієнтом загасання

$$Q = \frac{\omega L}{R} \tag{2}$$

беручи до уваги, що $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Якщо з (1) і (2) виключити γ , отримаємо

$$t_0 = \frac{2Q}{\omega} \ln e$$

Задача 4

У момент часу $t = 0$ замикається коло, що складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивністю $L = 40$ мГн, резистора $R = 3$ Ом і зарядженого конденсатора $C = 4,8$ мкФ. 1) Покажіть, що в цьому контурі відбуватимуться коливання. 2) Визначте частоту коливань. 3) За який час початкова амплітуда коливань заряду зменшиться вдвічі? 4) Чому дорівнює амплітудне значення сили струму? 5) При якому значенні R коливання в контурі не виникають?

Розв'язання

1) Загасання буде докритичним, якщо $R^2 < 4L/C$. Ця умова виконується, тому що $R^2 = 9 \text{ Ом}^2$ менше $4L/C = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Ом}^2$, тобто в контурі збуджуватимуть коливання.

2) Величина R мала порівняно з L/C , тоді частота загасаючих коливань дорівнює

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 2,3 \text{ кГц.}$$

3) Величина заряду змінюється з часом за законом

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t - \phi_0), \quad (1)$$

тоді згідно з (1) амплітуда зменшиться вдвічі, якщо

$$e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{1}{2};$$

або

$$t = \frac{2L}{R} \ln 2 = 18 \text{ мс.}$$

4) Щоб знайти силу струму, продиференціюємо (1)

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left(-\frac{R}{2L} \cos \omega t - \omega \sin \omega t \right),$$

тут ураховано, що $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Оскільки $R \ll \sqrt{4L/C}$, доданком з $\cos \omega t$ можна знехтувати, і тоді

$$I = -\frac{q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t.$$

Початкова амплітуда сили струму дорівнює $\frac{q_0}{\sqrt{LC}}$.

5) Щоб загасання було критичним, або надкритичним, має бути

$$R^2 \geq \frac{4L}{C} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Ом}^2,$$

звідки R має бути більшим 180 Ом.

Задача 5

Контур, який складається з резистора опором 100 Ом, конденсатора ємністю 35,4 мкФ і котушки індуктивністю 0,7 Гн, підключений до кола змінного струму з діючою напругою $U_d = 220$ В і частотою 50 Гц.

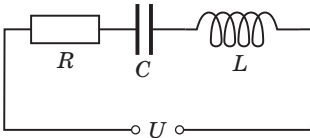


Рис. 10.13

Напишіть рівняння залежності від часу струму $I(t)$ і напруги $U(t)$. Знайдіть падіння напруги на резисторі, конденсаторі і котушці. Визначте частоту змінного струму, за якої в даному контурі спостерігатиметься резонанс, і потужність, що споживає контур.

Струм і напруга в колі (рис. 10.13) змінюються за законом

Розв'язання

Струм і напруга в колі (рис. 10.13) змінюються за законом

$$I = I_0 \sin t, \quad U = U_0 \sin(t - \varphi), \quad (1)$$

де φ — зсув фаз між струмом і напругою.

Амплітуду U_0 напруги знайдемо зі співвідношення

$$U_0 = \sqrt{2} U_d, \quad (2)$$

Амплітуди струму і напруги пов'язані законом Ома

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}, \quad (3)$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (4)$$

— повний опір кола змінного струму,

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5)$$

— індуктивний і ємнісний опори кола.

Зі співвідношень (2)—(5) знайдемо

$$I_0 = \frac{\sqrt{2} U_d}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (6)$$

Розрахунки (2) і (6) дають

$$U_0 = 311 \text{ В}, \quad I_0 = 1,9 \text{ А}, \quad \omega = 100 \text{ с}^{-1}.$$

Зсув фаз між коливаннями сили струму і зовнішньою напругою визначимо так:

$$\cos \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L - \frac{1}{C}\right)^2}} = 0,61; \quad 0,3 \quad 54. \quad (7)$$

Рівняння (1) з урахуванням розрахунків перетворюються

$$I(t) = 1,9 \sin 100 t;$$

$$U(t) = 311 \sin(100 t - 0,3).$$

Падіння напруги на елементах контуру дорівнює

$$U_R = I_d R; \quad U_C = I_d X_C; \quad U_L = I_d X_L,$$

де $I_d = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$

Тоді

$$U_R = \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = 134 \text{ В}; \quad U_C = \frac{I_0}{\sqrt{2}} X_C = 121 \text{ В}; \quad U_L = \frac{I_0}{\sqrt{2}} X_L = 295 \text{ В}.$$

Умова резонансу $X_L = X_C$, тоді з (5) отримаємо резонансну частоту

$$\text{рез} \quad \frac{1}{2 \sqrt{LC}} = 32 \text{ Гц}.$$

Потужність, що споживається контуром,

$$P = I_d U_d \cos \varphi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi = 180 \text{ Вт}.$$

З урахуванням (3) і (7) отримаємо

$$P = \frac{I_0^2 Z R}{2Z} = \frac{I_0^2 R}{2} = I_d^2 R.$$

Потужність, що споживає контур, виділяється тільки на активному опорі. На індуктивному і ємнісному опорах потужність не виділяється.

Задача 6

У коло змінного синусоїдального струму послідовно з'єднані конденсатор ємністю $C = 100 \text{ мкФ}$ і котушка індуктивності діаметром $D = 10 \text{ см}$, що має $N = 10^3$ витків мідного дроту з поперечним перерізом $S = 1 \text{ мм}^2$, які щільно намотані. Яка середня потужність

виділяється на активному опорі котушки індуктивності за один період коливання струму в колі, якщо амплітудне значення напруги в колі дорівнює $U_0 = 120$ В? За якої частоти струму ця потужність буде максимальною? Питомий опір міді $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Розв'язання

У колі з ємністю, індуктивністю й активним опором (резистор) розсіювання потужності відбувається тільки на резисторі. В цьому випадку середня за період потужність дорівнює

$$P = \frac{I_0 U_0 \cos \phi}{2}.$$

Напруга на резисторі збігається по фазі зі струмом ($\phi = 0$), тоді потужність, що виділяється на активному опорі R , як наслідок, у всьому зовнішньому колі, дорівнює

$$P = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{I_0^2 R}{2}, \tag{1}$$

де I_0 — амплітудне значення сили струму в колі.

Згідно з законом Ома,

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}, \tag{2}$$

де Z — повний опір кола змінного струму.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L \frac{1}{C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2L \frac{1}{C} \right)^2}, \tag{3}$$

тут $\omega = 50$ Гц — частота струму в електричній мережі.

Активний опір обмотки з мідного дроту довжиною l_0 з питомим опором ρ і поперечним перерізом S дорівнює

$$R = \frac{l_0 \rho}{S} = \frac{N D \rho}{S}. \tag{4}$$

Зауважимо, що довжина котушки

$$l = nd = 2N \sqrt{\frac{S}{\pi}}; \tag{5}$$

($S = d^2/4$, звідки $d = 2\sqrt{S/\pi}$), витки намотані щільно, тоді індуктивність котушки дорівнює

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S_0}{l}, \tag{6}$$

де

$$S_0 = \frac{D^2}{4} \quad (7)$$

— поперечний переріз котушки.

З виразів (6), (5) і (7) маємо

$$L = \frac{0,001 ND^2}{8} \sqrt{\frac{1}{S}}; \quad (8)$$

Підставимо чисельні значення в (8), (4) і (3) і отримаємо

$$L = 9,10 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}; \quad R = 5,34 \text{ Ом}; \quad Z = 5,36 \text{ Ом}.$$

Нарешті, згідно з (1) і (2) матимемо

$$P = \frac{U_0^2 R}{2Z^2}; \quad P = 1,34 \text{ кВт}. \quad (9)$$

З (9) очевидно, що потужність, яка виділяється в резисторі, є максимальною, якщо повний опір кола мінімальний. Це можливо за умови, коли в (3) $L = \frac{1}{C}$, що відбувається, якщо частота

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ або } \frac{1}{2\sqrt{LC}}; \quad 5,6 \text{ кГц}.$$

Потужність, що виділяється на активному опорі при цій частоті, дорівнює

$$P_m = \frac{U_0^2}{2R}; \quad P_m = 1,35 \text{ кВт}.$$

Задача 7

Коло, яке складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C і котушки з активним опором R і індуктивністю L , підключили до зовнішньої напруги з амплітудою U_0 і частотою ω . Вважаючи, що струм у колі випереджає за фазою зовнішню напругу, побудуйте відповідну векторну діаграму і за її допомогою знайдіть амплітуду напруги на котушці.

Розв'язання

Векторна діаграма для цієї задачі має вигляд (рис. 10.14). За умовами задачі струм у колі I_0 випереджає за фазою зовнішню напругу U_0 , тому $\varphi < 0$. Котушка індуктивності має власний активний опір R , тому напруга на котушці U_{LR_0} випереджає струм за фазою на кут $\varphi/2$.

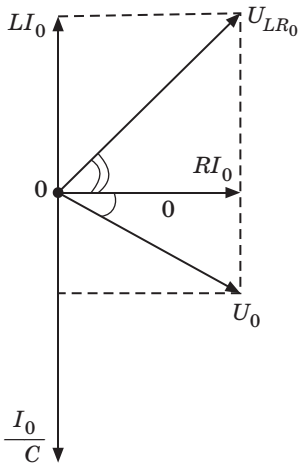


Рис. 10.14

З векторної діаграми маємо

$$U_{LR_0} = I_0 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}, \quad (1)$$

де

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \frac{1}{C^2}}}. \quad (2)$$

Тоді з (1) і (2) отримаємо амплітуду напруги на котушці

$$U_{LR_0} = \frac{U_0 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}{\sqrt{R^2 + L^2 \frac{1}{C^2}}}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

10.1. Коливальний контур складається з котушки індуктивності $L = 0,2$ Гн і конденсатора. Сила струму в ньому змінюється за законом $I = 0,2 \cos 100 t$. Знайдіть: 1) період коливань; 2) ємність конденсатора; 3) максимальну напругу на обкладках конденсатора; 4) максимальну енергію магнітного поля; 5) максимальну енергію електричного поля.

Відповідь: 1) $T_0 = 0,002$ с; 2) $C = 51$ мкФ; 3) $U_0 = 12,5$ В;

4) $W_M^{\max} = 4$ мДж; 5) $W_e^{\max} = 4$ мДж.

10.2. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 47$ мкФ і котушки індуктивності $L = 0,12$ Гн. Заряд конденсатора $q_0 = 3,8$ мкКл. Запишіть рівняння зміни сили струму і напруги на конденсаторі від часу.

Відповідь: $I = 1,6 \cos 420t - \frac{\pi}{2}$ мА; $U_c = 81 \cos(420t)$ мВ.

10.3. Коливальний контур складається з ємності $C = 0,25$ мкФ і індуктивності $L = 1,015$ Гн. Омичний опір відсутній. Конденсатор заряджений зарядом $q = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл.

1) Написати для цього коливального контуру рівняння, яке описує залежність напруги на конденсаторі і сили струму в колі від часу.

2) Знайти напругу на конденсаторі і силу струму в колі в моменти часу $T/8$, $T/4$, $T/2$.

Відповідь: 1) $U = 100 \cos(2 \cdot 10^3 t)$ В, $I = 15,7 \sin(2 \cdot 10^3 t)$ мА;
2) $U_1 = 70,7$ В і $I_1 = 11,1$ мА; $U_2 = 0$ В; $I_2 = 15,7$ мА; $U_3 = 100$ В; $I_3 = 0$.

10.4. Рівняння, яке визначає залежність напруги на конденсаторі від часу в коливальному контурі, має вигляд $U = 50 \cos(10^4 t)$ В, ємність конденсатора $C = 10^{-7}$ Ф. Визначити: 1) період коливань; 2) індуктивність контуру; 3) закон зміни сили струму в контурі від часу; 4) довжину хвилі, яка відповідає цьому контуру.

Відповідь: 1) $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с; 2) $L = 10,15$ мГн;
3) $I = 157 \sin(10^4 t)$ мА; 4) $\lambda = 6 \cdot 10^4$ м.

10.5. Індуктивність $L = 3 \cdot 10^5$ Гн з'єднана послідовно з плоским конденсатором, площа пластин якого $S = 100$ см², відстань між ними $d = 0,1$ мм. Чому дорівнює діелектрична проникність середовища між пластинами, якщо контур резонує на довжину хвилі 750 м?

Відповідь: 6.

10.6. Вольтметр, підключений паралельно індуктивності і ємності, показує нуль при значенні ємності $C = 15$ мкФ. Знайти величину індуктивності при частоті $\omega = 50$ Гц.

Відповідь: $L = 0,67$ Гн.

10.7. Період коливань контуру, який складається з котушки і конденсатора, що з'єднані паралельно, дорівнює $T = 33,2$ нс. Повітряний конденсатор являє собою дві круглі пластини діаметром $D = 20$ см, які розташовані на відстані $d = 1$ см. Визначити індуктивність котушки.

Відповідь: $L = 1$ мкГн.

10.8. Визначити, на яку довжину хвилі налаштований коливальний контур, що складається з конденсатора ємністю $C = 200$ пФ і котушки довжиною $l = 20$ см, з'єднаних паралельно. Площа поперечного перерізу котушки $S = 4$ см², кількість витків $N = 800$, осердя немагнітне.

Відповідь: 1,068 км.

10.9. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 1$ мГн і конденсатора змінної ємності. Діапазон довжин електромагнітних хвиль, які можуть викликати резонанси в цьому контурі, складає від 1) 200 м до 2) 600 м. Визначити, в яких

межах змінюється ємність конденсатора. Активним опором контуру знехтувати.

Відповідь: $C_1 = 11,3 \text{ пФ}$; $C_2 = 101,4 \text{ пФ}$.

10.10. Знайти період коливань контуру, який складається з котушки довжиною $l = 50 \text{ см}$, площею поперечного перерізу $S_1 = 2 \text{ см}^2$ і кількістю витків $N = 1000$ та конденсатора з двома пластинами площею $S = 50 \text{ см}^2$ кожна, розташованими на відстані $d = 2 \text{ мм}$ одна від одної. Простір між пластинами конденсатора заповнений парафіном ($\epsilon = 2$).

Відповідь: $T = 0,93 \text{ мкс}$.

10.11. Коливальний контур складається з паралельно з'єднаних конденсатора і котушки. Конденсатор являє собою дві круглі паралельні пластини радіусом $r_1 = 2 \text{ см}$ кожна, відстань між якими $d = 2 \text{ мм}$. Простір між пластинами заповнений середовищем з діелектричною проникністю $\epsilon = 100$. Котушка радіусом $r_2 = 1 \text{ см}$ і довжиною $l = 8 \text{ см}$ має $N = 800$ витків. Знайти власну частоту коливального контуру і довжину резонансної хвилі.

Відповідь: $\omega = 7,55 \cdot 10^5 \text{ рад/с}$; $\lambda = 2,5 \text{ км}$.

10.12. У коливальному контурі, що складається з двох послідовно з'єднаних котушок з індуктивностями L_1 і L_2 і конденсатора ємністю C , відбуваються незагасаючі коливання з амплітудою сили струму I_0 . Коли сила струму в котушці L_1 максимальна, в неї швидко (за час малий порівняно з періодом коливань) вводять осердя, що призводить до збільшення її індуктивності в k разів. Визначте максимальну напругу на конденсаторі до (U_0) і після введення осердя (U_m).

Відповідь: $U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C}}$; $U_m = \frac{(L_1 + L_2)I_0}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}$.

10.13. В електричному колі з двох однакових конденсаторів ємністю C і котушки індуктивності L , з'єднаних послідовно, в початковий момент часу один конденсатор має заряд q_0 , а другий не заряджений. Як змінюватимуться з часом заряди конденсаторів і сила струму в контурі без загасання після замикання ключа?

Відповідь: $q_{1,2} = \frac{q_0}{2}(1 \pm \cos t)$; $I = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \sin \sqrt{\frac{2}{LC}} t$.

10.14. На вертикально і горизонтально відхиляючі пластини осцилографа подано напругу $U_x = a \sin t$ і $U_y = b \cos t$. Визначте траєкторію променя на екрані осцилографа.

Відповідь: $\frac{U_x^2}{a^2} + \frac{U_y^2}{b^2} = 1$ — еліпс.

10.15. На вертикально і горизонтально відхиляючі пластини осцилографа подано напругу $U_y = a \sin t$ і $U_x = b \cos 2t$. Визначте траєкторію променя на екрані осцилографа.

Відповідь: $\frac{U_x^2}{b^2} + \frac{2U_y^2}{a^2} = 1$ — парабола.

10.16. У коливальному контурі спостерігаються вільні незагаючі коливання з енергією 0,5 мДж. Частота власних коливань у контурі збільшилась у $n = 2,5$ рази при повільному розсуванні пластин конденсатора. Знайдіть роботу, здійснену проти сил електричного поля.

Відповідь: $A = 2,63$ мДж.

10.17. Коливальний контур має конденсатор ємністю $C = 2$ мкФ і котушку індуктивності $L = 0,1$ мГн із загальною кількістю витків $N = 500$. Максимальна напруга на обкладках конденсатора дорівнює 300 В. Визначте максимальний магнітний потік, що пронизує контур.

Відповідь: $\Phi = 8,5$ мкВб.

10.18. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 7$ мкФ, індуктивності $L = 0,23$ Гн і опору $R = 40$ Ом. Конденсатор заряджений зарядом $q_0 = 5,6 \cdot 10^{-4}$ Кл. 1) Знайти період коливань контуру. 2) Знайти логарифмічний декремент загасання. 3) Написати рівняння залежності зміни напруги на конденсаторі від часу. 4) Знайти напругу на конденсаторі в моменти часу $T/2$, T , $3T/2$ і $2T$.

Відповідь: 1) $T = 8 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $\ln \delta = 0,7$; 3) $U = 80e^{-87t} \cos(250 t)$ В; 4) $U_1 = 56,5$ В; $U_2 = 40$ В; $U_3 = 28$ В; $U_4 = 20$ В.

10.19. Котушка коливального контуру має індуктивність $L = 1$ Гн. Яким буде активний опір котушки, якщо амплітуда вільних коливань у контурі за 0,05 с зменшується в 2,7 рази?

Відповідь: $R = 40$ Ом.

10.20. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $0,2$ мкФ і котушки індуктивністю $5,07$ мГн. При якому значенні логарифмічного декременту загасання коливань і опори різниці потенціалів на обкладках конденсатора за $0,001$ с зменшується втричі?

Відповідь: $0,22$; R 11 Ом.

10.21. Індуктивність котушки коливального контуру L 5 мГн, ємність конденсатора C $0,05$ мкФ, опір R 10 Ом. Визначити кількість повних коливань, через яку амплітуда струму зменшиться в e разів.

Відповідь: N 10 .

10.22. Визначити, через скільки повних коливань енергія коливального контуру зменшилась у $n = 16$ разів, якщо логарифмічний декремент $0,138$.

Відповідь: N 10 .

10.23. Добротність коливального контуру Q 3000 , частота загасаючих коливань 600 кГц. Визначити час, за який амплітуда сили струму в цьому контурі зменшилась у 10 разів.

Відповідь: t $3,66$ мс.

10.24. Резонансна частота коливального контуру $\omega_{\text{рез}}$ $499,5$ Гц, логарифмічний декремент $0,2$. Визначити власну частоту контуру.

Відповідь: ω_0 500 Гц.

10.25. Індуктивність котушки коливального контуру L 6 мГн, а ємність конденсатора C $0,3$ мкФ. Знайти логарифмічний декремент затухання і опір контуру, якщо за час t 1 мс різниця потенціалів на обкладинках конденсатора зменшилась у 4 рази.

Відповідь: Q $0,358$; R $16,6$ Ом.

10.26. Коливальний контур має параметри: L 20 мкГн і R 4 Ом. Визначити час, протягом якого амплітуда вільних коливань зменшиться в e^2 разів, і частоту коливань.

Відповідь: t 20 мкс.

10.27. На скільки відсотків відрізняється частота вільних коливань реального контуру (ω) з добротністю Q $0,5$ від частоти вільних коливань такого самого ідеального контуру (ω_0)?

Відповідь: $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{8Q^2} = 0,005 = 0,5\%$.

10.28. Після розмикання кола, зображеного на рис. 10.15 виникають загасаючі коливання, початкова амплітуда яких у 100 разів перевищує напругу батареї. Визначити частоту вільних загасаючих коливань, якщо зменшення амплітуди в e разів відбувається за 0,1 с.

Відповідь: 318 Гц.

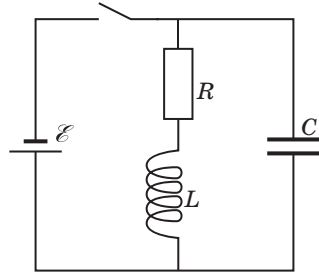


Рис. 10.15

10.29. Власна частота коливань контуру ω_0 8,0 кГц, добротність Q 72, у контурі виникають загасаючі коливання. 1) Знайти закон зменшення енергії W в опорі від часу t . 2) Яка частина початкової енергії збережеться у контурі за час 1,0 мс?

Відповідь: 1) $W = W_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$; 2) 50 %.

10.30. Якої енергії необхідно надати коливальному контуру з логарифмічним декрементом загасання 0,03, щоб у ньому існували коливання протягом 1 год, якщо контур складається з конденсатора ємністю 0,05 мкФ і котушки індуктивності 2 мГн, а початкова сила струму у контурі 5 мА?

Відповідь: $W = 0,086$ Дж.

10.31. Як і яку індуктивність L і ємність C слід підключити до опору $R = 20$ кОм, щоб струм через індуктивність I_L і ємність I_C був у 10 разів більший за повний струм I_0 ? Частота струму 50 Гц.

Відповідь: $C = 1,6$ мкФ; $L = 6,4$ Гн.

10.32. Сила струму в провіднику змінюється за законом $I = I_0 \sin^2 t$, де $I_0 = 5$ А, $\omega = 100$ с⁻¹. Визначте величину заряду, що пройшов за 2 с.

Відповідь: $q = 5$ Кл.

10.33. Два конденсатори ємністю $C_1 = 0,2$ мкФ і $C_2 = 0,1$ мкФ увімкнули послідовно в коло змінного струму, напруга якого 220 В, а частота 50 Гц. Знайти: 1) силу струму в колі; 2) напругу на першому і другому конденсаторах.

Відповідь: $I = 4,6$ мА; $U_1 = 73,4$ В; $U_2 = 146,6$ В.

10.34. Зовнішнє коло змінного струму ($\omega = 50$ Гц) складається з активного ($R = 100$ Ом) і індуктивного $L = 10^2$ Гн опорів, з'єднаних послідовно. Яким буде падіння напруги на індуктивності в момент,

коли напруга на активному опорі вдвічі менша за його максимальне значення $U_{R0} = 6 \text{ В}$?

Відповідь: $U_L = 1,62 \text{ В}$.

10.35. Різниця потенціалів на кінцях котушки дорівнює U_0 , коли через неї іде постійний струм I_0 . При включенні котушки в коло змінного струму ($f = 50 \text{ Гц}$) значення напруги і струму дорівнюють U і I відповідно. Визначте індуктивність котушки.

Відповідь: $L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - \frac{U_0^2}{I_0^2}}$.

10.36. Коливальний контур має параметри: $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 5 \text{ мкФ}$; $R = 10 \text{ Ом}$. На яких двох частотах амплітуда вимушених коливань дорівнює половині амплітуди при резонансі?

Відповідь: $f_{\text{рез}} = 223 \text{ Гц}$; $f_1 = 210 \text{ Гц}$; $f_2 = 236 \text{ Гц}$.

10.37. Паралельний контур з конденсатором ємністю 24 пФ має резонансну частоту $14,4 \text{ МГц}$. Добротність контуру $Q = 76$. Яка амплітуда сили струму до розгалуження, якщо амплітуда напруги на контурі при резонансі 12 В ?

Відповідь: $I_0 = 0,34 \text{ мА}$.

10.38. Контур складається з паралельно з'єднаних котушки ($L = 60 \text{ мкГн}$, $R = 20 \text{ Ом}$) і конденсатора ($C = 240 \text{ пФ}$). Вимушені коливання створюються автогенератором з внутрішнім опором $r = 50 \text{ кОм}$ і амплітудою ЕРС 3 В . Визначити резонансну частоту, амплітудні значення сили струмів на окремих ділянках та до розгалуження і спад напруги на контурі при резонансі.

Відповідь: $f_{\text{рез}} = 1,33 \text{ МГц}$; $I_{0L} = 1,2 \text{ мА}$; $I_0 = 0,048 \text{ мА}$;

$U_{0\text{рез}} = 0,68 \text{ В}$.

10.39. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 4 мкФ і котушки індуктивністю 2 мГн та активним опором 10 Ом . Визначити відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент часу, що відповідає максимуму сили струму в контурі.

Відповідь: $\frac{W_M}{W_e} = 5$.

10.40. Індуктивність $L = 2,26 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$ та активний опір R увімкнуті паралельно в коло змінного струму частотою $f = 50 \text{ Гц}$. Знайти

величину опору R , якщо відомо, що зсув фаз між напругою і струмом дорівнює 60° .

Відповідь: $R = 12,3 \text{ Ом}$.

10.41. Активний опір коливального контуру $R = 0,33 \text{ Ом}$. Яку потужність слід надавати контуру, щоб у ньому існували незгасаючі коливання з амплітудою сили струму $I_0 = 30 \text{ мА}$?

Відповідь: $P = 0,15 \text{ мВт}$.

10.42. Параметри коливального контуру $C = 10 \text{ пФ}$, $L = 6,0 \text{ мкГн}$, $R = 0,50 \text{ Ом}$. Яку потужність слід надавати контуру, щоб у ньому існували незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_0 = 10 \text{ В}$?

Відповідь: $P = 4,2 \text{ мВт}$.

10.43. Змінну напругу, діюче значення якої $U_d = 220 \text{ В}$, а частота 50 Гц , увімкнули послідовно з індуктивністю $L = 31,8 \text{ мГн}$ з активним опором $R = 10 \text{ Ом}$. 1) Знайти кількість тепла Q_T , що виділилося на активному опорі за секунду. 2) Як зміниться Q_T якщо послідовно з індуктивністю й активним опором увімкнути конденсатор ємністю $C = 219 \text{ мкФ}$?

Відповідь: 1) $Q_T = 2,4 \text{ кВт}$; 2) збільшиться вдвічі.

10.44. Коефіцієнт потужності в колі з послідовно з'єднаними конденсатором і активним опором дорівнює $\cos \phi = 0,6$. Знайти коефіцієнт потужності, якщо активний опір і конденсатор з'єднати паралельно.

Відповідь: $\cos \phi = 0,7$.

11

Механічні хвилі

11.1. Хвильовий рух.

Поширення пружних хвиль у пружному середовищі

Хвильовий рух

Коливання і хвилі оточують нас повсюди. Завдяки коливанням повітря ми чуємо звуки. Коливання електричного і магнітного полів дають можливість нам бачити, сприймати радіо- і телепередачі.

У будь-якому випадку збурення в одному місці призводить до передачі енергії та інформації в інше місце.

Але у хвилях ніякого переносу речовини не відбувається. У випадку звукових хвиль та хвиль на поверхні води або землі збурення поширюється завдяки змінам, що відбуваються в пружному середовищі. Коливання повітря супроводжується збільшенням або зменшенням його тиску. Для поширення світла ніякого фізичного середовища не потрібно: осцилюючі електричне і магнітне поля створюють і підтримують одне одного під час руху хвильового імпульсу.

Найбільш яскравою рисою хвильового руху є його *здатність переносити енергію* на величезні відстані з дуже малими втратами. Земля нагрівається електромагнітним випромінюванням Сонця. Радіохвилі посилають у космос до інших планет. Зсув земної поверхні в одному місці може викликати значні коливання земної кори (землетруси) на дуже великих відстанях.

Можна сказати, що поняття хвилі є первинним з тієї точки зору, що звичайний поділ фізичних об'єктів на хвилі і частинки не має абсолютного характеру. І в мікросвіті (квантова теорія), і в макросвіті (класична теорія) об'єкти можна описувати з погляду корпускулярно-хвильового дуалізму. Але прояв того чи іншого аспекту цього дуалізму у мікро- та макросвіті різний.

Поширення пружних хвиль

Для поширення механічних пружних хвиль необхідне пружне середовище. *Модель пружного середовища* — це тверде, рідке або газоподібне середовище, в якому після припинення дії зовнішнього збурення деформації повністю зникають.

Це середовище *однорідне, ізотропне, суцільне, без дисперсії*, тобто відсутня залежність швидкості поширення хвилі від властивостей середовища.

Появу хвилі у пружному середовищі можна пояснити, якщо розглянути будову речовини на атомному рівні. Більшість частинок перебувають у потенціальних ямах і при малих збуреннях поведуть себе так, ніби вони зв'язані пружинами. Коли зразок речовини розтягують або стискають, кожний атом зрушується з положення рівноваги. Рух будь-якого атома позначається на сусідніх атомах тощо. Таким чином, у пружному середовищі почеться процес поширення коливань — *хвильовий рух (хвильовий процес)*.

Взагалі *хвильовий рух* — процес поширення будь-якого збурення у просторі з часом.

Механічні або пружні хвилі — це механічні збурення (деформації), які поширюються у пружному середовищі.

Типи хвиль

Частинки середовища, у якому проходить хвиля, не рухаються поступально, а тільки коливаються навколо положення рівноваги. В залежності від напрямку коливання частинок відносно напрямку поширення хвилі існують *поздовжні* або *поперечні хвилі*.

1. *Поздовжньою хвилею* називається такий процес, при якому напрямок вектора зміщення частинок середовища \vec{u} збігається з напрямком поширення хвилі зі швидкістю \vec{v} (рис. 11.1, а). Хвилі такого типу можуть існувати в твердих, рідких і газоподібних середовищах, де виникають пружні сили при *деформаціях розтягнення та стискання*, наприклад звукові хвилі в рідині або газі.

У таких хвилях поляризаційні явища відсутні.

2. У *поперечній хвилі* вектор зміщення частинки середовища \vec{u} перпендикулярний напрямку поширення хвилі. Такі хвилі поширюються в середовищі, в якому з'являються пружні сили при *деформації зсуву*, що можливо тільки в твердих тілах (рис. 11.1, б).

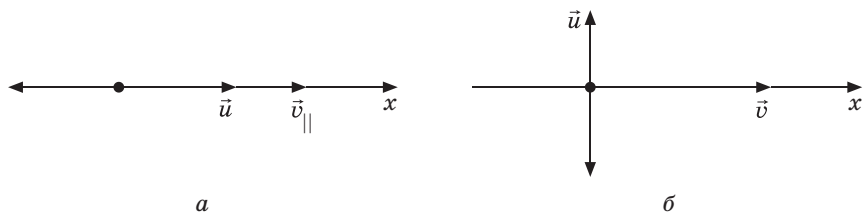


Рис. 11.1

Електромагнітні хвилі також поперечні. Напрямок коливань електричного (\vec{E}) і магнітного (\vec{H}) векторів перпендикулярний до напрямку їх поширення.

У поперечних хвиль у тривимірному середовищі (наприклад, у електромагнітних хвиль) виявляються поляризаційні ефекти.

Фактично в рідинах і газах з'являються лише поздовжні хвилі, а в твердих тілах — як поздовжні, так і поперечні.

3. Існують ще хвилі третього типу, які називаються *поверхневими*. Вони поширюються на межі поділу двох середовищ. Хвилі на воді — один з прикладів поверхневих хвиль. Кожна окрема крапля води в хвилі рухається по еліпсу, переміщуючись як вгору і вниз, так вперед і назад.

Під час землетрусів у земній корі також збуджуються поверхневі хвилі, дією яких і обумовлені значні руйнування.

Швидкість поширення хвиль Розглянемо поширення хвиль у суцільному пружному середовищі густиною ρ . Виділимо елементарний об'єм у вигляді циліндра з площею основи S (рис. 11.2). Під дією сили \vec{F} речовина циліндра стискається. Ця деформація поширюється зі швидкістю v . У місцях стискання густина середовища збільшується на величину $\Delta\rho$, а тиск — на Δp . За час t через переріз ab буде перенесено масу

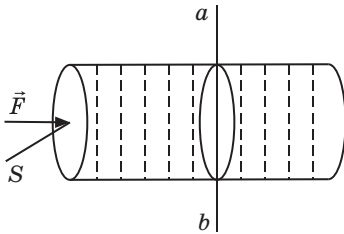


Рис. 11.2

і відповідний імпульс

$$m = \rho S v t$$

і відповідний імпульс

$$K = \rho v S v^2 t$$

За другим законом Ньютона зміна імпульсу дорівнює імпульсу сили, тобто

$$K = F t = p S t$$

Якщо прирівняти праві частини останніх двох рівностей, отримаємо швидкість поширення стискання

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Для однорідного пружного середовища маємо

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

де ρ — густина недеформованого середовища; p — зміна тиску при деформації стиску або розтягу; Δl — відносна деформація; k — коефіцієнт пружності.

Тоді

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho k}}.$$

Ця формула справедлива для твердих тіл, рідин і газів.

Для пружного твердого середовища швидкість поширення поздовжніх хвиль дорівнює

$$v_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (11.1)$$

де E — модуль Юнга; ρ — густина.

Швидкість поширення поперечних хвиль така:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (11.2)$$

де G — модуль зсуву.

Гармонічні хвилі

Пружна хвиля називається *гармонічною*, якщо відповідні їй коливання частинок середовища є гармонічними. На рис. 11.3, а показано гармонічну поперечну хвилю, що поширюється вздовж осі x .

Цей графік схожий з графіком 11.3, б, який характерний для гармонічних коливань. Незважаючи на їх подібність, вони по суті різні: графік хвилі дає залежність зміщення частинок середовища u від відстані до джерела коливань x в даний момент часу, а графік коливань — залежність зміщення частинки від часу відносно фіксованого положення рівноваги.

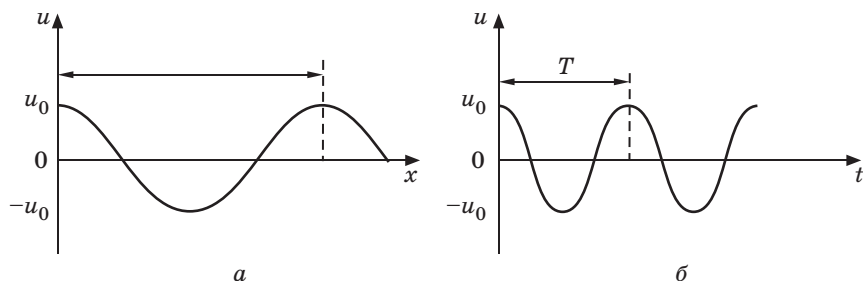


Рис. 11.3

**Характеристики
хвиль**

Довжина хвилі дорівнює найменшій відстані між частинками, що знаходяться в однаковій фазі коливання.

Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку поширюється визначена фаза коливань за період

$$vT. \quad (11.3)$$

Частота коливань $\frac{1}{T}$, тоді швидкість коливань

$$v. \quad (11.4)$$

У хвилі принципово відрізняються один від одного два типи швидкостей поширення: *фазова швидкість* v і *групова швидкість* $v_{гр}$.

Фазова швидкість v описує швидкість поширення фази гармонічної (синусоїдальної або косинусоїдальної) хвилі.

Групова швидкість $v_{гр}$ визначає швидкість поширення *хвильового пакета* і відповідає швидкості, з якою хвилею переноситься енергія або передається сигнал. Верхньою межею групової швидкості є швидкість світла у вакуумі c

$$v_{гр} \leq c.$$

Якщо для будь-якої хвилі фазова швидкість v відрізняється від групової швидкості $v_{гр}$, то в середовищі спостерігається явище *дисперсії*.

Фазову та групову швидкості та їх зв'язок докладніше буде розглянуто далі.

Фронт хвилі — геометричне місце точок, до яких дійшло коливання до моменту часу t . Хвильовий фронт відділяє частину простору, в якому проходить хвильовий процес, від області, де коливання ще не виникли.

Геометричне місце точок, що коливаються з однаковою фазою, має назву *хвильової поверхні*. Хвильова поверхня може проходити через будь-яку точку простору, в якому поширюється хвиля. Хвильових поверхонь може бути нескінченно багато, а хвильовий фронт у кожному мить тільки один.

Хвильові поверхні можуть мати будь-яку форму, найпростішими з яких є плоска і сферична хвилі.

11.2. Плоска та сферична хвилі. Рівняння біжучої хвилі

Плоска хвиля

Хвиля називається *плоскою*, якщо її хвильові поверхні є множиною паралельних площин.

Рівнянням пружної хвилі називається залежність від координат і часу скалярних або векторних величин, що характеризують коливання середовища під час проходження в ній хвилі.

Біжучими хвилями називають хвилі, які переносять у просторі енергію на відміну від стоячих хвиль.

**Рівняння
плоскої біжучої
хвилі**

Нехай джерелом хвиль є площина, що гармонічно коливається з координатою $x_0 = 0$ (рис. 11.4). При цьому спостерігається зміщення частинок з поло-

ження рівноваги

$$u(x_0, t) = u(0, t) = u_0 \cos(\omega t - \phi_0).$$

Частинки середовища на відстані x від джерела коливань теж коливатимуться за тим самим законом, але із запізненням на x/v (час, необхідний для проходження хвилею відстані x).

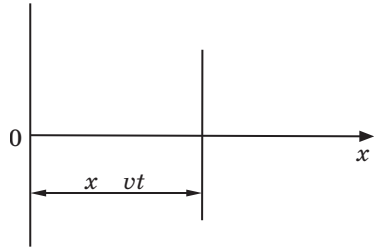


Рис. 11.4

Тоді рівняння коливання частинок у площині x має вигляд

$$u(x, t) = u_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \phi_0\right] = u_0 \cos\left[\omega t - \frac{x}{v} - \phi_0\right]. \quad (11.5)$$

Рівняння (11.5) є рівнянням біжучої хвилі, що поширюється в напрямку осі x . Для хвилі, що поширюється в зворотному напрямку, можна написати рівняння

$$u(x, t) = u_0 \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) - \phi_0\right]. \quad (11.6)$$

У рівняннях (11.5) і (11.6) u_0 — амплітуда хвилі, ω — циклічна частота хвилі, ϕ_0 — початкова фаза коливань,

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (11.7)$$

— фаза плоскої хвилі, що визначає зв'язок часу t і місця x , у якому фаза має фіксоване значення

$$kx - \omega t = \text{const}. \quad (11.8)$$

**Фазова
швидкість**

Якщо продиференціювати (11.8), отримаємо

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0,$$

звідки

$$v \frac{dx}{dt}. \quad (11.9)$$

Тобто швидкість поширення хвилі — це швидкість переміщення фази хвилі, що має назву *фазової швидкості*.

Хвильове число Для характеристики хвиль використовують *хвильове число*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (11.10)$$

що визначає кількість хвиль, що розміщуються на відстані 2π метрів

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT}. \quad (11.11)$$

З урахуванням (11.11) рівняння хвилі (11.5) набуває вигляду

$$u(x, t) = u_0 \cos(2\pi kx - 2\pi \nu t). \quad (11.12)$$

Рівняння хвилі, що поширюється в довільному напрямку Знайдемо тепер рівняння плоскої хвилі, що поширюється не по осі x , а в довільному напрямку.

Нехай площина, що коливається, проходить через точку O (рис. 11.5). Коливання у точці, яка знаходиться від O на відстані l

$$u(l, t) = u_0 \cos(2\pi kl - 2\pi \nu t) = u_0 \cos(2\pi k l - 2\pi \nu t). \quad (11.13)$$

Визначимо l через радіус-вектор точок розглядуваної поверхні \vec{r} . Уведемо одиничний вектор нормалі \vec{n} , тоді $l = r \cos \theta = \vec{r} \cdot \vec{n}$.

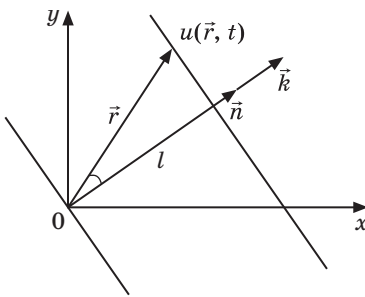


Рис. 11.5

Формула (11.13) набуває вигляду:

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(2\pi k \vec{n} \cdot \vec{r} - 2\pi \nu t). \quad (11.14)$$

Вектор $\vec{k} = k\vec{n}$, модуль якого дорівнює хвильовому числу $k = 2\pi / \lambda$ і який має напрямок нормалі до хвильової поверхні, має назву *хвильового вектора*.

У результаті з (11.14) отримаємо рівняння плоскої незагасаючої хвилі у напрямку, який визначається хвильовим вектором \vec{k} (рис. 11.5),

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(2\pi \vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi \nu t). \quad (11.15)$$

Перейдемо від радіуса-вектора точки \vec{r} до її координат x, y, z :

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

звідки в координатному вигляді рівняння хвилі таке:

$$u(x, y, z, t) = u_0 \cos(t - k_x x - k_y y - k_z z - \phi_0),$$

де $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} \cos \alpha$; $k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} \cos \beta$; $k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} \cos \gamma$; α, β, γ — кути, які складає вектор \vec{k} з відповідними осями x, y, z .

**Рівняння
сферичної хвилі**

Сферична хвиля створюється точковим джерелом, фаза коливань якого $\phi_0 = 0$.

Хвильові поверхні сферичної хвилі мають форму концентричних сфер. Центр цих сфер називається центром хвилі.

Фаза сферичної хвилі дорівнює $\phi = t - kr - \phi_0$. Амплітуда хвилі, навіть без поглинання, зменшується в залежності від відстані як $1/r$.

Тоді рівняння сферичної хвилі має вигляд:

$$u(r, t) = \frac{u_0}{r} \cos(t - kr - \phi_0). \quad (11.16)$$

11.3. Хвильове рівняння для плоскої пружної хвилі

Рівняння будь-якої хвилі (11.15), (11.16) є розв'язком диференціального хвильового рівняння.

Для того щоб знайти його вид, розглянемо другі частинні похідні за часом і координатами від рівняння плоскої хвилі (11.15)

$$u = u_0 \cos(t - \vec{k}\vec{r} - \phi_0) = u_0 \cos(t - k_x x - k_y y - k_z z - \phi_0). \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -k^2 u_0 \cos(t - \vec{k}\vec{r} - \phi_0) = -k^2 u; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k_x^2 u_0 \cos(t - \vec{k}\vec{r} - \phi_0) = -k_x^2 u; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -k_y^2 u_0 \cos(t - \vec{k}\vec{r} - \phi_0) = -k_y^2 u; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -k_z^2 u_0 \cos(t - \vec{k}\vec{r} - \phi_0) = -k_z^2 u. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Додамо похідні за координатами (11.14)

$$\frac{\partial^2 u}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{y^2} - \frac{\partial^2 u}{z^2} = (k_x^2 - k_y^2 - k_z^2)u - k^2 u,$$

і зіставимо цю величину з похідною за часом (11.18)

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{y^2} - \frac{\partial^2 u}{z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{t^2}, \quad (11.19)$$

За умови $k = \frac{\omega}{v}$, тобто $\frac{1}{k} = \frac{v}{\omega}$, отримаємо з (11.15) *хвильове рівняння*

$$\frac{\partial^2 u}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{y^2} - \frac{\partial^2 u}{z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{t^2}. \quad (11.20)$$

Застосувавши оператор Лапласа

$$\frac{\partial^2}{x^2} - \frac{\partial^2}{y^2} - \frac{\partial^2}{z^2},$$

рівняння (11.16) набуває вигляду

$$u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{t^2}. \quad (11.21)$$

Розв'язком рівняння (11.20) або (11.21) є не тільки функція (11.17), а й будь-яка функція виду

$$f(x, y, z, t) = f(t - k_x x - k_y y - k_z z).$$

Для плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі x , хвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{t^2}, \quad (11.22)$$

а його розв'язок (рівняння плоскої хвилі в напрямку осі x) такий:

$$u(x, t) = u_0 \cos(t - kx - \phi_0).$$

11.4. Енергія пружної хвилі

Розглянемо плоску поздовжню хвилю, що поширюється у пружному середовищі у напрямку осі x ,

$$u(x, t) = u_0 \cos(t - kx - \phi_0). \quad (11.23)$$

Частинки середовища, в якому поширюється хвиля, мають як кінетичну енергію руху, так і потенціальну енергію деформації. Поширення хвилі супроводжується передачею енергії від частинки до частинки у напрямку руху хвилі.

Виділимо в цьому середовищі досить малий об'єм V , у межах якого можна знехтувати зміною швидкості зміщення частинок та деформацією. Маса речовини в цьому об'ємі $m = \rho V$.

Кінетична енергія частинок в об'ємі V дорівнює

$$W_k = \frac{1}{2} \rho V \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \quad (11.24)$$

Потенціальна енергія пружно деформованого об'єму V дорівнює

$$W_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2} \quad (11.25)$$

де Δl — зміна довжини l виділеного об'єму V з поперечним перерізом S , $V = Sl$; k — коефіцієнт пружності, який можна визначити за законом Гука

$$F = k \Delta l \quad (11.26)$$

З іншого боку, відносна зміна довжини зразка дорівнює

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S} \frac{1}{E} = \frac{F}{ES}$$

звідки

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l \quad (11.27)$$

Якщо порівняти (11.26) та (11.27), отримаємо, що

$$k = \frac{ES}{l}$$

тоді вираз для потенціальної енергії (11.25) набуде вигляду

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} ES l \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 V \quad (11.28)$$

Якщо врахувати, що u/x — відносне подовження зразка, то потенціальна енергія пружної деформації об'єму V (11.28) дорівнюватиме

$$W_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{u}{x} \right)^2 V \quad (11.29)$$

З (11.1) виразимо модуль Юнга як $E = \rho v^2$, де ρ — густина середовища; v — фазова швидкість хвилі, тоді

$$W_p = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{u^2}{x} V. \quad (11.30)$$

**Повна енергія
і густина енергії**

Повна енергія частинок в об'ємі V дорівнює

$$W = W_k = W_p = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{u^2}{x} V. \quad (11.31)$$

Густина повної енергії

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{u^2}{x}. \quad (11.32)$$

З урахуванням (11.23) отримаємо похідні за часом та координатою

$$\frac{u}{t} = u_0 \sin(t - kx - \phi_0); \quad (11.33)$$

$$\frac{u}{x} = u_0 k \sin(t - kx - \phi_0). \quad (11.34)$$

Тепер (11.32) перетвориться на вираз

$$w = \rho u_0^2 \sin^2(t - kx - \phi_0), \quad (11.35)$$

тут $\rho = k^2 v^2$.

Густина енергії для поперечної хвилі має той самий вигляд (11.35).

Як ми бачимо з (11.35), густина енергії змінюється залежно від часу у різних точках простору. Тобто поширення пружних хвиль пов'язано з передачею енергії від одних ділянок середовища до інших.

Середнє за період значення об'ємної густини енергії дорівнює

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho u_0^2, \quad (11.36)$$

зауважимо, що середнє значення $\langle \sin^2(t - kx - \phi_0) \rangle = \frac{1}{2}$.

Середовище, в якому поширюється хвиля, має додатковий запас енергії, що переноситься самою хвилею.

Потік енергії

Енергія, яка переноситься хвилею крізь деяку поверхню в одиницю часу, має назву *потіку енергії крізь цю поверхню*

$$\frac{dW}{dt}; \quad [\Phi] \quad 1 \text{ Дж/с} \quad 1 \text{ Вт.} \quad (11.37)$$

Густина потоку енергії

Густина потоку енергії — векторна величина, яка чисельно дорівнює потоку енергії крізь одиничну площу поверхні, розташованої у заданій точці перпендикулярно до напрямку, в якому переноситься енергія. Напрямок вектора густини потоку збігається з напрямком перенесення енергії.

Якщо \vec{v} — швидкість перенесення енергії хвилею, то dW дорівнює енергії всередині косої циліндра (рис. 11.6) з площею основи dS і з твірною довжиною vdt

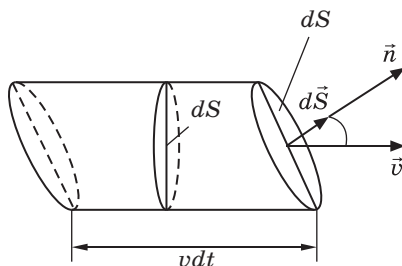


Рис. 11.6

$$dW = w v dt dS \cos \alpha = w(\vec{v} \cdot d\vec{S}) dt.$$

Тоді

$$d = w(\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \vec{U} \cdot d\vec{S}, \quad (11.38)$$

де w — об'ємна густина енергії хвилі; $d\vec{S} = \vec{n} dS$; \vec{n} — одиничний вектор до площини dS ; α — кут між \vec{v} і $d\vec{S}$.

Вектор Умова

Вектор густини потоку енергії

$$\vec{U} = w\vec{v} \quad (11.39)$$

має назву *вектора Умова*, тому що вперше був введений в 1874 р. російським вченим Н. А. Умовим (1846—1915), який розв'язав задачу про рух енергії в пружному середовищі.

Напрямок вектора Умова збігається з напрямком перенесення енергії, а його модуль дорівнює енергії, що переноситься хвилею за одиницю часу крізь одиничну площину, розташовану перпендикулярно напрямку поширення хвилі,

$$U = \frac{d}{dS}, \quad (11.40)$$

де $dS = dS \cos \alpha$.

Потік енергії крізь довільну поверхню S дорівнює

$$\int_S \vec{U} \cdot d\vec{S}, \quad (11.41)$$

Середнє значення вектора Умова

$$\langle \vec{U} \rangle = \langle w \rangle \vec{v} = \frac{1}{2} u_0^2 \vec{v}. \quad (11.42)$$

Вираз (11.42), як і (11.36), виконується для хвиль будь-якого виду (сферичних, загасаючих та ін.).

Інтенсивність хвиль

Інтенсивністю хвилі називається скалярна величина I , що дорівнює середньому значенню вектора Умова

$$I = \langle \vec{U} \rangle. \quad (11.43)$$

Тобто *інтенсивність хвилі чисельно дорівнює енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу крізь одиницю площі поверхні, нормальної до напрямку поширення хвилі.*

Інтенсивність синусоїдальної хвилі пропорційна квадрату її амплітуди.

Для плоскої і сферичної синусоїдальних хвиль

$$I = \langle \vec{U} \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} u_0^2 v. \quad (11.44)$$

Якщо в непоглинаючому середовищі поширюється сферична хвиля, то за одиницю часу крізь будь-яку сферичну поверхню радіуса r з центром у точці коливань проходить одна і та сама величина енергії

$$I \cdot 4\pi r^2 = \text{const.}$$

Таким чином, інтенсивність і амплітуда сферичної хвилі залежать від відстані до джерела і зменшуються за законами

$$I(r) = \frac{I_0}{r^2}; \quad u(r) = \frac{u_0}{r},$$

де I_0 і u_0 — інтенсивність і амплітуда хвилі на відстані $r = 1$ м від центру хвилі.

11.5. Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість

Лінійне середовище

Середовище має назву *лінійного*, якщо між величинами, які характеризують зовнішній вплив на нього і зміною стану, що супроводжує цей вплив, існує прямо пропорційний зв'язок.

Наприклад, у лінійному пружному середовищі виконується закон Гука; за електричними властивостями середовище лінійне,

коли його діелектрична проникність не залежить від величини напруженості електричного поля \vec{E} , лінійність середовища за магнітними властивостями буде за умови, якщо його магнітна проникність не залежить від величини магнітної індукції \vec{B} .

Принцип суперпозиції хвиль

У лінійному середовищі швидкість хвилі не залежить від її інтенсивності, тому в цьому випадку хвилі поширюються незалежно одна від одної, так що виконується **принцип суперпозиції хвиль**: *результуюче збурення в будь-якій точці лінійного середовища при одночасному поширенні в ньому декількох хвиль, дорівнює сумі збурень, що відповідають кожній з цих хвиль поодиноці.*

Якщо поширюється n хвиль, тоді $u = \sum_{i=1}^n u_i$ — сумарне зміщення; $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i$ — сумарна швидкість, $\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i$ — сумарне прискорення.

Візьмемо до уваги, що за допомогою строго монохроматичної хвилі неможливо передати ніякої інформації. Для передачі сигналу слід якось змінити хвилю, наприклад, обірвати її на деякий час. Найпростіше передати сигнал за допомогою імпульсу (рис. 11.7), який складається з хвиль з частотами в деякому інтервалі. Цю ситуацію ми і розглянемо.

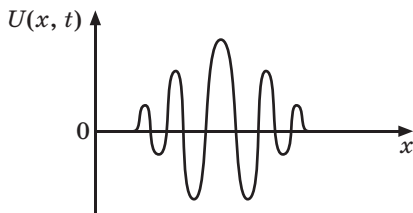


Рис. 11.7

Хвильовий пакет

Виходячи з принципу суперпозиції хвиль, будь-яку несинусоїдальну хвилю в лінійному середовищі можна замінити системою синусоїдальних хвиль — *групи хвиль, хвильового пакету*.

Аналітичний вираз для групи хвиль (згідно з теоремою Фур'є)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \cos(\omega t - kx - \phi_0) d\omega, \quad (11.45)$$

індекс ϕ_0 при u_0, k і ϕ_0 вказує на те, що ці величини для різних частот різні. Зауважимо, що для того, щоб суперпозицію хвиль можна було вважати групою хвиль, необхідно виконання умови $\frac{d\phi_0}{d\omega} = 0$.

Сукупність значень частот цих синусоїдальних хвиль має назву *спектра частот* цієї несинусоїдальної хвилі.

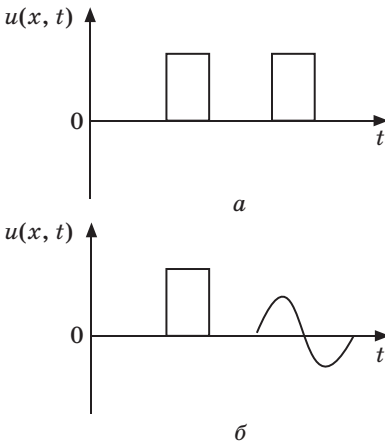


Рис. 11.8

У відсутності дисперсії фазова швидкість хвиль не залежить від їх частоти — сигнал не змінює свою форму (рис. 11.8, а), а всі хвилі мають однакову фазову швидкість, яка дорівнює швидкості поширення сигналу.

У випадку *диспергуючого середовища* фазова швидкість кожної окремої хвилі залежить від частоти, що призводить до зміни форми сигналу (рис. 11.8, б) — хвильовий пакет розпливається.

Розглянемо групу хвиль, що складається з двох плоских хвиль, що поширюються в одному напрямку, мають однакові амплітуди та близькі частоти і хвильові числа (початкові фази дорівнюють нулю)

$$u_1(x, t) = u_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x);$$

$$u_2(x, t) = u_0 \cos[(\omega_2 t - (k_2 + \Delta k)x)].$$

Тут $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1}$; $k_2 = \frac{\omega_2}{v_2}$; $\Delta k = k_2 - k_1$.

Після додавання коливань отримаємо

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right). \quad (11.46)$$

Множник у квадратних дужках змінюється з координатою і часом набагато повільніше, ніж другий множник. Тому вираз (11.46) можна розглядати як рівняння плоскої хвилі, амплітуда якої A змінюється за законом (рис. 11.9)

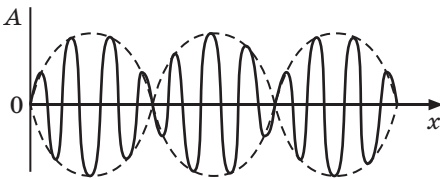


Рис. 11.9

$$A = 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right). \quad (11.47)$$

Групова швидкість

Швидкість поширення хвилі (11.46) — це швидкість переміщення будь-якої точки з фіксованим значенням амплітуди, тобто

$$td = xdk = \text{const},$$

звідки

$$v_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dk} \quad (11.48)$$

— *групова швидкість*. Ця швидкість дорівнює швидкості перенесення енергії (передачі сигналу) квазісинусоїдальною хвилею.

Зв'язок між груповою і фазовою швидкостями

Знайдемо зв'язок між груповою і фазовою швидкостями хвиль.

За умови, що $vk, k = \frac{2\pi}{\lambda}, dk = \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$, маємо

$$v_{\text{гр}} = \frac{d}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv}{2\pi/\lambda^2} = v_{\text{гр}} = v \frac{dv}{d\lambda}. \quad (11.49)$$

З формули (11.49) очевидно, що в залежності від знаку $dv/d\lambda$ групова швидкість $v_{\text{гр}}$ може бути як меншою, так і більшою за фазову швидкість v .

За відсутності дисперсії $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ групова швидкість збігається з фазовою $v_{\text{гр}} = v$.

11.6. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі

При поширенні у середовищі двох хвиль, які виходять із різних джерел, вони поведуть себе так, якби існували поодиночі. Це явище є підтвердженням принципу суперпозиції.

Когерентні хвилі. Інтерференція

У зоні перекриття хвиль відбувається додавання (інтерференція) хвиль.

Якщо хвилі мають однакову частоту, однаковий напрямок поширення і стали різницю фаз, то вони називаються *когерентними*. Джерела когерентних хвиль називаються *когерентними джерелами*.

При додаванні когерентних хвиль спостерігається *явище інтерференції*: коливання в одних точках підсилюються, а в інших послабляються. В цьому випадку результуюче коливання в кожній точці середовища має сталу за часом амплітуду, яка залежить від відстані точки середовища до джерел коливань.

Стоячі хвилі

Особливим прикладом результату інтерференції двох хвиль є *стоячі хвилі*, що утворюються в результаті накладання двох зустрічних плоских когерентних хвиль з однаковими амплітудами. Це може спостерігатись при відбитті хвиль від перепони. Падаюча на перепону хвиля і біжуча їй назустріч відбита хвиля, накладаючись одна на одну, створюють стоячу хвилю.

Розглянемо такі дві хвилі, що рухаються в протилежних напрямках назустріч одна одній (початкові фази дорівнюють нулю)

$$u_1(x, t) = u_0 \cos(t - kx);$$

$$u_2(x, t) = u_0 \cos(t + kx),$$

тоді

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2u_0 \cos kx \cos t,$$

тобто рівняння стоячої хвилі має вигляд

$$u(x, t) = 2u_0 \cos 2 \frac{x}{\lambda} \cos t. \quad (11.50)$$

Вузли і пучності

Ми отримали коливання тієї ж частоти, що й у зустрічних хвиль, а амплітуда хвилі

$$A = 2u_0 \cos 2 \frac{x}{\lambda} \quad (11.51)$$

залежить від координати x , що визначає положення точок середовища. В деяких точках амплітуда стоячої хвилі дорівнює сумі амплітуд обох коливань — точки мають назву *пучностей* (рис. 11.10), в інших точках результуюча амплітуда дорівнює нулю — це *вузли* стоячої хвилі.

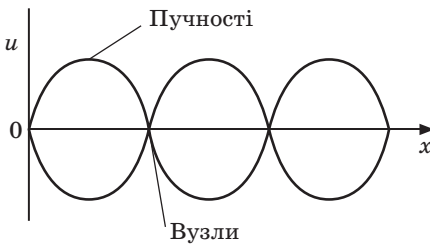


Рис. 11.10

Координати пучностей знайдемо з (11.51) за умови

$$2 \frac{x}{\lambda} = n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{\text{пучн}} = n \frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Координати вузлів такі:

$$2 \frac{x}{\lambda} = (2n + 1) \frac{1}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{\text{вузл}} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Відстань між сусідніми пучностями, а також сусідніми вузлами дорівнює

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}.$$

Тобто довжина стоячої хвилі $\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}$. Відстань між сусідніми вузлом і пучністю дорівнює

$$\frac{\lambda_{\text{ст}}}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

У стоячій хвилі всі точки між двома вузлами коливаються з різною амплітудою та в однаковій фазі ($\cos \omega t$ не залежить від координати).

При переході через вузол фаза коливань стрибком змінюється на π (тобто на протилежну), тому що $\cos 2\pi x$, що визначає амплітуду, при переході через нуль у вузлі змінює знак.

Як вже було сказано, утворення стоячих хвиль відбувається зазвичай у разі інтерференції біжучої вперед і відбитої хвиль.

У цьому випадку на границі відбиття може утворюватись або вузол, або пучність — це залежить від співвідношення густин середовищ, які поділяє границя.

Якщо середовище, від якого відбувається відбиття, має більшу густину, ніж те середовище, в якому поширюється хвиля, то на границі буде вузол. Якщо середовище, від якого відбивається хвиля, має меншу густину, ніж середовище, в якому поширюється хвиля, то на границі буде пучність.

У першому випадку хвиля в місці відбиття змінює фазу на протилежну, що називається «втратою половини хвилі».

У другому випадку хвиля не змінює фази в місці відбиття, тому втрати половини хвилі не буде.

<p>Енергія стоячої хвилі</p>

Якщо з (11.50) отримати швидкості коливального руху частинок $v_1 = u/t$ і відносно деформацію середовища $\Delta x/x$, то можна зробити висновок, що в пучностях стоячої хвилі розташовані пучності швидкості частинок і вузли деформації середовища, а у вузлах стоячої хвилі — пучності деформації і вузли швидкості.

Потенціальна енергія хвилі зосереджена біля вузлів, а кінетична — біля пучностей стоячої хвилі. Енергія періодично мігрує від вузлів до пучностей стоячої хвилі і зворотно. Але густина потоку енергії у вузлах і пучностях дорівнює нулю. Середній за часом потік енергії в будь-якому перерізі хвилі дорівнює нулю.

Коливання струни

При коливаннях струни довжиною l , закріпленої з обох кінців, у ній утворюються стоячі хвилі (в місцях закріплення струни будуть вузли).

Частоти цих стоячих хвиль мають відповідати визначеним умовам, тобто можуть мати тільки визначені дискретні значення, що мають назву *власних частот* коливань

$$l = n \frac{v}{2f_n}; \quad f_n = \frac{2l}{n} \nu; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Власні частоти коливань струни

$$f_n = \frac{v}{2l} n,$$

де v — фазова швидкість хвилі.

При $n = 1$; $f_1 = \frac{v}{2l}$ — *основна частота*, інші частоти f_2, f_3, \dots, f_n — *гармоніки*, або *власні нормальні коливання*.

11.7. Акустичні хвилі

Характеристики звукових хвиль

Пружні хвилі з частотами від 16 до 20 000 Гц називаються *звуковими хвилями* або *звуком*. Хвилі з частотами, меншими 16 Гц, називають *інфразвуком*, з частотами більшими 20 000 Гц — *ультразвуком*. Інфра- й ультразвук людиною не сприймаються.

Звукові хвилі в газах і рідинах можуть бути тільки поздовжніми, тоді як у твердих тілах — і поздовжніми, і поперечними.

Інтенсивність звуку (або *сила звуку*) — *об'єктивна характеристика*. Це величина, яка дорівнює середній за часом енергії, що переноситься звуковою хвилею за одиницю часу через одиничну площину, перпендикулярну напрямку поширення хвилі,

$$I = \frac{W}{S t}; \quad [I] = 1 \text{ Вт/м}^2.$$

Для кожної частоти коливань існує найменша (*пори́г чутності*) і найбільша (*больовий пори́г*) інтенсивність звуку. Область між цими порогами — *область чутності*.

Суб'єктивними характеристиками звуку є *висота звуку*, що визначається частотою, і *тембр*, який залежить від розподілу енергії між різними частотами в акустичному спектрі.

Суб'єктивною характеристикою звуку, пов'язаною з його інтенсивністю, є *гучність звуку*, що залежить від частоти.

Існує об'єктивна оцінка гучності звуку — по вимірюваному значенню його інтенсивності

$$L = \lg \frac{I}{I_0},$$

де I_0 — інтенсивність звуку на порозі чутності, що дорівнює 10^{-12} Вт/м².

Величина L називається рівнем інтенсивності звуку і виражається в белах (величина, в 10 разів менша, — децибел (дБ)).

**Ефект Доплера
в акустиці**

Як показують досліди, тон гудка потяга збільшується при його наближенні до платформи і знижується при віддаленні.

Це явище — **ефект Доплера**, що полягає у зміні частоти коливань, що сприймаються приймачем при русі джерела цих коливань і приймача відносно один одного.

Припустимо, що джерело і приймач звуку рухаються вздовж прямої, що їх з'єднує; $V_{дж}$ і $V_{пр}$ — відповідно швидкості руху джерела і приймача; вони додатні, якщо вони зближуються і від'ємні — при їх віддаленні. Частота коливань джерела ν_0 , ν — швидкість поширення звукової хвилі в середовищі.

1. *Джерело і приймач не рухаються відносно середовища.*
Довжина хвилі

$$\nu T = \frac{\nu}{\nu_0}.$$

Частота, яку сприйме приймач

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\nu}{\nu T} = 0.$$

Тобто частота, сприйнята приймачем, дорівнює частоті джерела.

2. *Приймач наближається до джерела, а джерело не рухається.*
як: $V_{пр} > 0$, $V_{дж} = 0$.

Тоді швидкість хвилі відносно приймача буде $(\nu - V_{пр})$, звідки

$$\frac{\nu - V_{пр}}{\nu T} = \frac{\nu - V_{пр}}{\nu} = \frac{\nu - V_{пр}}{\nu} = 0,$$

тобто частота коливань на приймачі більша за частоту коливань джерела.

3. *Джерело наближається до приймача, який перебуває в спокої*, тобто $V_{дж} > 0$, $V_{пр} = 0$.

Довжина хвилі в напрямку руху скоротиться і дорівнюватиме

$$V_{дж} T (v - V_{дж}) T,$$

тоді

$$\frac{v}{(v - V_{дж}) T} = \frac{v}{v - V_{дж}} \cdot 0.$$

Частота коливань, що сприймаються приймачем, збільшується.

У випадках 2 і 3, якщо $V_{дж} > 0$, $V_{пр} < 0$, знак буде зворотним.

4. Джерело і приймач рухаються один відносно одного.

У цьому випадку частота коливань, сприйнята приймачем, дорівнює

$$\frac{v - V_{пр}}{v \mp V_{дж}} \cdot 0.$$

Верхній знак береться, якщо джерело та приймач зближуються, а нижній знак — якщо вони віддаляються.

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Які властивості має модель пружного середовища?
2. Як відбувається поширення коливань у пружному середовищі? Що таке хвильовий рух? Хвиля?
3. Яка хвиля називається поперечною? Поздовжньою? За яких умов вони виникають?
4. Що таке хвильовий фронт і хвильова поверхня? Чим вони відрізняються?
5. Що таке довжина хвилі? Як пов'язані довжина хвилі, швидкість і частота?
6. Яка хвиля називається біжучою? Гармонічною? Плоскою? Сферичною? Які їх рівняння?
7. Що таке хвильове число?
8. Що таке фазова і групова швидкості хвилі? Чим вони відрізняються?
9. Як пов'язані фазова і групова швидкості?
10. Запишіть рівняння плоскої хвилі, яка поширюється в довільному напрямку.
11. Який вигляд має хвильове рівняння для плоскої пружної хвилі?
12. Який розв'язок хвильового рівняння?
13. Чому дорівнює кінетична і потенціальна енергія пружної деформації при поширенні хвилі?
14. Чому дорівнює густина енергії пружної хвилі?

15. Що таке потік енергії і густина потоку енергії?
16. Що таке вектор Умова і який його фізичний смисл?
17. Чому дорівнює інтенсивність хвилі?
18. Які властивості лінійного і нелінійного середовищ?
19. Сформулюйте принцип суперпозиції для хвиль.
20. Що таке хвильовий пакет?
21. Чим характерна квазісинусоїдальна плоска хвиля?
22. За яких умов виникає інтерференція хвиль?
23. Які хвилі називаються когерентними?
24. Що таке стояча хвиля і чим вона відрізняється від біжучої?
25. Чому дорівнює відстань між двома сусідніми вузлами? Двома сусідніми пучностями? Вузлом і сусідньою пучністю?
26. Чому дорівнює потік енергії крізь будь-яку площину для стоячої хвилі? Поясніть.
27. Як визначити власні частоти струни?
28. Що таке звукові хвилі? Який характер мають звукові хвилі в повітрі, вони поздовжні чи поперечні? Чому?
29. Чи може звук поширюватись у вакуумі?
30. Від чого залежать гучність, висота і тембр звука?
31. Що таке ефект Доплера?
32. Якою буде частота коливань, що сприймається приймачем при різних варіантах руху джерела звуку та приймача?

Завдання для експрес-контролю

1. Біжуча хвиля має вигляд $y = \cos(Ax - Bt)$, де A, B — додатні сталі. Чому дорівнює швидкість хвилі?
2. Хвилі поширюються зі швидкістю $v = 600$ м/с при частоті 300 Гц. Чому дорівнює різниця фаз у двох точках, що розташовані на відстані $l = 0,4$ м одна від одної?
3. Визначити довжину хвилі, якщо дві точки середовища, які лежать на одній прямій на відстані 0,2 м одна від одної, коливаються з різницею фаз $\pi/4$?
4. Спостерігач установив, що вода коливається з періодом 2 с, а відстань між двома гребенями хвиль 6 м. Визначити швидкість поширення цих хвиль.
5. Визначити можливі власні частоти поздовжніх коливань тонкого стрижня довжиною l , закріпленого з обох кінців. Розв'яжіть задачу, якщо закріплений один кінець стрижня.
6. Який буде результат, коли дві хвилі, що поширюються назустріч одна одній, відрізняються тільки амплітудами?

7. Нарисуйте графіки залежності зміщення, швидкості та деформації для моментів часу $t = 0$ і $t = T/4$ для стоячої хвилі.
8. У середовищі з густиною поширюється вздовж осі x зі швидкістю v плоска звукова хвиля. Рівняння хвилі $u = u_0 \sin(\omega t - kx)$. Знайти зміну тиску в середовищі як функцію координати x і часу t .

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Уздовж пружної мотузки поширюється поперечна хвиля зі швидкістю 5 м/с. Амплітуда коливань мотузки 10 см, а період коливань $T = 2$ с. Запишіть рівняння пружної хвилі і визначте: 1) довжину хвилі; 2) фазу коливань, зміщення, швидкість і прискорення точки, на відстані $x_1 = 4$ м від джерела коливань у момент часу $t = 3$ с.

Розв'язання

Рівняння біжучої хвилі має вигляд

$$u(x, t) = u_0 \cos \left(2\pi \left(t - \frac{x}{v} \right) \right),$$

де $\frac{2}{T}$ — частота коливань, vT — довжина хвилі.

Тоді

$$u(x, t) = u_0 \cos \frac{2}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Якщо підставити числові значення, отримаємо

$$u(x, t) = 0,1 \cos \left(\pi \left(t - 0,2 x \right) \right) \text{ м}; \quad v = 5 \text{ м}; \quad T = 2 \text{ с}; \quad u_0 = 0,1 \text{ м}.$$

В момент часу

$$\text{фаза коливань } \varphi_1 = \frac{2}{T} \left(t - \frac{x_1}{v} \right); \quad \varphi_1 = \pi \left(2,2 - 0,8 \right) = 1,4 \text{ рад};$$

$$\text{зміщення } u_1 = u_0 \cos \varphi_1; \quad u_1 = 0,1 \cos 1,4 = 0,081 \text{ м} = 8,1 \text{ см};$$

$$\text{швидкість } \dot{u} = \frac{du}{dt} = u_0 \frac{2}{T} \sin \frac{2}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right);$$

$$\dot{u}_1 = u_0 \frac{2}{T} \sin \varphi_1; \quad \dot{u}_1 = 0,1 \frac{2}{2} \sin 1,4 = 0,185 \text{ м/с} = 18,5 \text{ см/с};$$

$$\text{прискорення } \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} = u_0 \frac{2}{T} \cos \frac{2}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right);$$

$$\ddot{u}_1 = u_0 \frac{2}{T} \cos \pi t;$$

$$\ddot{u}_1 = 0,1 \frac{2 \cdot 3,14^2}{2} \cos 2,2 \pi t = 0,798 \text{ м/с}^2 = -79,8 \text{ см/с}^2.$$

Задача 2

Визначте групову швидкість для хвилі з частотою $\nu = 400 \text{ Гц}$, якщо фазова швидкість має вигляд $v = \frac{a}{\sqrt{b}}$, де $a = 12 \text{ м с}^{3/2}$; $b = 225 \text{ Гц}$.

Розв'язання

Групова швидкість дорівнює

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\nu}{dk};$$

$$\nu = \frac{2}{\lambda}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{тоді } v_{\text{гр}} = 2 \frac{d\nu}{dk} = \frac{d\nu}{d\frac{1}{\lambda}}.$$

Довжина хвилі $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{a}{\sqrt{b}\nu};$

$$\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{a}{\sqrt{b}\nu} = \frac{1,5}{a\sqrt{b}} \nu^{-1},$$

звідки групова швидкість хвилі набуває вигляду

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\nu}{d\frac{1}{\lambda}} = \frac{(a\sqrt{b})d\nu}{(1,5\sqrt{b})d\nu} = \frac{a\sqrt{b}}{1,5\sqrt{b}},$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{a\sqrt{b}}{1,5\sqrt{b}}; \quad v_{\text{гр}} = 0,36 \text{ м/с}.$$

Задача 3

Один кінець пружного стрижня з'єднаний з джерелом гармонічних коливань, які відбуваються за законом $u = u_0 \cos \omega t$, а інший його кінець жорстко закріплений. Враховуючи, що відбиття в місці закріплення стрижня відбувається від середовища з більшою густиною, визначте характер коливань у будь-якій точці стрижня.

Розв'язання

Рівняння хвилі, що йде в прямому напрямку,

$$u_1 = u_0 \cos \left(\omega t - \frac{x}{v} \right);$$

Зважаючи на те, що відбиття відбувається від середовища з більшою густиною, у відбитій хвилі буде втрачено половину довжини хвилі (тобто фаза хвилі зміниться на π).

Тоді відбита хвиля має вигляд

$$u_2 = u_0 \cos \left(t - \frac{x}{v} + \pi \right) = -u_0 \cos \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

У результаті суперпозиції хвиль отримаємо

$$u(x, t) = u_1 + u_2 = u_0 \cos \left(t - \frac{x}{v} \right) - u_0 \cos \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$= 2u_0 \sin \left(\frac{x}{v} \right) \sin t.$$

$$(1)$$

Візьмемо до уваги, що

$$\frac{2}{T}; \quad vT, \quad \frac{x}{v} = \frac{2}{T} T - x = kx.$$

Рівняння (1) — рівняння стоячої хвилі

$$u(x, t) = 2u_0 \sin \frac{2}{T} x \sin t = 2u_0 \sin kx \sin t,$$

де $2u_0 \sin \frac{2}{T} x$ — амплітуда стоячої хвилі.

При $\frac{2}{T} x = m$; $x = m \frac{T}{2}$; $m = 0, 1, 2, \dots$ — координати вузлів;

при $\frac{2}{T} x = m + \frac{1}{2}$; $x = (m + \frac{1}{2}) \frac{T}{2}$; $m = 0, 1, 2, \dots$ — координати пучностей.

Задачі для самостійного розв'язання

11.1. Джерело незагасаючих гармонічних коливань рухається за законом $u = 5 \sin 3140t$. Визначити зміщення від положення рівноваги, швидкість і прискорення точки через 1 с, якщо вона розташована на відстані 340 м від джерела, а швидкість поширення хвиль $v = 340$ м/с.

Відповідь: $u = 0$; $\dot{u} = 1,57 \cdot 10^4$ м/с; $\ddot{u} = 0$.

11.2. На відстані $l = 4$ м від джерела плоскої хвилі з частотою 440 Гц перпендикулярно її швидкості поширення розташована

стіна. Визначити відстані від джерела хвиль до точок, в яких будуть перші три вузли і три пучності стоячої хвилі, що виникла в результаті додавання біжучої та відбитої від стіни хвиль. Швидкість хвилі 440 м/с.

Відповідь: вузли: $x_0 = 4$ м, $x_1 = 3,61$ м, $x_2 = 3,23$ м;

пучності: $x_0 = 3,81$ м, $x_1 = 3,42$ м, $x_2 = 3,04$ м.

11.3. Хвиля з періодом $T = 1,2$ с і амплітудою коливань $u_0 = 2$ см поширюється зі швидкістю $v = 15$ м/с. Чому дорівнює зміщення $u(x, t)$ точки, що знаходиться на відстані $x = 45$ м від джерела хвиль у той момент, коли від початку коливань джерела пройшло $t = 4$ с?

Відповідь: $u = 1,73$ см.

11.4. Хвиля поширюється в пружному середовищі з швидкістю $v = 100$ м/с. Найменша відстань x між точками середовища, фази коливань яких протилежні, дорівнює 1 м. Визначити частоту коливань.

Відповідь: 50 Гц.

11.5. Звукові коливання з частотою 0,5 кГц і амплітудою $u_0 = 0,25$ мм поширюються в пружному середовищі. Довжина хвилі 70 см. Знайти: 1) швидкість поширення хвиль; 2) максимальну швидкість \dot{u}_{\max} частинок середовища.

Відповідь: 1) $v = 350$ м/с; 2) $\dot{u}_{\max} = 0,79$ м/с.

11.6. Один кінець пружного стрижня з'єднаний з джерелом гармонічних коливань. Другий кінець жорстко закріплений. Враховуючи, що відбиття в місці закріплення стрижня відбувається від середовища з меншою густиною, визначте характер коливань у будь-якій точці стрижня.

Відповідь: при $x = m \frac{L}{2}$ — пучності, при $x = m \frac{1}{2} \frac{L}{2}$ — вузли ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$).

11.7. Доведіть, що формулу $v = \sqrt{\frac{RT}{M}}$, яка описує швидкість звуку в газі, можна подати у вигляді $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, де $\frac{C_p}{C_v}$; p — тиск газу; ρ — його густина.

12

Електромагнітні хвилі

12.1. Рівняння Максвелла й електромагнітні хвилі

У попередньому розділі ми розглянули механізм появи і поширення механічних хвиль. Зауважимо, що для їх поширення необхідне існування пружного середовища.

На відміну від механічних хвиль, *для існування електромагнітних хвиль середовище не потрібне.*

Розглянемо, яким чином існування електромагнітних хвиль впливає з рівнянь Максвелла (*див.* розд. 9).

Для області електромагнітного поля, вільної від електричних зарядів і струмів провідності, ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\vec{B}}{t}; & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\vec{D}}{t}; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Для однорідного ізотропного діелектрика

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (12.2)$$

де ϵ_0 — діелектрична проникність; μ_0 — магнітна проникність середовища; ϵ_0 і μ_0 — сталі скалярні величини, не залежать ні від координат, ні від часу.

Тоді рівняння Максвелла (12.1) набувають вигляду

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}; \quad \text{або} \quad [\vec{E}] = -\frac{\vec{H}}{t}; \quad (12.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\vec{E}}{t}; \quad [\vec{H}] = \frac{\vec{E}}{t}; \quad (12.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0; \quad \vec{E} = 0; \quad (12.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad \vec{H} = 0. \quad (12.6)$$

Нагадаємо, що

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= [\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ \vec{i} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & \quad \vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}; \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \vec{E} \cdot \nabla = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Візьмемо ротор від обох частин рівняння (12.3)

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \vec{E}] = 0 - \frac{\vec{H}}{t} \quad (12.7)$$

і змінимо послідовність диференціювання за координатами і за часом в правій частині рівняння (12.7)

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{H}}{t} = -\operatorname{rot} [\vec{H}],$$

тоді

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \vec{E}] = 0 - \operatorname{rot} [\vec{H}]. \quad (12.8)$$

З урахуванням (12.4) з (12.8) отримаємо

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \vec{E}] = 0 - 0 - \frac{\partial^2 \vec{E}}{t^2}. \quad (12.9)$$

Зауважимо, що

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \vec{E}] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}, \quad (12.10)$$

або

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}.$$

**Хвильове
рівняння**

У силу (12.5) з (12.10) залишається тільки $\Delta \vec{E}$, таким чином рівняння (12.9) перетворюється на рівняння

$$\Delta \vec{E} = 0 - 0 - \frac{\partial^2 \vec{E}}{t^2} = 0. \quad (12.11)$$

Якщо розкрити оператор Лапласа $\vec{\nabla}^2$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0 \quad 0 \quad 0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Після аналогічних операцій з рівнянням (12.4) матимемо

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} = 0 \quad 0 \quad 0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (12.12)$$

або

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = 0 \quad 0 \quad 0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Порівняння (12.11) та (12.12) з (11.20) дають можливість зробити висновок, що ці рівняння є хвильовими диференціальними рівняннями, розв'язком яких є рівняння хвилі.

**Швидкість
електромагнітних
хвиль**

Таким чином, *змінне електромагнітне поле дійсно поширюється в просторі у вигляді хвиль, фазова швидкість яких*

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (12.13)$$

де $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Розрахунок дає значення $c = 2,997 \cdot 10^8$ м/с, що збігається зі швидкістю світла в вакуумі. Це дозволило Максвеллу, ще задовго до експериментального підтвердження існування електромагнітних хвиль, висловити думку про те, що світло — це електромагнітні хвилі. (Експериментально вперше довів існування електромагнітних хвиль Генріх Герц у 1888 р., через 9 років після смерті Максвелла.)

Тепер рівняння (12.11) і (12.12) можна записати у вигляді системи диференціальних хвильових рівнянь електромагнітного поля

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (12.14)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (12.15)$$

12.2. Плоска електромагнітна хвиля

Розглянемо випадок, коли в непровідному середовищі ($\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) поширюється плоска електромагнітна хвиля вздовж осі x .

Тоді рівняння Максвелла (12.3) — (12.6) в координатах набувають вигляду

$$0 \quad 0 \quad \frac{H_x}{t}; \quad \frac{E_z}{x} \quad 0 \quad \frac{H_y}{t}; \quad \frac{E_y}{x} \quad 0 \quad \frac{H_z}{t}; \quad (12.16)$$

$$0 \quad 0 \quad \frac{E_x}{t}; \quad \frac{H_z}{x} \quad 0 \quad \frac{E_y}{t}; \quad \frac{H_y}{x} \quad 0 \quad \frac{E_z}{t}; \quad (12.17)$$

$$\frac{E_x}{x} \quad 0; \quad (12.18)$$

$$\frac{H_x}{x} \quad 0. \quad (12.19)$$

З рівняння (12.18) і першого рівняння (12.17) очевидно, що E_x не може залежати ні від x , ні від t . Аналогічний висновок можна зробити для вектора H_x (рівняння (12.19) і перше рівняння (12.16)). Це означає, що E_x і H_x описують сталі поля, які не залежать від часу. Обмежимося окремим випадком, коли $E_x = 0$ і $H_x = 0$.

Можна показати, що для опису плоскої електромагнітної хвилі достатньо взяти з (12.16) і (12.17) рівняння

$$\frac{E_y}{x} \quad 0 \quad \frac{H_z}{t}; \quad (12.20)$$

$$\frac{H_z}{x} \quad 0 \quad \frac{E_y}{t}, \quad (12.21)$$

при цьому ми вважаємо, що $E_z = 0$ і $H_y = 0$. Далі для простоти індекси y і z у компонентах E_y і H_z ми випускаємо, але пам'ятаємо, що вектори \vec{E} і \vec{H} напрямлені вздовж взаємно перпендикулярних осей y і z (рис. 12.1), тобто електромагнітна хвиля поперечна.

Візьмемо похідну від рівняння (12.20)

по x

$$\frac{\partial^2 E}{x^2} \quad 0 \quad \frac{\partial H}{x \partial t}. \quad (12.22)$$

У правій частині змінимо порядок диференціювання і підставимо (12.21)

$$\frac{\partial^2 E}{x^2} \quad 0 \quad \frac{\partial H}{x \partial t}; \quad \frac{\partial^2 E}{x^2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\partial^2 E}{t^2}.$$

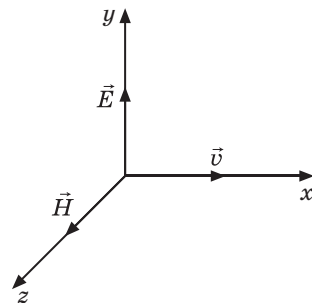


Рис. 12.1

З урахуванням того, що $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (12.23)$$

Аналогічне рівняння можна отримати з (12.21) для H

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (12.24)$$

Рівняння (12.23) та (12.24) — диференціальні хвильові рівняння для векторів \vec{E} і \vec{H} плоскої хвилі, що поширюється у напрямку осі x .

Найпростішими розв'язками рівнянь (12.23) і (12.24) є

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \phi_1); \quad (12.25)$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx + \phi_2), \quad (12.26)$$

де ω — частота хвилі; $k = \omega/v$ — хвильове число; ϕ_1 і ϕ_2 — початкові фази коливань при $x = 0$.

**Властивості
електромагнітних
хвиль**

Підставимо отримані функції (12.25) та (12.26) у рівняння (12.20) та (12.21)

$$kE_0 \sin(\omega t - kx + \phi_1) = \omega H_0 \sin(\omega t - kx + \phi_2);$$

$$kH_0 \sin(\omega t - kx + \phi_2) = \omega E_0 \sin(\omega t - kx + \phi_1).$$

Для того щоб рівняння задовольнялись, необхідна рівність початкових фаз $\phi_1 = \phi_2$. Також мають виконуватися співвідношення

$$kE_0 = \omega H_0; \quad \omega E_0 = kH_0.$$

Перемножимо ці рівності й отримаємо

$$\omega^2 E_0^2 = k^2 H_0^2. \quad (12.27)$$

Тобто коливання електричного і магнітного векторів в електромагнітній хвилі відбуваються з однаковою фазою.

Амплітуди цих векторів пов'язані співвідношенням

$$E_0 \sqrt{\epsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu_0}. \quad (12.28)$$

Для хвилі, що поширюється у вакуумі ($\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$)

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10^9} = \sqrt{(4)^2 \cdot 900} = 377 \text{ Ом.}$$

Ця величина має назву *імпедансу вільного простору*, або *хвильового опору вакууму*.

Якщо згадати, що для вакууму $B_0 = \mu_0 H_0$, то з (12.28) випливає

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (12.29)$$

відношення величини електричного поля до величини магнітного поля в електромагнітній хвилі дорівнює швидкості світла.

На рис. 12.2 показано вигляд плоскої електромагнітної хвилі. Вектори \vec{E} і \vec{H} створюють з напрямком поширення хвилі (напрямком її швидкості) правою систему.

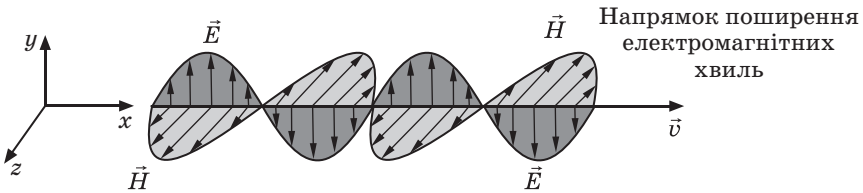


Рис. 12.2

12.3. Енергія електромагнітних хвиль.

Вектор Умова — Пойнтінга

Густина енергії електромагнітного поля

Електромагнітні хвилі несуть з собою у просторі енергію, яка міститься в електричному і магнітному полях. При поширенні електромагнітної хвилі у вакуумі ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) *об'ємна густина енергії електричного поля дорівнює*

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

а магнітного

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2.$$

Повна густина енергії електромагнітного поля

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (12.30)$$

Енергія електромагнітного поля дорівнює $W = \int w dV$.

E і H змінюються з однаковою фазою, тому співвідношення (12.28) для амплітудних значень буде таким самим і для миттєвих значень E і H :

$$E\sqrt{\epsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}.$$

Це означає, що густина енергії електричного і магнітного полів у кожний момент часу однакова

$$w_e = w_m,$$

тоді (12.30) можна записати у вигляді

$$w = \epsilon_0 E^2,$$

а з урахуванням, що $E = H\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, об'ємна густина енергії електромагнітного поля така:

$$w = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} EH = \frac{1}{c} EH. \quad (12.31)$$

Тоді модуль густини потоку енергії електромагнітного випромінювання (енергія, що переноситься хвилею крізь одиничну площу за одиницю часу)

$$w = v, \text{ або } w = c EH. \quad (12.32)$$

**Вектор Умова —
Пойнтінга**

Напрямок вектора \vec{S} збігається з напрямком швидкості \vec{v} , яка перпендикулярна \vec{E} і \vec{H} , тому для вектора Умова — Пойнтінга \vec{S} можна записати

$$\vec{S} = c[\vec{E}, \vec{H}]. \quad (12.32)$$

Формула (12.32) дає миттєве значення густини потоку енергії електромагнітної хвилі.

Щоб знайти її середнє значення, візьмемо до уваги, що при зміні E і B за синусоїдальним законом їх середньоквадратичні значення дорівнюють

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2; \quad \langle H^2 \rangle = \frac{1}{2} H_0^2.$$

Тоді середнє значення вектора Умова — Пойнтінга дорівнює

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0,$$

тобто інтенсивність електромагнітної хвилі

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0. \quad (12.33)$$

12.4. Тиск і імпульс електромагнітних хвиль

Якщо на шляху електромагнітної хвилі з'явиться будь-яка перешкода, хвиля передасть цій перешкоді деякий імпульс, тобто тиснутиме на неї.

Нехай плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню зі слабкою провідністю (рис. 12.3). Під дією електричної складової поля електрони починають рухатись у бік, протилежний напрямку електричного поля \vec{E} зі швидкістю \vec{v}_e . Тоді з боку магнітного поля на електрон діятиме сила Лоренца $\vec{F}_L = e[\vec{v}_e, \vec{B}]$, напрямлена всередину зразка перпендикулярно його поверхні. Ця сила, яка діє на одиницю поверхні, і визначатиме тиск електромагнітної хвилі.

Максвелл показав (1873), що тиск на поверхню дорівнює

$$p = \langle w \rangle (1 - R) \cos^2 \theta,$$

де $\langle w \rangle$ — середнє значення об'ємної густини енергії електромагнітного поля хвилі; R — коефіцієнт відбиття; θ — кут падіння хвилі на поверхню.

Існування тиску світлових хвиль було експериментально доведено П. М. Лебедевим. Ці дослідження були дуже важливі для підтвердження висновків теорії Максвелла про електромагнітну природу світла.

Природно, що електромагнітне поле має також імпульс, який дорівнює

$$G = \frac{W}{c},$$

де W — енергія електромагнітного поля.

Густина електромагнітного імпульсу

$$g = \frac{dG}{dV} = \frac{1}{c} w,$$

де w — густина енергії, що пов'язана з вектором Пойнтінга

$$w = c \cdot g, \text{ звідки } w = \frac{1}{c} w.$$

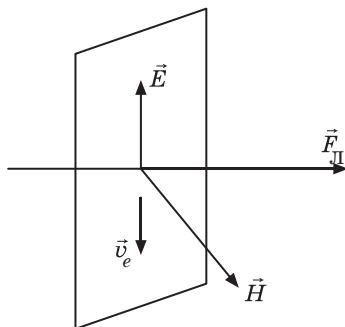


Рис. 12.3

Напрямки вектора імпульсу і вектора Пойнтінга однакові, тоді *вектор густини електромагнітного імпульсу* дорівнює

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}.$$

12.5. Випромінювання диполя

Для того щоб поширювались електромагнітні хвилі, необхідно створити змінне електричне або магнітне поле.

Відомо, що коли заряд рухається прямолінійно і рівномірно, він створює постійне магнітне поле. Отже, для випромінювання заряд має рухатися з прискоренням.

У випромінювальних радіотехнічних пристроях, наприклад в антенах, електрони коливаються відносно іонів речовини. Елементарною коливальною системою (елементарним осцилятором) є система з електрона і позитивного заряду, що дорівнює заряду електрона і вважається нерухомим. Випромінювання всієї антени складається з випромінювання таких осциляторів.

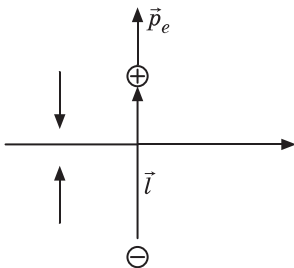


Рис. 12.4

Розглянемо випромінювання осцилятора (рис. 12.4), яким є диполь, дипольний момент якого змінюється за гармонічним законом (диполь Герца)

$$\vec{p}_e = q\vec{l} = \vec{p}_{oe} \sin t, \quad (12.34)$$

де \vec{p}_{oe} — амплітудне значення \vec{p}_e . Тоді і електричне, і магнітне поля, що створюються цим диполем, теж змінюватимуться з тією ж частотою і рухаючись зі швидкістю світла, відриватимуться від диполя.

Розглянемо випромінювання диполя в *хвильовій зоні диполя*, тобто на відстанях r (— довжина хвилі, що випромінює диполь). Це пов'язано з наявністю у хвильовій зоні тільки хвиль, що відірвались від диполя і вільно поширюються, в той час як поля, пов'язані з диполем, мають складну структуру і зосереджені в області r .

Діаграма напрямленості випромінювання диполя

Диполь випромінює не однаково в різних напрямках. *Інтенсивність випромінювання диполя в хвильовій зоні*

$$I(\theta) \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta,$$

де θ — кут між віссю диполя і напрямком випромінювання (рис. 12.5).

Така діаграма має назву *полярної діаграми напруженості випромінювання диполя*.

При напрямках 0 або 180 диполь не випромінює, а при 90 або 270 інтенсивність випромінювання максимальна.

Відповідний розрахунок показує, що *потужність випромінювання диполя* P пропорційна другій похідній дипольного моменту за часом

$$P \sim \ddot{p}_e^2 \sim p_{oe}^2 \omega^4 \sin^2 t. \quad (12.35)$$

Середнє значення потужності випромінювання за часом

$$\langle P \rangle \sim p_e^2 \omega^4.$$

Таким чином, *середня потужність випромінювання диполя пропорційна частоті в четвертому степені*.

Із (12.34) маємо

$$\ddot{\vec{p}} = q\vec{l} = q\vec{a},$$

де \vec{a} — прискорення заряду, що коливається.

Тоді з (12.35) випливає

$$P \sim q^2 \vec{a}^2. \quad (12.36)$$

З цієї формули можна зробити висновок, що *будь-який заряд, що рухається з прискоренням, збуджує електромагнітні хвилі*. А якщо електрон рухається рівномірно, він не повинен випромінювати електромагнітні хвилі.

Але це справедливо лише у випадку, коли швидкість електрона v_e не перевищує швидкості світла $v_{св} = c/\sqrt{\epsilon}$ у середовищі, де рухається електрон. У випадку, коли $v_e > v_{св}$, спостерігається випромінювання, навіть при постійній швидкості електрона. Це випромінювання вперше спостерігалось у 1934 р. С. І. Вавиловим і П. А. Черенковим.

12.6. Шкала електромагнітних хвиль

Електромагнітне випромінювання або електромагнітні хвилі генеруються і реєструються в широкому діапазоні частот. Окремі ділянки спектра мають свої назви, що наведені в табл. 12.1, яка дає уявлення про шкалу електромагнітних хвиль.

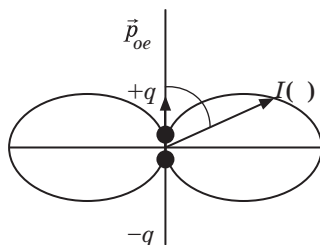


Рис. 12.5

Таблиця 12.1

Назва діапазону	Довжина хвилі , м	Частота , Гц	Джерела. Основні методи збудження
Низькочастотні хвилі (інфра-низькі, низькі, проміслові, звукові частоти)	$3 \cdot 10^5$ і більше	Менш 10^3	Змінні струми, генератори
Радіохвилі: наддовгі, довгі, середні, короткі (низькі, середні і високі частоти)	10^5 1	$3 \cdot 10^3$ 3 10^8	Генератори радіочастот
Радіохвилі ультракороткі: дециметрові, сантиметрові, міліметрові, субміліметрові (ультрависокотні і надвисокотні частоти)	1 10^4	$3 \cdot 10^8$ 10^{12}	Генератори надвисокотних частот
Інфрачервоні промені (теплові)	10^4 7,6 10^7	10^{12} 4 10^{14}	Теплове випромінювання тіл
Світлові промені (видимі)	7,6 10^7 4 10^7	4 10^{14} 7,5 10^{14}	Випромінювання атомів та молекул при нагріванні тіл і при електричних розрядах
Ультрафіолетові промені	4 10^7 10^8	7,5 10^{14} 3 10^{16}	Випромінювання тіл при високих температурах та атомів при дії на них швидких електронів
Рентгенівські промені	10^8 10^{12}	3 10^{16} 3 10^{20}	Випромінювання електронів при гальмуванні на аноді. Випромінювання атомів при збудженні електронів на внутрішніх оболонках (гальмівне і характеристичне рентгенівське випромінювання)
Гамма-промені	10^{12} 10^{14}	3 10^{19} 3 10^{22}	Ядерні процеси, радіоактивний розпад
Космічні промені	10^{13} і менше	10^{21} і більше	Космічні процеси

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Що таке електромагнітна хвиля? Яка швидкість її поширення?
2. Які можуть бути джерела електромагнітних хвиль?
3. Які діапазони має шкала електромагнітних хвиль і які джерела випромінювання різних видів хвиль?
4. Запишіть рівняння електромагнітних хвиль.
5. Запишіть хвильові рівняння для \vec{E} і \vec{H} електромагнітних хвиль.
6. Які властивості електромагнітних хвиль?
7. Як визначити об'ємну густину енергії в електромагнітній хвилі?
8. Чому дорівнює і який фізичний смисл вектора Умова — Пойнтінга?
9. Нарисуйте діаграму напрямленості випромінювання диполя.
10. Чому дорівнює тиск електромагнітних хвиль?

Завдання для експрес-контролю

1. Електромагнітна хвиля з частотою 3 МГц переходить з вакууму в немагнітне середовище з діелектричною проникністю 4. Визначити зміну довжини хвилі.
2. Обчислити модуль вектора Умова — Пойнтінга, якщо амплітуда напруженості електромагнітної хвилі в даній точці у вакуумі $E_0 = 10$ мкВ/м.
3. Яка енергія переноситься плоскою гармонічною електромагнітною хвилею з амплітудою напруженості електричного поля 50 мкВ/м за час $t = 10$ хв крізь поверхню площею $S = 1$ м², перпендикулярну до напрямку поширення хвилі?
4. Як тисне плоска електромагнітна хвиля на перешкоду з коефіцієнтом відбиття 0,9 при куті падіння 60° , якщо ефективна напруженість магнітної складової хвилі $H = 0,3$ мА/м?
5. Електрон і протон влітають в однорідне поперечне магнітне поле з індукцією \vec{B} . Їхні початкові швидкості однакові і дорівнюють \vec{v}_0 . Яка частинка випромінює електромагнітну енергію інтенсивніше? Чому?
6. Чим відрізняється електромагнітне випромінювання осцилятора Герца і заряду, який рухається з довільним періодично змінним прискоренням?

Приклади розв'язання задач

Задача 1

У середовищі з діелектричною проникністю $\epsilon_0 = 100$ і магнітною $\mu_0 = 1$ поширюється електромагнітна хвиля з частотою $\omega = 3$ ГГц. Знайти вектор Умова — Пойнтінга і його середнє значення за період у тій точці, де електричний вектор змінюється за законом $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{k}$. Амплітуда вектора \vec{H} має вигляд $H_0 \vec{i}$. Амплітуда електричного поля $E_0 = 20$ В/м.

Розв'язання

Оскільки коливання електричного і магнітного векторів в електромагнітній хвилі відбуваються з однаковою фазою, то рівняння плоскої хвилі для вектора \vec{H} має вигляд

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - kz) \vec{i}. \quad (1)$$

У фіксованій точці простору вектори \vec{E} і \vec{H} змінюються за гармонічним законом і утворюють з напрямком поширення хвильову правогвинтову систему. У нашому випадку вектор \vec{E} коливається вздовж осі z , а вектор \vec{H} — уздовж осі x . Хвиля поширюється вздовж осі y . Отже, і вектор Умова — Пойнтінга теж спрямований уздовж осі y .

Амплітуди електричного і магнітного векторів пов'язані співвідношенням

$$E_0 \sqrt{\epsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu_0}, \quad (2)$$

де ϵ_0 і μ_0 — електрична і магнітна сталі відповідно.

З виразу (2) випливає

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0. \quad (3)$$

Оскільки $\mu_0 = 1$, а $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 377$ Ом, то вираз (3) набуває вигляду

$$H_0 = E_0 \sqrt{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Підставимо вирази для векторів \vec{E} і \vec{H} у формулу, яка визначає вектор Умова — Пойнтінга ($\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$). З урахуванням співвідношення (4) маємо

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = [E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{k}, H_0 \cos(\omega t - kz) \vec{i}] = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kz) [\vec{k}, \vec{i}] = \frac{E_0^2 \sqrt{\epsilon_0} \cos^2(\omega t - kz) [\vec{k}, \vec{i}]}{1}. \quad (5)$$

Оскільки $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$, то вираз (5) набуде вигляду

$$= \sqrt{E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)} \vec{j}.$$

Беручи до уваги, що $k = 2\pi/\lambda$, і підставивши числові значення (6), маємо

$$= 10,6 \cos^2(18,84 \cdot 10^9 t - kz) \vec{j}.$$

Знайдемо середнє значення модуля вектора Умова — Пойнтінга за період. Оскільки середнє значення функції $\cos^2(\omega t - kz)$ за період дорівнює 0,5, то

$$\langle |S| \rangle = 5,3 \text{ Вт/м}^2.$$

Задача 2

Розрахувати енергію, яку перенесе за час $t = 1,0$ хв плоска синусоїдальна електромагнітна хвиля, що поширюється у вакуумі, через площу $S = 10 \text{ см}^2$, розташовану перпендикулярно напрямку поширення хвилі. Амплітуда напруженості електричної хвилі $E_0 = 1,0$ мВ/м. Період хвилі $T = 10^{-8}$ с.

Розв'язання

Енергія, яку перенесе електромагнітна хвиля за одиницю часу крізь одиницю поверхні, перпендикулярної напрямку поширення хвилі, визначається вектором Умова — Пойнтінга \vec{S} . Беручи до уваги, що $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$, а в електромагнітній хвилі $\vec{E} \perp \vec{H}$, отримуємо для модуля вектора

$$S = E H. \quad (1)$$

Величини \vec{E} та \vec{H} змінюються за законом синуса і мають однакову фазу, тоді з (1)

$$E_0 \sin(\omega t - kz) = H_0 \sin(\omega t - kz), \quad (2)$$

тобто залежить від часу і (2) дає миттєве значення S . Тоді величину вектора \vec{S} можна зв'язати з величиною вектора густини потоку енергії

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{S} S.$$

Звідси енергія, яка переноситься хвилею через площу S за час dt , з урахуванням (2) дорівнює

$$dW = S dt = E_0 H_0 S \sin^2(\omega t - kz) dt. \quad (3)$$

Згідно з теорією електромагнітних хвиль, густини енергії електричного і магнітного полів у будь-який момент часу однакові

$$\frac{0 E^2}{2} = \frac{0 H^2}{2}. \quad (4)$$

Якщо $\epsilon_0 = \mu_0$, то з (4) отримаємо

$$H = E \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}.$$

Аналогічно пов'язані між собою амплітудні значення E_0 і H_0 . Тоді рівняння (3) має вигляд

$$dW = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \sin^2 \omega t dt.$$

Повна енергія, яка переноситься хвилею за час t ,

$$W = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \frac{t}{2} \frac{\sin 2\omega t}{4}. \quad (5)$$

Частоту ω ми не знаємо, тому скористаємось умовою $\omega t = \frac{2\pi}{T} t$ для оцінки значення $\frac{\sin 2\omega t}{4}$. Беручи до уваги, що $\frac{2\pi}{T}$, маємо

$$\frac{\sin 2\omega t}{4} = \frac{1}{8} T \sin \frac{4\pi t}{T} = \frac{T}{8}.$$

Внаслідок умови $\omega t = \frac{2\pi}{T} t$ членом $\frac{\sin 2\omega t}{4}$ у формулі (5) можна знехтувати. Тоді отримаємо

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S t, \quad W = 8 \cdot 10^{11} \text{ Дж}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

12.1. Плоска електромагнітна хвиля $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ поширюється у вакуумі. Вважаючи, що вектори \vec{E}_m та \vec{k} ми знаємо, визначити вектор \vec{H} як функцію часу t в точці з радіусом-вектором $\vec{r} = 0$.

$$\text{Відповідь: } \vec{H} = \frac{1}{k} [\vec{k}, \vec{E}] \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(kct).$$

12.2. Визначити модуль напруженості електричного поля \vec{E} плоскої хвилі за допомогою модуля вектора Умова — Пойнтінга \vec{S} і діелектричної проникності середовища ϵ . Припустити $\mu = \mu_0$.

Відповідь: $E = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{\epsilon}}$.

12.3. Відповісти, чи збігаються вузли і пучності вектора \vec{H} з вузлами і пучностями вектора $\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ в плоскій стоячій електромагнітній хвилі.

12.4. Визначити значення вектора Умова — Пойнтінга для стоячої електромагнітної хвилі (див. задачу 12.3). Визначити його середнє значення.

Відповідь: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin 2kx \sin 2\omega t$; $\langle S \rangle = 0$.

12.5. Інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі, яка поширюється у вакуумі вздовж осі x , дорівнює $I = 1 \text{ Вт/м}^2$. Визначити амплітуду напруженості магнітного поля H_0 .

Відповідь: $H_0 = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}$.

12.6. Амплітуда напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі, яка поширюється у вакуумі вздовж осі x , дорівнює $H_0 = 0,1 \text{ А/м}$. Визначити інтенсивність хвилі I .

Відповідь: $I = 1,89 \text{ Вт/м}^2$.

12.7. Амплітуда напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється у немагнітному середовищі, діелектрична проникність якого $\epsilon = 81$, дорівнює $H_0 = 0,05 \text{ А/м}$. Визначити амплітуду напруженості електричного поля E_0 і швидкість поширення хвилі в середовищі.

Відповідь: $E_0 = 2,09 \text{ В/м}$; $v = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

12.8. Напруженість електричного поля електромагнітної хвилі $E = 50 \text{ мкВ/м}$. Обчислити імпульс електромагнітної хвилі.

Відповідь: $G = 7,4 \cdot 10^{-29} \text{ Дж}\cdot\text{с/м}^4$.

12.9. Кут між напрямком поширення плоскої електромагнітної хвилі і поверхнею, на яку в повітрі падає хвиля, дорівнює $\theta = 30^\circ$. Тиск, який спричиняє хвиля на поверхню, дорівнює $p = 60 \cdot 10^{-20} \text{ Н/м}^2$. Знайти коефіцієнт відбиття поверхні, якщо амплітуда напруженості електричного поля $E_0 = 0,4 \text{ мВ/м}$.

Відповідь: $R = 0,7$.

12.10. Кут падіння електромагнітної хвилі на перешкоду 60° . Коефіцієнт відбиття перешкоди $0,8$. Тиск, який спричиняє хвиля на перешкоду, $p = 9 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}^2$. Визначити амплітуду напруженості магнітного поля електромагнітної хвилі.

Відповідь: $H_0 = 0,4 \text{ мА/м}$.

12.11. Імпульс електромагнітної хвилі у повітрі $G = 1,6 \cdot 10^{-28} \text{ Дж}\cdot\text{с/м}^4$. Визначити амплітуди електричного і магнітного полів хвилі.

Відповідь: $E_0 = 104 \text{ мкВ/м}$; $H_0 = 27,6 \text{ мкА/м}$.

12.12. Амплітуда напруженості електричного поля плоскої електромагнітної хвилі, яка поширюється у вакуумі вздовж осі x , дорівнює $E_0 = 10 \text{ мВ/м}$. Визначити інтенсивність хвилі.

Відповідь: $I = 0,134 \text{ мкВт/м}^2$.

12.13. На поверхню, коефіцієнт відбиття якої $0,9$, падає під деяким кутом до поверхні плоска електромагнітна хвиля з амплітудою магнітного поля $H_0 = 0,2 \text{ мА/м}$. Знайти цей кут, якщо тиск, який спричиняє хвиля на поверхню, дорівнює $p = 3,8 \cdot 10^{-14} \text{ Н/м}^2$.

Відповідь: $63^\circ 40'$.

12.14. Інтенсивність електромагнітної хвилі, яка нормально падає на поглинаючу поверхню, дорівнює $I = 0,30 \text{ Вт/м}^2$. Визначити тиск та імпульс, що спричиняє хвиля на поверхню.

Відповідь: $p = 1 \text{ нН/м}^2$; $G = 3,33 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}\cdot\text{с/м}^4$.

12.15. Визначити тиск хвилі на перпендикулярну до напрямку її поширення металеву дзеркальну поверхню, якщо амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 0,3 \text{ мВ/м}$.

Відповідь: $p = 79,65 \cdot 10^{-20} \text{ Н/м}^2$.



I. Електростатика

1. Електричне поле в вакуумі

1. Які властивості має електростатичне поле:

- а) справляє силовий вплив на матеріальні тіла;
- б) справляє силовий вплив на заряджені частинки та тіла;
- в) обумовлене магнітним полем, що змінюється з часом;
- г) справляє силовий вплив на провідники зі струмом?

2. Закон збереження електричного заряду визначається формулою:

а) $\sum_{i=1}^n q_i = 0$; б) $\sum_{i=1}^n q_i = \text{const}$; в) $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n q_i = \text{const}$; г) $E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \vec{r}_i$

3. Який вираз є визначенням одиниці електричного заряду в системі СІ:

- а) $1 \text{ А} \cdot \text{с}$; б) 1 В/м ; в) $1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$; г) 1 Дж/Кл ?

4. Сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів, які перебувають у вакуумі, визначається співвідношенням:

а) $\vec{F} = q\vec{E}$; б) $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$; в) $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$; г) $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_0q_i}{r_{i0}^2} \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}}$

5. Як слід змінити відстань між точковими зарядами, щоб сила взаємодій між ними збільшилась у 3 рази:

- а) збільшити в 3 рази;
- б) збільшити в 9 разів;
- в) зменшити в 9 разів;
- г) зменшити в $\sqrt{3}$ рази?

6. Як зміниться сила взаємодії двох точкових зарядів при перенесенні їх із вакууму в гас ($\epsilon = 2,0$) і зменшенні вдвічі відстані між зарядами:

- а) збільшиться в 4 рази;
- б) зменшиться в 4 рази;

- в) збільшиться в 2 рази;
г) зменшиться в 2 рази?

7. Чим визначається чисельне значення напруженості в даній точці електричного поля:

- а) потенціальною енергією, яку має одиничний позитивний заряд, розташований в даній точці поля;
б) силою, що діє на одиничний позитивний заряд, розташований у даній точці поля;
в) силою, діючою на будь-який «пробний» заряд, розташований у даній точці поля;
г) роботою, що виконується при переміщенні одиничного позитивного заряду із даної точки поля у нескінченність?

8. Напруженість \vec{E} електричного поля визначається формулою:

- а) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$; б) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2}$; в) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i}$; г) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$.

9. Напруженість електричного поля вимірюється в одиницях:

- а) 1 Кл/м; б) 1 Кл/м²; в) 1 В/м; г) 1 Ф.

10. Напруженість електростатичного поля нерухомого точкового заряду визначається так:

- а) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$; б) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2}$; в) $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$; г) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

11. Принцип суперпозиції напруженості електростатичних полів визначається співвідношенням:

- а) $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$; б) $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i^2$; в) $E = \sum_i q_i$; г) $E = \sum_i \frac{1}{r_i}$.

12. Напруженість електростатичного поля системи точкових зарядів визначається виразом:

- а) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$; б) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2}$;
в) $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$; г) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

13. Яке співвідношення між напруженостями в точках А і С поля точкового заряду q (ОА = АС, рис. 1):

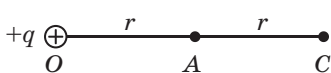


Рис. 1

- а) $E_A = E_C$; б) $E_A = 2E_C$;
в) $E_A = 4E_C$; г) $E_A = \frac{1}{4}E_C$?

14. Як визначається циркуляція вектора напруженості електричного поля вздовж замкненого контура L :

а) лінійним інтегралом виду $\oint_L E d\vec{l} \cos(\vec{E}, d\vec{l})$;

L

- б) силою, що діє на одиничний позитивний заряд, який рухається вздовж даного контуру;
 в) роботою, що здійснюється полем при переміщенні одиничного позитивного заряду вздовж даного контуру;
 г) роботою, що здійснюється полем при переміщенні довільного електричного заряду вздовж даного контуру?

15. Потенціальний характер електростатичного поля виражається рівністю:

а) $\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$; б) $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$; в) $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$; г) $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i$.

16. Чим визначається чисельне значення потенціалу в заданій точці електростатичного поля:

- а) потенціальною енергією одиничного позитивного заряду, розташованого в заданій точці поля;
 б) потенціальною енергією будь-якого «пробного» заряду, розташованого в заданій точці поля;
 в) роботою, що виконується при переміщенні одиничного позитивного заряду із заданої точки поля на нескінченність;
 г) силою, що діє на одиничний позитивний заряд, розташований у заданій точці поля?

17. Потенціал електричного поля визначається співвідношенням:

а) $\frac{W_n}{q}$; б) $\frac{A}{q}$; в) $\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$; г) Ed .

18. Який вираз визначає одиницю потенціалу в системі СІ:

а) $1 \text{ А} \cdot \text{с}$; б) 1 В/м ; в) $1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$; г) 1 Дж/Кл ?

19. Потенціал поля нерухомого точкового заряду дорівнює:

а) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$; б) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$;
 в) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \text{ const}$; г) $\frac{1}{6\pi\epsilon_0} (3a^2 - r^2)$.

20. Потенціальна енергія взаємодії двох нерухомих зарядів дорівнює:

а) $W_p = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}$; б) $W_p = \frac{1}{2} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{ij}}$;
 в) $W_p = \frac{3}{54} \frac{q^2}{\epsilon_0 a}$; г) $W_p = \frac{1}{24} \frac{q^2}{\epsilon_0 a}$.

21. Потенціальна енергія системи нерухомих зарядів дорівнює:

а) $W_p = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}$; б) $W_p = \frac{1}{2} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{ij}}$;
 в) $W_p = \frac{3}{54} \frac{q^2}{\epsilon_0 a}$; г) $W_p = \frac{1}{24} \frac{q^2}{\epsilon_0 a}$.

22. Яке співвідношення між потенціалами в точках А і С поля точкового заряду q (ОА = АС, рис. 2):

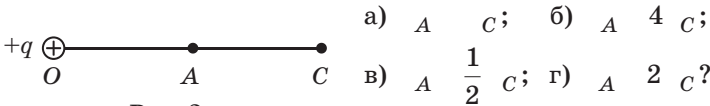


Рис. 2

23. У загальному випадку потенціал пов'язаний з напруженістю електричного поля співвідношенням:

а) $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$; б) $E = \frac{1}{d} \frac{d\varphi}{dx}$; в) $E = -\frac{d\varphi}{dx}$; г) $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$.

24. Як взаємно розташовані еквіпотенціальні поверхні та лінії напруженості електростатичного поля:

- а) ніде не перехрещуються;
 б) лінії напруженості дотичні до еквіпотенціальних поверхонь;
 в) лінії напруженості перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь;
 г) лінії напруженості перехрещуються з еквіпотенціальними поверхнями під кутом 90° та 180°?

25. Як напрямлений вектор \vec{E} у точці А, розташованій між двома еквіпотенціальними поверхнями з потенціалами $\varphi_1 = 2 \text{ В}$ і $\varphi_2 = 3 \text{ В}$ (рис. 3)?

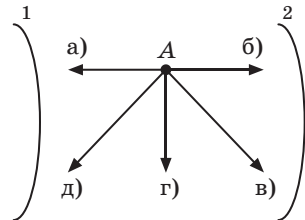


Рис. 3

26. Як напрямлений вектор напруженості поля в точці A (рис. 4), розташованій між двома екіпотенціальними поверхнями з потенціалами 1 В і 2 В ?

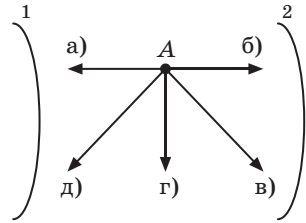


Рис. 4

27. Електрон, що рухається в прискорюючому електричному полі, набуває кінетичну енергію 5 еВ . Чому дорівнює різниця потенціалів, яку пройшов електрон, якщо його початкова енергія була 2 еВ :

- а) 6 В ; б) 5 В ; в) 4 В ; г) 3 В ?

28. Яка робота виконується при перенесенні заряду $q = 10^{-2} \text{ Кл}$ із нескінченності в точку поля, потенціал якої 200 В :

- а) 1 Дж ; б) 2 Дж ; в) $0,2 \text{ Дж}$; г) $0,01 \text{ Дж}$?

29. Яку роботу слід виконати, щоб в електричному полі перенести заряд $q = 1 \text{ Кл}$ з точки A з потенціалом $\phi_A = 3 \text{ В}$ у точку B з потенціалом $\phi_B = 7 \text{ В}$:

- а) 10 Дж ; б) 21 Дж ; в) 4 Дж ; г) 14 Дж ?

30. Маємо дві концентричні тонкостінні сфери радіусами r і R . Сферу радіусом r заряджено зарядом q , а радіусом R — зарядом Q . Чому дорівнює потенціал внутрішньої сфери радіусом r :

- а) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$; б) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{q}{r}$; в) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$; г) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{q}{r}$?

31. Теорема Гаусса для вектора напруженості електричного поля у вакуумі має вигляд:

- а) $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i$; б) $\oint_S \epsilon \cos(\vec{E}, \vec{n}) dS = \sum_{i=1}^N q_i$;
 в) $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$; г) $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{S}$.

32. Для гауссової поверхні, крізь яку потік напруженості дорівнює нулю, можуть виконуватись чотири твердження. Які з наведених тверджень мають виконуватися:

- а) усередині немає зарядів;
 б) алгебраїчна сума зарядів усередині поверхні дорівнює нулю;
 в) електричне поле на поверхні дорівнює нулю;

г) кількість силових ліній, що входять у поверхню, дорівнює кількості силових ліній, що виходять з поверхні?

33. Лінійна густина заряду визначається виразом:

а) $\frac{dq}{dl}$; б) $\frac{dq}{dS}$; в) $\frac{dq}{dV}$; г) $\frac{dq}{dt}$.

34. Поверхнева густина заряду визначається виразом:

а) $\frac{dq}{dl}$; б) $\frac{dq}{dS}$; в) $\frac{dq}{dV}$; г) $\frac{dq}{dt}$.

35. Об'ємна густина заряду визначається виразом:

а) $\frac{dq}{dl}$; б) $\frac{dq}{dS}$; в) $\frac{dq}{dV}$; г) $\frac{dq}{dt}$.

36. Напруженість електростатичного поля нескінченної рівномірно зарядженої площини визначається виразом:

а) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$; б) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2}$;

в) $E = \frac{q}{2\epsilon_0}$; г) $E = \frac{q}{\epsilon_0}$.

37. Чому дорівнює напруженість електричного поля в точці, що лежить на нескінченній рівномірно зарядженій площині з поверхневою густиною заряду :

а) $\frac{q}{\epsilon_0}$; б) $\frac{q}{2\epsilon_0}$; в) 0; г) ?

38. Напруженість електростатичного поля між різнойменно однорідно зарядженими паралельними площинами визначається виразом:

а) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$; б) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2}$;

в) $E = \frac{q}{2\epsilon_0}$; г) $E = \frac{q}{\epsilon_0}$.

39. Як зміниться напруженість електричного поля в точках між двома нескінченними пластинами рівномірно поверхнево зарядженими різнойменними зарядами при збільшенні поверхневої густини заряду на обох пластинах в 3 рази?

- а) залишиться колишнім;
б) зменшиться в 3 рази;

- в) збільшиться в 9 разів;
 г) збільшиться в 3 рази?

2. Електричне поле в діелектриках

40. Який вираз визначає значення вектора електричного зміщення точкового заряду:

а) $D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; б) $D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; в) $D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$; г) $D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$?

41. Позначте відповідь, де одиниці напруженості електричного поля, циркуляції напруженості електричного поля уздовж заданого контуру, поверхневої густини зарядів і вектора електричного зміщення розташовані у відповідній послідовності:

- а) В/м, В, Кл/м², Кл/м²;
 б) Н/Кл, Дж, Кл/м, В/м;
 в) Н, В, Кл, Кл/м²;
 г) Дж, Ф, Кл/м², В.

42. Яке значення має вектор електричного зміщення в точці на відстані 10 см від точкового заряду $q = 8 \cdot 10^{-4}$ Кл:

- а) 10^3 Кл/м²;
 б) $2 \cdot 10^2$ Кл/м²;
 в) 10^3 Кл/м²;
 г) 20 Кл/м²?

43. Чому дорівнює поверхнева густина заряду на пластинах плоского конденсатора, якщо вектор електричного зміщення поля конденсатора дорівнює 10^6 Кл/м²:

- а) $2 \cdot 10^6$ Кл/м²;
 б) $0,2 \cdot 10^4$ Кл/м²;
 в) 10^6 Кл/м²;
 г) 10^4 Кл/м²?

44. Теорема Гаусса для електростатичного поля в діелектричному середовищі має вигляд:

а) $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i$; б) $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \text{div} \vec{D} dV$;
 в) $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$; г) $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$.

45. Напруженість поля диполя в загальному випадку має вигляд:

а) $\vec{E} = \frac{\vec{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$; б) $E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 - 3\cos^2\theta}$;

в) $E = \frac{M}{p_e \sin\theta}$; г) $E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

46. Як визначається електричний момент диполя:

а) $\vec{P} = \frac{\vec{p}_e}{V}$; б) $\vec{p}_e = q\vec{l}$; в) $\circ\vec{P}d\vec{S} = q$; г) $\vec{p}_m = IS\vec{n}$?

47. Як поводить себе електричний диполь в однорідному електричному полі:

- а) зміщується в напрямку вектора напруженості поля;
- б) зміщується в напрямку, протилежному вектору напруженості поля;
- в) орієнтується так, що вектор електричного моменту диполя збігається з напрямком вектора напруженості електричного поля;
- г) орієнтується так, що вектор електричного моменту диполя збігається з напрямком вектора градієнта потенціалу поля?

48. За яких умов відбувається процес поляризації діелектриків:

- а) зміщення молекулярних диполів у напрямку зовнішнього електричного поля;
- б) набуття діелектриком деякого заряду в електричному полі;
- в) зміщення діелектрика в напрямку зовнішнього електричного поля;
- г) установлення переважної орієнтації молекулярних диполів в електричному полі?

49. Яка величина називається вектором поляризації діелектрика:

- а) дипольний момент молекули діелектрика;
- б) векторна сума дипольних моментів молекул усього діелектрика;
- в) векторна сума дипольних моментів молекул одиниці об'єму діелектрика;
- г) векторна сума дипольних моментів молекул одиниці маси діелектрика?

50. Як визначається вектор поляризації діелектрика:

а) $\vec{P} = \frac{\vec{p}_e}{V}$; б) $\vec{p}_e = q\vec{l}$; в) $\circ\vec{P}d\vec{S} = q$; г) $\vec{p}_m = IS\vec{n}$?

51. У яких одиницях вимірюється вектор поляризації діелектрика:
 а) Кл/м²; б) Кл/(Н·м²); в) Ф/м; г) Кл/м?
52. Який зв'язок вектора поляризації з векторами напруженості електричного поля і електричної індукції:
 а) $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$; б) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$; в) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$; г) $\vec{P} = \frac{\vec{p}_e}{V}$?
53. Який процес відбувається в полярному діелектрику, коли його поміщають в однорідне електростатичне поле?
 а) зміщення молекулярних диполів уздовж поля;
 б) зміщення молекулярних диполів проти поля;
 в) орієнтація електричних моментів молекулярних диполів проти поля;
 г) орієнтація електричних моментів молекулярних диполів уздовж поля?
54. Яка особливість діелектриків характерна тільки для неполярних діелектриків у відсутності зовнішнього електричного поля:
 а) сумарний вектор електричних моментів усіх молекул діелектрика дорівнює нулю;
 б) електричний момент кожної молекули відмінний від нуля;
 в) електричний момент кожної молекули дорівнює нулю;
 г) результуючий вектор електричних моментів молекул одиниці об'єму діелектрика дорівнює нулю?
55. У чому полягає суть п'єзоелектричного ефекту:
 а) у деформації кристала при розташуванні його в електричному полі;
 б) у появі електричного заряду на поверхні кристала при його деформації;
 в) у зміщенні заряджених частинок кристалічної ґратки під впливом електричного поля;
 г) у появі електричного заряду на поверхні кристала у разі поміщення його в електричне поле?
56. У чому полягає суть явища електрострикції:
 а) у деформації кристала при розташуванні його в електричному полі;
 б) у появі електричного заряду на поверхні кристала при його деформації;
 в) у зміщенні заряджених частинок кристалічної ґратки під впливом електричного поля;

г) у появі електричного заряду на поверхні кристала у разі поміщення його в електричне поле?

57. Яка з наведених властивостей діелектриків характерна тільки для сегнетоелектриків:

- а) поляризація в електричному полі;
- б) наявність зв'язаних зарядів;
- в) гістерезис;
- г) відсутність вільних зарядів?

3. Провідники в електричному полі

58. Від чого залежить електрична ємність провідника:

- а) від заряду провідника;
- б) від потенціалу зарядженого провідника;
- в) від енергії зарядженого провідника;
- г) від розмірів провідника і властивостей діелектрика, що його оточує?

59. Як впливає на електроємність провідника наближення до нього іншого провідника:

- а) електроємність збільшується;
- б) електроємність зменшується;
- в) електроємність не змінюється;
- г) електроємність збільшується тільки під час наближення провідника, а надалі буде попередньою?

60. Ємність відокремленого зарядженого провідника дорівнює:

- а) $C \frac{q}{d}$;
- б) $C \frac{q}{1 \ 2}$;
- в) $C \frac{0 \ S}{d}$;
- г) $C \frac{4 \ 0 \ R_1 R_2}{R_2 \ R_1}$.

61. Ємність будь-якого конденсатора дорівнює:

- а) $C \frac{q}{d}$;
- б) $C \frac{q}{1 \ 2}$;
- в) $C \frac{0 \ S}{d}$;
- г) $C \frac{4 \ 0 \ R_1 R_2}{R_2 \ R_1}$.

62. Ємність плоского конденсатора дорівнює:

- а) $C \frac{q}{d}$;
- б) $C \frac{q}{1 \ 2}$;
- в) $C \frac{0 \ S}{d}$;
- г) $C \frac{4 \ 0 \ R_1 R_2}{R_2 \ R_1}$.

63. Ємність сферичного конденсатора дорівнює:

- а) $C \frac{q}{d}$;
- б) $C \frac{q}{1 \ 2}$;
- в) $C \frac{0 \ S}{d}$;
- г) $C \frac{4 \ 0 \ R_1 R_2}{R_2 \ R_1}$.

64. Ємність циліндричного конденсатора дорівнює:

а) $C = \frac{q}{1 \ 2}$; б) $C = \frac{0 \ S}{d}$; в) $C = \frac{4 \ 0 \ R_1 R_2}{R_2 \ R_1}$; г) $C = \frac{2 \ 0 \ h}{\ln(R_2/R_1)}$.

65. Ємність батареї паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює:

а) $C = \frac{q}{1 \ 2}$; б) $C = \frac{q}{1 \ 2}$; в) $C = \prod_{i=1}^N C_i$; г) $C = \prod_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$.

66. Ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів дорівнює:

а) $C = \frac{q}{1 \ 2}$; б) $C = \frac{q}{1 \ 2}$; в) $C = \prod_{i=1}^N C_i$; г) $C = \prod_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$.

67. Як зміниться напруженість електричного поля в плоскому конденсаторі, якщо простір між пластинами заповнити діелектриком з діелектричною сприйнятливістю $\epsilon = 10$:

- а) не зміниться;
- б) збільшиться в 10 разів;
- в) зменшиться в 10 разів;
- г) збільшиться в 11 разів?

68. Як зміниться електроємність плоского конденсатора, якщо площу пластин збільшити в 3 рази, а відстань між пластинами зменшити в 5 разів:

- а) не зміниться;
- б) збільшиться в 8 разів;
- в) зменшиться в 15 разів;
- г) збільшиться в 15 разів?

69. Плоский конденсатор, відстань між обкладками якого 1 см, заповнили діелектриком з діелектричною проникністю, що дорівнює 2. На скільки потрібно збільшити відстань між обкладками, щоб ємність конденсатора не змінилася:

- а) 1 см; б) 0,5 см; в) 2 см; г) 0,25 см?

70. Як зміниться ємність плоского конденсатора C_0 , якщо між його обкладками розташувати пластинку з провідника, товщина якої дорівнює половині відстані між обкладками:

- а) $2C_0$; б) $\frac{C_0}{2}$; в) C_0 ; г) $4C_0$?

71. Чому дорівнює заряд двох послідовно з'єднаних конденсаторів з ємностями 4 мкФ і 8 мкФ, якщо папруга на батареї конденсаторів 3 В:

- а) 24 мкКл; б) 12 мкКл; в) 8 мкКл; г) 4 мкКл?

72. Енергія зарядженого конденсатора дорівнює:

- а) $W \frac{q^2}{2C}$; б) $W \frac{0 E^2}{2} Sd$; в) $W \frac{3}{54} \frac{q^2}{0 a}$; г) $W \frac{1}{24} \frac{q^2}{0 a}$.

73. Різниця потенціалів між пластинами конденсатора 10^3 В, ємність конденсатора 8 мкФ. Чому дорівнює енергія поля конденсатора:

- а) 4 Дж; б) 8 Дж; в) 2 Дж; г) 16 Дж?

74. Які вирази визначають об'ємну густину енергії електричного поля:

- а) $\frac{C^2}{2}$; б) $\frac{\bar{D}\bar{E}}{2}$; в) $\frac{0 E^2}{2}$; г) $0 E^2$?

75. Чому дорівнює робота з видалення діелектрика з діелектричною проникністю із зарядженого відокремленого плоского конденсатора C енергією W :

- а) $\frac{W}{2}$; б) W ; в) $W(1)$; г) $\frac{W}{1}$?

II. Електродинаміка

4. Постійний електричний струм

76. Електричний струм у зразку виникає за умови, що:

- а) температура тіла відмінна від нуля;
б) тіло має вільні електрони;
в) усередині зразка існує електричне поле;
г) тіло має вільні електрони і всередині тіла існує електричне поле.

77. Силою струму називається:

- а) величина заряду, що переноситься крізь поперечний переріз провідника;
б) величина заряду, що переноситься в одиницю часу;
в) скалярна фізична величина, що дорівнює величині заряду, що переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу;
г) векторна величина, що дорівнює швидкості заряду.

78. За напрямок струму вибирається напрямок, у якому:

- а) рухаються вільні електрони;
- б) зміщуються зв'язані заряди;
- в) рухаються негативні носії;
- г) рухаються позитивні носії.

79. Густина струму — це:

- а) скалярна фізична величина, що дорівнює відношенню сили струму до площі, крізь яку проходить струм;
- б) скалярна величина, що дорівнює силі струму за одиницю часу;
- в) векторна величина, що чисельно дорівнює силі струму, що проходить крізь одиничну площу і напрямлена в бік упорядкованого руху електронів;
- г) векторна фізична величина, що чисельно дорівнює відношенню сили струму до площі елемента поверхні, перпендикулярній швидкості напрямленого руху позитивних носіїв і має той самий напрямок, що і швидкість.

80. Постійний струм провідності може існувати тільки за умови, що:

- а) напруженість електричного поля в провіднику дорівнює нулю;
- б) напруженість електричного поля в провіднику не дорівнює нулю і не змінюється з часом;
- в) напруженість електричного поля в провіднику не дорівнює нулю, не змінюється з часом, на вільні заряди, крім кулонівських сил, діють сторонні сили;
- г) напруженість електричного поля у провіднику не дорівнює нулю, не змінюється з часом, на вільні заряди діють тільки кулонівські сили.

81. Від чого залежить опір провідника:

- а) від електричної сили джерела, до якого підключений провідник;
- б) від сили струму в колі;
- в) від геометричних розмірів і матеріалу провідника;
- г) від різниці потенціалів на кінцях провідника?

82. Опір однорідного циліндричного провідника дорівнює:

- а) $\frac{2l}{S}$;
- б) $\frac{l}{2S}$;
- в) $\frac{l}{S}$;
- г) $\frac{dl}{S}$.

83. Опір неоднорідного циліндричного провідника дорівнює:

а) $\frac{2l}{S}$; б) $\frac{l}{2S}$; в) $\frac{l}{S}$; г) $\frac{dl}{L S}$.

84. Рівняння безперервності струму має вигляд:

а) $\frac{1}{t} \operatorname{div} \vec{j} = 0$; б) $\vec{j} = \vec{E}$; в) $I = \frac{U}{R}$; г) $I = \frac{\mathcal{E}}{R r}$.

85. Закон Ома для однорідної ділянки кола має вигляд:

а) $\vec{j} = \vec{E}$; б) $I = \frac{U}{R}$; в) $I = \frac{(1-2) \mathcal{E}}{R r}$; г) $I = \frac{\mathcal{E}}{R r}$.

86. Закон Ома для замкнутого кола має вигляд:

а) $\vec{j} = \vec{E}$; б) $I = \frac{U}{R}$; в) $I = \frac{(1-2) \mathcal{E}}{R r}$; г) $I = \frac{\mathcal{E}}{R r}$.

87. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола має вигляд:

а) $\vec{j} = \vec{E}$; б) $I = \frac{U}{R}$; в) $I = \frac{(1-2) \mathcal{E}}{R r}$; г) $I = \frac{\mathcal{E}}{R r}$.

88. Закон Ома в диференціальній формі має вигляд:

а) $\frac{1}{t} \operatorname{div} \vec{j} = 0$; б) $\vec{j} = \vec{E}$; в) $I = \frac{U}{R}$; г) $I = \frac{\mathcal{E}}{R r}$.

89. Опір послідовно з'єднаних провідників дорівнює:

а) $\frac{1}{R_i}$; б) R_i ; в) $\frac{1}{R_i}$; г) $\frac{1}{R_i}$.

90. Опір паралельно з'єднаних провідників дорівнює:

а) $\frac{1}{R_i}$; б) R_i ; в) $\frac{1}{R_i}$; г) $\frac{1}{R_i}$.

91. За першим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів, що

сходяться у вузлі, дорівнює нулю $\sum_i I_i = 0$. Це правило є наслідком:

- а) закону збереження імпульсу;
- б) закону збереження механічної енергії;
- в) закону збереження заряду;
- г) закону збереження моменту імпульсу.

92. Як змінилась напруга на ділянці кола, якщо при зменшенні опору в 2 рази, сила струму збільшилась у 3 рази:
- збільшилась у 6 разів;
 - зменшилась у 6 разів;
 - збільшилась у 1,5 разів;
 - зменшилась у 1,5 рази?
93. Позначте відповідь, у якій одиниці напруги на ділянці кола, густини струму, питомого опору, електрорушійної сили, провідності питомої провідності розташовані у відповідній послідовності:
- V ; A/m^2 ; Cm/m ; V ; $Om \cdot m$; Cm ;
 - V ; A ; $Om \cdot m$; V ; Om ; Om/m ;
 - V ; A ; Om ; V ; $Om \cdot m$; Cm ;
 - V ; A/m^2 ; $Om \cdot m$; V ; Om^{-1} ; $Om^{-1} \cdot m^{-1}$.
94. Чому дорівнює струм короткого замикання джерела струму з $2 V$ і внутрішнім опором $r = 0,5 Om$;
- $1 A$;
 - $2 A$;
 - $4 A$;
 - $10 A$?
95. Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії електричного кола, якщо його зовнішній опір дорівнює внутрішньому опору джерела струму в колі:
- $0,5$;
 - $0,1$;
 - 1 ;
 - $0,05$?
96. Як зміниться густина струму в провіднику, якщо струм у ньому збільшити в 5 разів, а площу поперечного перерізу зменшити в 2 рази:
- зменшиться в 10 разів;
 - збільшиться в 2,5 разів;
 - збільшиться в 10 разів;
 - зменшиться в 2,5 разів?
97. Яку величину називають провідністю ділянки кола:
- відношення напруги на ділянці кола до сили струму;
 - величину, зворотну опору ділянки кола;
 - добуток сили струму на опір ділянки кола;
 - величину, зворотну питомому опору?

5. Електричний струм у металах, рідинах, газах і вакуумі

98. Закон Джоуля — Ленца в інтегральній формі має вигляд:
- $\frac{dQ}{dt dV} = \frac{1}{j^2}$;
 - $Q = I^2 R dt$;
 - $Q = A U$;
 - $Q = A dV$.

99. Закон Джоуля — Ленца в диференціальній формі має вигляд
 а) $\frac{dQ}{dt dV} = \frac{1}{j^2}$; б) $Q = I^2 R dt$; в) $Q = A U$; г) $Q = A dU$.
100. Яке співвідношення між питомою провідністю металів і температурою в класичній теорії електропровідності:
 а) $\sim T$; б) $\sim \frac{1}{\sqrt{T}}$; в) $\sim \frac{1}{T}$; г) $\sim \sqrt{T}$?
101. Яке співвідношення між середньою швидкістю $\langle v \rangle$ теплового руху вільних електронів у металевому провіднику за кімнатної температури і швидкістю впорядкованого руху електронів u за наявності струму в провіднику:
 а) $\langle v \rangle \ll u$; б) $\langle v \rangle \approx u$; в) $\langle v \rangle \gg u$; г) $\langle v \rangle \approx u$?
102. За рахунок яких носіїв електричного струму виникає електропровідність провідників:
 а) електронів; б) дірок; в) іонів; г) диполів?
103. Який зміст має поняття «рухливість іонів»:
 а) швидкість їх теплового руху;
 б) середня швидкість руху іонів під дією поля, напруженість якого дорівнює одиниці;
 в) величина, зворотна швидкості руху іонів;
 г) набута іонами швидкість руху під час дії одиничної різниці потенціалів?
104. За рахунок яких зарядів можна спостерігати газовий розряд:
 а) електронів; б) дірок; в) іонів; г) диполів?
105. Яку найменшу відстань у прискорюючому електричному полі напруженість 27 В/см має пролетіти електрон, щоб набута ним енергія була достатньою для іонізації атома водню (потенціал іонізації атома водню дорівнює 13,5 В):
 а) 5 м; б) 0,5 м; в) 5 мм; г) 2 м?

III. Магнітне поле

6. Магнітне поле у вакуумі

106. Яка величина є кількісною характеристикою магнітного поля:
 а) напруженість магнітного поля;
 б) намагніченість;
 в) індукція магнітного поля;
 г) магнітна сприйнятливність?

107. Які з наведених процесів призводять до появи магнітного поля:

- а) рух заряджених частинок;
- б) електризація тіл;
- в) зміни з часом електричного поля;
- г) проходження струму по провіднику?

108. У яких випадках спостерігатиметься дія сили Лоренца:

- а) заряджена частинка рухається в напрямку вектора індукції магнітного поля;
- б) заряджена частинка рухається в електричному полі;
- в) заряджена частинка рухається під кутом до напрямку вектора індукції магнітного поля;
- г) заряджена частинка рухається перпендикулярно напрямку вектора індукції магнітного поля?

109. Яка сила діє з боку магнітного поля на рухомий заряд:

- а) $\vec{F} = q\vec{E}$;
- б) $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$;
- в) $\vec{F} = 0$;
- г) $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$?

110. Яка сила діє з боку магнітного поля на нерухомий заряд: .

- а) $\vec{F} = q\vec{E}$;
- б) $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$;
- в) $\vec{F} = 0$;
- г) $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$?

111. Як напрямлена сила Лоренца, що діє на електрон e момент, коли електрон рухається в напрямку осі Ox , а вектор індукції магнітного поля паралельний осі Oz :

- а) у напрямку осі Ox ;
- б) у напрямку осі Oy ;
- в) у напрямку осі $-Oy$;
- г) у напрямку осі $-Ox$?

112. У якому випадку електрон, що влітає в однорідне магнітне поле, рухатиметься по прямій:

- а) електрон рухається в напрямку вектора індукції магнітного поля;
- б) електрон рухається під кутом до напрямку вектора індукції магнітного поля;
- в) електрон рухається перпендикулярно напрямку вектора індукції магнітного поля;
- г) електрон рухається перпендикулярно напрямку вектора індукції магнітного поля і паралельно напрямку вектора напруженості електричного поля?

119. Чому дорівнює величина магнітної індукції нескінченно довгого провідника зі струмом:

- а) $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$; б) $B = \frac{\mu_0 I}{4r}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$;
в) $B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3}$; г) $B = \mu_0 I n$?

120. Величина магнітної індукції для провідника скінченної довжини дорівнює:

- а) $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$; б) $B = \frac{\mu_0 I}{4r}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$;
в) $B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3}$; г) $B = \mu_0 I n$?

121. Чому дорівнює індукція кругового провідника радіусом r зі струмом на осі кола:

- а) $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$; б) $B = \frac{\mu_0 I}{4r}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$;
в) $B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3}$; г) $B = \mu_0 I n$?

122. Як зміниться значення індукції магнітного поля в центрі кругового провідника, якщо радіус його зменшиться в 3 рази, а сила струму в провіднику — в 2 рази:

- а) збільшиться в 6 разів;
б) зменшиться в 5 разів;
в) збільшиться в 1,5 рази;
г) зменшиться в 6 разів?

123. Як визначається чисельне значення магнітного моменту контуру зі струмом:

- а) добутком сили струму на довжину контуру;
б) добутком магнітної індукції поля на площу контуру;
в) добутком сили струму на площу контуру;
г) механічним моментом, що діє на контур зі струмом у магнітному полі?

124. Як потрібно змінити силу струму в круговому контурі, щоб його магнітний момент зменшився в 4 рази при збільшенні його площі в 3 рази:

- а) зменшити в 12 разів;
б) збільшити в 4 рази;

- в) зменшити в 3 рази;
- г) збільшити в 12 разів?

125. Як зміниться індукція магнітного поля в центрі дрютяного витка, по якому йде струм силою I , якщо з цього витка зробити три витки втричі меншого радіуса:

- а) зменшиться в 3 рази;
- б) збільшиться в 3 рази;
- в) збільшиться в 9 разів;
- г) зменшиться в 9 разів?

126. У яких одиницях вимірюється індукція магнітного поля в міжнародній системі СІ:

- а) 1 А/м; б) 1 Тл; в) 1 Е; г) 1 Гс?

127. У яких одиницях вимірюється напруженість магнітного поля в міжнародній системі СІ:

- а) 1 А/м; б) 1 Тл; в) 1 Е; г) 1 Гс?

128. Якими виразами визначається циркуляція вектора індукції магнітного поля вздовж замкненого контуру L :

- а) BdS_n ; б) $\oint \vec{B}d\vec{l}$; в) $\oint Bdl\cos(\vec{B}, \hat{d\vec{l}})$; г) $B_n dS$?
- S
 L
 S

129. Як формулюється теорема про циркуляцію магнітних полів в інтегральному вигляді:

- а) $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$; б) $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$; в) $\text{div} \vec{B} = 0$; г) $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$?
- S
 L

130. Як зміниться значення циркуляції вектора індукції магнітного поля вздовж замкненого контуру L , що охоплює 10 провідників, якщо сила струму в кожному провіднику збільшиться в 3 рази:

- а) збільшиться в 3 рази;
- б) збільшиться в 10 разів;

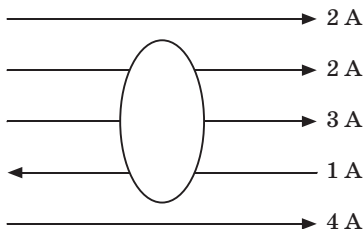


Рис. 5

- в) збільшиться в 30 разів;
- г) збільшиться в 15 разів?

131. Чому дорівнює циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж контура L , що охоплює три з п'яти провідників із струмом (рис. 5):

- а) 9 А; б) 4 А; в) 5 А; г) 6 А?

132. Які з наведених рівнянь називають законом повного струму:

- а) $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$; б) $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \sum_i I_i$;
 в) $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{макро}}$; г) $H = In?$.

7. Магнітне поле в речовині

133. Укажіть відповідь, у якій магнітна проникність вакууму, діамagnetика, парамагнетика і феромагнетика розташовані відповідно до умов:

- а) $\mu < 0$; $\mu < 1$; $\mu \gg 1$; $\mu > 1$;
 б) $\mu < 1$; $\mu > 0$; $\mu < 1$; $\mu \gg 1$;
 в) $\mu > 1$; $\mu < 1$; $\mu < 1$; $\mu \ll 1$;
 г) $\mu < 1$; $\mu < 1$; $\mu > 1$; $\mu \gg 1$.

134. Позначте відповідь, в якій магнітна сприйнятливість вакууму, діамagnetика, парамагнетика і феромагнетика розташовані відповідно до умов:

- а) < 0 ; < 0 ; > 0 ; $\ll 0$;
 б) < 0 ; < 0 ; > 0 ; $\gg 0$;
 в) < 0 ; $\gg 0$; < 0 ; > 0 ;
 г) $\gg 0$; > 0 ; < 0 ; < 0 .

135. Чому дорівнює індукція на осі нескінченно довгого соленоїда зі струмом:

- а) $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$; б) $B = \frac{\mu_0 I}{4r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$;
 в) $B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3}$; г) $B = \mu_0 In?$

136. Як потрібно змінити силу струму в соленоїді, щоб при видаленні сердечника сила струму залишилась незмінною:

- а) збільшити в μ_0 разів; б) зменшити в μ разів;
 в) збільшити в μ разів; г) зменшити в $\mu_0 \mu$ разів?

137. Чому дорівнює величина напруженості магнітного поля на осі нескінченно довгого соленоїда, по якому йде струм 2 мА, а кількість витків на одиницю довжини соленоїда дорівнює 10 см^{-1} :

- а) 5 А/м; б) 2 А/м; в) 0,5 А/м; г) 0,2 А/м?

138. Чому дорівнює потік вектора магнітної індукції крізь елемент площі:

- а) $\vec{B}d\vec{S}$; б) $\vec{B}d\vec{S}$; в) $BScos$; г) $\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$.

139. Як формулюється теорема Гаусса для магнітних полів в інтегральному вигляді:

- а) $\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$; б) $\oint \vec{B}d\vec{l} = \oint I$; в) $\text{div}\vec{B} = 0$; г) $\text{rot}\vec{B} = \vec{j}$?

140. Як зміниться магнітний потік крізь площадку, розташовану перпендикулярно до однорідного магнітного поля, якщо її площину збільшити в 6 разів, а магнітну індукцію зменшити в 2 рази:

- а) зменшиться в 3 рази;
б) збільшиться в 12 разів;
в) збільшиться в 3 рази;
г) зменшиться 4 рази?

141. Як зміниться сила взаємодії між двома прямолінійними провідниками зі струмом, якщо сила струму в першому провіднику збільшиться 3 рази, а в другому в 4 рази:

- а) збільшиться в 3 рази;
б) збільшиться в 1,3 рази;
в) збільшиться 12 разів;
г) збільшиться в 7 разів?

142. За яких умов в провіднику зі струмом спостерігатиметься ефект Холла:

- а) провідник розташований у напрямку магнітного поля;
б) провідник розташований перпендикулярно напрямку магнітного поля;
в) провідник розташований у напрямку електричного поля;
г) провідник розташований перпендикулярно до електричного поля?

143. Як зміниться холлівська різниця потенціалів, що виникає в напівпровідниковій пластинці, якщо сила струму в пластині збільшиться в 3 рази, а індукція магнітного поля зменшиться в 3 рази:

- а) збільшиться в 3 рази;
б) зменшиться в 9 разів;
в) збільшиться в 9 разів;
г) не зміниться?

8. Електромагнітна індукція

144. Від яких величин залежить електрорушійна сила індукції, що виникає в замкненому контурі:
- а) від величини магнітного потоку крізь поверхню, обмежену цим контуром;
 - б) від швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену цим контуром;
 - в) від опору контуру;
 - г) від величини індукції зовнішнього магнітного поля?
145. Який вигляд має основний закон електромагнітної індукції:
- а) $\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt}$; б) $\mathcal{E}_i = vB_n l$; в) $\mathcal{E}_i = L \frac{dI}{dt}$; г) $\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt}(LI)$?
146. Який вигляд має електрорушійна сила індукції, що з'являється у відрізьку провідника, який рухається в однорідному магнітному полі:
- а) $\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt}$; б) $\mathcal{E}_i = vB_n l$; в) $\mathcal{E}_i = L \frac{dI}{dt}$; г) $\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt}(LI)$?
147. За яким правилом визначається напрямок індукційного струму, що виникає в провідному контурі:
- а) за правилом лівої руки;
 - б) за правилом Ленца;
 - в) за першим правилом Кірхгофа;
 - г) за другим правилом Кірхгофа?
148. В яких одиницях вимірюється електрорушійна сила електромагнітної індукції:
- а) у ньютонах;
 - б) у джоулях;
 - в) у генрі;
 - г) у вольтах?
149. Від чого залежить величина електрорушійної сили самоіндукції, що з'являється в контурі:
- а) від індуктивності контуру;
 - б) від опору контуру;
 - в) від сили струму в контурі;
 - г) від швидкості зміни струму в контурі?
150. Чому дорівнює ЕРС самоіндукції, що з'являється в контурі, який розташовано в вакуумі:
- а) $\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt}$; б) $\mathcal{E}_i = vB_n l$; в) $\mathcal{E}_i = L \frac{dI}{dt}$; г) $\mathcal{E}_i = \frac{d}{dt}(LI)$?

- 151. Від чого залежить індуктивність контуру (без осердя):**
- від сили струму в контурі;
 - від швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром;
 - від розмірів і форми контуру;
 - від матеріалу провідника?
- 152. Позначте відповідь, у якій одиниці індуктивності, магнітної індукції, магнітного потоку і напруженості магнітного поля розташовані у відповідній послідовності:**
- Тл, А/м, Гн, Вб;
 - Вб, Гн, Тл, А/м;
 - Гн, Тл, Вб, А/м;
 - А/м, Вб, Гн, Тл.
- 153. Чому дорівнює відношення величини сили струмів I_1/I_2 у горизонтальних кільцях з мідного дроту, розташованих у вертикальному однорідному змінному магнітному полі, якщо радіус першого кільця у k разів більше радіуса другого:**
- $\frac{I_1}{I_2} = k^2$;
 - $\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{k}$;
 - $\frac{I_1}{I_2} = k$;
 - $\frac{I_1}{I_2} = k^2$?
- 154. Крізь центр тонкого горизонтального провідного кільця падає позитивно заряджена кулька. Що відбуватиметься у кільці під час падіння кульки:**
- з'являється струм, що збільшується;
 - нічого не відбувається;
 - з'являється струм, що зменшується;
 - з'являється постійний струм?
- 155. Як зміниться індуктивність котушки, якщо розтягнути її вздовж осі і тим збільшити її довжину вдвічі:**
- індуктивність не зміниться;
 - індуктивність збільшиться вдвічі;
 - індуктивність зменшиться вдвічі;
 - індуктивність збільшиться в 4 рази?
- 156. За якої зміни індуктивності котушки збільшення в ній струму в k разів не змінить енергії її магнітного поля:**
- зменшення індуктивності в k разів;
 - збільшення індуктивності в k разів;
 - зменшення індуктивності в k^2 разів;
 - збільшення індуктивності в k^2 разів?

157. Від чого залежить індуктивність соленоїда, у якому є феромагнітне осердя:

- а) від кількості витків;
- б) від геометричних розмірів соленоїда;
- в) від опору провідника, з якого виготовлено соленоїд;
- г) від сили струму в соленоїді?

158. Чому дорівнює об'ємна густина магнітної енергії:

- а) $\vec{H}d\vec{B}$; б) $\frac{1}{2} \int_0^H H^2$; в) $\frac{1}{2} \int_0^E E^2$; г) $\frac{1}{2}(\int_0^E E^2 + \int_0^H H^2)$?

159. Чому дорівнює об'ємна густина енергії електричного поля:

- а) $\vec{H}d\vec{B}$; б) $\frac{1}{2} \int_0^H H^2$; в) $\frac{1}{2} \int_0^E E^2$; г) $\frac{1}{2}(\int_0^E E^2 + \int_0^H H^2)$?

160. Чому дорівнює об'ємна густина енергії електромагнітного поля:

- а) $\vec{H}d\vec{B}$; б) $\frac{1}{2} \int_0^H H^2$; в) $\frac{1}{2} \int_0^E E^2$; г) $\frac{1}{2}(\int_0^E E^2 + \int_0^H H^2)$?

9. Основи теорії Максвелла електромагнітного поля

161. Яке з рівнянь Максвелла показує, що магнітних зарядів не існує?

- а) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}$; б) $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}$; в) $\text{div } \vec{D} = \rho$; г) $\text{div } \vec{B} = 0$?

162. Яке з рівнянь Максвелла виражає закон збереження електричного заряду:

- а) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}$; б) $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}$; в) $-\frac{1}{t} \text{div } \vec{j} = 0$; г) $\text{div } \vec{D} = \rho$?

163. Яке з рівнянь Максвелла еквівалентне закону Кулона:

- а) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}$; б) $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}$; в) $\text{div } \vec{D} = \rho$; г) $\text{div } \vec{B} = 0$?

164. Яке з рівнянь Максвелла є теоремою Гаусса для електричних полів:

- а) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}$; б) $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}$; в) $\text{div } \vec{D} = \rho$; г) $\text{div } \vec{B} = 0$?

165. Яке з рівнянь Максвелла є теоремою Гаусса для магнітних полів:

- а) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{t}$; б) $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\vec{D}}{t}$; в) $\text{div } \vec{D} = \rho$; г) $\text{div } \vec{B} = 0$?

166. Яке з рівнянь Максвелла є законом Фарадея в інтегральній формі:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\vec{B}}{t} d\vec{S}; & \text{б) } \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} \int_S \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}; \\ \text{в) } \oint_S \vec{D} d\vec{S} = dV; & \text{г) } \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0? \end{array}$$

167. Яке з рівнянь Максвелла є теоремою Гаусса для потоку електричного зміщення:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\vec{B}}{t} d\vec{S}; & \text{б) } \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} \int_S \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}; \\ \text{в) } \oint_S \vec{D} d\vec{S} = dV; & \text{г) } \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0? \end{array}$$

168. Який з наведених законів виражає перше рівняння Максвелла $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\quad}{t}$:

- а) закон Біо — Савара — Лапласа;
- б) закон Ома в диференціальній формі;
- в) закон повного струму;
- г) закон електромагнітної індукції.

169. Який з наведених законів виражає друге рівняння Максвелла $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} \int_S \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}$:

- а) закон Біо — Савара — Лапласа;
- б) закон Ома в диференціальній формі;
- в) закон повного струму;
- г) закон електромагнітної індукції?

170. Яке з рівнянь Максвелла виражає той факт, що в просторі, де змінюється електричне поле, виникає вихрове магнітне поле:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\vec{B}}{t} d\vec{S}; & \text{б) } \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} \int_S \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}; \\ \text{в) } \oint_S \vec{D} d\vec{S} = dV; & \text{г) } \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0? \end{array}$$

171. Яке з рівнянь Максвелла виражає той факт, що в просторі, де змінюється магнітне поле, виникає вихрове електричне поле:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\vec{B}}{t} d\vec{S}; & \text{б) } \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} \frac{\vec{D}}{t} d\vec{S}; \\ \text{в) } \oint_S \vec{D} d\vec{S} = dV; & \text{г) } \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0? \end{array}$$

10. Електромагнітні коливання. Змінний струм

173. Який вигляд має диференціальне рівняння вільних коливань заряду в коливальному контурі:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \ddot{q} + \frac{2}{0}q = 0; & \text{б) } \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0; \\ \text{в) } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0; & \text{г) } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_0 \cos t}{L}? \end{array}$$

174. Чому дорівнює період власних коливань (формула Томпсона) коливального контуру, який утворюють індуктивність L та конденсатор C :

$$\text{а) } \sqrt{LC}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \text{в) } 2\sqrt{LC}; \quad \text{г) } \frac{1}{2\sqrt{LC}}?$$

175. Чому дорівнює циклічна частота власних коливань контуру з індуктивністю i ємністю:

$$\text{а) } \sqrt{LC}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \text{в) } 2\sqrt{LC}; \quad \text{г) } \frac{1}{2\sqrt{LC}}?$$

176. Який вигляд має диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань заряду в коливальному контурі:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \ddot{q} + \frac{2}{0}q = 0; & \text{б) } \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0; \\ \text{в) } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0; & \text{г) } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_0 \cos t}{L}? \end{array}$$

177. Яке з наведених рівнянь описує вимушені коливання заряду в коливальному контурі:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \ddot{q} + \frac{2}{0}q = 0; & \text{б) } \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0; \\ \text{в) } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0; & \text{г) } \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_0 \cos t}{L}? \end{array}$$

178. Диференціальне рівняння електромагнітних коливань у коливальному контурі має вигляд: $\frac{d^2 q}{dt^2} + 64 \cdot 10^6 q = 0$. Чому дорівнює частота власних коливань цього контуру:

- а) 4 кГц; б) 8 мГц; в) 4 МГц; г) 8 кГц?

179. Яку індуктивність повинен мати коливальний контур, щоб при ємності 5 мкФ одержати коливання частотою 1000 Гц? Опором контуру знехтувати.

- а) 50 мГн; б) 5 мГн; в) 10 мГн; г) 100 мГн.

180. Ідеальний послідовний коливальний контур – це коло, що містить послідовно з'єднані:

- а) конденсатор і резистор;
б) конденсатор і котушку індуктивності;
в) резистор і котушку індуктивності;
г) конденсатор, резистор і котушку індуктивності.

181. Чому дорівнює частота згасаючих коливань :

- а) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L}}$; в) $\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; г) $R \sqrt{\frac{C}{L}}$?

182. Як змінюється амплітуда сили струму в послідовному колі при резонансі напруг:

- а) різко зменшується;
б) не змінюється;
в) повільно збільшується;
г) різко збільшується?

183. Як змінюється амплітуда сили струму в зовнішньому колі з паралельним контуром при резонансі напруг:

- а) різко зменшується;
б) не змінюється;
в) повільно збільшується;
г) різко збільшується?

11. Механічні хвилі

184. Що таке довжина хвилі:

- а) відстань, яку проходить хвиля протягом одного періоду;
б) відстань між двома точками, що коливаються з різницею фаз ;
в) відстань, яку проходить хвиля за одиницю часу;

г) відстань між двома сусідніми точками, які коливаються в однакових фазах?

185. Які з перелічених хвиль є поздовжніми:

- а) електромагнітні хвилі;
- б) звукові хвилі в газах;
- в) хвилі на поверхні води;
- г) звукові хвилі в рідині?

186. Які з перелічених хвиль є поперечними:

- а) електромагнітні хвилі;
- б) звукові хвилі в газах;
- в) хвилі на поверхні води;
- г) звукові хвилі в рідині?

187. Рівняння хвилі має вигляд $y = 0,02 \sin 2\pi(100t - \frac{x}{3})$. Чому до-

рівнює довжина хвилі:

- а) 1 м; б) 3 м; в) 6 м; г) 10 м?

188. Коливання з частотою 40 Гц поширюються в пружному середовищі з швидкістю 400 м/с. На якій відстані розташовані точки, що коливаються в протилежних фазах:

- а) 10 м; б) 15 м; в) 5 м; г) 1 м?

189. Що таке фазова швидкість хвилі:

- а) швидкість розповсюдження фази коливань точок середовища;
- б) швидкість розповсюдження результуючого коливання, створеного в результаті додавання декількох хвиль;
- в) швидкість коливального руху точки середовища, в якому розповсюджується хвиля;
- г) швидкість зміни фази коливань точки середовища, в якому розповсюджується хвиля?

190. Що являє собою групова швидкість хвиль:

- а) швидкість розповсюдження фази коливань точок середовища;
- б) швидкість розповсюдження результуючого коливання, створеного в результаті додавання декількох хвиль;
- в) швидкість коливального руху точки середовища, в якому розповсюджується хвиля;
- г) швидкість зміни фази коливань точки середовища, в якому розповсюджується хвиля?

191. У яких випадках групова швидкість менше фазової швидкості хвиль:

а) $\frac{dv}{d} < 0$; б) $\frac{dv}{d} = 0$; в) $\frac{dv}{d} > 0$;

г) хвилі більшої довжини мають меншу швидкість?

192. Чому дорівнює фазова швидкість хвилі:

а) $\frac{h}{mc}$; б) $\frac{h}{k}$; в) $\frac{h}{mv}$; г) $\frac{d}{dk}$?

193. Чому дорівнює групова швидкість хвилі:

а) $\frac{h}{mc}$; б) $\frac{h}{k}$; в) $\frac{h}{mv}$; г) $\frac{d}{dk}$?

194. Чим визначається чисельне значення густини потоку енергії хвиль (вектор Умова):

а) енергією, що переноситься хвилями крізь одиничну площадку;

б) енергією, що переноситься хвилями за одиницю часу крізь дану площадку;

в) енергією, що переноситься хвилями крізь дану площадку;

г) енергією, що переноситься хвилями за одиницю часу крізь одиничну площу, розташовану перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвиль?

195. Що таке стояча хвиля? Це результат:

а) додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами, що відбуваються в одному напрямку;

б) додавання двох гармонічних коливань, що відбуваються у взаємно-перпендикулярному напрямку;

в) збігу частоти змушуючої сили з власною частотою коливань системи;

г) додавання двох хвиль з однаковими амплітудами, частотами і довжиною хвиль, що поширюються в протилежних напрямках.

196. Яка відстань між вузлом стоячої хвилі і сусідньою пучністю:

а) 0,5 ; б) ; в) 0,25 ; г) 0,75 ?

197. При якій найменшій довжині скляної трубки, закритої з одного боку, всередині можуть виникнути стоячі хвилі:

а) 2 ; б) ; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$?

198. У чому полягає суть ефекту Доплера:

- а) у збільшенні амплітуди сумарної хвилі при інтерференції;
- б) в огинанні хвилями перешкод;
- в) у зміні частоти коливань, що сприймаються приймачем при русі джерела і приймача хвиль;
- г) у посиленні звуку за рахунок резонансу?

12. Електромагнітні хвилі

199. Які умови виникнення електромагнітних хвиль:

- а) зміна за часом магнітного поля;
- б) наявність нерухомих заряджених частинок;
- в) наявність провідників з постійним струмом;
- г) зміна за часом електричного поля?

200. Які властивості характерні для електромагнітних хвиль:

- а) хвилі поперечні;
- б) хвилі поздовжні;
- в) хвилі переносять енергію;
- г) при розповсюдженні хвиль відбувається коливання частинок?

201. Швидкість електромагнітної хвилі в середовищі:

- а) залежить тільки від діелектричної проникності середовища;
- б) залежить тільки від магнітної проникності середовища;
- в) залежить тільки від діелектричної і магнітної проникності середовища;
- г) дорівнює швидкості світла в вакуумі.

202. У електромагнітній хвилі вектори напруженостей електричного і магнітного полів:

- а) взаємно перпендикулярні;
- б) збігаються за напрямком;
- в) протилежні за напрямком;
- г) дорівнюють нулю.

203. Фазова швидкість електромагнітної хвилі в середовищі визначається:

- а) $\frac{0 E^2}{2}$;
- б) $\frac{0 H^2}{2}$;
- в) $E H$;
- г) $\frac{1}{\sqrt{0 0 \sqrt{0 0}}}$.

204. Напрямок поширення плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі в вакуумі визначається напрямком вектора:

- а) \vec{E} ;
- б) \vec{H} ;
- в) $\vec{E} \vec{H}$;
- г) $\text{rot } \vec{E}$.

205. Числове значення вектора Умова — Пойнтінга визначається:

- а) потоком енергії електромагнітних хвиль;
- б) енергією, що переноситься електромагнітними хвилями за одиницю часу крізь одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження хвиль;
- в) потужністю, що переноситься електромагнітними хвилями крізь дану площадку;
- г) густиною потоку енергії електромагнітних хвиль.

206. Інтенсивність плоскої електромагнітної хвилі у вакуумі визначається:

- а) $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} EH$;
- б) $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$;
- в) $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2}$;
- г) $\frac{\mu_0 H^2}{2}$.

207. Модуль густини потоку енергії електромагнітної хвилі дорівнює:

- а) $\frac{\epsilon_0 H^2}{2}$;
- б) $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$;
- в) $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} EH$;
- г) $E H$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Загальна фізика з прикладами і задачами [Текст]. Ч. 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка : навч. посіб. / В. О. Стороженко, І. М. Кібець, А. І. Рибалка, Т. Б. Ткаченко. — Х. : Компанія СМІТ, 2006.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст]. Т. 2 : учеб. пособие / И. В. Савельев. — М. : Наука, 1982.
3. Детлаф, А. А. Курс физики [Текст] / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. — М. : Высшая школа, 1989.
4. Кучерук, І. М. Загальний курс фізики [Текст]. Т. 2. Електрика і магнетизм / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. — К. : Техніка, 2001.
5. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма [Текст] / И. Е. Иродов. — М. : Высшая школа, 1991.
6. Калашников, С. Г. Электричество [Текст] / С. Г. Калашников. — М. : Наука, 1977.
7. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике [Текст] / И. Е. Иродов. — М. : Наука, 1988.
8. Чертов, А. Г. Задачник по физике [Текст] / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. — М. : Высшая школа, 1988.

Елементи векторного аналізу

Скалярні та векторні поля

Якщо з кожною точкою $M(x, y, z)$ деякої просторової області пов'язана скалярна або векторна величина, то говорять, що задано поле цієї величини, *скалярне* або *векторне*.

Якщо в деякій прямокутній координатній системі O_{xyz} задано скалярне поле $U(x, y, z)$, то поверхня, що описується рівнянням $U(x, y, z) = \text{const}$, називається *поверхнею рівня*.

Для векторного поля \vec{A} , яке в системі координат O_{xyz} має компоненти A_x, A_y, A_z , визначені векторні лінії. *Векторною лінією* називається крива, напрямком якої в кожній точці $M(x, y, z)$ збігається з напрямком вектора \vec{A} , що відповідає цій точці. Векторна лінія характеризується рівностями

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

Гradient

Нехай задано скалярне поле $U(M) = U(x, y, z)$. Вектор \vec{g} з координатами $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ називається *градієнтом* величини U і позначається так:

$$\vec{g} = \text{grad}U.$$

Зважаючи на зв'язок градієнта та похідної функції U за напрямком \vec{l} , можна дати безкоординатне визначення градієнта: *градієнтом скалярної величини U* в заданій точці називається вектор, який за числовим значенням і за напрямком характеризує найбільшу швидкість зростання величини U .

Скалярне поле U породжує *векторне* поле градієнта $\text{grad}U$.

Використовуючи введений Гамільтоном символічний вектор з координатами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, який називається «наблю» й позначається ∇ , можна записати:

$$\text{grad}U = \nabla U.$$

Дивергенція

Нехай задано деяке векторне поле \vec{A} . Візьмемо поверхню S і, вибравши деяку її сторону, позначимо через $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, напрямляючи косинуси відповідно напрямленої нормалі \vec{n} .

Тоді поверхневий інтеграл

$$\oint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) dS = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

називають потоком вектора \vec{A} через поверхню S у заданому напрямку.

Розглянемо замкнену поверхню S , яка обмежує тіло об'ємом V . Нехай \vec{n} — зовнішня нормаль до поверхні S . Тоді за формулою Остроградського — Гаусса маємо

$$\oint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) dS = \int_V \left(\frac{A_x}{x} + \frac{A_y}{y} + \frac{A_z}{z} \right) dx dy dz.$$

Дивергенцією вектора $\vec{A} (A_x, A_y, A_z)$ називають вираз:

$$\frac{A_x}{x} + \frac{A_y}{y} + \frac{A_z}{z}$$

та позначають $\operatorname{div} \vec{A}$.

Формула Остроградського — Гаусса тепер перепишемо так:

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz.$$

З використанням вектора \vec{n} визначення дивергенції може бути записано таким чином:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{n} \cdot \vec{A}.$$

У правій частині цього рівняння маємо скалярний добуток векторів \vec{n} та \vec{A} .

Дивергенції можна дати визначення, не пов'язане з вибором координатної системи. Оточимо точку M будь-яким тілом V , обмеженим поверхнею S . Нехай V — об'єм тіла. Стягуючи V у точку M , матимемо:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS}{V}.$$

Ротор

Нехай $\vec{A}(M)$ — векторне поле в області D і L — замкнена крива в межах цієї області.

Циркуляцією вектора \vec{A} вздовж L називають інтеграл

$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Вектор з координатами

$$\left(\frac{A_x}{y} - \frac{A_y}{z}, \frac{A_x}{z} - \frac{A_z}{x}, \frac{A_y}{x} - \frac{A_x}{y} \right)$$

називають *ротором* вектора \vec{A} і позначають $\text{rot } \vec{A}$.

У векторному вигляді формула Стокса має вигляд:

$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS,$$

тобто циркуляція вектора \vec{A} дорівнює потоку вектора $\text{rot } \vec{A}$ через поверхню, обмежену цим контуром. При цьому напрямки обходу і напрямки нормалі мають бути узгоджені.

Дано визначення вектора $\text{rot } \vec{A}$, не пов'язане з системою координат. Виберемо в точці M довільний напрямок \vec{n} і оточимо точку M площадкою S з контуром L , яка лежить у площині, перпендикулярній вектору \vec{n} . Нехай S — площа цієї площадки. Стягуючи S у точку M , матимемо:

$$\text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} = \lim_{(S) \rightarrow M} \frac{\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz}{S}.$$

Таким чином, вдається визначити проекцію вектора $\text{rot } \vec{A}$ на будь-який напрямок.

За допомогою вектора \vec{n} визначення $\text{rot } \vec{A}$ можна записати у вигляді

$$\text{rot } \vec{A} = [\vec{n}, \vec{A}],$$

де праворуч стоїть векторний добуток векторів \vec{n} і \vec{A} .

Основні фізичні сталі

Стала	Позначення	Числове значення
Прискорення вільного падіння	g	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Стала Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Універсальна газова стала	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Молярний об'єм ідеального газу при нормальних умовах	V_0	$22,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3 / \text{моль}$
Нормальний атмосферний тиск	P_0	$1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{23} \text{ Дж}/\text{К}$
Стала Фарадея	F	$9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл}/\text{моль}$
Елементарний заряд	e	$1,60 \cdot 10^{19} \text{ Кл}$
Маса спокою електрона	m_e	$5,49 \cdot 10^4 \text{ а.о.м.}$ $9,11 \cdot 10^{31} \text{ кг}$
Маса спокою протона	m_p	$1,00728 \text{ а.о.м.}$ $1,67 \cdot 10^{27} \text{ кг}$
Маса спокою нейтрона	m_n	$1,00866 \text{ а.о.м.}$ $1,67 \cdot 10^{27} \text{ кг}$
Відношення заряду електрона до його маси	$\frac{e}{m_e}$	$1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл}/\text{кг}$
Електрична стала	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{12} \text{ Ф}/\text{м}$
Магнітна стала	$\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$	$4 \cdot 10^7 \text{ Гн}/\text{м}$ $12,57 \cdot 10^7 \text{ Н}/\text{А}^2$
Швидкість світла в вакуумі	c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$
Стала Стефана — Больцмана		$5,67 \cdot 10^8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала Планка	h	$6,626 \cdot 10^{34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала в законі зміщення Віна	b	$2,9 \cdot 10^3 \text{ м} \cdot \text{К}$
Стала в другому законі Віна	C	$1,30 \cdot 10^5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^5)$
Стала Рідберга	R	$1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	a_0	$5,29 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	e	$2,43 \cdot 10^{12} \text{ м}$

Стала	Позначення	Числове значення
Магнетон Бора	e	$9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерний магнетон	N	$5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
Атомна одиниця маси	а.о.м	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Коефіцієнт пропорційності між масою й енергією	c^2	$8,99 \cdot 10^{16}$ Дж/кг

Питомий опір і температурний коефіцієнт опору (при 20 С)

Провідник	Питомий опір, нОм·м	Температурний коефіцієнт опору, К ⁻¹
Алюміній	28	0,0038
Вольфрам	55	0,0051
Вугілля	40	-0,0008
Графіт	8000	
Залізо	98	0,0062
Константан	480	0,00002
Мідь	17,2	0,0043
Нікелін	400	0,000017
Ніхром	980	0,00026
Ртуть	958	0,0009
Свинець	211	0,0042
Сталь	120	0,006

Діелектрична проникність речовин

Речовина	
Вода	81
Гас	2
Масило трансформаторне	2,2
Парафін	2
Парафіновий папір	3,7
Слюда	6
Скло	5,5–10
Фарфор	6
Ебоніт	2,6

Робота іонізації, еВ

Азот	15,80
Аргон	15,70
Водень	15,40
Вуглекислий газ	14,40
Гелій	24,45
Кисень	13,56
Натрій	5,12
Неон	21,48

Електрохімічні еквіваленти, мг/Кл

Алюміній (Al ⁺⁺⁺)	0,093	Золото (Au ⁺⁺)	0,681	Нікель (Ni ⁺⁺⁺)	0,203
Вісмут (Bi ⁺⁺⁺)	0,719	Мідь (Cu ⁺)	0,660	Срібло (Ag ⁺)	1,118
Залізо (Fe ⁺⁺)	0,289	Мідь (Cu ⁺⁺)	0,329	Хром (Cr ⁺⁺⁺)	0,180
Залізо (Fe ⁺⁺⁺)	0,193	Нікель (Ni ⁺⁺)	0,304	Цинк (Zn ⁺⁺)	0,338
Золото (Au ⁺)	2,043				

Робота виходу електронів з металів, eВ

Вольфрам	4,50	Мідь	4,47	Рубідій	2,13
Залізо	4,74	Молибден	4,20	Срібло	4,74
Золото	4,68	Натрій	2,30	Тантал	4,07
Калій	2,00	Нікель	5,00	Цезій	1,97
Літій	2,40	Платина	5,29	Цинк	4,00
Магній	3,46	Ртуть	4,52		

Множники і префікси для утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позначення	Множник	Найменування	Позначення	Множник
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	мілі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^9	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^3	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	Ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}

Латинський алфавіт

A, a — а	F, f — еф	K, k — ка	P, p — пе	U, u — у	X, x — ікс
B, b — бе	G, g — ге	L, l — ель	Q, q — ку	V, v — ве	Y, y — ігрек
C, c — це	H, h — аш	M, m — ем	R, r — ер	W, w — дубль-ве	Z, z — зет
D, d — де	I, i — і	N, n — ен	S, s — ес		
E, e — е	J, j — йот	O, o — о	T, t — те		

Грецький алфавіт

, — альфа	, — ета	, — ню	, — тау
, — бета	, — тета	, — ксі	, — іпсилон
, — гамма	, — йота	, — омікрон	, — фі
, — дельта	, — капша	, — пі	, — хі
, — епсилон	, — ламбда	, — ро	, — пси
, — дзета	, — мію	, — сигма	, — омега

Деякі сталі числа і наближені формули

Сталі числа	Наближені формули (при 1)
3,1416	$(1 + \frac{1}{n})^n$
e^2 9,8696	e^x
\sqrt{e} 1,7725	$\ln(1 + x)$
e 2,7183	$\sin x$
$\lg e$ 0,4343	$\cos x$
$\ln 10$ 2,3026	$1 - x^2/2$
	$\text{tg } x$

Навчальне видання

КІБЕЦЬ Інна Миколаївна
РИБАЛКА Антоніна Іванівна
СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ
Частина 2

Електрика та магнетизм

Навчальний посібник

Редактор *Т. М. Матвієнко*
Коректор *Ю. В. Статкевич*
Комп'ютерна верстка *І. Г. П'ятигорської*
Дизайн обкладинки *О. Л. Герасименюк*

Підписано до друку 14.07.2009. Формат 60 90 $\frac{1}{16}$. Друк ризографічний.
Папір офсетний. Гарнітура SchoolBook. Умов. друк. арк. 26,5.
Обл.-вид. арк. 25,4. Тираж 500 прим. Зам. № 127

ТОВ «Компанія СМіТ»
61166, м. Харків, просп. Леніна, 14
Тел.: 8 (057) 717-54-94
Факс: 8 (057) 702-13-07
E-mail: book@smit.com.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 435 від 26.04.2001

Друк — ФОП Васильєва Н. В.
м. Харків, просп. Леніна, 14
тел. 8 (057) 702-13-07