

І. М. Кібець  
А. І. Рибалка  
В. О. Стороженко

# ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

з прикладами  
і задачами

**Квантова та атомна фізика.**  
**Фізика твердого тіла.**  
**Ядерна фізика**

Частина III  
Том 2



Харків  
Компанія СМІТ  
2014

---

ББК 22.33  
УДК 537  
К38

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів  
(Лист № 1/11-1165 від 29.01.14)*

**Р е ц е н з е н т и:**

*О. Г. Нерух*, д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. каф. математики  
Харківського національного університету радіоелектроніки;  
*О. П. Сук*, канд. фіз.-мат. наук,  
проф. каф. загальної та експериментальної фізики НТУ «ХПІ»

**Кібець І. М.**

**К38** Загальна фізика з прикладами і задачами [Текст]. Ч. III,  
т. 2. Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла. Ядер-  
на фізика : навч. посібник / І. М. Кібець, А. І. Рибалка,  
В. О. Стороженко. — Х. : Компанія СМІТ, 2014. — 304 с.

ISBN 978-617-621-009-2  
ISBN 978-617-621-011-5 (Т.2)

Для студентів і викладачів вищих технічних навчальних закладів.

**ББК 22.33  
УДК 537**

ISBN 978-617-621-009-2  
ISBN 978-617-621-011-5 (Т.2)

© І. М. Кібець, А. І. Рибалка,  
В. О. Стороженко, 2014  
© ТОВ «Компанія СМІТ», 2014

## ЗМІСТ

<b>II. КВАНТОВА ТА АТОМНА ФІЗИКА . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>6. Елементи квантової механіки. . . . .</b>	<b>6</b>
6.1. Хвильові властивості мікрочастинок . . . . .	6
6.2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга та його наслідки . . . . .	11
6.3. Хвильова функція. Її фізичний зміст та властивості . . . . .	16
6.4. Загальне рівняння Шредінгера . . . . .	20
6.5. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів . . . . .	21
6.6. Деякі випадки руху мікрочастинок . . . . .	23
6.7. Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Тунельний ефект. . . . .	29
6.8. Лінійний гармонічний осцилятор у квантовій механіці. . . . .	34
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки . . . . .	38
Приклади розв'язання задач . . . . .	40
Задачі для самостійного розв'язання . . . . .	52
<b>7. Будова атома . . . . .</b>	<b>62</b>
7.1. Перші моделі будови атома. Дослід Резерфорда . . . . .	62
7.2. Спектр атома водню . . . . .	66
7.3. Модель атома Бора . . . . .	68
7.4. Дослід Франка і Герца . . . . .	72
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки . . . . .	75
Приклади розв'язання задач . . . . .	76
Задачі для самостійного розв'язання . . . . .	78
<b>8. Квантова теорія воднеподібних та багатоелектронних атомів. . . . .</b>	<b>82</b>
8.1. Квантовомеханічна теорія воднеподібного атома. . . . .	82
8.2. Механічний і магнітний моменти електрона. Спін електрона . . . . .	88
8.3. Тонка структура спектрів. Спін-орбітальна взаємодія . . . . .	93
8.4. Повний момент імпульсу електрона . . . . .	94
8.5. Квантова теорія багатоелектронних атомів . . . . .	96
8.6. Ефект Зеемана. Атом у магнітному полі. . . . .	99
8.7. Принцип Паулі. Періодична система елементів Д. І. Менделєєва . . . . .	102
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки. . . . .	106
Приклади розв'язання задач. . . . .	108
Задачі для самостійного розв'язання . . . . .	116
<b>9. Випромінювання та спектри . . . . .</b>	<b>120</b>
9.1. Атомні спектри. . . . .	120
9.2. Рентгенівські спектри. Закон Мозлі. . . . .	121
9.3. Види хімічних зв'язків у молекулах. Обмінна взаємодія . . . . .	124
9.4. Енергія молекули. . . . .	126
9.5. Молекулярні спектри . . . . .	131
9.6. Комбінаційне розсіяння світла . . . . .	132

Контрольні запитання та завдання для самоперевірки. . . . .	133
Приклади розв'язання задач. . . . .	134
Задачі для самостійного розв'язання. . . . .	137
<b>10. Випромінювання й поглинання електромагнітних хвиль речовиною. . . . .</b>	<b>141</b>
10.1. Спонтанне й вимушене випромінювання. . . . .	141
10.2. Заселеність енергетичних рівнів. Інверсна заселеність. . . . .	145
10.3. Квантове підсилення та генерація світла. . . . .	146
10.4. Квантові генератори (лазери) та їх застосування. . . . .	147
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки. . . . .	150
<b>III. ФІЗИКА ТВЕРДОГО ТІЛА. . . . .</b>	<b>151</b>
<b>11. Квантові явища в твердих тілах. . . . .</b>	<b>151</b>
11.1. Фазовий простір. Квантові статистики. . . . .	151
11.2. Виродження систем квантових частинок. . . . .	154
11.3. Кількість станів у фазовому просторі. . . . .	155
11.4. Квантова теорія вільних електронів в металі. . . . .	156
11.5. Розподіл електронів провідності за енергіями в металі. . . . .	159
11.6. Елементи квантової теорії електропровідності металів. . . . .	161
11.7. Квантові явища при низьких температурах. . . . .	163
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки. . . . .	168
Приклади розв'язання задач. . . . .	169
Задачі для самостійного розв'язання. . . . .	173
<b>12. Теплові властивості твердих тіл. . . . .</b>	<b>177</b>
12.1. Класифікація кристалічних твердих тіл. . . . .	178
12.2. Класична теорія теплоємності твердих тіл (кристалів). . . . .	180
12.3. Квантова теорія теплоємності Ейнштейна. . . . .	181
12.4. Квантова теорія теплоємності Дебая. . . . .	183
12.5. Електронна теплоємність. . . . .	186
12.6. Фонони. . . . .	188
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки. . . . .	189
Приклади розв'язання задач. . . . .	189
Задачі для самостійного розв'язання. . . . .	192
<b>13. Зонна теорія твердого тіла. . . . .</b>	<b>196</b>
13.1. Створення енергетичних зон в кристалах. . . . .	196
13.2. Зонна структура металів, діелектриків, напівпровідників. . . . .	199
13.3. Фізичні властивості напівпровідників. . . . .	200
13.4. Контактні явища в металах та напівпровідниках. . . . .	207
13.5. Термоелектричні явища. . . . .	213
13.6. Фотопровідність. Внутрішній фотоефект. . . . .	217
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки. . . . .	219
Приклади розв'язання задач. . . . .	221
Задачі для самостійного розв'язання. . . . .	223

<b>IV. ОСНОВИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ФІЗИКИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК</b>	<b>225</b>
<b>14. Атомне ядро.</b>	<b>227</b>
14.1. Склад та характеристика атомного ядра	227
14.2. Енергія зв'язку ядра	229
14.3. Ядерні сили та моделі ядра	230
14.4. Радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду	232
14.5. Ядерні реакції.	242
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки.	248
Приклади розв'язання задач	249
Задачі для самостійного розв'язання	251
<b>15. Елементарні частинки</b>	<b>254</b>
15.1. Види взаємодії між елементарними частинками	254
15.2. Класифікація елементарних частинок	255
15.3. Закони збереження	257
15.4. Античастинки	260
15.5. Кваркова модель адронів	262
Контрольні запитання та завдання для самоперевірки.	263
Приклади розв'язання задач	264
Задачі для самостійного розв'язання	265
<b>Тести</b>	<b>267</b>
<b>Література.</b>	<b>297</b>
<b>Додаток</b>	<b>298</b>



# КВАНТОВА ТА АТОМНА ФІЗИКА

## 6 Елементи квантової механіки

---

Фізичні явища, що відбуваються у мікросвіті, де лінійні розміри об'єктів вивчення порядку  $10^{-8}$ — $10^{-15}$  м, не можна зрозуміти та пояснити спираючись на поняття, принципи та закони класичної фізики, які виникли та сформувалися на основі вивчення макроскопічних об'єктів. Фізика елементарних частинок, атомів та їх ядер, молекул, великих колективів атомів (кристалів) базується на квантовій механіці.

В основі квантової механіки лежать уявлення: про дискретну зміну енергії частинок (Планк); про дискретність електромагнітного поля (фотони Ейнштейна); про хвильові властивості матерії (Луї де Бройль); про квантованість деяких фізичних величин, які характеризують стан мікрочастинки в певних умовах. Квантова механіка та будь-яка теорія, побудована на її основі, є індетермінованою.

### 6.1. Хвильові властивості мікрочастинок

Мікрочастинок — елементарні частинки (електрони, протони, нейтрони, фотони та інші) та складні частинки, утворені із порівняно невеликої кількості елементарних частинок (ядра атомів, атоми, молекули).

Хвилі де Бройля

Французький фізик Луї де Бройль, аналізуючи корпускулярно-хвильові властивості

світла, які цілком підтверджені дослідним шляхом, у 1924 році висунув гіпотезу про *універсальність корпускулярно-хвильового дуалізму*.

Припустивши, що частинки речовини поряд із корпускулярними властивостями мають також і хвильові, де Бройль переніс на випадок частинок речовини ті самі правила переходу від однієї картини до іншої, які справедливі у випадку світла.

Співвідношення Ейнштейна, які зв'язують корпускулярні характеристики (енергію  $E$  і імпульс  $\vec{p}$ ) з хвильовими (частотою і довжиною хвилі) для світла записуються в такій формі:

$$E = h \nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}. \quad (6.1)$$

Встановлені для фотонів (частинок, маса спокою яких дорівнює нулю) співвідношення (6.1) де Бройль узагальнив на електрони й інші мікрочастинки, маса спокою яких не дорівнює нулю. Будь-якій частинці з імпульсом  $\vec{p}$  співставляється хвиля з довжиною  $\lambda$ , яка визначається за формулою де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (6.2)$$

а також частота

$$\nu = \frac{E}{h}. \quad (6.3)$$

Таким чином, співвідношення Ейнштейна (6.1) в теорії де Бройля стають універсальними і застосовуються для аналізу як корпускулярних властивостей світла, так і для хвильових властивостей рухомих електронів.

Підтвердження або спростування гіпотези де Бройля міг дати тільки дослід. У яких явищах природи можуть проявитися хвильові властивості речовини, якщо вони дійсно існують? Незалежно від фізичної природи хвиль — це явища інтерференції та дифракції. Безпосередньо спостерігаємою величиною в цих явищах є довжина хвилі  $\lambda$ .

**Досліди  
Девіссона  
та Джермера**

Гіпотеза де Бройля була блискуче підтверджена в 1927 р. дослідями американських фізиків Девіссона і Джермера.

В досліді (рис. 6.1) використовувався монокристал нікелю (кристал кубічної системи). Паралельний пучок електронів однакової швидкості, створюваний «електронною гарматою» А, падав у вакуумі перпендикулярно до площини кристала. Розсіяні електрони

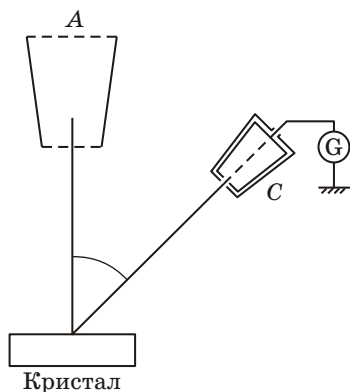


Рис. 6.1

уловлювалися колектором  $G$ , в якості якого застосовувався подвійний циліндр Фарадея. Внутрішній циліндр з'єднувався з чутливим гальванометром, показання якого свідчили про інтенсивність пучків електронів, розсіяних у різних напрямках. Колектор міг повертатися, залишаючись весь час у площині падіння. Змінювався також й прискорюваний потенціал. При куті  $= 50^\circ$  та різних прискорюючих напругах спостерігався максимум, але свого повного значення він досяг при прискорюючій напрузі  $54 \text{ В}$  ( $= 0,167 \text{ нм}$ ). Інтерпретація таких максимумів на основі дифракційної картини показала, що довжина хвилі дифрагуючого електрона збігається з передбаченою де Бройлем (6.2).

Таким чином, було показано, що пучок електронів, розсіяних від дифракційної решітки — кристала нікелю, — дає виразну *дифракційну картину*. Дифракційні максимуми відповідають формулі Вульфа — Брегга  $2d \sin \theta = \lambda$ , а бреггівська довжина хвилі  $= 0,165 \text{ нм}$  практично співпадає з довжиною хвилі, знайденою за формулою (6.2).

Досліди  
Тартаковського  
і Томсона

Формулу де Бройля було підтверджено й дослідами П. С. Тартаковського та Г. Томсона, які спостерігали дифракційну картину при проходженні пучка швидких електронів (енергія  $\approx 50 \text{ кеВ}$ ) крізь металеву фольгу (товщина  $\approx 1 \text{ мкм}$ ) (рис. 6.2).

На фотоплівці, розміщеній за фольгою, спостерігалася центральна пляма, оточена дифракційними кільцями (рис. 6.3, а, б).

Отримана таким чином електронограма золота (рис. 6.3, а) порівнюється з отриманою в аналогічних умовах рентгенограмою алюмінію (рис. 6.3, б). Схожість обох картин разюча.

Щоб переконатися у тому, що дифракційна картина утворюється самими розсіяними електронами, а не вторинним

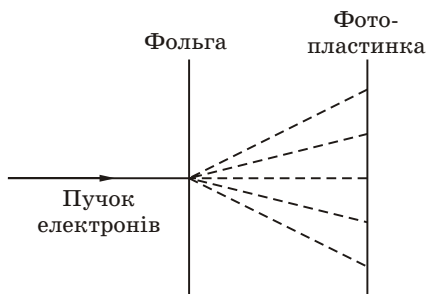


Рис. 6.2



рентгенівським випромінюванням, в просторі між фольгою та фотоплівкою створювали магнітне поле. При цьому відбувалося зміщення та спотворення дифракційної картини. Цього не повинно було бути, якщо б картина виникла внаслідок дифракції рентгенівських променів.

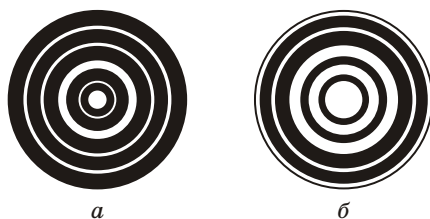


Рис. 6.3

**Дифракція  
одиначних  
електронів**

Після виявлення хвильових властивостей потоку електронів перед вченими постало запитання: хвильові властивості — властивості пучка чи окремих частинок? Може це результат взаємодії частинок однієї з одною?

У 1949 році російські вчені Л. М. Біberman, М. Г. Сушкін та В. О. Фабрикант на дослідах показали, що хвильові властивості притаманні кожному електрону зокрема. Вони здійснили дослід при такій малій силі струму (малій інтенсивності електронного пучка), що на тонку плівку речовини потрапляв лише один електрон. Спостерігалася така сама картина, що й при проходженні потоку електронів.

Німецький вчений О. Штерн та його співробітники показали, що пучки атомів і молекул також виявляють дифракційні якості.

Таким чином, гіпотеза де Бройля цілком підтверджена експериментально для всіх матеріальних частинок і має універсальний характер, тобто *хвильові властивості мікрочастинок — закон природи.*

У такому випадку хвильові властивості повинні мати і макроскопічні тіла. Чому ж вони не підтверджені експериментально? Наприклад частинці, маса якої  $m = 1$  г, швидкість  $v = 1$  м/с відповідає хвиля де Бройля  $\lambda = 6,62 \cdot 10^{-31}$  м. Така довжина хвилі лежить за межами спостереження. Тому вважається, що макроскопічні тіла проявляють лише одну сторону своїх властивостей — корпускулярну і не проявляють хвильової.

Уявлення про двоїстість корпускулярно-хвильової природи мікрочастинок речовини поглиблюється ще й тим, що на частинки речовини переноситься зв'язок між повною енергією частинки  $E$  та її частотою  $\nu$  хвиль де Бройля

$$E = h \nu \quad (6.4)$$

Це свідчить про те, що співвідношення між енергією та частотою у формулі (6.4) має характер *універсального співвідношення*, справедливого як для фотонів, так і для інших мікрочастинок.

Підтверджена експериментально гіпотеза де Бройля про корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей речовини докорінно змінила уявлення про властивості мікрооб'єктів.

Усім мікрооб'єктам притаманні як корпускулярні, так і хвильові властивості; але в той же час будь-яку із мікрочастинок не можна вважати ні частинкою, ані хвилею в класичному розумінні.

Деякі  
властивості  
хвиль де Бройля

Розглянемо частинку, маса якої  $m$  і яка вільно рухається із швидкістю  $v$ . Обчислимо для неї фазову та групову швидкості хвиль де Бройля.

Як відомо, фазова швидкість:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}, \quad (6.5)$$

де  $\omega = 2\pi \nu$  — циклічна частота;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — хвильове число.

Для хвиль де Бройля фазова швидкість

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{h\nu}{h/\lambda} = \frac{E}{p}. \quad (6.6)$$

В релятивістській теорії  $E = mc^2$ ,  $p = mv$ , де  $v$  — швидкість частинки,  $m$  — релятивістська маса.

В цьому випадку

$$v_{\phi} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}. \quad (6.7)$$

Оскільки завжди  $v \leq c$ , то звідси випливає, що  $v_{\phi} > c$ . Для фотонів у вакуумі  $v = c$ , тому в цьому випадку  $v_{\phi} = c$ .

Отриманий результат не повинен нас засмучувати, оскільки на величину фазової швидкості не накладається жодних обмежень. До того ж згідно сучасній фізичній інтерпретації, фазова швидкість хвиль де Бройля має чисто символічне значення, тому що ця інтерпретація відносить її до числа принципово не спостережуваних величин.

Принципово спостережуваною величиною є групова швидкість хвиль де Бройля.

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(2\pi h\nu)}{2\pi(h/\lambda)} = \frac{dE}{dp}. \quad (6.8)$$

Ця величина не містить в собі ніякої невизначеності, оскільки не тільки  $dp$ , а й приріст енергії  $dE$  визначені однозначно. При будь-якій швидкості руху частинки  $dE = vdp$ , тому завжди

$$v_{\text{гр}} = v, \quad (6.9)$$

тобто групова швидкість хвиль де Бройля дорівнює швидкості частинки.

## 6.2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга та його наслідки

У класичній механіці стан матеріальної точки в кожен момент часу характеризується її положенням та імпульсом. Реальні мікрочастинки — електрони, протони, атоми, молекули і таке інше — більш складні об'єкти. *Не можна характеризувати миттєвий стан мікрочастинки точним завданням її положення та імпульсу.* Це пов'язано з особливостями її природи. Мікрочастинка — це не частинка і не хвиля, а об'єкт, який має властивості і частинки і хвилі одночасно. Не можна сказати, що у визначеній точці простору довжина хвилі дорівнює  $\lambda$ , якщо про хвильове поле у всіх інших точках простору нічого не відомо. Довжина хвилі — *характеристика синусоїди*, а синусоїда — *нескінченна періодична крива*. Вирізаний із синусоїди малий її елемент втрачає саму характерну її якість — *періодичність*.

Зрозуміло, що вираз «довжина хвилі в даній точці простору  $x$  дорівнює  $\lambda$ » або «частота хвильового процесу у даний момент часу  $t$  дорівнює  $\nu$ » не мають ніякого змісту — величина  $\lambda$  не є функцією  $x$ , а величина  $\nu$  — функцією  $t$ .

З іншого боку, якщо будь-яке хвильове утворення займає обмежену область простору, то його завжди можна представити синусоїдами. Тільки однієї синусоїди для цього недостатньо. Потрібен пакет хвиль (хвильовий пакет) — суперпозиція множини синусоїд різних частот. Якщо довжина хвильового пакету  $\Delta x$ , то хвильові числа  $k$ , необхідні для його утворення, не можуть займати як завгодно вузький інтервал  $\Delta k$ .

Мінімальна ширина інтервалу  $\Delta k$  повинна приблизно задовольняти співвідношенню

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi. \quad (6.10)$$

Це суцього хвильове співвідношення.

Тепер розглянемо хвильовий пакет із хвиль де Бройля, розміри якого і відповідні границі хвильових чисел задовольняють

умові (6.10). Згідно з статистичною інтерпретацією імовірність виявлення частинки буде відмінною від нуля тільки у межах пакета. Чому ж буде дорівнювати імпульс частинки?

Кожній хвилі де Бройля з хвильовим вектором  $\vec{k}$  відповідає значення імпульсу  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . Визначеного імпульсу для всього пакета не існує. Існує набір імпульсів, що заповнюють інтервал від  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  до  $\vec{p} + d\vec{p} = \hbar(\vec{k} + d\vec{k})$ . Невідомо, який імпульс буде виявленим у хвильовому пакеті при вимірюванні. В кращому випадку можна вказати тільки його імовірність. При вимірюванні імпульс буде виявленим з тією чи іншою імовірністю між  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  і  $\vec{p} + d\vec{p} = \hbar(\vec{k} + d\vec{k})$ . Тому, якщо виразити  $d\vec{k}$  через  $d\vec{p}$ , співвідношення (6.10) можна буде переписати у вигляді

$$x \cdot dp \geq 2 \hbar = h. \quad (6.11)$$

Це співвідношення має назву *співвідношення або принципу невизначеностей Гейзенберга для координати та імпульсу частинки*. Воно визначає допустиму *принципову границю невизначеностей*  $x$  і  $p$ , з якими стан частинки можна характеризувати класично, тобто координатою  $x$  та імпульсом  $p$ . Чим точніше  $x$ , тим з меншою точністю можливо характеризувати  $p$ , та навпаки. Зміст співвідношення (6.11) відображає той факт, що в природі *об'єктивно не існує* стану частинок з точно визначеними значеннями обох змінних  $x$  і  $p$ .

Принцип невизначеностей був сформульований Гейзенбергом у 1927 році і став важливим кроком в *інтерпретації закономірностей мікросвіту та побудові квантової механіки*.

У тривимірному випадку класично частинка характеризується трьома прямокутними координатами  $x, y, z$  й канонічно спряженими їм імпульсами  $p_x, p_y, p_z$ . В цьому випадку співвідношення невизначеностей Гейзенберга виражаються трьома нерівностями:

$$\begin{aligned} x \cdot p_x &\geq \hbar; \\ y \cdot p_y &\geq \hbar; \\ z \cdot p_z &\geq \hbar. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Співвідношення (6.11) проявляється при будь-якій спробі точного виміру положення або точного імпульсу частинки. Виявляється, що уточнення положення частинки позначається на збільшенні неточності у значенні імпульсу і навпаки. Проілюструємо це на прикладі.

**Дифракція  
електронів  
на щілині**

Нехай рух електрона описується плоскою монохроматичною хвилею де Бройля. Електрон в такому стані має цілком визначений імпульс, але його координата зовсім не визначена. Для

визначення  $x$ -координати електрона на шляху хвилі перпендикулярно до напрямку її розповсюдження встановлюється непрозорий екран зі щілиною завширшки  $d$  (рис. 6.4).

У момент проходження електрона крізь щілину ситуація змінюється: координата вимірюється з точністю до  $x = d$  (ширина щілини), але при цьому втрачається точність у визначенні імпульсу  $p_x$ . Через дифракцію електрон може бути виявленим у межах центрального максимуму (більш високими максимумами нехтуємо), який наближено можна прийняти за все поле. В цьому наближенні після проходження крізь щілину невизначеність  $p_x$  імпульсу електрона має порядок:

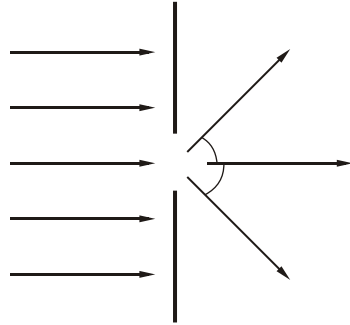


Рис. 6.4

$$p_x = p \sin \theta .$$

Помноживши цей вираз на  $x = d$  й маючи на увазі, що  $d \sin \theta = \lambda$ , а  $p = h/\lambda$ , отримуємо

$$x \cdot p_x \geq h,$$

як і повинно бути згідно співвідношенню Гейзенберга. Чим вужча щілина, тим точніше буде виміряна координата електрона, але при цьому втрачається точність у визначенні його імпульсу.

**Співвідношення  
невизначеностей  
для часу і енергії**

Поряд із співвідношенням (6.10) у хвильовій теорії виводиться також співвідношення

$$t \cdot \Delta E > 2 \cdot h . \quad (6.13)$$

Зміст цього співвідношення полягає у тому, що обмежений у часі хвильовий процес не може бути монохроматичним. Якщо довжина процесу у часі становить  $t$ , то розкид частот хвиль, які до нього входять, у кращому випадку задовольняють співвідношенню (6.13). Тому, якщо для спостереження навіть монохроматичного процесу надано малий час  $t$ , то частота процесу принципово буде знайдена в кращому випадку з помилкою, підпорядкованою співвідношенню (6.13).

Якщо частоті співставити енергію за формулою  $E = \hbar \omega$ , то формула (6.13) перейде в наступну:

$$t \cdot E > 2 \hbar = h. \quad (6.14)$$

Формула (6.14) має назву *співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії і часу*.

Співвідношення (6.14) означає, що чим коротший час існування будь-якого стану або час, відведений для його спостереження, тим з меншою визначеністю можна говорити про енергію цього стану. Навпаки, чим довший цей час, тим більш точно визначена енергія стану.

Оскільки в класичній механіці приймається, що вимірювання координати і імпульсу може бути виконано з будь-якою точністю, то співвідношення невизначеностей таким чином є квантовим обмеженням застосування класичної механіки до мікрооб'єктів. Наведемо деякі конкретні приклади.

1. Припустимо, що пучок електронів рухається вздовж осі  $x$  зі швидкістю  $v = 10^8$  м/с, визначеній з точністю до 0,01 % ( $\Delta v_x = 10^4$  м/с). Знайдемо точність визначення координати електрона. За формулою  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$  з урахуванням  $\Delta p_x = m \Delta v_x$  маємо:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{m \Delta v_x} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^4} = 7,27 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

тобто положення електрона може бути визначено з точністю до тисячної долі міліметра. Така точність достатня для того, щоб можна було говорити про рух електронів по визначеній траєкторії, іншими словами, описувати їхній рух законами класичної механіки.

2. Застосуємо співвідношення Гейзенберга до електрона, що рухається в атомі водню зі швидкістю  $v = 10^6$  м/с. Припустимо, що невизначеність координати електрона  $\Delta x \approx 10^{-10}$  м (порядку розмірів самого атома, тобто можна вважати, що електрон належить даному атому).

Тоді

$$\Delta v_x = \frac{\hbar}{m \Delta x} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} = 7,27 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Таким чином, невизначеність швидкості у декілька разів більша за саму швидкість. Очевидно, що в цьому випадку не можна говорити про рух електрона в атомі по визначеній траєкторії.

Іншими словами, описуючи рух електрона в атомі, не можна користуватися законами класичної механіки.

**Наслідки  
співвідношення  
невизначеностей**

Відмітимо деякі наслідки, що випливають із співвідношення невизначеностей.

1. Не можна локалізувати частинку в одній точці простору.

2. В квантовій механіці неможливо строго заспокоїти частинку, тобто у частинки швидкість не може дорівнювати нулю. Якщо  $v_x = 0$ , то  $p_x = 0$ , тоді згідно співвідношенню невизначеностей  $\Delta x = \infty$ , що є нісенітницею, бо про місце, де буде локалізована частинка нічого сказати не можна. Вона може бути рівноімовірно виявлена в будь-якій точці простору.

3. Квантова частинка не може мати строго визначену траєкторію (бо траєкторія передбачає наявність координати й швидкості у кожній точці простору).

4. При локалізації частинки в обмеженому відрізку  $a$  виникає нижня границя для повної енергії частинки.

Зробимо спробу локалізувати частинку на відрізку  $a$  (рис. 6.5).

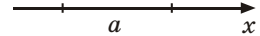


Рис. 6.5

Нехай частинка вільна (немає ніяких потенціальних полів). Зробимо оцінку нижньої границі енергії.

Кінетична енергія завжди більша нуля

$$T = \frac{p_x^2}{2m} > 0.$$

Середнє значення швидкості на відрізку  $a$  дорівнює нулю.

$$\langle v_x \rangle = \frac{\langle p_x \rangle}{m} = 0; \quad \langle (p_x)^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2m} \langle p_x^2 \rangle = \frac{1}{2m} \langle (p_x)^2 \rangle \geq \frac{1}{2m} \left( \frac{h}{\Delta x} \right)^2 \approx \frac{1}{2m} \frac{h^2}{a^2}.$$

Тобто нижня границя енергії частинки, що міститься у відрізку  $a$ , дорівнює:

$$T_{\min} \approx \frac{h^2}{2ma^2}.$$

5. Можливість проникнення квантової частинки в класично недоступну область.

### 6.3. Хвильова функція. Її фізичний зміст та властивості

В класичній механіці господарює механічний детермінізм (визначеність), згідно якому, якщо відомий стан системи в початковий момент часу та відомі закони її руху, можна описати стан цієї системи в будь-який наступний момент часу. При цьому виконується й *принцип причинності*.

В квантовій механіці на перший погляд здавалося, що принцип причинності порушується, тому що з-за співвідношення невизначеностей навіть у початковий момент часу не можна було точно описати стан системи, тим паче в наступні моменти.

Проте стан мікрочастинок із-за їх незвичайних властивостей і повинен описуватися незвичайним для класичної механіки способом.

**Статистична  
інтерпретація  
хвиль де Бройля**

Яким є фізичний зміст хвиль де Бройля та який їхній зв'язок з частинками речовини?

1. Деякий час існувала ідея Шредингера про *частинку як хвильове утворення* — *хвильовий пакет*. Здавалося, що підтвердженням такої точки зору є та обставина, що центр хвильового пакету, подібно до центру групи хвиль, повинен у вакуумі розповсюджуватися з груповою швидкістю, яка згідно (6.9) дорівнює швидкості частинки в класичному її розумінні. Проте хвильовий пакет не може скільки завгодно часу вести себе як частинка. Причина у тім, що навіть у вакуумі хвилям де Бройля притаманна *дисперсія*. Фазова швидкість хвиль  $v_{\phi} = \omega/k$  залежить від частоти  $\omega$  — в цьому й полягає дисперсія. Монохроматичні хвилі різних частот, з яких складається пакет, будуть розходитися з різними фазовими швидкостями. Це призведе до деформації, розпливу і в кінці-кінців до *розпаду* початкового хвильового пакету. Тобто, якби частинка являла собою хвильове утворення, вона була би *нестійкою* й швидко розпадалася б, що не відповідає дійсності.

2. Не можна прийняти й протилежну точку зору: первинними є *частинки*, а хвилі — це їх *утворення*, тобто виникають в середовищі, що складається із частинок, подібно до звуку, що розповсюджується в повітрі. Таке середовище повинно бути достатньо густим, бо про хвилі в середовищі частинок можна говорити лише тоді, коли середня відстань між частинками дуже мала у порівнянні з довжиною хвилі. Але в типових випадках для хвиль де Бройля ця умова не виконується.



Наведені дві спроби фізичного тлумачення хвиль де Бройля є чисто гіпотетичними. В світі експериментальних даних обидві вони виявилися неспроможними.

3. Подолати ці труднощі вдалося Максу Борну, який у 1926 році запропонував *статистичну інтерпретацію* хвиль де Бройля, що дозволило поєднати атомізм частинок з їх хвильовими властивостями.

Згідно статистичної інтерпретації хвилі де Бройля слід розглядати як *хвилі імовірності*. Тобто: ***інтенсивність хвиль де Бройля в будь-якому місці простору пропорціональна імовірності виявити частинку в цьому місці***. Але статистичні або імовірні властивості частинок можуть бути встановлені на досліді не з однією частинкою, а лише з багатьма частинками або тільки з однією частинкою, якщо дослід за визначених умов *повторюється багаторазово*.

Як із статистичної точки зору пояснюється дифракція електронів? В яке місце фотоплівки попадає індивідуальний електрон з достовірністю передбачити не можна; це можна зробити з тим чи іншим ступенем імовірності. Закономірність виявиться статистично, коли на фотоплівку попаде дуже багато електронів. В цьому випадку вони переважно попадуть в ті місця плівки, де повинні знаходитися дифракційні максимуми хвиль де Бройля.

**Хвильова функція — об'єктивна характеристика стану мікрочастинок**

Як відомо, Борн припустив, що за хвильовим законом змінюється не сама імовірність, а величина, яку було названо *амплітудою імовірності* і позначено  $(x, y, z, t)$  (далі ). Цю величину називають

*хвильовою функцією* і позначають символом  $\psi$  (пси).

$\psi$ -функція — комплексна величина, а імовірність  $W$  пропорціональна квадрату її модуля:

$$W \sim |\psi(x, y, z, t)|^2 \tag{6.15}$$

де  $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ , де  $\psi^*$  — функція, комплексно спряжена з  $\psi$ . Таким чином, опис стану мікрооб'єкта за допомогою хвильової функції має *статистичний, імовірний* характер: квадрат модуля хвильової функції (квадрат модуля амплітуди хвиль де Бройля) визначає імовірність знаходження частинки в момент часу  $t$  в області з координатами  $x$  і  $x + dx$ ,  $y$  і  $y + dy$ ,  $z$  і  $z + dz$ .

Таким чином, в квантовій механіці стан мікрочастинок описується хвильовою функцією, яка є *основним носієм інформації* про їх корпускулярні та хвильові властивості.

Імовірність знаходження частинки в елементі об'ємом  $dV$  дорівнює

$$dW = |\psi|^2 dV. \quad (6.16)$$

Величина

$$|\psi|^2 = \frac{dW}{dV}$$

(квадрат модуля  $\psi$ -функції) має зміст *густини імовірності*, тобто визначає імовірність знаходження частинки в одиничному об'ємі в оточенні точки з координатами  $x, y, z$ . Таким чином, фізичний зміст має не сама  $\psi$ -функція, а квадрат її модуля  $|\psi|^2$ , яким задається інтенсивність хвиль де Бройля.

Імовірність знайти частинку в момент часу  $t$  в кінцевому об'ємі  $V$  дорівнює

$$W = \int_V dW = \int_V |\psi|^2 dV.$$

Оскільки  $|\psi|^2 dV$  визначається як імовірність, необхідно хвильову функцію нормувати таким чином, щоби імовірність достовірної події оберталася в одиницю, якщо за об'єм  $V$  прийняти нескінченний об'єм усього простору. Це означає, що за даних умов частинка повинна знаходитися десь у просторі.

Отже, умова нормування імовірності має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1, \quad (6.17)$$

де даний інтеграл (6.17) обчислюється по всьому нескінченному просторі, тобто по координатах  $x, y, z$  від  $-\infty$  до  $\infty$ . Ця умова говорить про об'єктивне існування частинки у просторі і часі.

**Обмежувальні умови**

Для того щоб хвильова функція була об'єктивною характеристикою стану мікрочастинки, вона повинна задовольняти ряду обмежувальних умов.

Функція  $\psi$ , що характеризує імовірність знаходження дії мікрочастинки в елементі об'єму, повинна бути:

1. *Скінченною* (імовірність не може бути більшою за одиницю);
2. *Однозначною* (імовірність не може бути неоднозначною величиною);
3. *Неперервною* (імовірність не може змінюватися стрибком).

Хвильова функція  $\psi$  дає можливість в квантовій механіці знаходити середні значення фізичних величин, що характеризують

даний мікрооб'єкт. Наприклад, середню відстань  $\langle r \rangle$  електрона від ядра обчислюють за формулою

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r |\psi|^2 dV,$$

де інтегрування проводиться, як і у випадку (6.17).

**Принцип  
суперпозиції  
в квантовій  
механіці**

В квантовій механіці принцип суперпозиції поряд із співвідношенням невизначеностей являє собою основний принцип, де розглядається суперпозиція станів.

Принцип суперпозиції у квантовій механіці формулюється так: *якщо для фізичної системи можливий стан, який описується хвильовою функцією  $\psi_1$  і стан з відповідною функцією  $\psi_2$ , то існує стан системи, що описується функцією*

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2,$$

де  $C_1$  та  $C_2$  — будь-які комплексні або дійсні числа, вибір яких лімітується умовою нормування функції  $\psi$ .

Якщо є сукупність власних значень деякої фізичної величини  $q$  й сукупність відповідних їм власних функцій  $\psi_n$ , тобто  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ ;  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ , то згідно з принципом суперпозиції можливий стан, що описується функцією

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \dots + C_n \psi_n.$$

При цьому імовірність появи результату  $q_1$  дорівнює  $|C_1|^2$ , а імовірність появи результату  $q_2$  дорівнює  $|C_2|^2$ .

Псі-функцію будь-якого стану можна розкласти по власних функціях цієї величини, тобто подати у вигляді

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n.$$

$|C_n|^2$  дає імовірність того, що при вимірюваннях будуть отримані відповідні значення величини  $q$ .

Оскільки сума імовірностей повинна дорівнювати одиниці, то

$$\sum_n |C_n|^2 = 1.$$

Принцип суперпозиції в квантовій механіці відіграє більш фундаментальну роль, ніж в електродинаміці. Тут спостерігається не

наближення, а точний принцип, який виражає саму можливість квантово-механічного опису, можливість фізичної інтерпретації апарату квантової механіки.

#### 6.4. Загальне рівняння Шредінгера

Основним рівнянням квантової механіки є рівняння Шредінгера. Подібно тому, як рівняння динаміки Ньютона не можуть бути одержаними теоретично, а є узагальненням великої кількості дослідних фактів, рівняння Шредінгера також не можна вивести з будь-яких відомих раніше співвідношень. Його слід розглядати як основне припущення, справедливості якого підтверджується тим, що всі наслідки цього рівняння точно узгоджуються з дослідними фактами.

Своє рівняння Шредінгер встановив, виходячи з оптико-механічної аналогії.

Покажемо, як можна дійти до рівняння Шредінгера. Для цього розглянемо частинку, що вільно рухається вздовж осі  $X$ . Згідно ідеї де Бройля цій частинці співставляється плоска хвиля, яка записується у вигляді

$$= Ae^{-i(\omega t - kx)}. \quad (6.18)$$

Оскільки

$$= \frac{E}{\hbar}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{p}{\hbar} = \frac{p}{\hbar},$$

рівняння (6.18) має вигляд

$$= Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (6.19)$$

Перша похідна від за часом

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E ;$$

за координатою  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p .$$

Друга похідна

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} .$$

Звідки випливає:

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.20)$$

$$p^2 = -\frac{1}{2} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (6.21)$$

Як відомо, в нерелятивістській механіці енергія та імпульс пов'язані співвідношенням

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Використаємо його для отримання диференціального рівняння.

$$\frac{i\hbar}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Записане у вигляді

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (6.22)$$

рівняння (6.22) описує рух вільної частинки і є *загальним рівнянням Шредінгера*, або рівнянням Шредінгера, що залежить від часу.

Якщо частинка знаходиться в силовому полі, то

$$\frac{p^2}{2m} = E - U(x)$$

і рівняння (6.22) набуває вигляду

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.23)$$

У тривимірному випадку рівняння (6.23) має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (6.24)$$

де  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

## 6.5. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

Для багатьох фізичних явищ мікросвіту важливо знайти рівняння Шредінгера для стаціонарних станів, тобто станів

з фіксованим значенням енергії. Це можливо, якщо функція  $U$  не залежить явно від часу та має зміст потенціальної енергії.

Розв'язок рівняння Шредингера в такому випадку можна представити у вигляді добутку двох функцій, одна з них — функція тільки координат, друга — тільки часу.

$$(x, y, z, t) = (x, y, z) e^{-\frac{iE}{\hbar}t}, \quad (6.25)$$

де  $E$  — повна енергія (у випадку стаціонарного поля  $E = \text{const}$ ). Підставимо (6.25) у (6.24), отримаємо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\frac{iE}{\hbar}t} + U e^{-\frac{iE}{\hbar}t} = \hbar \frac{E}{\hbar} e^{-\frac{iE}{\hbar}t}.$$

Скоротимо на  $e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ , матимемо

$$-\frac{\hbar^2}{2m} + U = E. \quad (6.26)$$

Рівняння (6.26) можна записати у вигляді

$$+ \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) = 0, \quad (6.27)$$

де  $E$  — повна енергія частинки в нерелятивістській формі;  $U$  — потенціальна енергія;  $E - U = T$  — кінетична енергія частинки ( $T = mv^2/2$ ).  $E = T + U$  має в квантовій механіці обмежений характер.

Якщо в (6.26) розглядати  $U$  як оператор, дія якого на псі-функцію зводиться до множення на  $U$ , то рівнянню (6.26) можна надати вигляду

$$\hat{H} = E,$$

де  $\hat{H}$  — оператор, який дорівнює

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} + U.$$

$\hat{H}$  називають гамільтоніаном. Гамільтоніан є оператором енергії.

Рівняння (6.27) має назву *рівняння Шредингера для стаціонарних станів*. Це рівняння є найважливішим рівнянням нерелятивістської квантової механіки та відіграє основну роль в атомній фізиці. *Функції* , що задовольняють рівнянню Шредингера, при

заданому  $U$  мають назву власних функцій. Значення енергії  $E$ , при яких існують розв'язки рівняння Шредінгера, мають назву власних значень.

Розв'язати рівняння Шредінгера — це знайти власні функції і власні значення енергії.

### 6.6. Деякі випадки руху мікрочастинок

**Рух вільної частинки**

У випадку руху вільної частинки на неї не діють сили, тобто потенціальна енергія  $U=0$ . Тоді рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Для вільної частинки, що рухається вздовж осі  $X$ ,  $= \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  і рівняння Шредінгера для стаціонарних станів набуває вигляду

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.28)$$

Рівняння (6.28) описує рух частинок, що мають хвильові властивості. В такому разі рух частинок можна описати за допомогою плоскої хвилі

$$= Ae^{-i(t-kx)}.$$

Очевидно, що  $\frac{\partial}{\partial x} = ikAe^{-i(t-kx)}$ ;  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k^2$ ;  $\frac{\partial}{\partial t} = -i$ .

Тоді рівняння (6.28) набуває вигляду

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \hbar.$$

Оскільки

$$\hbar = E, \text{ то } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E,$$

звідки  $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ .

З іншого боку, хвильове число  $k = 2\pi / \lambda$ , тоді

$$= \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{p_x}.$$

Тобто вільна частинка — плоска монохроматична хвиля де Бройля, для якої імпульс та енергія  $E$  пов'язані співвідношенням

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m},$$

звичайним для нерелятивістських частинок.

Оскільки хвильове число  $k$  може приймати будь-які додатні значення, то і енергія вільної частинки може приймати будь-які значення, тобто її енергетичний спектр є *неперервним*. Крім цього, імпульс частинки дорівнює сталій величині. Імпульс та енергія частинки є одночасно вимірюваними величинами.

Хвильова функція вільної частинки дорівнює

$$(x, t) = Ae^{-i(Et - p_x x)/\hbar}. \quad (6.29)$$

Густина імовірності знаходження частинки в даній точці простору (квадрат модуля хвильової функції)

$$|\psi|^2 = |A|^2$$

не залежить від часу й однакова в будь-якій точці простору.

Загальний розв'язок рівняння Шредінгера для вільної частинки є суперпозицією двох хвиль

$$= Ae^{-i(t - kx)} + Be^{i(t - kx)}.$$

Це пов'язано з тим, що хвильовий вектор  $\vec{k}$  має два напрями розповсюдження: в напрямку осі  $x$  та в протилежному.

**Частинка  
в одновимірній  
нескінченно  
глибокій  
потенціальній ямі**

Розглянемо рух частинки у випадку, коли її місцезнаходження обмежене, наприклад інтервалом  $0 < x < l$ . Графічно такий випадок можна подати за допомогою рис. 6.6, де зображено залежність потенціальної енергії електрона від його розміщення на осі  $x$ . Ця задача деякою мірою наближено моделює рух електрона в атомі.

Проведемо якісний аналіз рішень рівняння Шредінгера стосовно до частинки в одновимірній прямокутній «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками». Потенціальна енергія частинки зовні та всередині потенціальної ями дорівнює



$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq l; \\ \infty, & x > l, \end{cases}$$

де  $l$  — ширина «ями», а енергія відраховується від її дна.

Для одновимірної задачі стаціонарне рівняння Шредінгера (6.27) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) = 0. \quad (6.30)$$

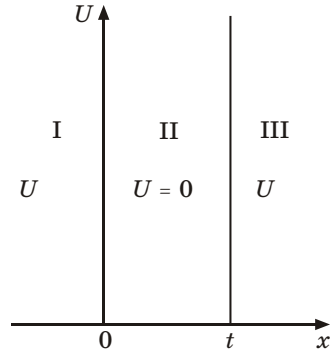


Рис. 6.6

Оскільки всередині «ями» ( $0 < x < l$ ) потенціальна енергія частинки стала, то можна покласти  $U = 0$ . Тоді рівняння (6.30) перепишемо так

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E = 0. \quad (6.31)$$

Загальний розв'язок рівняння (6.31) будемо шукати у вигляді

$$= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (6.32)$$

де  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ .

Для розв'язання задачі треба задати *початкові умови*. Оскільки потенціальна яма нескінченно глибока, то частинка може рухатися тільки всередині ями (область II). Імовірність її знаходження в областях I та III дорівнює нулю, тому й хвильова функція в цих областях дорівнює нулю:

$$I = III = 0.$$

Але хвильова функція повинна бути неперервною. Тому *граничні умови* для даної задачі такі:

$$(0) = 0; \quad (l) = 0.$$

Величини  $A$  і  $B$  знайдемо з граничних умов:

1)  $(0) = A + B = 0$ , звідки випливає  $A = -B$ , а хвильова функція

$$= A(e^{ikl} - e^{-ikl}) = 0.$$

2)  $(l) = A(e^{ikl} - e^{-ikl}) = 0$ .

Перетворимо рівняння (6.32), скориставшись формулами Ейлера ( $e^{-i} = (\cos -i \sin)$ ;  $e^i = (\cos +i \sin)$ ):

$$(l) = A(\cos kl + i \sin kl - \cos kl + i \sin kl) = 0,$$

тобто

$$(l) = 2Ai \sin kl = 0. \quad (6.33)$$

Проаналізуємо отриманий результат.

Коефіцієнт  $A$  не може бути рівним нулю ( $A \neq 0$ ), бо якби  $A = 0$ , хвильова функція також би дорівнювала нулю, а це значить, що хвиль взагалі б не було.

В такому разі  $\sin kl = 0$  і рівняння (6.33) виконується при умові

$$lk = n \quad \text{або} \quad \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} l = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.34)$$

Зауважимо, що значення  $n = 0$  виключається, тому що тоді всюди  $\psi(x) = 0$ , що означає відсутність частинки у просторі.

Із (6.34) випливає, що розв'язок рівняння (6.31) має фізичний зміст лише для тих значень енергії  $E$ , які утворюють дискретний спектр, тобто для

$$E_n = \frac{2\hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.35)$$

$E_n$  — власні значення енергії, які залежать від цілого числа  $n$ . Отже, енергія  $E_n$  частинки в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками» приймає лише визначені дискретні значення, тобто квантується. Квантові значення енергії  $E_n$  називають рівнями енергії, а число  $n$ , що визначає енергетичні рівні частинки, називають головним квантовим числом.

Таким чином, мікрочастинка в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками» може знаходитися тільки на визначеному енергетичному рівні  $E_n$ , інакше кажучи, частинка знаходиться в квантовому стані  $n$ .

Знайдемо власні функції частинки в потенціальній ямі.

Оскільки  $\psi(x) = i2A \sin kx$ , а  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ ,  $\lambda = \frac{2l}{n}$ , то

$$\psi(x) = i2A \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (6.36)$$

тоді  $\psi^*(x) = -i2A \sin \frac{n\pi}{l} x$ .

Для визначення  $A$  скористаємося умовою нормування

$$\int_0^l | \psi_n^* dx = 1; \int_0^l | \psi_n|^2 dx = 1; \psi_n^* = 4A^2 \sin^2 \frac{n}{l} x;$$

$$4A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n}{l} x dx = 4A^2 \int_0^l \sin^2 kx dx = 4A^2 \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4k} \sin 2kx \right) \Big|_0^l =$$

$$= 2A^2 \left( l - \frac{1}{2k} \sin 2kl \right) = 2A^2 \left( l - \frac{l}{2n} \sin \frac{2nl}{l} \right) = 2A^2 l = 1;$$

$$2A^2 l = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2l}}.$$

Власні хвильові функції (6.36) матимуть вигляд

$$\psi_n(x) = i \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n}{l} x. \quad (6.37)$$

Вони описують стоячі хвилі.

Знайдемо густину імовірності знаходження частинки всередині потенціальної ями.

$$| \psi_n(x) |^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n}{l} x.$$

На рис. 6.7 наведено відповідно: *a* — схема енергетичних рівнів, *b* — графіки функцій  $\psi_n(x)$ , *в* — густина імовірності  $| \psi_n(x) |^2$

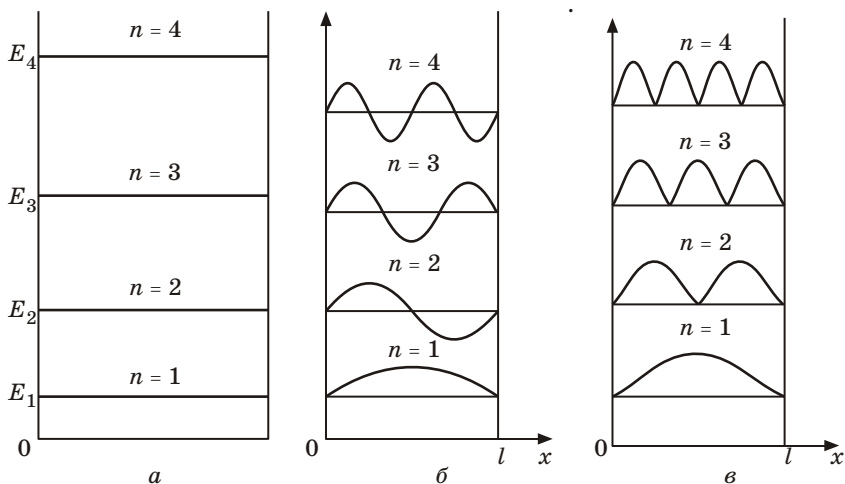


Рис. 6.7

виявлення частинки на різних відстанях від стінок ями. Із графіка видно, що наприклад для квантового стану  $n = 2$  неможливо виявити частинку посередині ями, в той час вона однаково часто може перебувати як в лівій, так і в правій половині ями. Така поведінка частинки, очевидно, несумісна з поняттям траєкторії в квантовій механіці. Відмітимо, що згідно з класичними уявленнями всі поняття частинки в ямі рівноімовірні.

Різниця енергій двох сусідніх рівнів, як це випливає із (6.35), дорівнює

$$E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1) \approx \frac{2\hbar^2}{ml^2}n. \quad (6.38)$$

Зробимо оцінку відстаней між сусідніми рівнями для різних значень маси частинки  $m$  та ширини ями  $l$ .

1. Візьмемо  $m$  порядку маси молекули ( $\sim 10^{-26}$  кг), а  $l \sim 0,1$  м (молекули газу в посудині), отримаємо

$$E_n \approx \frac{3,14^2 1,05^2 10^{-68}}{10^{-26} 0,1^2} n \approx 10^{-39} n \text{ Дж} = 10^{-20} n \text{ еВ.}$$

Енергетичні рівні розташовані так густо, що практично сприймаються як неперервний спектр енергії; так що хоч квантування енергії в принципі буде мати місце, але на характері руху молекули відбиватися не буде.

2. Якщо взяти  $m$  порядку маси електрона ( $\sim 10^{-30}$  кг), а розміри ями ті самі  $l = 0,1$  м (вільні електрони в метали). Результат буде аналогічний попередньому

$$E_n \approx 10^{-35} n \text{ Дж} = 10^{-16} n \text{ еВ.}$$

3. Але зовсім інший результат отримаємо для електрона, який рухається в області порядку атомних розмірів  $l \sim 10^{-10}$  м.

$$E_n \approx 10^{-17} n \text{ Дж} = 10^2 n \text{ еВ.}$$

Тобто в цьому випадку дискретність енергетичних рівнів буде явно виражена (лінійчатий спектр).

Таким чином, застосування рівняння Шредінгера до частинки в «потенціальній ямі» з нескінченно високими «стінками» приводить до квантованих значень енергії, в той час як класична механіка на енергію цієї частинки ніяких обмежень не накладає.

Співставимо  $E_n$  (6.38) з енергією  $E_n$  (6.35) для великих квантових чисел ( $n \gg 1$ ).

$$\frac{E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \approx \frac{2}{n} \ll 1, \text{ інакше } \frac{E_n}{E_n} \rightarrow 0.$$

Тобто для великих  $n$  спостерігається відносно наближення енергетичних рівнів і тоді можна говорити про практично неперервну послідовність рівнів. Характерна особливість квантових процесів — дискретність — згладжується. Цей результат є окремим випадком *принципа відповідності Бора (1923 р.), згідно з яким закони квантової механіки при великих квантових числах переходять в закони класичної фізики.*

Звернемо увагу на те, що із (6.35) випливає, що мінімальна енергія частинки в потенціальній ямі не може дорівнювати нулю.

Квантовий стан, в якому енергія частинки мінімальна ( $n = 1$ ), називають *основним станом*. Енергія частинки в основному стані дорівнює

$$E_1 = \frac{2\hbar^2}{2ml^2} > 0, \quad (6.39)$$

що означає неможливість існування стану спокою квантової частинки на відміну від класичної.

Наявність мінімальної енергії відмінної від нуля не випадкова й впливає із співвідношення невизначеностей.

Якщо частинка знаходиться в інтервалі  $0 < x < l$ , то невизначеність її координати  $x \sim l$ .

Тоді згідно з співвідношенням невизначеностей (6.12) імпульс не може мати точного, у даному разі нульового значення. Невизначеність імпульсу  $p \sim \hbar/l$ , а відповідна енергія частинки з імпульсом  $p$  дорівнює

$$E_{\min} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ml^2},$$

що з точністю до коефіцієнта збігається з (6.39).

## 6.7. Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Тунельний ефект

Розглянемо одновимірний рух частинки вздовж осі  $x$ , коли вона зустрічає на своєму шляху прямокутний потенціальний бар'єр висотою  $U_0$  і шириною  $l$  (рис. 6.8). Прямокутним бар'єром називають область, для якої потенціальна енергія  $U_0$  більша за повну енергію  $E$ , тобто  $U_0 > E$ . Тоді потенціальна енергія дорівнює:

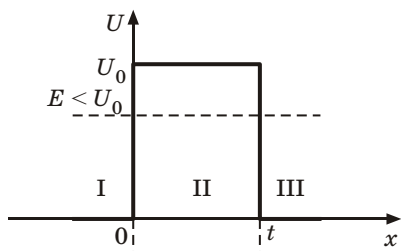


Рис. 6.8

$$U = \begin{cases} 0, & x < 0 & \text{для області I;} \\ U_0, & 0 < x < l & \text{для області II;} \\ 0, & x > l & \text{для області III.} \end{cases}$$

1. Якщо частинка рухається в додатному напрямі осі  $x$ , то відповідно до уявлень *класичної механіки* вона або пройде над бар'єром (при  $E > U_0$ ), або відіб'ється від нього (при  $E < U_0$ )

і буде рухатися у протилежному напрямі (вона не зможе пройти крізь бар'єр).

2. В *квантовій механіці* для мікрочастинки навіть при  $E > U_0$  є відмінна від нуля імовірність того, що частинка відіб'ється від бар'єра і за бар'єр не попаде. При  $E < U_0$  є відмінна від нуля імовірність того, що частинка пройде крізь бар'єр і виявиться в області  $x > l$ .

Подібні на перший погляд парадоксальні висновки випливають із розв'язання рівняння Шредінгера, яке описує рух мікрочастинки за умови цієї задачі. Запишемо рівняння Шредінгера (6.27) для стаціонарних станів для кожної із виділених на рис. 6.8 областей.

I)  $x < 0, U = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0.$$

Оскільки  $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ , то рівняння прийме вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2} + k_1^2 = 0. \quad (6.40)$$

II)  $0 \leq x \leq l, U = U_0$

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) = 0; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar};$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + k_2^2 = 0. \quad (6.41)$$

III)  $x > l, U = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0; \quad k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k_1;$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + k_1 = 0. \quad (6.42)$$

Загальні розв'язки цих диференціальних рівнянь шукаємо у вигляді

$$I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \quad (\text{для області I}); \quad (6.43)$$

$$II(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \quad (\text{для області II}); \quad (6.44)$$

$$III(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x} \quad (\text{для області III}). \quad (6.45)$$

Для області I повна хвильова функція, згідно з (6.25), виглядає так:

$$I(x,t) = I(x) e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)Et} = A_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_1 x)} + B_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + p_1 x)}. \quad (6.46)$$

У цьому виразі перший доданок — це плоска хвиля типу (6.29), що розповсюджується у додатному напрямі осі  $x$  (частинка рухається у бік бар'єра), а другий доданок — хвиля, що розповсюджується у протилежному напрямі, тобто відбита від бар'єра (частинка рухається від бар'єра вліво).

Визначимо імовірність відбиття частинки від потенціального бар'єра як *коефіцієнт відбиття*. За означенням коефіцієнт відбиття дорівнює відношенню квадратів модулів амплітуд (інтенсивностей) відбитої та падаючої хвиль:

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}.$$

Якщо (6.45) як і (6.43) помножити на часовий множник, то отримаємо також хвилі, що розповсюджуються в обидва боки. Проте в області III є тільки хвиля, що пройшла крізь бар'єр й поширилася тільки зліва направо. Тому коефіцієнт  $B_3$  у (6.45) треба вважати рівним нулю.

Більш детально розглянемо рішення (6.44) для області II. Тут рішення залежить від співвідношень  $E > U_0$  або  $E < U_0$ . Оскільки розглядається задача про високий потенціальний бар'єр ( $E < U_0$ ) і закони класичної фізики забороняють частинці проникнути крізь бар'єр, то  $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$  — уявне число;  $k_2 = i$ , де

$$= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

З урахуванням значень  $k_2$ ,  $B_3 = 0$  і  $k_3 = k_1$  можна записати рішення рівнянь Шредінгера у вигляді

$$\begin{aligned} \text{I}(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \quad (\text{для області I}); \\ \text{II}(x) &= A_2 e^{-x} + B_2 e^x \quad (\text{для області II}); \\ \text{III}(x) &= A_3 e^{ik_1 x} \quad (\text{для області III}). \end{aligned} \quad (6.47)$$

В області II (6.47) функція вже не відповідає плоским хвилям, які розповсюджуються в обидва боки, оскільки показники ступеню експонент *дійсні*.

На рис. 6.9 показано якісний вид функцій для 3-х областей. Як бачимо, хвильова функція не дорівнює нулю й всередині бар'єра (II область).

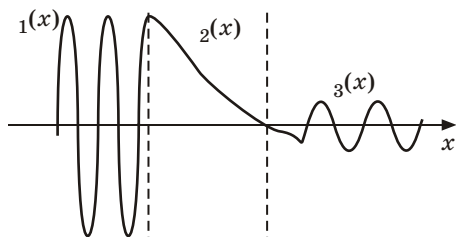


Рис. 6.9

В області III хвильова функція (якщо бар'єр не дуже широкий) буде знову мати вигляд хвиль де Бройля з тією ж частотою, але з меншою амплітудою. Таким чином, частинка має відмінну від нуля імовірність проходження крізь потенціальний бар'єр кінцевої шири-

рини. Характерним є те, що енергія частинки, яка проходить крізь потенціальний бар'єр, не змінюється. Частинка виходить за межі бар'єра з тією самою енергією, з якою в нього входила.

Пройдення частинки через потенціальний бар'єр називають **тунельним ефектом**, оскільки частинка не підіймається на вершину бар'єра, а проходить через нього нижче, ніби через тунель.

Щоб описати тунельний ефект, треба знайти імовірність проходження частинки крізь потенціальний бар'єр, або **коефіцієнт пропускання**. Цей коефіцієнт також називають **коефіцієнтом прозорості**, або **прозорістю бар'єра**. За означенням коефіцієнт пропускання дорівнює відношенню квадрата модуля амплітуди (тобто інтенсивності) хвилі, що проходить через бар'єр, до квадрата модуля амплітуди (інтенсивності) хвилі, що падає на межу поділу областей I і II, тобто

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}.$$



Введемо ще поняття *коефіцієнта відбиття*

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}.$$

Він дорівнює відношенню квадратів модулів амплітуд (інтенсивностей) відбитої хвилі та тієї, що падає. Зрозуміло, що коефіцієнти прозорості  $D$  та відбиття  $R$  пов'язані співвідношенням

$$D + R = 1.$$

Для знаходження відношення  $|A_3/A_1|^2$  треба скористатися умовами неперервності функції та її першої похідної на границях бар'єра:  $x = 0$  та  $x = l$ :

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0); \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0); \\ \psi_2(l) = \psi_3(l); \\ \psi_2'(l) = \psi_3'(l). \end{cases} \quad (6.48)$$

Ці чотири умови дають можливість виразити коефіцієнти  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$  та  $B_2$  через  $A_1$ . Сумісне розв'язання рівнянь (6.48) для прямокутного потенціального бар'єра дає:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}\right), \quad (6.49)$$

де  $D_0$  — постійний множник, який можна прирівняти до одиниці;  $U$  — висота потенціального бар'єра;  $E$  — повна енергія частинки;  $l$  — ширина бар'єра.

Із отриманого виразу (6.49) випливає, що імовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр сильно залежить від ширини бар'єра  $l$  й від різниці  $U_0 - E$ . Якщо при будь-якій ширині бар'єра коефіцієнт пропускання  $D$  дорівнює, припустимо,  $0,01$ , то при збільшенні ширини у два рази  $D = 0,0001$ , тобто зменшиться у 100 разів. Такий самий ефект виникає при зростанні у чотири рази величини  $U_0 - E$ . Коефіцієнт проходження різко зменшується, якщо зростає маса частинки  $m$ .

Формулу (6.49) можна узагальнити на випадок потенціального бар'єра довільної форми (рис. 6.10):

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx\right], \quad (6.50)$$

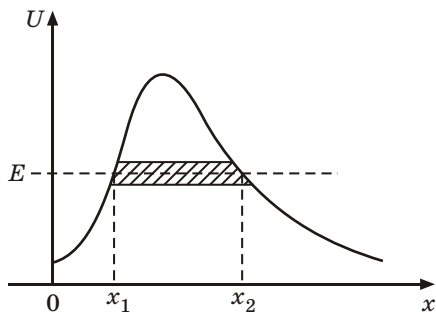


Рис. 6.10

специфічно квантове, яке не має аналога в класичній фізиці. В квантовій механіці розподіл повної енергії на кінетичну і потенціальну не має змісту, тому що суперечить принципу невизначеності, згідно з яким неможливо одночасно точно визначити координату та імпульс частинки. Дійсно, той факт, що частинка має означену кінетичну енергію  $T$ , був би рівнозначним тому, що частинка має точно визначений імпульс  $p$ . А той факт, що частинка має визначену потенціальну енергію  $U$ , означав би, що вона має точно визначену координату  $x$ . Таким чином, хоча повна енергія частинки  $E$  має цілком визначене значення, вона не може бути подана як сума точно визначених енергій  $T$  і  $U$ . Зрозуміло, що припущення про негативну кінетичну енергію  $T$  в тунелі не мають ніяких підстав.

Основи теорії тунельних переходів розроблені Л. І. Мандельштамом і М. О. Леонтовичем. Тунельний ефект лежить в основі ряду фізичних явищ. До них належать виникнення контактної різниці потенціалів, альфа-розпад атомних ядер, автоелектронна емісія та інші явища. На основі тунельного ефекту відбувається міграція валентних електронів у кристалічній решітці діелектрика. Явище тунельного ефекту лежить в основі дії тунельних діодів, а також роботи тунельних електронних мікроскопів.

### 6.8. Лінійний гармонічний осцилятор у квантовій механіці

*Осцилятор* — система (або матеріальна точка), яка здійснює коливальний періодичний рух навколо положення стійкої рівноваги. Термін «осцилятор» застосовується до будь-якої системи, якщо описуючі її величини періодично змінюються з часом. Пружний, математичний, фізичний маятники — найпростіші приклади осцилятора в класичній механіці.

де  $U = U(x)$ . Єдиною умовою так званого квазікласичного наближення є достатньо гладка форма кривої.

З класичної точки зору тунельний ефект здається абсурдним, тому що частинка, яка «знаходиться в тунелі», повинна була б мати негативну кінетичну енергію (в тунелі  $E < U_0$ ). Проте тунель — явище

Найважливіший тип осцилятора — *лінійний гармонічний осцилятор*, коливання якого являють собою основну модель руху частинки в атомах, атомних ядрах, молекулах, твердих тілах.

Рівняння руху лінійного гармонічного осцилятора має вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — власна частота осцилятора,  $k$  — сталий коефіцієнт (у випадку вантажу на пружині  $k$  — коефіцієнт пружності пружини),  $m$  — маса частинки.

Рух осцилятора виникає під впливом квазіпружної сили  $F = -kx$ , направленої до положення рівноваги.

Потенціальна енергія гармонічного осцилятора

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 x^2}{2}. \quad (6.51)$$

Залежність (6.51) має вигляд параболи, тобто потенціальна яма в даному випадку параболічна. Амплітуда малих коливань класичного осцилятора визначається його повною енергією  $E$  (рис. 6.11).

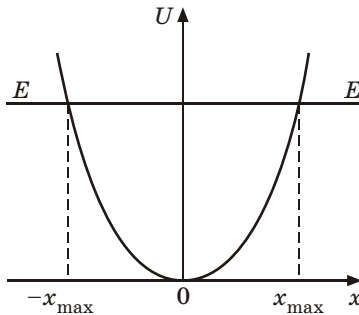


Рис. 6.11

Область локалізації частинки з енергією  $E$  обмежена координатами  $(-x_{\max}, +x_{\max})$ , тобто, класичний осцилятор знаходиться в потенціальній ямі з координатами  $-x_{\max} \leq x \leq +x_{\max}$  без права виходу з неї.

Гармонічний осцилятор в квантовій механіці називається *квантовим осцилятором*. Його рух описується рівнянням Шредінгера (6.27), з урахуванням виразу (6.51) для потенціальної енергії. Тоді стаціонарне рівняння Шредінгера для одномірного руху частинки в параболічній потенціальній ямі запишеться у вигляді

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m \omega_0^2 x^2}{2} \right) = 0, \quad (6.52)$$

де  $E$  — повна енергія осцилятора.

Необхідно знайти власні хвильові функції і власні значення енергії  $E$ .

Оскільки потенціальна енергія залежить від  $x$ , тоді й довжина хвилі де Бройля є функцією координат, тобто

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m[E-U(x)]}} \Rightarrow \lambda = \lambda(x).$$

Диференціальне рівняння (6.52) не таке просте, як здається на перший погляд. Наявність члена

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right),$$

до складу якого входить  $x^2$ , зумовлює деякі складності знаходження хвильових функцій осцилятора. У загальному випадку розв'язки рівняння (6.52) можуть бути подані за допомогою поліномів Ерміта. Тому наведемо тільки результати розв'язку.

Вимога скінченності й неперервності функції приводить до дискретного набору дозволених рівнів енергії, спектр яких має вигляд

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots \text{ — додатне ціле число}), \quad (6.53)$$

тобто рівняння (6.52) розв'язується тільки при *власних значеннях енергії* (6.53).

Формула (6.53) показує, що енергія квантового осцилятора може мати лише *дискретні значення*, тобто *квантується*.

Для нижніх енергетичних рівнів  $n = 0, 1, 2$  наведемо вирази для власних функцій та власних значень енергії.

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a^2 x^2 / 2}, \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega; \\ \psi_1 &= \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} x e^{-a^2 x^2 / 2}, \quad E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega; \\ \psi_2 &= \sqrt{\frac{4a^5}{3\pi}} (2a^2 x^2 - 1) e^{-a^2 x^2 / 2}, \quad E_2 = \frac{5}{2} \hbar \omega, \end{aligned}$$

де  $a = \frac{m\omega}{\hbar}$ .

На рис. 6.12 показано залежність потенціальної енергії  $U$  від  $x$  (крива 1); дозволени рівні енергії для  $n = 0, 1, 2$ ; хвильові функції (штрихові лінії); відповідний розподіл густини імовірності  $|\psi_n(x)|^2$  (суцільні лінії).

Із формули (6.53) випливає, що рівні енергії лінійного гармонічного осцилятора не залежать від  $n$  і знаходяться на однакових відстанях один від одного (рис. 6.12), а саме: відстань між сусідніми енергетичними рівнями дорівнює  $\hbar \omega_0$ . Таке розміщення рівнів у спектрі називають *еквідистантним*.

Як бачимо, знизу енергія обмежена мінімальним її значенням  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$ . Наяв-

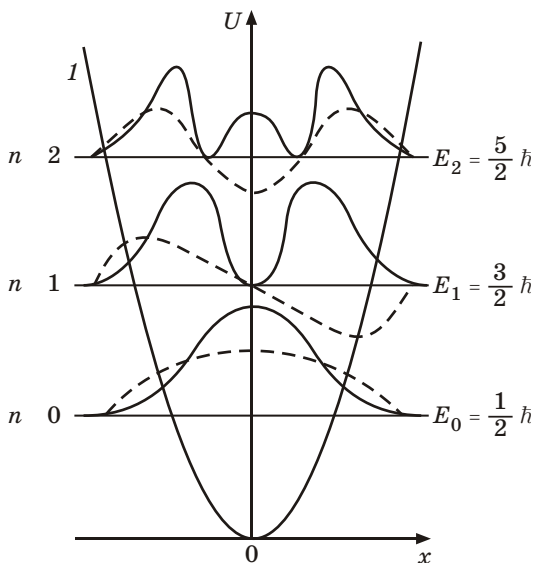


Рис. 6.12

ність мінімальної енергії відмінної від нуля є типовим для квантових систем і являє собою *основний рівень квантового осцилятора*. Мінімальна енергія називається *енергією нульових коливань*.

Оскільки основний рівень  $E_0 > 0$ , то квантовий осцилятор зупинити неможливо. Цю енергію не можна зменшити або забрати у осцилятора.

Наприклад, з точки зору класичної фізики при  $T = 0$  енергія коливального руху атомів кристала повинна дорівнювати нулю. Як наслідок повинно зникнути і розсіювання світла, обумовленого коливаннями атомів.

Проте експеримент показує, що при зниженні температури інтенсивність розсіювання світла не дорівнює нулю, а прямує до деякого граничного значення, яке вказує на те, що при  $T \rightarrow 0$  коливання атомів в кристалі не припиняються. Це підтверджує наявність нульових коливань.

Наведемо ще один приклад, коли розв'язання задачі про квантовий осцилятор значно відрізняється від класичного розгляду. Як зазначалося раніше, з класичної точки зору частинка не може вийти за межі області  $(-x_{\max}, +x_{\max})$  (рис. 6.11), в той час кванто-механічні розрахунки показують, що частинку можна виявити

за межами дозволеної області  $|x| \leq x_{\max}$ . Таким чином, маємо відмінну від нуля імовірність виявити частинку в тій області, яка класично заборонена. Рис. 6.12 демонструє цей результат (без його виводів), де наведена квантова густина імовірності  $w$  виявлення осцилятора для станів  $n = 0, 1, 2$ . Із рисунка бачимо, що для квантового осцилятора дійсно густина імовірності має кінцеві значення за межами класично дозволеної області  $|x| \leq x_{\max}$ , тобто є кінцева (але невелика) імовірність виявити частинку в області за межами потенціальної ями. Цей факт пояснюється можливістю проходження мікрочастинок через потенціальний бар'єр.

Зауважимо, що при великих  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) загальний характер розподілу імовірностей місцезнаходження частинок наближається до класичного (принцип відповідності Бора).

Отже, квантовий гармонічний осцилятор має дискретні рівні енергії, починаючи з деякого нульового.

При переході квантового осцилятора (системи) з одного стану в інший виконується правило відбору  $n = \pm 1$ , згідно з яким енергія гармонічного осцилятора може змінюватися лише порціями  $\hbar \omega$ . Цей результат, отриманий звичайним способом в квантовій механіці, співпадає з тими припущеннями (вельми чужорідними для класичної фізики), які прийшлося зробити Планку, щоб обчислити випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла (див. розділ 5).

Модель квантового осцилятора використовується для аналізу коливальних спектрів молекул та пояснення інших фізичних явищ.

### Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте гіпотезу де Бройля.
2. Як визначається довжина хвилі де Бройля? Запишіть формулу де Бройля.
3. Чому дорівнюють фазова та групова швидкості хвиль де Бройля?
4. Запишіть співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу.
5. Запишіть співвідношення невизначеностей для енергії та часу.
6. В якому випадку й чому при умовах  $v_x/v_x \ll 1$  та  $v_x/v_x \approx 1$  можна говорити про рух частинки по визначеній траєкторії?
7. Як, виходячи із співвідношення невизначеностей, пояснити наявність ширини спектральної лінії?
8. Чому квантова механіка має статистичний зміст?
9. Дайте визначення хвильової функції.
10. Що визначає квадрат модуля хвильової функції?
11. Запишіть умову нормування імовірностей.

12. Сформулюйте та запишіть принцип суперпозиції для хвильової функції.
13. Запишіть обмежувальні умови хвильової функції.
14. Запишіть загальне рівняння Шредінгера (рівняння, що залежить від часу).
15. Запишіть і поясніть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.
16. Визначити оператор Лапласа.
17. Що таке стаціонарне силове поле?
18. Що таке гамільтоніан?
19. Дайте визначення власним значенням енергії та власним функціям.
20. Запишіть рівняння Шредінгера для руху вільної частинки.
21. Чому дорівнює хвильова функція вільної частинки?
22. Запишіть співвідношення, що пов'язують енергію та імпульс вільної частинки.
23. Запишіть рівняння Шредінгера для одномірного руху частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі.
24. Запишіть вираз для власних значень енергії  $E_n$  частинки в потенціальній ямі. Від чого вона залежить?
25. Що означає вираз «енергія  $E_n$  частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками *квантується*»?
26. Що таке енергетичні рівні? Головне квантове число?
27. Як виглядають власні хвильові функції у випадку руху частинки в глибокій потенціальній ямі? Що вони описують?
28. Чому дорівнює різниця енергій двох сусідніх рівнів?
29. При яких  $n$  (великих чи малих?) дискретність енергетичних рівнів зглажується? Як це узгоджується з принципом співвідношення Бора?
30. Який стан частинки називають основним? Чому дорівнює енергія основного стану?
31. Звідки впливає наявність мінімальної енергії, відмінної від нуля, частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками? Поясніть математично.
32. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів для кожної із областей високого потенціального бар'єра  $U > E$ .
33. В чому полягає квантове явище, що має назву *тунельного ефекту*?
34. Дайте визначення коефіцієнта прозорості (коефіцієнт пропускання)?

35. Запишіть формулу для визначення коефіцієнта прозорості у випадку прямокутного потенціального бар'єра.
36. Від чого залежить імовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр?
37. Запишіть формулу для визначення коефіцієнта прозорості у випадку потенціального бар'єра довільної форми.
38. Чи можна з класичної точки зору пояснити наявність тунельного ефекту?
39. Дайте визначення *осцилятора* з класичної точки зору. Яким рівнянням описується рух лінійного гармонічного осцилятора?
40. Чому дорівнює потенціальна енергія гармонічного осцилятора?
41. Якою енергією визначається амплітуда малих коливань класичного осцилятора?
42. Чи є обмеженою область локалізації класичного осцилятора?
43. Що таке квантовий осцилятор? Яким рівнянням описується його рух? Запишіть його.
44. Запишіть стаціонарне рівняння Шредингера для одновимірного руху частинки в параболічній потенціальній ямі.
45. Запишіть формулу, що визначає спектр дозволених рівнів енергії квантового осцилятора? Як вона називається?
46. Чому дорівнює мінімальна енергія квантового осцилятора? Як вона називається?
47. Чи може частинка знаходитися на дні потенціальної ями? Чи визначається це формою ями?
48. Запишіть правило відбору при переході квантового осцилятора з одного стану в інший. Чому дорівнює відстань між сусідніми енергетичними рівнями квантового осцилятора?
49. В чому різниця квантово-механічного і класичного опису гармонічного осцилятора у виводах цього опису?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Електрон, початкова швидкість якого нехтовно мала, пройшов прискорюючу різницю потенціалів  $U$ . Знайти довжину хвилі де Бройля для двох випадків: 1)  $U_1 = 102$  В; 2)  $U_2 = 510$  кВ.

*Розв'язання*

Довжина хвилі де Бройля

$$= \frac{h}{p}$$



Імпульс електрона  $p$  можна знайти, коли відома його кінетична енергія  $T$ .

Якщо електрон нерелятивістський,

$$p = \sqrt{2m_0T},$$

а якщо електрон релятивістський, то

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + T)T},$$

де  $E_0$  — енергія спокою електрона,  $E_0 = 0,51$  МеВ.

Щоб визначити, який саме електрон, треба кінетичну енергію порівняти з енергією спокою електрона:

1)  $T_1 = |e|U_1 = 102$  еВ, що значно менше за  $E_0 = 0,51$  МеВ. Тобто електрон нерелятивістський.

2)  $T_2 = |e|U_2 = 0,51$  МеВ, тобто дорівнює енергії спокою електрона. Електрон релятивістський, його кінетична енергія  $T = m_0c^2$ .

$$1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU_1}} = 0,121 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 121 \text{ нм};$$

$$2 = \frac{h}{\frac{1}{c} \sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2}} = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 1,4 \text{ пм}.$$

## Задача 2

На вузьку щілину шириною  $a = 1$  мкм напрямлено паралельний пучок моноенергетичних електронів. Враховуючи хвильові властивості електронів, знайти швидкість цих електронів, якщо на екрані, що знаходиться на відстані  $L = 20$  см від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму становить  $x = 48$  мкм.

### Розв'язання

Ширина центрального максимуму  $x$  — це відстань між двома першими мінімумами (рис. 6.13). Дифракційний мінімум при дифракції на одній щіліні спостерігається за умови:

$$a \sin \theta = k;$$

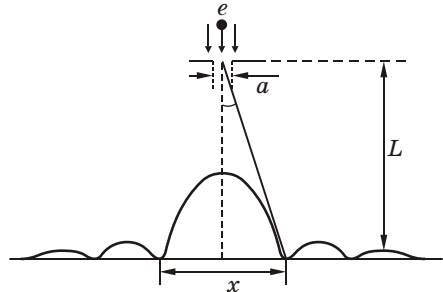


Рис. 6.13

$$k = 1; \sin \theta = \frac{x}{a}; \quad x = 2L \operatorname{tg} \theta .$$

Для малих кутів  $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta$  .

$$= \frac{a x}{2L} .$$

Довжина хвилі де Бройля

$$= \frac{h}{mv} ,$$

тоді

$$\frac{h}{mv} = \frac{a x}{2L} ,$$

звідки

$$v = \frac{2Lh}{am x} = 6,06 \frac{\text{Мм}}{\text{с}} .$$

### Задача 3

Моноенергетичний пучок нейтронів падає на кристал, який повертають так, що кут ковзання змінюється. Максимальне відбиття електронів, що відповідає максимуму першого порядку, спостерігається при  $\theta = 30^\circ$ . Відстань між атомними площинами  $d = 0,15$  нм. Знайти довжину хвилі де Бройля електронів та їх швидкість  $v$ . Маса нейтронів  $m = 1,675 \cdot 10^{-27}$  кг.

#### Розв'язання

Запишемо рівняння Вульфа — Брегга:

$$2d \sin \theta = k ,$$

звідки

$$= \frac{2d \sin \theta}{k} = 0,15 \text{ нм} .$$

З іншого боку, довжина хвилі де Бройля  $\lambda = \frac{h}{mv}$ . Тоді

$$\frac{2d \sin \theta}{k} = \frac{h}{mv}$$

і швидкість електронів

$$v = \frac{kh}{2dm \sin \theta} = 2,64 \frac{\text{км}}{\text{с}} .$$

### Задача 4

Знайти фазову швидкість хвилі де Бройля частинки, що вільно рухається з постійною швидкістю  $v$  в нерелятивістському та релятивістському випадках.

#### Розв'язання

Фазова швидкість частинки

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k},$$

де  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

тоді  $v_{\text{фаз}} = \frac{\hbar\nu}{\hbar k} = \frac{E}{p}$ .

1)  $v \ll c$ :  $E = \frac{p^2}{2m}$ ;  $v_{\text{фаз}_1} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$ .

2)  $v \approx c$ :  $E = mc^2$ ;  $v_{\text{фаз}_2} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$ .

### Задача 5

Кінетична енергія  $T$  електрона в атомі водню складає величину порядку 10 еВ. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні розміри атома.

#### Розв'язання

Невизначеність координати й імпульсу електрона пов'язані співвідношенням  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ .

Нехай атом має лінійний розмір  $l$ , тоді електрон атома буде знаходитися десь в границях області з невизначеністю  $\Delta x = l/2$ . Тоді  $l \geq 2\hbar / \Delta p$ .

Зрозуміло, що  $\Delta p \leq p$ .

Імпульс  $p$  і кінетична енергія  $T$  пов'язані співвідношенням  $p = \sqrt{2mT}$ . Замінімо  $\Delta p$  значенням  $p = \sqrt{2mT}$ . Ця заміна тільки підсилить нерівність  $l \geq 2\hbar / \sqrt{2mT}$ .

Опустимо знак нерівності та отримуємо:

$$l = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}} = 124 \text{ м}.$$

### Задача 6

Атом випромінює фотон з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ . Час життя збудженого стану  $t = 10^{-8} \text{ с}$ . Знайти відношення природної

ширини енергетичного рівня, на який був збуджений електрон, до енергії, яку випромінював атом.

#### Розв'язання

Співвідношення невизначеностей для енергії і часу має вигляд:

$$E \cdot t \geq \hbar.$$

Опустимо знак нерівності:

$$E \cdot t = \hbar \Rightarrow E = \frac{\hbar}{t}.$$

Енергія, що її випромінює атом:

$$E = h \nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2 \hbar c}{\lambda}.$$

Тоді

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{\hbar}{t \cdot 2 \hbar c} = \frac{1}{t \cdot 2 c} = 3 \cdot 10^{-8}.$$

#### Задача 7

-функція циклічно залежить від часу, тобто

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) \psi(x).$$

Довести, що густина імовірності є функція лише координат.

#### Розв'язання

Густину імовірності  $|\psi(x)|^2$  можна подати у вигляді добутку

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x) \cdot \psi^*(x),$$

де  $\psi^*(x)$  — хвильова функція, спряжена з  $\psi(x)$ .

Запишемо густину імовірності заданої функції  $\psi(x, t)$  у вигляді

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t),$$

де  $\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(x)$ ,  $\psi^*(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} E t} \psi^*(x)$ .

Тоді

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(x) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} E t} \psi^*(x) = e^{i\left(\frac{E t}{\hbar} - \frac{E t}{\hbar}\right)} \psi(x) \cdot \psi^*(x) = \\ &= e^0 |\psi(x)|^2 = |\psi(x)|^2, \end{aligned}$$

оскільки  $e^0 = 1$ .

Таким чином, доведено, що  $|(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$ .

### Задача 8

Зобразити графічно, як виглядають три перші власні функції  $\psi_n(x)$ , що описують стан електрона в потенціальному ящику шириною  $l$ , а також вид  $|\psi_n(x)|^2$ .

Встановити співвідношення між числом  $N$  вузлів хвильової функції (числом точок, в яких хвильова функція обертається в нуль в інтервалі  $0 < x < l$ ) та квантовим числом  $n$ . Функцію вважати нормованою на одиницю.

#### Розв'язання

Нормована власна хвильова функція, що описує стан електрона в потенціальному ящику, має вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n}{l} x.$$

Згідно умови  $n = 1, 2, 3$ , тоді маємо:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{x}{l};$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2x}{l};$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3x}{l}.$$

Густини імовірностей цих функцій мають вигляд

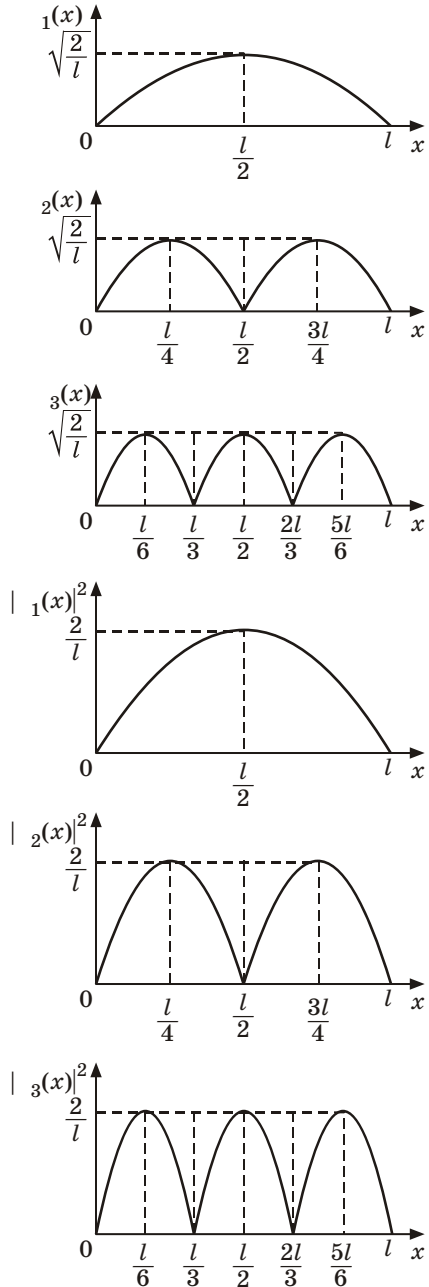


Рис. 6.14

$$| \psi_1(x) |^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{1}{l} x; \quad | \psi_2(x) |^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2}{l} x; \quad | \psi_3(x) |^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{3}{l} x.$$

На рис. 6.14 наведено вид хвильових функцій  $\psi_n(x)$  та їх густин імовірностей  $|\psi_n(x)|^2$  для  $n=1, 2, 3$ . З цих графіків видно, що кількість вузлів  $N$  (точок, де  $\psi(x)=0$ ) із збільшенням головного квантового числа  $n$  зростає, але завжди  $N = n - 1$ , тобто  $N$  на одиницю менша за квантове число  $n$ , що відповідає цій хвильовій функції.

### Задача 9

В одновимірному потенціальному ящику, ширина якого  $l$ , знаходиться електрон.

Обчислити імовірність  $W$  знаходження електрона на першому енергетичному рівні в інтервалі  $l/4$ , рівновіддаленому від стінок ящика.

#### Розв'язання

Імовірність знаходження частинки в інтегралі від  $x_1$  до  $x_2$  записується у вигляді:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx,$$

де  $\psi_n(x)$  — хвильова функція, що описує стан частинки.

Власні значення хвильової функції

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n}{l} x.$$

Згідно умови задачі  $n = 1$ , тоді:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{1}{l} x.$$

Імовірність виявити частинку в заданому інтервалі:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \left| \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{1}{l} x \right|^2 dx = \frac{2}{l} \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \sin^2 \frac{x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \frac{1 - \cos \frac{2}{l} x}{2} dx = \frac{1}{l} \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} dx - \frac{1}{l} \int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \cos \frac{2}{l} x dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l} \left( \frac{5}{8}l - \frac{3}{8}l \right) - \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{2} \left( \sin \frac{2}{l} x \right) \Big|_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \sin \frac{2 \cdot 5}{8} - \sin \frac{2 \cdot 3}{8} \right) = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (\sin 225^\circ - \sin 135^\circ) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (-0,7 - 0,7) = \frac{1}{4} + \frac{1,4}{6,28} = 0,47.
\end{aligned}$$

### Задача 10

Знайти з умови нормування коефіцієнт  $C$  власної  $\psi$ -функції

$$n_1 n_2 n_3 \psi(x, y, z) = C \sin \frac{n_1}{l_1} x \sin \frac{n_2}{l_2} y \sin \frac{n_3}{l_3} z,$$

що описує стан електрона у тривимірному потенціальному нескінченно глибокому потенціальному ящику із сторонами  $l_1, l_2, l_3$ .

#### Розв'язання

У тривимірному випадку умова нормування хвильової функції виглядає так:

$$\int_V |n_1 n_2 n_3 \psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1.$$

Виходячи із умов задачі, маємо:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} C^2 \sin^2 \frac{n_1 x}{l_1} \sin^2 \frac{n_2 y}{l_2} \sin^2 \frac{n_3 z}{l_3} dx dy dz = \\
&= C^2 \int_0^{l_1} \left( \frac{1 - \cos \frac{2 n_1 x}{l_1}}{2} \right) dx \int_0^{l_2} \left( \frac{1 - \cos \frac{2 n_2 y}{l_2}}{2} \right) dy \int_0^{l_3} \left( \frac{1 - \cos \frac{2 n_3 z}{l_3}}{2} \right) dz = \\
&= \frac{C^2}{8} \left[ \left( x \Big|_0^{l_1} - \frac{l_1}{2 n_1} \left( \sin \frac{2 n_1 x}{l_1} \right) \Big|_0^{l_1} \right) \cdot \left( y \Big|_0^{l_2} - \frac{l_2}{2 n_2} \left( \sin \frac{2 n_2 y}{l_2} \right) \Big|_0^{l_2} \right) \times \right. \\
&\times \left. \left( z \Big|_0^{l_3} - \frac{l_3}{2 n_3} \left( \sin \frac{2 n_3 z}{l_3} \right) \Big|_0^{l_3} \right) \right] = \frac{C^2}{8} \left[ \left( l_1 - \frac{l_1}{2 n_1} (\sin 2 n_1 - 0) \right) \times \right. \\
&\times \left. \left( l_2 - \frac{l_2}{2 n_2} (\sin 2 n_2 - 0) \right) \cdot \left( l_3 - \frac{l_3}{2 n_3} (\sin 2 n_3 - 0) \right) \right] = \\
&= \frac{C^2}{8} (l_1 \cdot l_2 \cdot l_3).
\end{aligned}$$

Таким чином

$$\frac{C^2}{8} (l_1 \cdot l_2 \cdot l_3) = 1 \Rightarrow C = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}}.$$

### Задача 11

-функція деякої частинки має вигляд  $\psi = \frac{A}{r} e^{-r/a}$ , де  $r$  — відстань цієї частинки до силового центру;  $a$  — деяка стала. Виходячи з умови нормування імовірностей, знайти нормувальний коефіцієнт  $A$ .

*Розв'язання*

Умова нормування  $\int_V |\psi|^2 dV = 1.$

$$dV = 4\pi r^2 dr;$$

$$\int_0^\infty \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 1,$$

$$4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-2r/a} dr = 4\pi A^2 \cdot \frac{a}{2} (e^{-2r/a}) \Big|_0^\infty = 2\pi A^2 a,$$

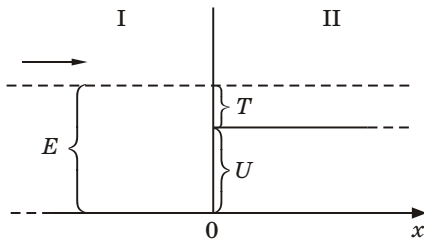
$$2\pi A^2 a = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}.$$

### Задача 12

Електрон, який має дебройлівську довжину хвилі  $\lambda_1 = 0,1$  нм, падає на потенціальний бар'єр  $U = 120$  еВ. Знайти довжину хвилі  $\lambda_2$  після проходження потенціального бар'єра.

*Розв'язання*

Показник заломлення  $n$  хвиль де Бройля на межі низького потенціального бар'єра (рис. 6.15)



$$n = \frac{1}{2} = \frac{k_2}{k_1}, \quad (1)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2$  — хвилі де Бройля до й після бар'єра відповідно,  $k_1, k_2$  — відповідні значення хвильових чисел.

Рис. 6.15



В області I кінетична енергія електрона дорівнює  $E$  й хвильове число

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (2)$$

В області II кінетична енергія електрона дорівнює  $E - U$  й хвильове число

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U)}. \quad (3)$$

Оскільки  $E = \frac{p^2}{2m}$ , а довжина хвилі де Бройля  $\lambda = \frac{h}{p}$ , то

$$E = \frac{h^2}{2m \lambda^2} = \frac{2 \pi^2 \hbar^2}{m \lambda^2}. \quad (4)$$

Із (1) з урахуванням (2) і (3) маємо:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{2m(E - U)}} = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{1 - U/E}}. \quad (5)$$

Візьмемо до уваги вираз (4), отримаємо:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Um}{2 \pi^2 \hbar^2}}} = 218 \text{ пм.}$$

### Задача 13

Знайти наближений вираз для коефіцієнта пропускання через низький потенціальний бар'єр при умові, що кінетична енергія  $T$  частинки в області II (рис. 6.15) значно менша за висоту  $U$  потенціального бар'єра.

#### Розв'язання

Коефіцієнт пропускання хвиль де Бройля

$$= \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

де  $k_1$  та  $k_2$  — хвильові числа, що відповідають руху електрона у I та II областях відповідно.

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}; \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U)};$$

$E = U + T$  — повна енергія.

$T = E - U$  — кінетична енергія.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U+T)}; \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mT}; \\
 &= \frac{\hbar^2 4 \sqrt{2m(U+T)} \cdot \sqrt{2mT}}{\hbar^2 (\sqrt{2m(U+T)} + \sqrt{2mT})^2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{U+T} \cdot \sqrt{T}}{(\sqrt{U+T} + \sqrt{T})^2} = \\
 &= \frac{4\sqrt{T}}{(\sqrt{U+T} + \sqrt{T})^2} = \frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{U+T} + 2\sqrt{T} + \frac{T}{\sqrt{U+T}}}.
 \end{aligned}$$

Якщо  $T \ll U \Rightarrow \sqrt{U+T} = \sqrt{U}$ .

$$2\sqrt{T} = 0, \text{ тоді } \frac{T}{\sqrt{U+T}} \Rightarrow 0 \text{ і } = \frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{U_0}} = 4 \sqrt{\frac{T}{U_0}}.$$

#### Задача 14

Електрон, енергія якого  $E = 9 \text{ eV}$ , рухається у додатному напрямку осі  $X$ . Оцінити імовірність  $W$  того, що електрон пройде через потенціальний бар'єр, якщо його висота  $U = 10 \text{ eV}$ , а ширина  $d = 0,1 \text{ нм}$ .

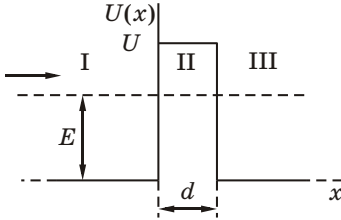


Рис. 6.16

бар'єр (рис. 6.16), буде дорівнювати

$$W = \exp \left[ -\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} \right]$$

або

$$W = e^{-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}}.$$

$$\ln W = -\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} = -1,6.$$

Звідки випливає  $W = 0,2$ .

#### Задача 15

Частинка знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальної ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями  $l$ .

Записати рівняння Шредінгера в межах ями ( $0 \leq x \leq l$ ) та розв'язати його.

*Розв'язання*

Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів має вигляд

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) = 0 \quad 0 \leq x \leq l.$$

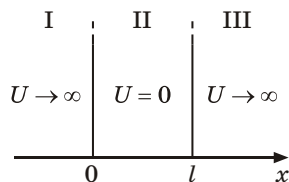


Рис. 6.17

В межах ями (рис. 6.17) (II область)  $U = 0$ , тоді

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar} E = 0.$$

Хвильове число

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE};$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + k^2 = 0.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Використаємо граничні умови  $\psi(0) = 0$ , звідки  $B = 0$ , тоді

$$\psi(x) = A \sin kx, \quad \psi(l) = A \sin kl = 0,$$

звідки  $kl = n$ , тоді  $k = \frac{n}{l}$  і функція

$$\psi(x) = A \sin \frac{n}{l} x$$

— розв'язок рівняння Шредінгера у межах ями.

### Задача 16

Частинка знаходиться в потенціальному ящику. Знайти відношення різниці сусідніх енергетичних рівнів  $E_{n+1, n}$  до енергії  $E_n$  частинки у трьох випадках: 1)  $n = 3$ ; 2)  $n = 10$ ; 3)  $n \rightarrow \infty$ .

*Розв'язання*

Власне значення енергії частинки, що знаходиться на  $n$ -му енергетичному рівні в нескінченному одновимірному прямокутненому потенціальному ящику, визначене формулою

$$E_n = \frac{2\hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

є розв'язком рівняння Шредінгера, де  $n$  — головне квантове число.

Різниця сусідніх енергетичних рівнів:

$$E_{n+1, n} = E_{n+1} - E_n;$$

$$E_{n+1} = \frac{2\hbar^2}{2ml^2}(n+1)^2; E_n = \frac{2\hbar^2}{2ml^2}n^2;$$

$$E_{n+1, n} = \frac{2\hbar^2}{2ml^2}[(n+1)^2 - n^2] = \frac{2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1).$$

Відношення

$$\frac{E_{n+1, n}}{E_n} = \frac{2\hbar^2(2n+1)2ml^2}{2ml^2 \cdot 2\hbar^2 \cdot n^2} = \frac{2n+1}{n^2}.$$

$$1. n = 3. \quad \frac{E_{n+1, n}}{E_n} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3^2} = \frac{7}{9};$$

$$2. n = 10. \quad \frac{E_{n+1, n}}{E_n} = \frac{2 \cdot 10 + 1}{100} = \frac{21}{100} = 0,21;$$

$$3. n \rightarrow \infty. \quad \frac{E_{n+1, n}}{E_n} = 0.$$

При малих  $n$  чітко виступає дискретний характер енергетичного спектра; при великих  $n$  дискретний характер згладжується, енергетичний спектр стає квазінеперервним.

### Задачі для самостійного розв'язання

**6.1.** Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, якщо його кінетична енергія дорівнює:

1) 1 кеВ; 2) 0,6 МеВ.

*Відповідь:* 1)  $\lambda = 38,8$  пм; 2)  $\lambda = 1,26$  пм.

**6.2.** Довжина хвилі де Бройля дорівнює комптонівській довжині хвилі. При якій швидкості електрона це можливо? Чому при цьому дорівнює кінетична енергія електрона?

*Відповідь:*  $v = 212$  Мм/с;  $T = 0,212$  МеВ.

**6.3.** Встановити залежність довжини хвилі де Бройля релятивістської частинки та її: 1) кінетичної енергії  $T$ ; 2) прискорюючого потенціалу  $U$ .

*Відповідь:* 
$$= \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}}; \quad = \frac{hc}{\sqrt{eU(2mc^2 + eU)}}.$$

**6.4.** Нейтрон має довжину хвилі де Бройля  $\lambda = 148$  м й рухається зі середньою квадратичною швидкістю  $\langle v_{\text{КВ}} \rangle$ . При якій температурі це можливо? Маса нейтрона  $m = 1,675 \cdot 10^{-27}$  кг.

*Відповідь:*  $T = 290$  К.

**6.5.** Протон прискорений різницею потенціалів  $U = 500$  В. Знайти довжину хвилі де Бройля.

*Відповідь:*  $\lambda = 1,282$  м.

**6.6.** У досліді Девіссона і Джермера відстань між кристалграфічними площинами нікелю  $d = 0,2$  нм. Чому дорівнює кінетична енергія електронів, якщо у напрямку, що складає кут  $\theta = 55^\circ$  з напрямком падаючих електронів, спостерігається максимум відбиття четвертого порядку.

*Відповідь:*  $T = 180$  еВ.

**6.7.** Електрон рухається зі швидкістю  $v = 200$  Мм/с. Знайти довжину хвилі де Бройля, урахувавши зміну маси електрона в залежності від швидкості.

*Відповідь:*  $\lambda = 2,7$  м.

**6.8.** Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, що рухається по першій коловій орбіті атома водню.

*Відповідь:*  $\lambda = 0,33$  нм.

**6.9.** При бомбардуванні електронами антикатода рентгенівської трубки виявилось, що границя суцільного рентгенівського спектра припадає на довжину хвилі  $\lambda_0 = 3$  нм. Знайти довжину хвилі де Бройля  $\lambda_0$  електронів.

*Відповідь:*  $\lambda_0 = 0,06$  нм.

**6.10.** На вузьку щілину завширшки  $a = 1$  мкм падає паралельний пучок монохроматичних електронів, що має швидкість  $v = 3,65$  Мм/с. Враховуючи хвильові властивості електронів, знайти відстань  $x$  між двома максимумами інтенсивності першого порядку в дифракційній картині, отриманій на екрані, віддаленому від щілини на відстань  $L = 10$  см.

*Відповідь:*  $x = 6 \cdot 10^{-5}$  м = 60 мкм.

**6.11.** Паралельний пучок електронів падає на грань кристала нікелю. При повороті кристала кут ковзання змінюється і коли він стає рівним  $64^\circ$ , спостерігається максимальне відбиття електронів, яке відповідає максимуму другого порядку. Довжина хвилі де Бройля  $\lambda = 180$  м. Знайти відстань  $d$  між атомними площинами кристала. Чому дорівнює швидкість електронів?

*Відповідь:*  $d = 200$  м;  $v = 4$  Мм/с.

**6.12.** Електрон рухається по колу радіусом  $r = 0,5$  см в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 8$  мТл. Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона.

*Відповідь:*  $= 0,1$  нм.

**6.13.**  $\alpha$ -частинка рухається по колу в однорідному магнітному полі, напруженість якого  $H = 18,9$  кА/м. Знайти радіус кола, якщо довжина хвилі де Бройля  $= 10$  м.

*Відповідь:*  $r = 8,3$  мм.

**6.14.** Знайти довжину хвилі де Бройля для атома водню, що рухається при температурі  $T = 293$  К з найбільш ймовірною швидкістю.

*Відповідь:*  $= 180$  м.

**6.15.** Знайти довжину хвилі де Бройля для: а) електрона, що рухається зі швидкістю  $v = 10^6$  м/с; б) атома водню, що рухається з середньою квадратичною швидкістю при температурі  $T = 300$  К; в) кульки масою  $m = 1$  г, що рухається зі швидкістю  $v = 1$  см/с.

*Відповідь:* а)  $= 730$  м; б)  $= 144$  м; в)  $= 6,63 \cdot 10^{-29}$  м.

**6.16.** На грань деякого кристала падає під кутом  $= 84^\circ$  потік електронів, що мають однакову швидкість. Міжплощинна відстань для кристала  $d = 0,25$  нм. Користуючись рівнянням Вульфа — Бреґґа, знайти імпульс електрона, якщо на екрані спостерігається інтерференційний максимум другого порядку.

*Відповідь:*  $p = 2,6 \cdot 10^{-23}$  кг  $\cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

**6.17.** Потік електронів проходить через тонку полікристалічну фольгу. На екрані, який знаходиться на відстані  $L = 0,1$  м, утворюються дифракційні кільця. Знайти міжплощинну відстань, якщо максимум третього порядку відповідає кільцю радіуса  $R = 1,6$  см.

*Відповідь:*  $d = 2,3 \cdot 10^{-10}$  м.

**6.18.** Виведіть закон дисперсії хвиль де Бройля, тобто залежність фазової швидкості хвиль де Бройля від їх довжини хвилі. Розглянути нерелятивістський та релятивістський випадки.

*Відповідь:* 1)  $v_{\text{фаз}} = \frac{h}{2m}$ ; 2)  $v_{\text{фаз}} = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{h^2} + 1}$ .

**6.19.** Довести, що групова швидкість  $u$  хвиль де Бройля дорівнює швидкості частинки, що вільно рухається. Розглянути нерелятивістський та релятивістський випадки.

*Відповідь:* 1)  $u = v$ ; 2)  $u = v$ .

**6.20.** Довести, що для частинки, яка вільно рухається з постійною швидкістю  $v$ , виконується співвідношення  $v_{\text{фаз}} \cdot u = c^2$  ( $u$  — групова швидкість).

*Відповідь:*  $v_{\text{фаз}} \cdot u = c^2$ .

**6.21.** Кінетична енергія електрона  $T = 1,5$  кеВ. Невизначеність координати становить  $x = 1$  мкм. Знайти невизначеність імпульсу. Чи можна за цими даними виявити відхилення в русі електрона від законів класичної механіки?

*Відповідь:*  $p = 1,05 \cdot 10^{-28}$  кг  $\cdot$   $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $\frac{p}{p} \ll 1$ .

**6.22.** Електронний пучок прискорюється в електронно-променевої трубі різницею потенціалів  $U = 1$  кВ. Невизначеність швидкості складає  $0,1$  % від її значення. Знайти невизначеність координати електрона.

*Відповідь:*  $x = 6,1$  нм.

**6.23.** Ширина сліду електрона на фотоплівці, отриманій за допомогою камери Вільсона, становить  $x = 10^{-3}$  м. Знайти невизначеність швидкості.

*Відповідь:*  $v = 0,116$  м/с.

**6.24.** За допомогою співвідношення невизначеностей зробіть оцінку швидкості при визначенні швидкості електрона атома водню.

*Відповідь:*  $v > 1,1 \cdot 10^6$  м/с.

**6.25.** Порівняти невизначеності при визначенні швидкості частинки, якщо її координати встановлені з точністю до  $10^{-5}$  м, та кульки масою  $m = 0,1$  мг, якщо координати її центра мас встановлюються з такою самою точністю.

*Відповідь:*  $\frac{v}{v_{\text{к}}} = 1,6 \cdot 10^{23}$ .

**6.26.** Електрон з кінетичною енергією  $T = 15$  еВ знаходиться в металевій порошоківці, діаметр якої  $d = 1$  мкм. Зробіть оцінку відносної невизначеності  $v$ , з якою може бути визначена швидкість електрона.

*Відповідь:*  $\frac{v}{v} = 10^{-4}$ .

**6.27.** Дебройлівська довжина хвилі частинки в 160 разів менша за невизначеність  $x$  її координати. Скільки відсотків складає відносна невизначеність її імпульсу?

*Відповідь:*  $\frac{P}{p} = 1 \%$ .

**6.28.** Знайти відносну невизначеність імпульсу частинки, якщо невизначеність координати цієї частинки дорівнює дебройлівській довжині хвилі.

*Відповідь:*  $\frac{P}{p} = 16 \%$ .

**6.29.** Мінімальна енергія  $E$  нуклона в ядрі дорівнює 10 МеВ. Виходячи із співвідношення невизначеностей, зробіть оцінку лінійних розмірів атома.

*Відповідь:*  $l = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE}} = 2,9$  фм.

**6.30.** Електрон визначений в області з лінійними розмірами  $l = 1$  мкм, його енергія дорівнює 10 еВ. Оцінити відносну невизначеність його швидкості, відносну невизначеність кінетичної енергії.

*Відповідь:*  $\frac{v}{v} = 1,1 \cdot 10^{-4}$ ;  $\frac{T}{T} = 1,21 \cdot 10^{-8}$ .

**6.31.** Вільний електрон може бути визначений в області простору розміром  $x_0 = 0,1$  нм. Через який час ширина області локалізації даного електрона буде становити  $x = 10^6$  м?

*Відповідь:*  $t = 1$  с.

**6.32.** За допомогою співвідношення невизначеностей Гейзенберга оцінити кінетичну енергію теплового нейтрона, локалізованого в області  $l = 27$  м.

*Відповідь:*  $T = 25$  меВ.

**6.33.** Вільно рухома частинка може бути локалізована в області з лінійними розмірами  $l = 2$  мкм. Кінетична енергія частинки  $T = 4$  еВ. Оцінити невизначеність кінетичної енергії частинки.

*Відповідь:*  $T = 4 \cdot 10^{-4}$  еВ.

**6.34.** Електрон знаходиться всередині атома, діаметр якого  $d = 0,3$  нм. Оцінити невизначеність енергії даного електрона.

*Відповідь:*  $E = 0,42$  еВ.



**6.35.** Хвильова функція  $\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$  визначена тільки в області  $0 \leq x \leq l$ . Виходячи із умови нормування, визначити нормувальний множник

$$\text{Відповідь: } A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

**6.36.** Виходячи із умови нормування, визначити коефіцієнт  $C$  власної  $n$ -функції  $\psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{l}x$ , яка описує стан електрона в одновимірному нескінченно глибокому потенціальному ящику із стороною  $l$ .

$$\text{Відповідь: } C = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

**6.37.** Власна функція, що описує стан частинки в двовимірному потенціальному ящику зі сторонами  $l_1$  та  $l_2$ , має вигляд  $\psi_{n_1 n_2}(x, y) = C \sin \frac{n_1 \pi}{l_1}x \sin \frac{n_2 \pi}{l_2}y$ . Знайти сталу  $C$ . Використати умову нормування.

$$\text{Відповідь: } C = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}.$$

**6.38.** Електрон знаходиться в потенціальному ящику, ширина якого  $l$ . В яких точках в інтервалі  $(0 < x < l)$  густина імовірності знаходження електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Знайдіть густину імовірності для цих точок. Рішення поясніть графічно.

$$\text{Відповідь: } x_1 = \frac{1}{3}l; x_2 = \frac{2}{3}l; |\psi(x)|^2 = \frac{3}{2l}.$$

**6.39.** Частинка в одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої  $l$  з нескінченно високими стінками, знаходиться в основному стані ( $n = 1$ ). Знайти імовірність виявлення частинки у лівій третині ями.

$$\text{Відповідь: } W = 0,195.$$

**6.40.** В одновимірному потенціальному ящику, ширина якого  $l$ , знаходиться електрон в нижчому збудженому стані. Знайти імовірність знаходження частинки в інтервалі  $l/2$ , рівновіддаленому від стінок ящика.

$$\text{Відповідь: } W = 0,82.$$

**6.41.** Електрон знаходиться в одновимірному потенціальному ящику, ширина якого дорівнює  $l$ . Знайти середнє значення координати  $\langle x \rangle$  електрона ( $0 < x < l$ ).

*Відповідь:*  $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$ .

**6.42.** Електрон знаходиться в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною  $l$  з нескінченно високими стінками. Знайти імовірність перебування частинки в середній третині ями, якщо головне квантове число  $n = 3$ . На графіку залежності густини імовірності від координати  $x$  поясніть фізичний зміст отриманого результату.

*Відповідь:*  $W = \frac{1}{3}$ .

**6.43.** Запишіть рівняння Шредінгера для електрона з енергією  $E$ , який рухається в додатному напрямі осі  $X$  для областей I і II (рис. 6.15), якщо на межі цих областей знаходиться низький потенціальний бар'єр.

*Відповідь:*  $''(x) + k_1^2 \psi(x) = 0, \quad ''(x) + k_2^2 \psi(x) = 0$ .

**6.44.** Знаючи розв'язок рівнянь Шредінгера для областей I і II потенціального бар'єра  $\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$ ;  $\psi_{II}(x) = A_2 e^{ik_2 x}$ , знайдіть з умов неперервності  $\psi$ -функцій та їх перших похідних на межі бар'єра відношення амплітуд імовірності  $B_1/A_1$  та  $A_2/A_1$ .

*Відповідь:*  $\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (k_2 = ik)$ .

**6.45.** Знаючи відношення амплітуд імовірностей  $\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$  для хвилі, відбитої від потенціального бар'єра, та  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$  для хвилі, що проходить через бар'єр, знайти вираз для коефіцієнта відбиття та коефіцієнта проходження.

**6.46.** Електрон з енергією  $E = 25$  еВ падає на низький потенціальний бар'єр висотою  $U = 16$  еВ (рис. 6.15). Знайти показник заломлення  $n$  хвиль де Бройля на межі бар'єра.

*Відповідь:*  $n = 0,6$ .

**6.47.** Електрон з енергією  $E = 100$  еВ падає на потенціальний бар'єр висотою  $U = 64$  еВ. Знайти імовірність  $W$  того, що електрон відіб'ється від бар'єра.

*Відповідь:*  $0,0625$ .

**6.48.** Знайти вираз коефіцієнта відбиття від дуже низького потенціального бар'єра ( $U \ll E$ ).

*Відповідь:* 
$$= \frac{1}{16} \left( \frac{U}{E} \right)^2.$$

**6.49.** При якому відношенні висоти  $U$  потенціального бар'єра і енергії  $E$  електрона, що падає на бар'єр, коефіцієнт відбиття  $= 0,25$ ?

*Відповідь:* 
$$\frac{U}{E} = 0,9.$$

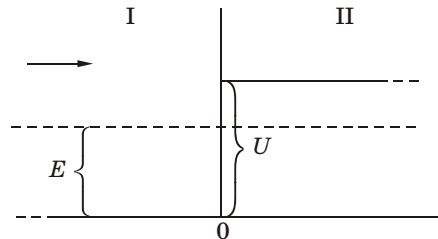
**6.50.** Вивести формулу, яка пов'язує коефіцієнт проходження електронів через потенціальний бар'єр і коефіцієнт заломлення  $n$  хвиль де Бройля.

*Відповідь:* 
$$= \frac{4}{(1+n)^2}.$$

**6.51.** Знайти коефіцієнт проходження електрона з енергією  $E = 25$  еВ через потенціальний бар'єр, висота якого  $U = 24,75$  еВ.

*Відповідь:*  $= 0,4.$

**6.52.** Написати рівняння Шредінгера та знайти його розв'язок для електрона, що рухається у додатному напрямі осі  $X$  для областей I і II (рис. 6.18), якщо на межі цих областей знаходиться потенціальний бар'єр висотою  $U$ .



**Рис. 6.18**

**6.53.** Написати вираз для  $\Psi_{II}(x)$  в області II (рис. 6.18) високого потенціального бар'єра, якщо  $\Psi$ -функція нормована так, що  $A_1 = 1$ .

*Відповідь:* 
$$\Psi_{II}(x) = 2 \frac{k_1 e^{-kx}}{k_1 + ik} \quad (k_2 = ik).$$

**6.54.** Знайти густину імовірності  $|\Psi_{II}(x)|^2$  знаходження електрона в області II високого потенціального бар'єра (рис. 6.18) в точці  $x = 0$ , якщо енергія електрона  $E = 1$  еВ, висота потенціального бар'єра  $U = 2$  еВ. Прийняти  $A_1 = 0$  та використати умови неперервності хвильової функції та її першої похідної на межі областей I і II.

*Відповідь:* 
$$|\Psi_{II}(x)|^2 = \frac{4E}{U} = 2.$$

**6.55.** Електрон з енергією  $E = 9$  еВ рухається в додатному напрямі осі  $X$ . Висота потенціального бар'єра  $U = 10$  еВ. Знайти коефіцієнт прозорості  $D$ , якщо ширина потенціального бар'єра  $d = 0,22$  нм.

*Відповідь:*  $D = 0,1$ .

**6.56.** Різниця енергій  $U - E = 10$  еВ. При якій ширині прямокутного потенціального бар'єра коефіцієнт прозорості  $D$  для електрона дорівнює  $0,01$ ?

*Відповідь:*  $d = 0,143$  нм.

**6.57.** Імовірність  $W$  проходження електрона через прямокутний бар'єр дорівнює  $0,99$ . Чому дорівнює ширина бар'єра  $d$ , якщо різниця  $U - E = 10^{-4}$  еВ.

*Відповідь:*  $d = 0,1$  нм.

**6.58.** Математичний маятник можна розглядати як гармонічний осцилятор. Знайдіть в електрон-вольтах енергію нульових коливань для маятника, довжина якого  $l = 1$  м. Маятник знаходиться в полі тяжіння Землі.

*Відповідь:*  $E = 1,03 \cdot 10^{-15}$  еВ.

**6.59.** Знайти за допомогою рівняння Шредінгера енергію гармонічного осцилятора з частотою  $\omega$  в стаціонарному стані  $(x) = A \exp(-a^2 x^2)$ , де  $A$  та  $a$  — сталі.

*Відповідь:*  $E = \frac{3}{2} \hbar \omega$ .

**6.60.** Використовуючи вираз енергії  $E_n = \frac{2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$  частинки, що

знаходиться в потенціальному ящику, отримати приблизний вираз енергії гармонічного осцилятора. Порівняти отриманий результат з істинним значенням енергії.

*Відповідь:*  $E_n = \frac{2}{4} \hbar \omega n$ . Отриманий вираз відрізняється від істинного (без урахування нульової енергії) в  $1/4$  рази.

**6.61.** Приймавши математичний маятник масою  $m = 100$  г і довжиною  $l = 0,5$  м за гармонічний осцилятор, знайти класичну амплітуду  $A$  маятника, яка відповідає енергії нульових коливань цього маятника.

*Відповідь:*  $A = 1,54 \cdot 10^{-17}$  м.

**6.62.** Доказати, що енергія вільних електронів в металі не квантується. Прийняти ширину  $l$  прямокутної потенціальної ями з нескінченно високими стінками для електрона в металі рівною 10 см.

*Відповідь:*  $E_n = 0,75n \cdot 10^{-16}$  еВ.

**6.63.** Електрон знаходиться в потенціальному ящику шириною  $l = 0,5$  нм. Знайти найменшу різницю  $E$  енергетичних рівнів електрона.

*Відповідь:*  $E = 4,48$  еВ.

**6.64.** Знайти середню кінетичну енергію  $\langle T \rangle$  лінійного гармонічного осцилятора, повна енергія якого дорівнює  $\frac{5\hbar}{2}$ .

*Відповідь:*  $\langle T \rangle = \frac{5}{4} \hbar$ .

**6.65.** Протон та електрон пройшли однакову прискорювану різницю потенціалів  $U = 10$  кВ. У скільки разів відрізняються коефіцієнти прозорості  $D_e$  для електрона й  $D_p$  для протона, якщо висота  $U$  потенціального бар'єра дорівнює 20 кеВ, а ширина його  $d = 0,1$  м?

*Відповідь:*  $\frac{D_e}{D_p} \approx 74$ .

# 7 Будова атома

## 7.1. Перші моделі будови атома. Дослід Резерфорда

Згідно з уявленнями вчених XIX сторіччя речовина побудована з атомів та молекул, але фактично будова атома залишалась загадкою. Перша важлива інформація про внутрішню структуру атома з'явилась з відкриттям електрона Дж. Томсоном у 1887 році. Електрони мають негативний електричний заряд, а самі атоми електрично нейтральні і, як наслідок, кожний атом повинен мати достатню кількість позитивно зарядженої речовини для компенсації негативного заряду електронів. Окрім цього, електрони у тисячі разів легші за атоми, тобто позитивно заряджена частина атома містить всю масу атома.

### Модель атома Томсона

У 1898 році англійський вчений Дж. Дж. Томсон висловив припущення, що атоми являють собою однорідні кулі з позитивно зарядженої речовини, в яких розташовані електрони. Величина позитивного заряду дорівнює негативному, тому атом буде нейтральним.

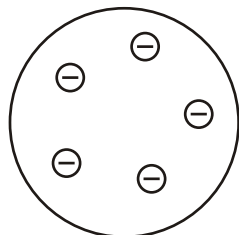


Рис. 7.1

Ця модель «пудинга з родзинками», зображена на рис. 7.1, здавалась цілком правдоподібною. Для атома з одним електроном напруженість поля всередині рівномірно зарядженої кулі визначається:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{r^3} \vec{r}, \quad 0 \leq r \leq R$$

де  $e$  — заряд кулі,  $R$  — її радіус. Тобто на електрон, розташований на відстані  $r$  від центра кулі (положення рівноваги), діє сила

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (7.1)$$

Зважаючи на те, що атом може випромінювати монохроматичну хвилю (тобто спектральну лінію), сила (7.1) відіграє роль квазіпружної сили  $\vec{F} = -k\vec{r}$ , під дією якої електрон коливається з частотою:

$$= \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \sqrt{\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e r^3}}. \quad (7.2)$$

Для довжини хвилі  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  (видима область спектра)  $= 3 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$  дістаємо  $r = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , що за порядком величини добре узгоджується з розмірами атомів, одержаними незалежними методами. Цей результат можна було б розглядати як підтвердження моделі Томсона, але подальші експериментальні дослідження показали її неспроможність.

Пройшло 13 років до того, як ця ідея зазнала серйозної експериментальної перевірки, результатом якої була відмова від цієї моделі і застосування моделі будови атома, пояснити яку, з точки зору класичної фізики, неможливо.

**Дослід  
Резерфорда**

Суть цього експерименту, запропонованого в 1911 році Ернстом Резерфордом і виконаного Гейгером і Марсденом, полягала в опроміненні атомів речовини швидкими  $\alpha$ -частинками, які спонтанно випромінюються деякими радіоактивними ядрами.  $\alpha$ -частинки — атоми гелію, які втратили два електрони і мають заряд  $+2e$  (тобто це ядра атома гелію).

Схему досліду показано на рис. 7.2. Зразок радіоактивної речовини (1) випромінював вузький потік  $\alpha$ -частинок (2), який падав на тонку фольгу з речовини (в досліді — золото) (3). Навколо плівки розташували круговий екран з сірчаного цинку (4), який давав видимі спалахи світла (сцинтиляції) при попаданні на нього  $\alpha$ -частинок. Спостереження велось за допомогою мікроскопа (5), в який, при повороті його на різні кути, потрапляло світло від  $\alpha$ -частинок, розсіяних під відповідними кутами.

Чекали, що більша частка  $\alpha$ -частинок пролетить прямо крізь фольгу, а решта зазнає невеликого відхилення. Такий характер поведінки  $\alpha$ -частинок впливав з томсонівської моделі атома, згідно з якою припускається, що

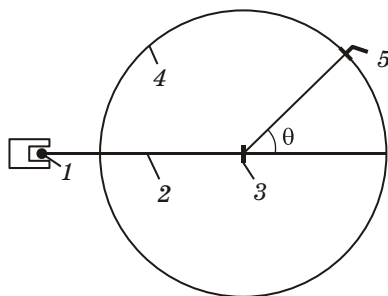


Рис. 7.2

позитивний заряд розподілено рівномірно по всьому об'єму ядра. Тоді на  $\alpha$ -частинки, які пролітають крізь тонку металеву фольгу, будуть діяти досить слабкі електричні сили і початкових імпульсів частинок повинно вистачити, щоб пролетіти крізь фольгу з незначним відхиленням від початкових траєкторій.

В дійсності Гейгер і Марсден виявили, що більшість  $\alpha$ -частинок, як вони і сподівались, пролітали без відхилення, але разом з цим частина з них відхилялась на дуже великі кути. Деякі частинки навіть розсіювались у зворотному напрямку. Зважаючи на те, що  $\alpha$ -частинки досить важкі (більше ніж в 7000 разів важче електрона) і швидкість їх в експерименті була великою, можна зробити висновок, що суттєве їх відхилення спричиняється дуже великими силами.

**Модель атома Резерфорда**

Для пояснення цих результатів Резерфорд зобразив атом як дуже маленьке позитивно заряджене ядро, в якому зосереджена майже вся маса атома, та електрони, розташовані на деякій відстані від ядра (рис. 7.3).

Якщо вважати атом майже порожнім простором, легко зрозуміти, чому більша частка  $\alpha$ -частинок проходить крізь тонку фольгу без зміни траєкторії. Коли  $\alpha$ -частинка пролітає поблизу ядра, на неї впливає сильне електричне поле і вона відхиляється на великий кут. Велими легкі атомні електрони майже не діють на  $\alpha$ -частинки.

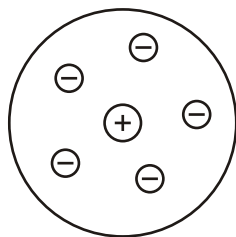


Рис. 7.3

Численні оцінки напруженості електричного поля в атомах, описуваних моделями Томсона і Резерфорда, підкреслюють суттєву різницю цих моделей. Згідно з Томсоном, напруженість електричного поля на поверхні атома (де вона максимальна) дорівнює  $\sim 10^{13}$  В/м, а за Резерфордом, напруженість електричного поля на поверхні ядра буде більшою за  $10^{21}$  В/м, що на вісім порядків більше. Таке сильне поле може відхиляти і навіть розсіювати назад високоенергетичну  $\alpha$ -частинку, яка пролітає поблизу ядра, а слабе поле томсонівського атома неспроможне це зробити.

Завдяки експериментам Гейгера і Марсдена і аналогічним наступним роботам було виявлено, що ядерний заряд — ціле число —  $Z$ , кратне  $+e$ , дорівнює числу протонів в ядрі елемента, має назву атомного номера елемента.



Однак, незважаючи на експериментальне підтвердження моделі Резерфорда, залишалось незрозумілим, як можуть існувати нерухомі електрони у відсутності сили, яка б тримала їх на місці і протидіяла електростатичній силі притягання електронів ядром. Це можливо, якщо електрони рухаються навколо ядра по динамічно стійким орбітам, аналогічним орбітам сонячної системи. Для атома водню, у якого один електрон обертається навколо ядра по круговій орбіті радіусом  $r$ , кулонівська сила, що діє на електрон з боку ядра, є доцентровою силою.

$$F_{\text{ел}} = F_{\text{доц}},$$

тобто

$$\frac{1}{4} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r},$$

звідки швидкість електрона дорівнює:

$$v = \frac{e}{\sqrt{4} m_e r}. \quad (7.3)$$

Повна енергія в атомі водню  $E$  складається з його кінетичної енергії

$$T = \frac{m_e v^2}{2}$$

і потенціальної енергії

$$U = -\frac{e^2}{4 r}.$$

Тоді

$$E = T + U = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4 r}. \quad (7.4)$$

Якщо використати (7.3), одержимо

$$E = \frac{e^2}{8 r} - \frac{e^2}{4 r} = -\frac{e^2}{8 r}. \quad (7.5)$$

Повна енергія електрона в атомі від'ємна, що може бути, якщо електрон пов'язаний з ядром. При застосуванні експериментально одержаного значення енергії зв'язку  $E = -13,6 \text{ eV} = -2,2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ , з (7.5) маємо значення радіуса орбіти електрона в атомі водню:

$$r = -\frac{e^2}{8 \cdot 0 E} = -\frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \text{ Кл}^2}{8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}} (-2,2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж})} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Цей результат добре відповідає даним, одержаним іншими методами.

Запропоновані результати задовільно узгоджуються з експериментально встановленим фактом стабільності атомів, однак ця теорія не відповідає класичній електромагнітній теорії. Згідно з класичною електромагнітною теорією електричний заряд, який має прискорення, випромінює енергію у вигляді електромагнітних хвиль з частотою, що безперервно змінюється. Потужність випромінювання  $P \sim a^2$ , де  $a = v^2/r$  — прискорення електрона, з урахуванням (7.3) маємо  $P \sim r^{-4}$ . Електрон все швидше випромінює енергію, рухаючись по спіралі до ядра і повинен на нього впасти всього за  $\sim 10^{-16}$  с. Це означає, що випромінювання атома має безперервний, а не лінійчастий спектр.

Але в дійсності атом є дуже стійкою системою, він може випромінювати енергію тільки за певних умов і випромінювання атома має дискретний характер. Така розбіжність теорії з експериментом означає тільки одне: непридатність застосування законів макрофізики до мікроскопічного світу атома.

Перша теорія будови атома водню, яка добре пояснює експериментальні результати, була запропонована Нільсом Бором у 1913 році. Поява цієї теорії пов'язана з намаганням пояснити походження спектральних ліній в атомних спектрах, на яких коротко зупинимося.

## 7.2. Спектр атома водню

Серія Бальмера  
для атома  
водню

В 1885 році при вивченні видимої частини спектра атома водню Й. Бальмер показав, що довжини хвиль для цього спектра мають закономірність, яка виражається як

$$\lambda' = \frac{1}{R'} = R' \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Величина  $R' = 1,097 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$  — стала Рідберга,  $\lambda' = 1/\lambda$  — хвильове число. (Не плутайте з хвильовим числом  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/\nu$ ). Зверніть увагу, що частота  $\nu = c/\lambda$ , тобто  $\lambda' = c/\nu$  і  $R = cR' = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$  — теж стала Рідберга. Тоді

$$= \frac{c}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); n = 3, 4, 5, \dots \quad (7.6)$$

Ця сукупність ліній одержала назву *серії Бальмера*. Очевидно, що при збільшенні  $n$  різниця між частотами сусідніх ліній зменшується і при  $n \rightarrow \infty$  отримуємо постійну граничну величину  $\nu_0 = R/2^2$ . Крім того, виявилось, що із збільшенням номера лінії  $n$  її інтенсивність зменшується.

*Сукупність спектральних ліній, які в своїй послідовності і в розподілі інтенсивності виявляють певну закономірність, називають спектральною серією.*

У 1920 році Роберт Вуд у спектрі випромінювання водню виявив 22 лінії серії Бальмера, тепер їх відомо 37.

<p><b>Спектральні серії атома водню</b></p>
---

Поряд із серією Бальмера у спектрі атомів водню було знайдено ряд інших серій, розташування ліній яких визначалось аналогічними формулами. В ультрафіолетовій частині спектра

Т. Лайман відкрив серію, частоти якої дорівнюють:

$$= R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

В інфрачервоній області спектра знайдено три спектральні серії (серії Пашена, Бреккетта і Пфунда) з частотами:

$$= R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots \text{ — серія Пашена;}$$

$$= R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7, \dots \text{ — серія Бреккетта;}$$

$$= R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 6, 7, 8, \dots \text{ — серія Пфунда.}$$

На рис. 7.4 зображено спектральні серії атома водню.

Таким чином, всі серіальні формули спектра водню можна виразити за допомогою так званої узагальненої формули Бальмера

$$= R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ або } E_{nm} = h \nu = hR \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (7.7)$$

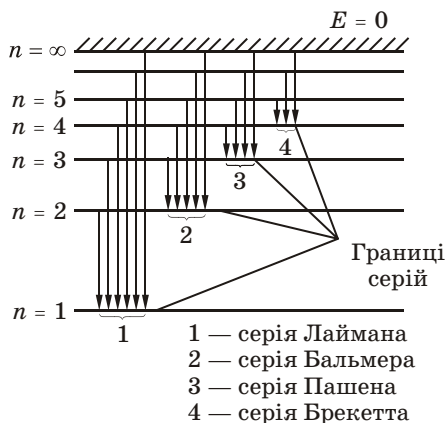


Рис. 7.4

де  $m$  в кожній серії має сталу величину ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ),  $n$  — ряд цілих чисел, що починається з числа, на одиницю більшого за  $m$  для даної серії,  $E_{nm}$  — енергія фотона, що випромінюється при переході атома з  $n$  стану у  $m$ . З цього випливає, що частоту будь-якої спектральної лінії атома водню можна виразити як різницю двох функцій цілих чисел  $m$  і  $n$ .

$$= T(m) - T(n), \quad (7.8)$$

де  $T(m) = R/m^2$ ,  $T(n) = R/n^2$  — спектральні терми.

**Комбінаційний принцип Рітца**

Співвідношення (7.8) виражає *комбінаційний принцип Рітца (1908 р.): частоти спектральних ліній випромінювання будь-якого атома можна виразити як різницю двох термів*.

Беручи різні комбінації термів, можна розрахувати всі можливі частоти спектральних ліній цього атома. Н. Бор вважав комбінаційний принцип прямою вказівкою на те, що атоми можуть знаходитися тільки в певних станах, значення енергії яких утворює дискретний ряд, тобто кожному терму відповідає певний стаціонарний енергетичний стан.

### 7.3. Модель атома Бора

В 1913 році Нільс Бор зробив першу спробу поєднати в одне ціле емпіричні закономірності лінійчастих спектрів, ядерну модель атома Резерфорда і квантовий характер випромінювання та поглинання світла.

При цьому Бор в своїй теорії не міг принципово відмовитись від описання поведінки електрона в атомі за законами класичної фізики. Однак цей класичний підхід був доповнений деякими обмеженнями, які одержали назву *постулатів Бора*.

**Постулати Бора**

**Перший постулат Бора** — *постулат стаціонарних станів: атому властиві цілком стійкі (стаціонарні) стани з відповідними значеннями енергії  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , перебуваючи в яких атом не поглинає і не випромінює електромагнітні хвилі. З цього випливає правило*

**квантування Бора:** електрони в атомах рухаються не по будь-яким круговим орбітам, а по цілком певним, для яких виконується умова квантування моменту імпульсу:

$$L_n = n\hbar; \rightarrow m_e v r = n \frac{h}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.9)$$

де  $m_e v$  — імпульс електрона,  $r$  — радіус його орбіти,  $\hbar = h/2$ . Оскільки довжина хвилі де Бройля  $= \frac{h}{m_e v}$ , то можна сказати, що

ціле число  $n$  дорівнює кількості довжин хвиль де Бройля для електрона, які містяться на довжині його кругової орбіти. З (7.9) маємо:

$$\frac{2 r m_e v}{h} = \frac{2 r}{\frac{h}{m_e v}} = n. \quad (7.10)$$

**Другий постулат Бора — правило частот:** при переході атома з одного стаціонарного стану в інший атом випромінює або поглинає один фотон, частота якого визначається з умови

$$E_m - E_n = h \nu_{mn}. \quad (7.11)$$

При  $E_m > E_n$  відбувається випромінювання фотона, при  $E_m < E_n$  — його поглинання.

Треба відзначити, що теорія атома Бора придатна не тільки для опису атома водню, а й до воднеподібних систем, які складаються з ядра із зарядом  $Ze$  і одного електрона, який обертається навколо ядра. Така система має назву ізоелектронної водню. Прикладами таких систем є іони  $\text{He}^-$ ,  $\text{Li}^{++}$  та ін.

**Радіуси  
стаціонарних  
орбіт для атома  
водню**

Виходячи з постулатів Бора, знайдемо радіуси стаціонарних орбіт та частоти електромагнітних хвиль випромінювання воднеподібного атома (заряд ядра  $Ze$ ) при переході електрона з одного стаціонарного стану в інший.

Оскільки електрон рухається навколо ядра під дією кулонівської сили, то вона відіграє роль доцентрової сили.

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}, \quad (7.12)$$

звідки

$$r = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e v^2}. \quad (7.13)$$

При використанні величини швидкості  $v$  з (7.9) маємо:

$$v = \frac{n\hbar}{m_e r}; \quad r_n = \frac{4}{Z} \frac{\hbar^2}{2m_e} n^2. \quad (7.14)$$

Для  $Z=1$  і  $n=1$  дістаємо перший радіус борівської орбіти  $r_1 = a_0 = 0,53 \cdot 10^{-12}$  м, що збігається з результатами теорії Резерфорда.

**Квантування енергії атома водню**

Щоб знайти енергію атома, виходячи з експериментів, зіставимо формули (7.7), (7.8) та (7.11), як наслідок, приходимо до висновку, що енергія атома водню в стаціонарному стані

$$E_n = -\frac{Rh}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Для воднеподібного атома

$$E_n = -\frac{Z^2 Rh}{n^2}.$$

Спектральний терм, пов'язаний з енергією атома, визначається формулою

$$T(n) = \frac{|E_n|}{h} = \frac{R}{n^2}.$$

Розрахуємо енергію атома водню.

За уявленнями класичної механіки повна енергія атома водню складається з кінетичної енергії руху електрона і потенціальної енергії взаємодії електрона з ядром, тобто:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4 \pi \epsilon_0 r}. \quad (7.15)$$

Якщо взяти до уваги (7.12), дістанемо:

$$E = -\frac{Ze^2}{8 \pi \epsilon_0 r}. \quad (7.16)$$

З огляду на величину  $r_n$  (8.14), одержимо:

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \text{або} \quad E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8 \hbar^2 \pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (7.17)$$

При переході електрона з  $m$  орбіти на  $n$  випромінюється електромагнітна хвиля, частота коливань якої за другим постулатом Бора дорівнює:

$$= \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \cdot 0^2 h^3} \cdot \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (7.18)$$

де  $n = m + 1, m + 2, \dots$

Формула (7.18) передає не тільки структурну узагальнену формулу Бальмера (7.7), але й числове значення сталої Рідберга, розраховане за формулою

$$R = \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \cdot 0^2 h^3}, \quad (7.19)$$

що дуже добре збігається з експериментально одержаним значенням.

Для більш точної оцінки замість маси електрона  $m_e$  треба брати зведену масу системи електрон — ядро  $= \frac{m_e M}{m_e + M}$  ( $M$  — маса ядра), оскільки електрон і ядро обертаються навколо їхнього спільного центра мас.

Таким чином, цілі числа, які входять до (7.17) та (7.18), визначають квантові значення енергії атома, а ціле число  $n$  має назву головного квантового числа. Енергетичний стан атома водню складається з послідовності енергетичних рівнів, значення яких змінюються в залежності від квантового числа  $n$  (рис. 7.5). Електрон знаходиться всередині гіперболічної «потенціальної ями». Енергетичний стан при  $n = 1$  має назву основного або нормального (незбудженого) стану. Енергія електрона в цьому стані мінімальна (від'ємна) і час життя безмежний. Стани з  $n > 1$  називаються збудженими (їх енергія також від'ємна). Час життя електрона в збудженому стані  $\sim 10^{-8}$  с.

При зростанні  $n$  енергетичні рівні сходяться до границі спектра, де  $n = \infty$  і  $E_\infty = 0$ , що відповідає іонізації атома, тобто відриву від нього електрона. Абсолютне значення  $|E_n = Rh/n^2|$  дорівнює енергії зв'язку електрона в атомі у стані  $n$ .

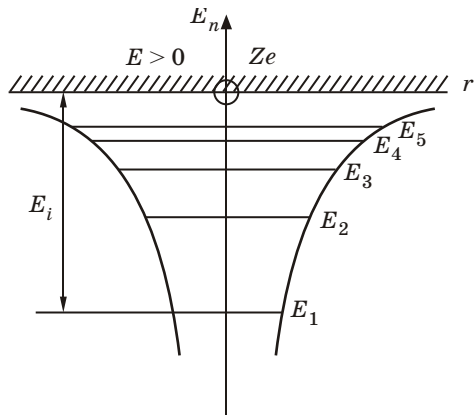


Рис. 7.5

Енергія іонізації атома дорівнює енергії зв'язку електрона в атомі у певному стані. Її зв'язок з потенціалом іонізації  $E_n = e$ , тобто  $= \frac{E_n}{e} = \frac{Rh}{en^2}$  — потенціал іонізації атома водню для електрона в  $n$ -стані.

Для воднеподібного атома  $= \frac{Z^2 Rh}{en^2}$ , де  $Z$  — номер атома в періодичній системі.

Для водню з  $Z = 1, n = 1$ , потенціал іонізації  $= 13,53 \text{ В}$ , а енергія іонізації

$$E_i = -E_1 = -\frac{me^4}{8h^2} = -13,6 \text{ еВ.}$$

#### 7.4. Дослід Франка і Герца

Вивчення атомних спектрів — можливість довести існування дискретних рівнів енергії в атомі. Класичні досліди Дж. Франка і Г. Герца по бомбардуванню парів різних елементів електронами з визначеною енергією точно продемонстрували наявність цих рівнів. В цих дослідах вивчалось зіткнення електронів з атомами газів методом затримуючого потенціалу. Схему досліду наведено на рис. 7.6.

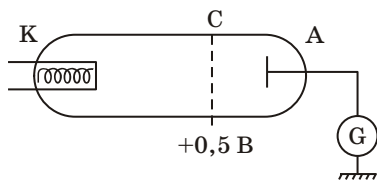


Рис. 7.6

У вакуумній трубці, заповненій парами ртуті (при тиску  $\sim 0,1$  мм рт. ст.) були розташовані катод К, анод А і сітка С.

Розжарений катод К випромінював електрони, які під дією прискорюючого електричного поля з різницею потенціалів  $U$  між катодом і сіткою рухались до анода і створювали струм. Між сіткою і анодом підтримувалась невелика гальмівна напруга  $\sim 0,5$  В. Струм через гальванометр G створювався тільки тими електронами, енергія яких була більшою деякого мінімального значення. При збільшенні прискорюючого потенціалу зростало число електронів, які долітали до анода і збільшувався струм. Цю залежність  $I(U)$  зображено на рис. 7.7. Характерна особливість цієї залежності — раптове падіння сили струму через гальванометр при певних напругах. Максимуми сили струму спостерігались при  $U = 4,9; 9,8; 14,7$  В і т. д. Щоб зрозуміти їх походження, слід розглянути процеси, які можуть відбуватися при зіткненні електрона з атомом ртуті.



Спочатку ці зіткнення мали пружний характер, тоді електрон, маса якого в сотні разів менша за масу атома ртуті, після удару практично не втрачає енергії, тобто удар абсолютно пружний. Але, як тільки енергія електрона досягне деякої критичної величини, анодний струм різко падає, що можна пояснити непружним характером зіткнень електрона з атомом ртуті. При цьому електрон віддає частину або всю кінетичну енергію атому

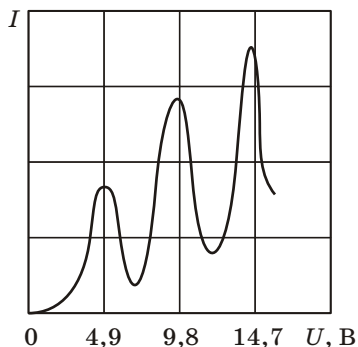


Рис. 7.7

і вже неспроможний подолати гальмівну дію електричного поля між сіткою і анодом. В результаті зіткнення атом ртуті, одержавши енергію від електрона  $E = 4,9$  еВ, збуджується і переходить із основного стану в збуджений. Подальше збільшення напруги між катодом і сіткою призводить до зміщення точок непружних ударів електронів з атомами ртуті ліворуч від сітки, що дає можливість електрону на шляху до сітки збільшити свою енергію при зростанні  $U$ .

При цьому зростатиме і сила струму. Друге непружне зіткнення електрона з атомом відбудеться при  $U = 9,8$  В. Тоді спостерігається другий мінімум на залежності  $I(U)$ . Таким чином, одержуємо послідовність критичних потенціалів. Внаслідок того, що електронів, які зазнають дворазових та багаторазових непружних зіткнень, відносно мало, зменшення сили струму незначне.

Всі ці результати підтверджують справедливості першого постулату Бора.

Справедливість правила частот Бора можна також спостерігати на досліді Франка — Герца.

Атом ртуті, збуджений при зіткненні з електроном, після одержання від нього енергії  $E$  через малий проміжок часу повертається в свій основний стан. При цьому переході спостерігається випромінювання з частотою  $\nu = E/h$ , що відповідає довжині хвилі

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 2,525 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Цей результат цілком узгоджується з теоретичними розрахунками.

**Достоїнства  
теорії Бора**

Теорія атома Бора відіграла величезну роль в створенні атомної фізики.

За допомогою теорії Бора вдалось пояснити механізм виникнення та структуру лінійчатих спектрів випромінювання атомів водню та воднеподібних систем, дістати досить точний збіг частот цих ліній, одержаних за формулою (7.18) і експериментально; з'ясувати фізичну природу результатів досліду Франка — Герца, характеристичних рентгенівських спектрів, нормального ефекту Зеємана та інших явищ. Одержана можливість теоретично обчислити сталу Рідберга, за значенням якої для Н і  $\text{He}^+$  можна розрахувати відношення маси протона до маси електрона  $m_p/m_e$ . Одержаний результат  $m_p/m_e = 1847$  збігався з експериментальним результатом, що було важливим підтвердженням слушності квантових ідей для пояснення будови атома.

**Недоліки теорії  
Бора**

Однак теорія Бора неспроможна пояснити ряд експериментальних фактів, наприклад, залежність інтенсивності спектральних ліній від частоти, поляризованість, дисперсію та поглинання світла. Крім того, спроби застосувати цю теорію для пояснення будови багатоелектронних атомів і навіть атому гелію, який має всього два електрони, показали її повну неслухняність. По суті ця теорія змогла пояснити тільки спектри елементів першої групи таблиці Менделєєва і то тільки якісно.

Основний недолік цієї теорії — внутрішнє логічне протиріччя, її непослідовність тому, що в ній одночасно використовуються і класичні і квантові уявлення, які знаходяться у протиріччі одне з одним.

Очевидно, що теорія Бора, зважаючи на її еклектичний характер, могла бути тільки перехідним етапом на шляху до створення сучасної теорії атомних явищ.

**Принцип  
відповідності**

Створюючи свою теорію, Н. Бор керувався важливою ідеєю наступності розвитку фізичних теорій, яка сформульована у *принципі відповідності*. *Згідно з цим принципом при досить великих квантових числах квантові співвідношення повинні переходити у класичні.*

Значення цього принципу важко переоцінити. За його смислом будь-яка нова теорія, яка претендує на більшу загальність, не відкидає стару теорію, а включає її в себе, вказуючи границі її застосування. Так, за гіпотезою де Бройля, хвильові властивості притаманні всім тілам, але для макроскопічного тіла довжина

хвилі настільки мала, що хвильовими властивостями можна знехтувати і описувати його рух з точки зору класичної механіки.

Що стосується зв'язку теорії Бора із співвідношенням класичної фізики, то треба мати на увазі, що радіус орбіти електрона в атомі водню ( $Z = 1$ ) пропорційний квадрату цілого числа  $n$ , тому при  $n \gg 1$  атом буде великим, тобто макроскопічним об'єктом. Для великого атома частоти випромінювання кратні частоті обертання електрона навколо ядра. Це твердження і є принципом відповідності для цього прикладу.

Частота обертання електрона з класичної точки зору  $\nu_n = v_n / r_n$ . Якщо взяти швидкість електрона  $v_n$  (7.9), а радіус його орбіти  $r_n$  з (7.14), то частота  $\nu_n$  має вигляд

$$\nu_n = \frac{v_n}{r_n} = \frac{m_e Z^2 e^4}{16 \pi^2 \hbar^3 n^3}, \quad Z = 1. \quad (7.20)$$

Звернемось тепер до частоти випромінювання, яка відповідає переходу  $n \rightarrow m$ , і припустимо, що числа  $m$  і  $n$  набагато більші одиниці ( $m, n \gg 1$ ), але різниця між ними мала. Тоді величина  $1/m^2 - 1/n^2$  приблизно дорівнюватиме  $(n - m)/n^3$ . Зважаючи на (7.20), одержуємо частоту переходу  $\nu_{mn} = \nu_n (n - m)$ . Цією формулою і виражається принцип відповідності. Отже, будь-яка більш загальна теорія повинна включати в себе попередню, як граничний випадок.

### Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Чому ядерна модель атома Резерфорда виявилась безпідставною?
2. Який смисл мають числа  $m$  і  $n$  в узагальненій формулі Бальмера?
3. Яка різниця моделі атома Резерфорда і моделі атома Бора?
4. Чому дорівнює частота випромінювання атома водню, що відповідає короткохвильовій границі серії Бальмера?
5. Сформулюйте постулати Бора.
6. Як за допомогою постулатів Бора пояснити лінійчатий спектр атома?
7. Розрахуйте радіуси електронних стаціонарних орбіт за допомогою постулатів Бора.
8. Як знайти енергію атома водню, виходячи з постулатів Бора?
9. В чому полягає комбінаційний принцип Рітца?
10. Які спектральні серії атома водню ви знаєте?

11. Для чого був поставлений дослід Франка і Герца?
12. Які висновки можна зробити на основі досліду Франка і Герца?
13. Нарисуйте вольт-амперну характеристику, одержану в досліді Франка і Герца.
14. На яких ділянках цієї кривої (рис. 7.7) мають місце пружні, а на яких непружні зіткнення електронів з атомами?
15. Яка роль гальмівної напруги між сіткою і анодом?
16. Які переваги і недоліки має теорія Бора?
17. В чому полягає принцип відповідності?
18. Визначте максимальну і мінімальну енергії фотона в серії Лаймана для атома водню.
19. Розрахуйте потенціал і енергію іонізації атома водню.
20. Визначте максимальну довжину хвилі світла, при якій можлива іонізація атома водню, що перебуває в основному стані.
21. Атом водню знаходиться в стані з  $n = 5$ . Скільки всього ліній буде в спектрі випромінювання такого атома?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Користуючись теорією Бора для атома водню визначити радіус орбіти, найближчої до ядра (перший борівський радіус) та швидкість руху електрона по цій орбіті.

#### *Розв'язання*

Кулонівська сила взаємодії електрона з ядром у атомів водню відіграє роль доцентрової сили

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi r^2}. \quad (1)$$

Згідно з першим постулатом Бора, правило квантування моменту імпульсу має вигляд

$$mvr = n\hbar, \text{ тоді } v = \frac{n\hbar}{mr}. \quad (2)$$

Для атома водню  $Z = 1$ ,  $n = 1$ .

Підставимо (2) в (1) і одержимо перший борівський радіус

$$r_1 = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2}; r_1 = 52,8 \text{ пм.}$$

Швидкість руху електрона по цій орбіті (2)

$$v_1 = \frac{\hbar}{mr_1}; v_1 = 2,19 \text{ Мм/с.}$$

### Задача 2

Виходячи тільки з того, що перший потенціал збудження атома водню  $\epsilon_1 = 10,2 \text{ В}$ , визначте енергію фотона (в електрон-вольтах), яка відповідає третій лінії серії Бальмана.

#### Розв'язання

Перший потенціал збудження  $\epsilon_1$  — це та найменша різниця потенціалів, при проходженні якої електрон набуває енергії, достатньої при зіткненні з атомом перевести його в перший збуджений стан. На рис. 7.8 це відповідає переходу з рівня  $n = 1$  на рівень  $n = 2$ .

Робота сил прискорюючого електричного поля  $e_1$  повинна дорівнювати кванту енергії  $h\nu_{12}$ , який поглинається атомом при його переході в перший збуджений стан.

В узагальненій формулі Бальмера (7.7)  $m = 1$  і  $n = 2$ , одержимо

$$e_1 = h\nu_{12} = hR \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} hR, \quad (1)$$

звідки  $hR = 4e_1/3$ .

Третя лінія серії Бальмера відповідає переходу з п'ятого енергетичного рівня ( $n = 5$ ) на другий ( $m = 2$ ), тобто

$$E_{52} = hR \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 0,21hR. \quad (2)$$

Підставимо (1) в (2) і одержимо шукану енергію фотона

$$E_{52} = \frac{0,21 \cdot 4e_1}{3} = 0,28e_1; E_{52} = 0,28 \cdot 10,2 = 2,86 \text{ еВ.}$$

### Задача 3

Атомний водень, при бомбардуванні його електронами, випромінює світло з довжиною хвилі  $0,1221 \text{ мкм}$ . Знайти енергію

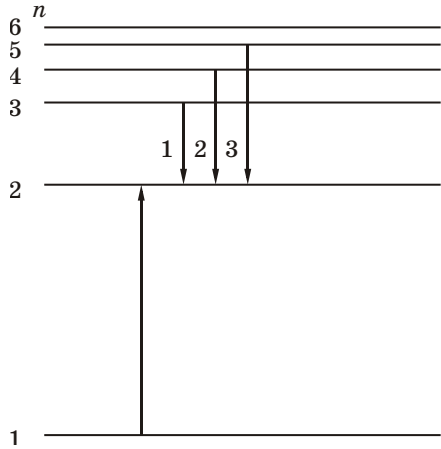


Рис. 7.8

електронів і визначити, в який збуджений стан переходить атом при ударі електрона.

### Розв'язання

Згідно з другим постулатом Бора (правило частот)  $E_n - E_1 = h \cdot \nu$ .  
Енергія фотона, що випромінюється, дорівнює кінетичній енергії електрона, що переводить атом в  $n$ -й стан.

Тобто  $h \cdot \nu = E_k$ ;  $\nu = c / \lambda$ ,

$$E_k = \frac{hc}{\lambda}; E_k = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,1221 \cdot 10^{-6}} = 1,62 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 10,2 \text{ еВ.}$$

Для визначення збудженого стану, в який перейде атом, розрахуємо квантове число  $n$ .

Енергія основного стану  $E_1 = -E_{\text{іон}} = -13,6 \text{ еВ}$ , тоді енергія  $n$ -го збудженого стану дорівнює

$$E_n = E_1 + E_k$$
$$E_n = -13,6 + 10,2 = -3,4 \text{ еВ.}$$

Беручи до уваги, що

$$E_1 = -\frac{me^4}{4 \cdot 2 h^2}; E_n = -\frac{me^4}{4 \cdot 2 h^2 n^2},$$

маємо

$$\frac{E_1}{E_n} = n^2; \frac{E_1}{E_n} = \frac{13,6}{3,4} = 4; n^2 = 4; n = 2.$$

Атом перейшов в перший збуджений стан  $n = 2$ .

### Задачі для самостійного розв'язання

**7.1.** Визначити частоту світла, що випромінюється атомом водню при переході електрона на рівень з головним квантовим числом  $n = 2$ , якщо радіус орбіти змінився в  $k = 4$  рази.

*Відповідь:*  $\nu = 6,1 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ .

**7.2.** Визначте довжину хвилі, яка відповідає границі серії Бальмера.

*Відповідь:*  $\lambda = 364,7 \text{ нм}$ .

**7.3.** Потенціал іонізації атома водню дорівнює  $13,6 \text{ В}$ . Виходячи з цього, визначити, скільки ліній серії Бальмера ( $N$ ) попадає у видиму частину спектра.

*Відповідь:*  $N = 4$ .

**7.4.** Визначити довжини хвиль, що відповідають першим чотирьом лініям в спектрі поглинання водню.

*Відповідь:*  $\lambda_1 = 1223 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_2 = 1032 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_3 = 979 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_4 = 956 \text{ \AA}$ .

**7.5.** Визначити швидкість електрона на другій орбіті атома водню.

*Відповідь:*  $v = 1,09 \text{ Мм/с}$ .

**7.6.** Визначити частоту обертання електрона на третій орбіті атома водню.

*Відповідь:*  $\omega = 2,43 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ .

**7.7.** Фотон з енергією 16,5 еВ вибив електрон із незбудженого атома водню. Яку швидкість буде мати електрон далеко від ядра атома?

*Відповідь:*  $v = 1 \text{ Мм/с}$ .

**7.8.** Атом водню в основному стані поглинув квант світла з довжиною хвилі  $\lambda = 121,5 \text{ нм}$ . Розрахуйте радіус електронної орбіти збудженого атома водню.

*Відповідь:*  $r = 212 \text{ пм}$ .

**7.9.** Атом водню був збуджений так, що електрон перейшов на дев'ятий електричний рівень. Скільки ліній може випромінювати водень при цьому?

*Відповідь:*  $N = 36$ .

**7.10.** На атом водню падає фотон і вибиває з нього електрон. Кінетична енергія електрона дорівнює 3,22 еВ. Чому дорівнює довжина хвилі такого світла, якщо атом знаходиться у першому збудженому стані?

*Відповідь:*  $\lambda = 187,5 \text{ нм}$ .

**7.11.** На який енергетичний рівень перейшов електрон при збудженні іона гелію, якщо при переході у нормальній стан було послідовно зафіксовано два фотони з довжинами хвиль 108,5 нм та 30,4 нм?

*Відповідь:*  $n = 5$ .

**7.12.** Між якими енергетичними рівнями іона гелію відбувається перехід електрона, якщо довжина хвилі фотона при цьому переході дорівнює довжині хвилі першої лінії серії Бальмера для водню?

*Відповідь:*  $m = 4$ ,  $n = 6$ .

**7.13.** Обчислити індукцію магнітного поля в центрі атома водню, зумовлену рухом електрона по першій борівській орбіті.

*Відповідь:*  $B = 12,5 \text{ Тл}$ .

**7.14.** Знайти напруженість електричного поля ядра водню на відстані першої та четвертої орбіти електрона.

*Відповідь:*  $E_1 = 5,1 \cdot 10^{11}$  В/м;  $E_4 = 2 \cdot 10^9$  В/м.

**7.15.** У випромінюванні зірки спостерігався воднеподібний спектр, довжини хвиль якого в 9 разів менше, ніж у атомарного водню. Який елемент має такий спектр?

*Відповідь:*  $Z = 3$ , літій.

**7.16.** Яка енергія потрібна для повного відриву електрона від ядра однократно іонізованого атома гелію, якщо: а) електрон перебуває в основному стані; б) електрон знаходиться в стані, який відповідає головному квантовому числу  $n = 3$ ?

*Відповідь:*  $E_{i1} = 54,2$  еВ;  $E_{i2} = 6,02$  еВ.

**7.17.** Розрахуйте перший потенціал збудження атома водню.

*Відповідь:*  $\varphi_1 = 10,2$  В.

**7.18.** Визначте еквівалентний струм для електрона на першій борівській орбіті.

*Відповідь:*  $I = 1,05$  мА.

**7.19.** Знайти, на скільки змінилась енергія електрона в атомі водню при випромінюванні атомом фотона з довжиною хвилі  $= 4,86 \cdot 10^{-7}$  м.

*Відповідь:*  $E = 2,56$  еВ.

**7.20.** Виходячи з теорії Бора, визначити орбітальний магнітний момент електрона, що рухається по четвертій орбіті атома водню.

*Відповідь:*  $p_m = 3,73 \cdot 10^{-23}$  А · м<sup>2</sup>.

**7.21.** Визначити максимальну і мінімальну енергії фотона в видимій серії спектра водню (серії Бальмера).

*Відповідь:*  $E_{\max} = 3,41$  еВ,  $E_{\min} = 1,89$  еВ.

**7.22.** Максимальна довжина хвилі спектральної серії Лаймана для водню дорівнює 0,12 мкм. Припускаючи, що стала Рідберга невідома, визначити максимальну довжину хвилі лінії серії Бальмера.

*Відповідь:*  $\lambda = 0,648$  мкм.

**7.23.** Обчислити енергію та потенціал іонізації іонів  $\text{He}^+$  та  $\text{Li}^{++}$ .

*Відповідь:*  $\text{He}^+$ : 54 еВ, 54 В;  $\text{Li}^{++}$ : 112 еВ, 122 В.

**7.24.** Якому елементу належить воднеподібний спектр, довжини хвиль якого в чотири рази менше, ніж в атомарного водню?

*Відповідь:*  $\text{He}^+$ .



**7.25.** Сталі Рідберга для водню та гелію дорівнюють відповідно  $R_{\text{H}} = 10967757,6 \text{ м}^{-1}$ ,  $R_{\text{He}} = 10972232,5 \text{ м}^{-1}$ . Знайти відношення  $m_{\text{H}}/m_e$  та  $m_{\text{He}}/m_{\text{H}}$ , де  $m_{\text{H}}$ ,  $m_{\text{He}}$ ,  $m_e$  — відповідно маси протона, ядра гелію, електрона.

*Відповідь:*  $\frac{m_{\text{H}}}{m_e} = 1836,2$ ;  $\frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{H}}} = 3$ .

**7.26.** Знайти зміну орбітального механічного моменту електрона при переході його із збудженого стану в основний з випромінюванням фотона з довжиною хвилі  $\lambda = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

*Відповідь:*  $L = 2\hbar = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**7.27.** Визначте довжину хвилі світла, що випромінюється збудженим атомом водню при переході електрона на іншу орбіту, якщо радіус орбіти електрона змінився в 4 рази.

*Відповідь:*  $\lambda = 485 \text{ нм}$ .

**7.28.** У якого воднеподібного іона різниця довжин хвиль головних ліній серій Бальмера і Лаймана дорівнює  $59,3 \text{ нм}$ ?

*Відповідь:*  $Z = 3$ , літій.

**7.29.** Знайти потенціальну  $W_{\text{п}}$ , кінетичну  $W_{\text{к}}$  і повну  $E$  енергію електрона, який знаходився на першій орбіті атома водню.

*Відповідь:*  $E = -13,6 \text{ еВ}$ ;  $W_{\text{п}} = -27,3 \text{ еВ}$ ;  $W_{\text{к}} = 13,6 \text{ еВ}$ .

**7.30.** Визначити частоту світла, що випромінюється атомом водню, при переході електрона на рівень з головним квантовим числом  $n = 2$ , якщо радіус орбіти електрона змінився в  $k = 9$  разів.

*Відповідь:*  $\nu = 0,731 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$

# 8 Квантова теорія воднеподібних та багатоелектронних атомів

## 8.1. Квантовомеханічна теорія воднеподібного атома

Застосування ідей квантової механіки дало можливість розв'язати задачу про енергетичні рівні електрона в воднеподібній системі, не залучаючи ніяких припущень.

**Рівняння Шредінгера для атома водню**

Як відомо, електрон, який рухається в центральносиметричному кулонівському полі ядра має потенціальну енергію

$$U = -\frac{Ze^2}{4_0r}.$$

Тоді рівняння Шредінгера для електрона в атомі запишемо так:

$$+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U) = 0$$

або

$$+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4_0r}\right) = 0. \quad (8.1)$$

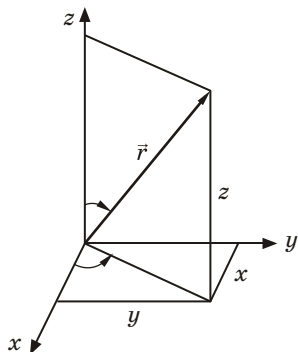


Рис. 8.1

Зважаючи на центральну симетрію поля, слушно застосувати сферичні координати (рис. 8.1)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

В цьому випадку рівняння Шредінгера матиме вигляд

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = 0.$$

Хвильова функція повинна відповідати умовам однозначності і безперервності. Розв'язок цього диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних шукаємо у вигляді добутку трьох хвильових функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної

$$(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi).$$

Якщо підставити цей вираз у рівняння Шредингера і розділити одержане на  $R$ , дістанемо рівняння, в якому один доданок залежить від  $r$  і  $\theta$ , а другий — від  $\phi$ . Сума їх дорівнює нулю, що можливо тільки за умови, якщо доданки дорівнюють одній і тій самій сталій величині з різними знаками.

Аналогічно проведемо розділення змінних для рівняння, що залежить від  $r$  і  $\theta$ . Кожне з цих рівнянь має розв'язок при певних умовах. При цьому дістанемо власні значення енергії і власні хвильові функції.

**Спектр власних значень енергії**

Енергія може бути додатною, тоді електрон вільний і спектр енергії безперервний, або може приймати одне із значень

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

тобто спектр енергії дискретний, електрон зв'язаний з ядром.

**Квантові числа**

Це та ж формула, що одержав Н. Бор, але ніяких припущень не робилось, рівняння (8.1) розв'язувалося точно. Окрім цього, при розв'язуванні рівнянь і визначенні власних функцій  $(r, \theta, \phi)$  одержано три параметри, які приймають цілочисленні значення:

$n$  — *головне квантове число, визначає квантування енергії електрона в атомі* (визначає номер рівня енергії). Воно приймає такі значення  $n = 1, 2, 3, \dots$

$l$  — *орбітальне квантове число, визначає величину (модуль) моменту імпульсу електрона*.  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  — можливі значення цього квантового числа. При цьому величина моменту імпульсу дорівнює

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}. \quad (8.2)$$

Як і повна енергія  $E$ , момент імпульсу  $L_l$  зберігається і квантується.

Зауважимо, що величина  $\hbar = h/2\pi$  буде природною одиницею моменту імпульсу.

Для станів, що мають певні значення квантового числа  $l$ , застосовують спеціальні позначення (спектроскопічні символи), наприклад, якщо  $l=0$ , то кажуть про  $s$ -стан, при  $l=1$  —  $p$ -стан. Сукупність символів така:

$l$	0	1	2	3	4	5	6	7
стан	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	$h$	$i$	$k$

Ці позначення походять від емпіричної класифікації спектрів за серіями, які мають назву гостра (sharp), головна (principal), дифузна (diffuse), фундаментальна (fundamental) і т. д. Ця класифікація існувала ще до створення теорії атома.

За допомогою спектроскопічних символів електронна конфігурація записується так: число перед спектроскопічним символом означає головне квантове число  $n$ , а сам символ відповідає значенню орбітального квантового числа. Наприклад,  $3d$  означає, що електрон знаходиться у стані з  $n=3$  і  $l=2$ ; якщо  $3d^2$ , то це означає, що таких електронів в атомі 2.

За теорією Бора  $l \neq 0$ , тому що при  $l=0$  ( $s$ -стан) електрон повинен коливатися як маятник, перетинаючи ядро, що неможливо. Квантова механіка показує наявність таких станів електрона, в яких він має момент імпульсу, не пов'язаний з рухом по орбіті. Це стосується  $s$ -електрона у будь-якому атомі.

Можливі стани електрона в атомі водню

$$\begin{array}{ll}
 n=1, l=0 & 1s, \\
 n=2, l=0,1 & 2s, 2p, \\
 n=3, l=0,1,2 & 3s, 3p, 3d, \\
 n=4, l=0,1,2,3 & 4s, 4p, 4d, 4f, \\
 n=5, l=0,1,2,3,4 & 5s, 5p, 5d, 5f, 5g.
 \end{array}$$

На рис. 8.2 ці стани зображені у вигляді енергетичного спектра. Випромінювання і поглинання світла відбувається при переході електрона з одного рівня на інший. Для орбітального квантового числа  $l$  існують правила відбору  $l = \pm 1$ , тобто можливі тільки переходи, коли  $l$  змінюється на одиницю.

Серії Бальмера відповідають переходи:

$$\left. \begin{array}{l} nd \rightarrow 2p \\ ns \rightarrow 2p \\ np \rightarrow 2s \end{array} \right\}$$

де  $n = 3, 4, 5 \dots$

Третім квантовим числом є  $m_l$  — **магнітне квантове число**. Воно приймає значення  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , тобто всього  $2l + 1$  значень.

**Це квантове число пов'язане з квантуванням напрямку моменту імпульсу (квантуванням проєкції моменту імпульсу на напрямок  $z$  зовнішнього магнітного поля — просторове квантування).**

Тоді

$$L_{lz} = m_l \hbar. \quad (8.3)$$

Фізичний зміст магнітного квантового числа  $m_l$  можна зрозуміти, якщо взяти до уваги, що момент імпульсу  $\vec{L}$  — векторна величина, що квантується, тобто змінюється дискретно  $L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ .

**Просторове квантування**

Не дивно, що і напрямок  $\vec{L}_l$  по відношенню до зовнішнього магнітного поля, напрямленого вздовж осі  $z$ , також квантується. Це явище називають **просторовим квантуванням**.

При  $l = 0$ ,  $L_z = 0$ , що означає, що  $\vec{L} \perp \vec{B}$ . Коли  $l = 1$ ,  $L_{lz} = \hbar, 0, -\hbar$ ; при  $l = 2$   $L_z = 2\hbar, \hbar, 0, -\hbar, -2\hbar$  і т. д., всього  $2l + 1$  орієнтацій  $\vec{L}$  відносно осі  $z$ . Очевидно, що  $\vec{L}$  ніколи не може бути паралельним або антипаралельним  $\vec{B}$ , оскільки завжди  $L_{lz} < L_l$  ( $m_l \hbar < \hbar \sqrt{l(l+1)}$ ).

Просторове квантування орбітального моменту імпульсу атома водню зображено на рис. 8.3 ( $l = 2$ ). Тоді  $L_l = \hbar \sqrt{6}$ , а  $L_{lz} = 2\hbar, \hbar, 0, -\hbar, -2\hbar$ .

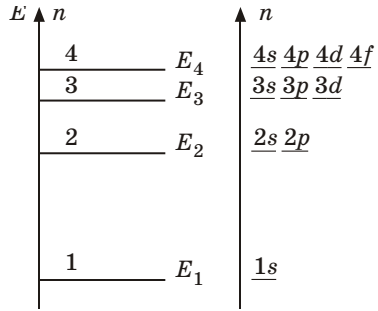


Рис. 8.2

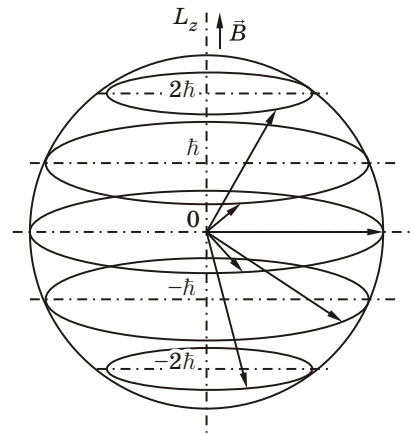


Рис. 8.3

Зауважимо, що одночасно можна виміряти тільки модуль моменту імпульсу та одну проекцію  $L_{lz}$ . Дві інші проекції  $L_{lx}$  і  $L_{ly}$  залишаються невизначеними. Це пов'язано з тим, що  $\vec{L}_l$  не може мати певне положення відносно осі  $z$ , а описує в просторі конус, твірна якого дорівнює  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ , а проекція на вісь  $z$  —  $L_{lz} = m_l \hbar$ , тобто спостерігається прецесія вектора  $\vec{L}_l$  навколо осі  $z$ .

Причина такого явища в принципі невизначеності: якби вектор  $\vec{L}_l$  мав точний напрямок у просторі, то  $L_{lx}$ ,  $L_{ly}$  і  $L_{lz}$  мали б певні значення і електрон знаходився в певній площині  $xy$ . Але при цьому компонента імпульсу електрона  $p_z$  мала нескінченно велику невизначеність, що неможливо.

**Кратність  
виродження**

Щоб показати залежність  $R$ ,  $\Phi$  від квантових чисел  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$ , можна записати хвильову функцію електрона так:

$$R_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_{l,m_l}(\theta, \phi).$$

Вочевидь, можливі ситуації, коли у електронів з енергією, яка характеризується головним квантовим числом  $n$ , можуть бути різні значення квантових чисел  $l$  і  $m_l$ . Такий стан називається **виродженням**. **Кількість станів з однаковим  $n$ , але різними  $l$  і  $m_l$  — кратність виродження**. Для атома водню кратність виродження:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \quad (8.4)$$

Стан електрона в атомі водню при  $n = 1$  має назву основного стану. При  $n = 1$  виродження відсутнє. Власне значення енергії в цьому стані

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{32 \pi^2 \hbar^2}.$$

Одному значенню енергії  $E_1$  відповідає одна хвильова функція, один основний стан  $(1, 0, 0)$ .

При  $n = 2$

$$E_2 = -\frac{m_e e^4}{32 \pi^2 \hbar^2} \frac{1}{2^2}, \quad l = 0, 1; m_l = 0 (l = 0); m_l = -1, 0, 1 (l = 1).$$

Значенню енергії  $E_2$  відповідає чотири хвильові функції, чотири стани атома:  $(2, 0, 0)$ ,  $(2, 1, -1)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(2, 1, 1)$  — кратність виродження дорівнює чотирьом.

**Густина ймовірності знаходження електрона**

Для електрона в атомі дуже суттєві хвильові властивості. В цьому випадку немає сенсу говорити про електронні орбіти. З точки зору квантової механіки кожному енергетичному стану відповідає хвильова функція, квадрат модуля якої визначає густину ймовірності знаходження електрона.

Розв'язок рівняння Шредингера дає можливість визначити густину ймовірності  $w = |\psi|^2$  знаходження електрона на відстані  $r$  від ядра, яка залежить від радіальної частини хвильової функції  $R_{nl}$  і пропорційна  $\sim R_{nl}^2 r^2$ . 1s-стан електрона в атомі водню сферично-симетричний, тобто не залежить від кутів  $\theta$  і  $\phi$ :  $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$ , тобто  $n = 1, l = 0$  і  $m_l = 0$ .

Розв'язок радіальної частини рівняння Шредингера дає хвильову функцію у вигляді

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \quad (8.5)$$

( $a_0 = r_1$  — перший борівський радіус).

Ймовірність того, що електрон знаходиться в елементі об'єму  $dV = 4\pi r^2 dr$ , дорівнює

$$dw = |\psi_{100}(r)|^2 dV = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr. \quad (8.6)$$

Виявилось, що для  $n=1$  (основний стан) максимум густини ймовірності знаходження електрона збігається з  $a_0$  (рис. 8.4). Можна зробити висновок, що *борівські орбіти електрона є геометричним місцем точок, в яких з найбільшою ймовірністю може бути виявлений електрон*. При збільшенні квантового числа  $n$  максимум густини ймовірності знаходження електрона зсувається в бік більших  $r$ , що аналогічно, за теорією Бора, збільшенню радіуса орбіти електрона.

Як видно з рис. 8.4, ймовірність знаходження електрона в різних частинах атома різна. Електрон нібито розмазаний по об'єму, створює електронну хмарку, густина якої характеризує ймовірність знаходження електрона в різних точках об'єму атома.

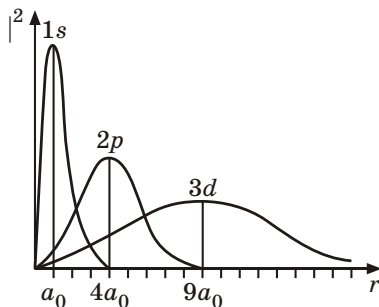


Рис. 8.4

**Квантові числа  $n$  і  $l$  характеризують розмір і форму електронної хмарки, а квантове число  $m_l$  відповідає за орієнтацію електронної хмарки у просторі.**

**Недоліки квантової теорії**

Квантова теорія дає досить точний опис властивостей воднеподібних атомів, але існує два найбільш суттєві недоліки; по-перше, ця теорія неспроможна пояснити добре відомий експериментальний факт, згідно з яким багато спектральних ліній в дійсності складаються з двох окремих, близько розташованих, ліній-дублетів (з цим же фактом пов'язана неможливість пояснити досліди Штерна і Герлаха).

Друге серйозне розходження між простою квантовою теорією і експериментальними даними полягає у неможливості пояснення ефекту Зеємана, коли у магнітному полі замість розщеплення спектральної лінії на три компоненти спостерігається чотири, шість і більша кількість компонент.

Всі ці явища неможливо пояснити без додаткової гіпотези про спін електрона і пов'язаного з ним принципу Паулі, про який йдеться в наступному розділі.

**8.2. Механічний і магнітний моменти електрона. Спін електрона**

Як відомо (див. «Загальна фізика» ч. II розділ 7.1), орбітальний механічний момент імпульсу  $\vec{L}_l$  і магнітний момент  $\vec{p}_m$  орієнтовані перпендикулярно площині орбіти електрона і направлені в протилежні сторони (рис. 8.5). Було показано, що вони пов'язані співвідношенням

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_l = -g_l \vec{L}_l, \quad (8.7)$$

де

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} = \frac{ev}{2r} r^2 \vec{n} = \frac{evr}{2} \vec{n}; \quad \vec{L}_l = [\vec{r}, m_e \vec{v}].$$

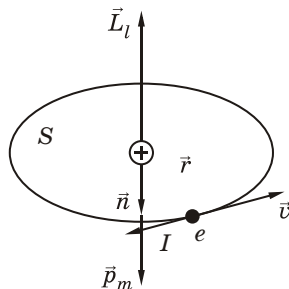


Рис. 8.5

**Гіромагнітне відношення**

Гіромагнітне відношення  $g_l$  чисельно дорівнює відношенню орбітального магнітного моменту до орбітального механічного моменту

$$g_l = \frac{p_m}{L_l} = \frac{|e|}{2m_e}. \quad (8.8)$$



Незважаючи на те, що співвідношення (8.7) було одержане з точки зору класичної фізики, такий же результат можна вивести і в квантовій теорії.

Беручи до уваги квантування моменту імпульсу (8.2), можна зробити висновок, що магнітний орбітальний момент електрона також квантується:

$$p_m = -\frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}. \quad (8.9)$$

Величина  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл має назву *магнетона*

*Бора*. Вона може бути універсальною одиницею вимірювання магнітних моментів.

Такий же зв'язок спостерігається для проекцій моментів  $p_{mz}$  і  $L_{lz}$ :

$$p_{mz} = -\frac{e}{2m_e} L_{lz} = -\frac{e\hbar}{2m_e} m_l \Rightarrow -\mu_B m_l \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l).$$

Тобто проекція орбітального магнітного моменту електрона на вісь  $z$  квантується.

**Дослід Штерна і Герлаха**

Для експериментальної перевірки просторового квантування механічного і магнітного моментів було поставлено декілька дослідів.

Одним з них був дослід О. Штерна і Г. Герлаха (1921 р.).

Пучок нейтральних атомів срібла, які вилітають з печі, пропускають крізь систему щілин, а потім крізь неоднорідне магнітне поле (рис. 8.6), створене полюсами магніта спеціальної форми.

На атом, який має магнітний момент  $\vec{p}_m$ , в неоднорідному магнітному полі діє сила

$$F_z = p_m \frac{\partial B_z}{\partial z} \cos \theta, \quad (8.11)$$

де  $\theta$  — кут між напрямом магнітного моменту атома та вектором індукції магнітного поля.

Зважаючи на те, що магнітні моменти атома хаотично розподілені за напрямом, за класичними уявленнями кут  $\theta$  може змінюватись від 0 до  $\pi$ .

Очікувалось, що на фотопластинці утвориться широка смужка. Але в дійсності, замість суцільного розподілу атомів на фотопластинці, одержано дві чіткі лінії. Тобто це означає, що існує тільки

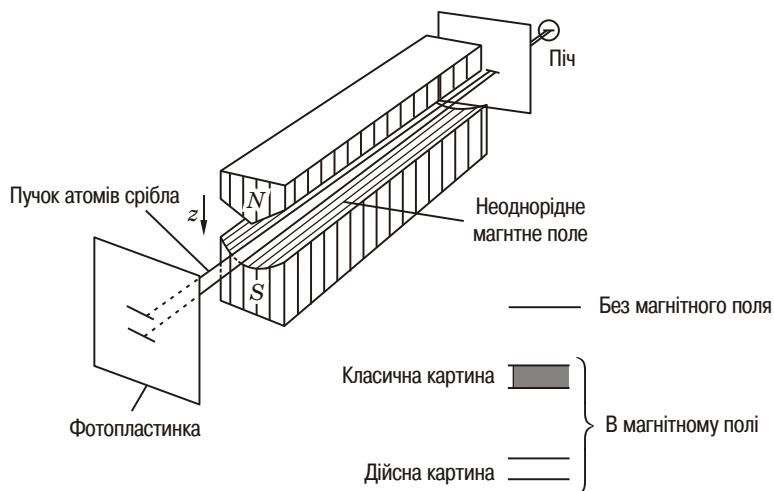


Рис. 8.6

дві можливі орієнтації магнітного моменту атома відносно зовнішнього магнітного поля.

Такі ж результати спостерігалися в дослідях на лужних металах, водні та ін. В залежності від речовини число ліній могло бути більше двох, але завжди це було ціле число. Це означає, що проєкція магнітного моменту атома квантується, тобто експериментально підтверджувалось існування просторового квантування.

Крім того, при вимірюванні магнітних моментів срібла та інших атомів першої групи одержано магнітний момент, що дорівнює магнетону Бора.

Але залишилось незрозумілим, який магнітний момент мається на увазі в досліді Штерна і Герлаха. Це пов'язано з тим, що атом срібла має один валентний електрон, який знаходиться в  $s$ -стані ( $l = 0$ ). Це означає, що його момент імпульсу, а отже і магнітний момент атома, який визначається магнітним моментом валентного електрона, також дорівнює нулю. Тобто магнітне поле не повинно впливати на рух атомів і розщеплення не повинно бути.

Такі ж незрозумілі результати були одержані при дослідженні магнітомеханічних явищ.

**Магніто-механічні ефекти**

Внаслідок зв'язку між магнітним і механічним моментом (8.7) зміна величини чи орієнтації одного з моментів спонукає до відповідних змін іншого моменту. Явища, які при цьому виникають, називають *магнітомеханічними ефектами*.

Якщо стержень з феромагнетика намагнічено, то це означає, що магнітні моменти атомів орієнтуються за напрямом зовнішнього магнітного поля  $\vec{H}$ . Тоді власні механічні моменти атомів орієнтуються в протилежному напрямку. Але за законом збереження моменту імпульсу, стержень повинен отримати додатковий момент імпульсу протилежного напрямку, тобто він повинен почати обертатися. Такі досліди були проведені А. Ейнштейном і В. де Гаазом в 1915 році.

Магнітні властивості атомів проявляються також в ефекті С. Барнетта (1909 р.).

Якщо стрижень швидко обертати навколо його осі, то навіть у відсутності зовнішнього магнітного поля з'явиться самомагнічування у напрямку осі обертання, тому що зміна механічних моментів атомів спричиняє збільшення складової магнітних моментів у напрямку осі обертання стрижня (протилежно напрямку механічних моментів атомів).

Досліди магнітомеханічних явищ дозволяють отримати цілу низку цінних даних відносно будови атома шляхом визначення гіромагнітного відношення  $g$ . За результатами цих дослідів гіромагнітне відношення виявилось вдвічі більше за орбітальне гіромагнітне відношення.

Ці результати були незрозумілими протягом досить довгого часу. Тільки після 1925 року одержано пояснення цих експериментів, про що йдеться далі.

#### Спін електрона

Досліди Штерна і Герлаха та магнітомеханічні ефекти вдалося пояснити у 1925 р. на основі гіпотези, висунутої Дж. Уленбеком і С. Гаудемітом про існування у електрона *власного моменту імпульсу, який називають спіном*.

Вони висловили припущення, що електрон, незалежно від наявності орбітального моменту імпульсу  $\vec{L}_l$ , *має власний спіновий момент імпульсу  $\vec{L}_s$  і пов'язаний з ним спіновий магнітний момент  $\vec{p}_{ms}$* .

З поняттям спіну не можна пов'язати ніякі механічні аналогії. Вважається, що спін і власний магнітний момент електрона — це внутрішні характеристики електрона, одночасно квантові і релятивістські. Вони є фундаментальними характеристиками електрона, як його маса і електричний заряд. Зауважимо, що власний момент імпульсу мають не тільки електрон, а і протон, нейтрон та інші частинки.

Для характеристики спінового моменту імпульсу  $L_s$  використовується *спінове квантове число*  $s$ , яке має одне значення  $s = 1/2$ .

Спіновий момент імпульсу також квантується

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\hbar \quad (8.12)$$

аналогічно з орбітальним моментом імпульсу  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ .

Просторове квантування спіну електрона характеризується *спіновим магнітним квантовим числом*  $m_s$ , яке може мати значення

$$m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}.$$

*Проекція спінового моменту імпульсу на вісь z дорівнює*

$$L_{sz} = m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2}, \quad (8.13)$$

тобто може мати два значення.

Спіновий магнітний момент електрона  $\vec{p}_{ms}$  визначається як

$$\vec{p}_{ms} = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_s$$

або

$$p_{ms} = -\frac{e}{m_e} L_s = -\frac{e\hbar}{m_e} \sqrt{s(s+1)} = -2 \mu_B \sqrt{s(s+1)} = -\mu_B \sqrt{3}. \quad (8.14)$$

З іншого боку  $p_{ms} = -g_s L_s$ , тобто спінове гіромагнітне відношення

$$g_s = \frac{|e|}{m_e}$$

вдвічі більше орбітального гіромагнітного відношення

$$g_l = \frac{|e|}{2m_e},$$

тоді

$$g_s = 2g_l$$

(інакше кажучи спостерігається «подвоєний» магнетизм спіна).

Із дослідів Ейнштейна і де Гааза та Барнетта для магнітomeханічних явищ було визначено, що одержане гіромагнітне відношення вдвічі більше за орбітальне гіромагнітне відношення.

Можна зробити висновок, що для магнітомеханічних ефектів знайдено не орбітальне, а спінове гіромагнітне відношення, тобто *ферромагнетизм атомів визначається спіновим магнітним моментом, а не орбітальним*.

Проекція спінового магнітного моменту на вісь  $z$  дорівнює

$$p_{msz} = -\frac{e}{m_e} L_{sz} = -\frac{e}{m_e} \hbar m_s = \mp \frac{e\hbar}{2m_e} = \mp \mu_B \quad (8.15)$$

(тут враховано, що  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ).

Тобто, для електрона власний магнітний момент може мати тільки дві проекції на вісь  $z$ , числові значення яких дорівнюють магнетону Бора.

Таким чином, в дослідях Штерна і Герлаха для елементів першої групи з одним валентним електроном вимірювалась величина проекції спінового магнітного моменту на вісь  $z$  для валентного електрона зовнішньої електронної оболонки. Розщеплення пучка на дві різні частини відповідало двом різним орієнтаціям спіна в магнітному полі, обумовленим просторовим квантуванням.

### 8.3. Тонка структура спектрів. Спін-орбітальна взаємодія

Дослідження спектрів лужних металів за допомогою приладів з великою роздільною здатністю показало, що кожна з ліній спектра в дійсності є дублетом, тобто спостерігається *розщеплення ліній у відсутності зовнішніх полів на дві близько розташовані. Цей ефект одержав назву тонкої структури спектра*. Звичайно, це явище пов'язане з розщепленням енергетичних рівнів.

Поява тонкої структури пояснюється магнітною взаємодією між спіновим і орбітальним моментами імпульсу. Цю спін-орбітальну взаємодію можна пояснити за допомогою простої класичної моделі. Електрон, який обертається біля протона, знаходиться в деякому ефективному магнітному полі  $\vec{B}_{\text{еф}}$ , оскільки в його власній системі відліку протон обертається навкруги електрона. Це ефективне магнітне поле  $\vec{B}_{\text{еф}}$ , створене за рахунок руху ядра, впливає на спіновий магнітний момент електрона. Така *взаємодія власного спінового магнітного моменту електрона з його орбітальним магнітним моментом отримала назву спін-орбітальної взаємодії*.

Енергія такої взаємодії дорівнює

$$W_{\text{еф}} = -\vec{p}_{ms} \vec{B}_{\text{еф}} = -p_{ms} B_{\text{еф}} \cos \alpha,$$

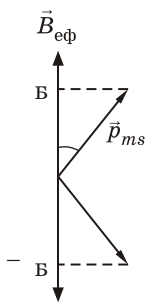


Рис. 8.7

де  $\alpha$  — кут між  $\vec{p}_{ms}$  і  $\vec{B}_{\text{еф}}$ . Величина  $p_{ms} \cos \alpha = p_{msz}$  є проекцією спінового магнітного моменту на напрямок ефективного магнітного поля  $\vec{B}_{\text{еф}}$  (рис. 8.7).

Беручи до уваги, що  $p_{msz} = \mp \frac{e\hbar}{2m_e} = \mp \mu_B$ , одержимо

$$W_{\text{еф}} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} B_{\text{еф}} = \pm \mu_B B_{\text{еф}}. \quad (8.16)$$

Таким чином, енергія електрона в атомі, в залежності від орієнтації його спіна, буде на величину

$$\frac{e\hbar}{2m_e} B_{\text{еф}}$$

більше або менше його енергії без урахування спін-орбітальної взаємодії.

Таким чином, кожний терм з  $l > 0$  розщеплюється на два, крім  $s$ -стану, для якого  $l = 0$  (орбітальний момент імпульсу дорівнює нулю).

Лінії, які складаються з декількох компонент, мають назву *мультиплетів*. Тонка структура виявляється, крім лужних металів, також і у інших елементів, причому число компонент в мультиплеті може дорівнювати двом (дуплети), трьом (триплети), чотирьом (квартети) і т. п., але для всіх багатоелектронних атомів тонка структура обумовлена спін-орбітальною взаємодією.

### 8.4. Повний момент імпульсу електрона

Розглянемо атом, повний момент імпульсу якого обумовлений тільки одним електроном. Такими атомами є елементи I групи таблиці Менделєєва: водень, літій, натрій, оскільки вони мають тільки один валентний електрон. До цієї ж групи відносяться іони  $\text{He}^+$ ,  $\text{Be}^+$ ,  $\text{Mg}^+$ ,  $\text{B}^{++}$ ,  $\text{Al}^+$  і т. п.

Модуль  $L_l$  орбітального моменту імпульсу визначається як

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

проекція  $\vec{L}_l$  на вісь  $z$  має вигляд  $L_z = m_l \hbar$ .

Аналогічно величина  $L_s$  спінового моменту імпульсу  $\vec{L}_s$  дорівнює

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

а проекція  $\vec{L}_s$  на вісь  $z$   $L_{sz} = m_s \hbar$ .

Сума  $\vec{L}_l$  і  $\vec{L}_s$  створює повний момент імпульсу електрона  $\vec{L}_j = \vec{L}_s + \vec{L}_l$ .

*Величина повного моменту імпульсу електрона дорівнює*

$$L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}, \quad (8.17)$$

де  $j$  — квантове число повного моменту імпульсу електрона, яке приймає значення

$$j = l + s, \quad |l - s|$$

( $l$  і  $s$  — орбітальне і спінове квантові числа).

При заданому  $l$  квантове число  $j$  може мати два напівцілих значення:

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad j = \left| l - \frac{1}{2} \right|.$$

Проекція вектора  $\vec{L}_j$  на напрямок  $z$  така

$$L_{jz} = m_j \hbar, \quad (8.18)$$

де  $m_j$  — квантове число проекції повного моменту імпульсу

$$m_j = m_l + m_s$$

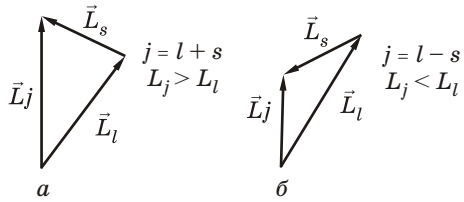
( $m_l$  і  $m_s$  — магнітне орбітальне і магнітне спінове квантові числа).

При даному значенні  $j$  квантове число  $m_j$  може приймати значення  $j, j-1, \dots, -j+1, -j$ , тобто приймає  $2j+1$  значень, що відповідають різним орієнтаціям повного моменту у просторі.

**Векторна  
модель  
електрона**

Оскільки вектори  $\vec{L}_l$ ,  $\vec{L}_s$  і  $\vec{L}_j$  квантуються, то вони можуть бути розташовані один відносно одного тільки деяким певним чином. Це загальне правило.

Для одноелектронного атома можливі тільки дві відносні орієнтації. Одна з них відповідає  $j = l + s$ , тоді  $L_j > L_l$ , а інша —  $j = l - s$ , тоді  $L_j < L_l$ . На рис. 8.8 показано дві можливі орієнтації  $\vec{L}_l$  і  $\vec{L}_s$ . Очевидно, що всі три вектори ніколи не можуть бути паралельні або антипаралельні.



**Рис. 8.8**

Таким чином, стан електрона в атомі тепер визначається чотирма квантовими числами:

$n$  — головне квантове число ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),

$l$  — орбітальне ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ),

$m_l$  — магнітне ( $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ),

$m_s$  — магнітне спінове ( $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ).

Замість останніх двох квантових чисел  $m_l$  і  $m_s$  можна використувати такі:

$j$  — квантове число повного моменту імпульсу ( $j = l + s, |l - s|$ ),  
 $m_j$  — квантове число проєкції повного моменту імпульсу на вісь  $z$  ( $m_j = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$ ).

Обидва ці набори квантових чисел еквівалентні.

## 8.5. Квантова теорія багатоелектронних атомів

В багатоелектронних атомах внесок в повний момент імпульсу  $\vec{L}_J$  дає кожний електрон, тому  $\vec{L}_J$  є векторною сумою цих окремих моментів. Спосіб додавання окремих моментів  $\vec{L}_{li}$  і  $\vec{L}_{si}$  залежить від конкретних умов.

**$j$ - $j$  зв'язок**

Зв'язок  $j$ - $j$  властивий для важких атомів, у яких взаємодія орбітального моменту та спіну окремого електрона більша, ніж взаємодія з іншими електронами. При цьому спочатку додаються орбітальний момент  $\vec{L}_{li}$  і спін  $\vec{L}_{si}$  окремого електрона, що створює повний момент імпульсу електрона  $\vec{L}_{ji} = \vec{L}_{li} + \vec{L}_{si}$ . Далі додаються ці повні моменти електронів і таким чином утворюється повний момент імпульсу атома

$$\vec{L}_J = \sum_i \vec{L}_{ji}.$$

**$L$ - $S$  зв'язок**

Для більшої кількості атомів, за виключенням самих важких, має місце так званий  $L$ - $S$  зв'язок (нормальний або зв'язок Рассела — Саундерса). В цьому випадку орбітальні моменти імпульсу  $\vec{L}_{li}$  різних взаємодіючих електронів об'єднуються в один результуючий момент

$$\vec{L}_L = \sum_i \vec{L}_{li},$$

а спіни  $\vec{L}_{si}$  складають момент

$$\vec{L}_S = \sum_i \vec{L}_{si}.$$

Моменти  $\vec{L}_L$  і  $\vec{L}_S$ , зазнаючи спін-орбітальну магнітну взаємодію, створюють повний момент імпульсу атома

$$\vec{L}_J = \vec{L}_L + \vec{L}_S. \quad (8.19)$$

Такий зв'язок виникає, якщо взаємодія орбітальних моментів оптичних електронів між собою і спінових моментів між собою є більшою, ніж спін-орбітальна взаємодія.



Результуючий орбітальний момент імпульсу атома визначається формулою

$$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad (8.20)$$

де  $L$  — орбітальне квантове число атома, яке у випадку двох електронів визначається як

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|,$$

де  $l_1$  і  $l_2$  — орбітальні квантові числа, відповідні кожному з електронів. Результуючий момент може мати  $2l_{\min} + 1$  значень (де  $l_{\min}$  — менше з орбітальних квантових чисел окремих електронів, що входять до атома).

Орбітальне квантове число  $L$  сумарного орбітального моменту може бути або цілим, або нулем.

Проекція  $\vec{L}_L$  на напрямок  $z$  дорівнює

$$L_{Lz} = m_L \hbar, \quad (8.21)$$

$$m_L = -L, -L+1, \dots, L-1, L.$$

Аналогічно можна визначити результуючий спіновий механічний момент

$$L_S = \hbar\sqrt{S(S+1)} \quad (8.22)$$

і його проекцію на вісь  $z$

$$L_{Sz} = m_S \hbar, \quad (8.23)$$

$$m_S = -S, -S+1, \dots, S.$$

Квантове число  $S$  може бути цілим, якщо кількість електронів в атомі парна, або напівцілим при непарній кількості електронів.

Повний момент імпульсу атома

$$L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}, \quad (8.24)$$

де  $J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|$ .

Проекція  $\vec{L}_J$  на вісь  $z$

$$L_{Jz} = m_J \hbar, \quad (8.25)$$

$$m_J = -J, -J+1, \dots, J-1, J,$$

звідки кількість можливих орієнтацій повного орбітального моменту імпульсу атома  $\vec{L}_J$  відносно осі  $z$  дорівнює  $2J + 1$ .

Таким чином бачимо, що стан атома визначається трьома квантовими числами  $L, S, J$ , тому для характеристики стану атома використовують символічну форму запису

$$^{2S+1}L_J \text{ або } ^{\infty}L_J,$$

де  $L$  — квантове число, що відповідає повному орбітальному моменту імпульсу. Позначення електронних станів атома пов'язані з числовим значенням  $L$ :

$L$	0	1	2	3	4	5	6 ...
Стан атома	$S$	$P$	$D$	$F$	$G$	$H$	$J \dots$

$2S+1 = \infty$  — мультиплетність або кратність стану, тобто кількість підрівнів, що відрізняються значенням числа  $J$ .

$J$  — квантове число повного моменту імпульсу атома.

**Магнітний момент атома** Повний магнітний момент атома  $\vec{p}_{mJ}$  дорівнює векторній сумі орбітального магнітного моменту  $\vec{p}_{mL}$  та повного спінового магнітного моменту  $\vec{p}_{mS}$

$$\vec{p}_{mJ} = \vec{p}_{mL} + \vec{p}_{mS},$$

де

$$\vec{p}_{mL} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_L,$$

$$\vec{p}_{mS} = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_S.$$

Зважаючи на те, що гіромагнітні відношення  $g_S = 2g_L$ , повний магнітний момент не лежить на одній лінії з повним механічним моментом.

Модуль повного магнітного моменту атома дорівнює

$$p_{mJ} = -\mu_B g \sqrt{J(J+1)}, \quad (8.26)$$

де  $\mu_B$  — магнетон Бора, а  $g$  — множник Ланде (або фактор Ланде, або фактор магнітного розщеплення)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (8.27)$$

Проекція повного магнітного моменту атома на вісь  $z$  дорівнює

$$p_{mJz} = -\mu_B g m_J, \text{ де } m_J = -J, -J+1, \dots, J. \quad (8.28)$$

**Векторна модель атома**

Деякі питання атомної фізики зручно розглядати за допомогою *векторної моделі атома*.

В цьому випадку механічні і магнітні моменти зображуються у вигляді напрямлених відрізків, але треба пам'ятати про умовність векторної моделі атома, в якій момент імпульсу  $\vec{L}_L$  атома зображують як вектор, який має визначений напрямок у просторі.

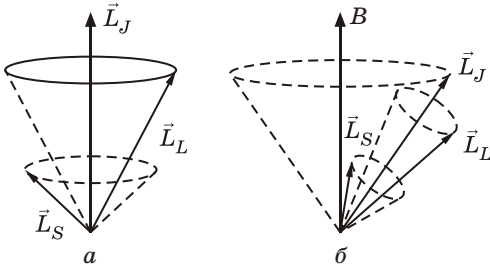


Рис. 8.9

Згідно законам квантової механіки існує деяка невизначеність напрямку вектора  $\vec{L}_L$ . Таким чином, якщо модуль  $\vec{L}_L$  і його проекція на вісь  $z$   $L_{Lz}$  відомі, то інші проекції  $L_{Lx}$  і  $L_{Ly}$  залишаються невизначеними. Це приводить до того, що у відсутності зовнішнього магнітного поля вектори  $\vec{L}_L$  і  $\vec{L}_S$  прецесують навколо напрямку вектора  $\vec{L}_J$  (рис. 8.9, а). При наявності зовнішнього магнітного поля  $\vec{B}$  вектор  $\vec{L}_J$  прецесує навколо  $\vec{B}$ , а  $\vec{L}_L$  і  $\vec{L}_S$  продовжують при цьому обертатися навколо  $\vec{L}_J$  (рис. 8.9, б).

### 8.6. Ефект Зеємана. Атом у магнітному полі

*Ефектом Зеємана називається розщеплення спектральних ліній і рівнів енергії в зовнішньому магнітному полі.*

Цей ефект був відкритий в 1896 році голандським вченим П. Зеєманом, за що, разом з Х. Лоренцом, він був нагороджений Нобелівською премією в 1902 р.

Ефект Зеємана характерний для атомів парамагнетиків, які мають власний магнітний момент  $\vec{p}_{mJ}$ . В цьому випадку атоми набувають в магнітному полі додаткову енергію

$$E = -\vec{p}_{mJ} \vec{B} = -p_{mJz} B.$$

За урахуванням (8.28) маємо

$$E = g m_J B, \quad (8.29)$$

$$m_J = -J, -J+1, \dots, J-1, J.$$

Це означає, що енергетичний рівень, який описується термом  ${}^{2S+1}L_J$ , розщеплюється на  $2J+1$  еквідистантних підрівнів

з величиною розщеплення, яка залежить від фактора Ланде  $g$ , тобто магнітне поле знімає виродження по  $m_J$ .

**Нормальний (простий) ефект Зеемана**

Нормальний ефект Зеемана спостерігається, якщо вихідні лінії не мають тонкої структури (синглети). Ці лінії з'являються при переходах між рівнями, для яких спінове число  $S = 0$ , тоді

$$g = 1, J = L, m_J = m_L, \text{ а } E = \mu_B m_L B.$$

На рис. 8.10 показано розщеплення енергетичних рівнів і спектральних ліній для  $P$ - $S$ -переходу ( $L = 1 \rightarrow L = 0$ ).

При наявності магнітного поля спектральна лінія з частотою  $\nu_0$  розщеплюється на три спектральні лінії:  $(m_J = 0 - 0)$ ,  $\nu_0$  залишається і  $(m_J = 0 + 0)$ .

Зміщення частоти  $\nu_0$  називається нормальним або лоренцевим зміщенням.

З (8.29) воно дорівнює

$$\Delta \nu = \frac{\mu_B B}{h} = \frac{e}{2m_e} B.$$

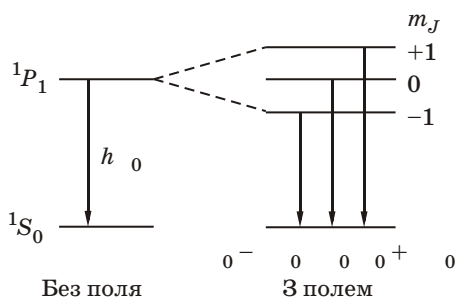


Рис. 8.10

Таким чином, при нормальному ефекті Зеемана завжди буде розщеплення

синглетних рівнів на три компоненти, навіть для більш складних випадків, наприклад, для переходу  $^1D_2 \rightarrow ^1P_1$ . Це пов'язано з правилом вибору для квантового числа  $m_J$ , згідно з яким переходи можливі, тільки якщо  $m_J = 0, \pm 1$ , ( $m_L = 0, \pm 1$ ).

**Аномальний (складний) ефект Зеемана**

Аномальний (складний) ефект Зеемана спостерігається, якщо індукція магнітного поля невелика, при цьому спин-орбітальна взаємодія в атомі більша, ніж взаємодія окремого орбітального чи спінового моменту з магнітним полем. Тобто зовнішнє магнітне поле не руйнує спин-орбітальну взаємодію, продовжує існувати  $L$ - $S$  зв'язок, із зовнішнім магнітним полем взаємодіє повний магнітний момент атома, а величина розщеплення рівнів залежить від множника Ланде.

Розглянемо схему рівнів енергії для жовтого дублету натрію (рис. 8.11), переходи  $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ ,  $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ .

У відповідності зі значенням  $J$  в магнітному полі терми  $^2P_{1/2}$  і  $^2S_{1/2}$  дають дві компоненти, а  $^2P_{3/2}$  — чотири. Зсув рівнів визначається множником Ланде і значенням квантового числа  $m_J$  (позначені на рис. 8.11).

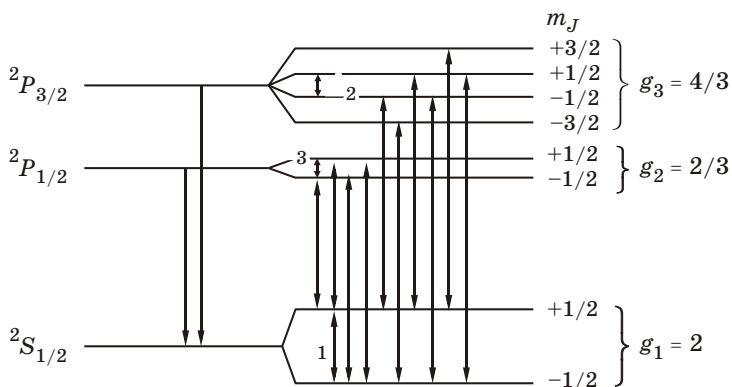


Рис. 8.11

Різниця в розщепленні ліній свідчить про те, що  $P$ -рівні  ${}^2P_{3/2}$  і  ${}^2P_{1/2}$  відрізняються величиною повного моменту імпульсу при однаковому значенні орбітального моменту. Легко побачити, що розщеплення рівнів тим більше, чим більше фактор Ланде:  $1 > 2 > 3$ , ( $g_1 > g_2 > g_3$ ).

Враховуючи правила відбору квантових чисел

$$L = \pm 1, \quad J = 0, \pm 1, \quad m_J = 0, \pm 1,$$

на рис 8.11 стрілками позначені можливі переходи між рівнями. Таким чином, замість дублету головної лінії натрію в магнітному полі спостерігається десять ліній спектра випромінювання атома натрію.

Частота ліній спектра атома в магнітному полі

$$\nu_{12} = \nu_0 - L(g''m_J'' - g'm_J'),$$

де  $\nu_0$  — частота фотона, що випромінюється у відсутності магнітного поля,  $L = \frac{eB}{2m_e}$  — ларморова частота;  $g'$ ,  $g''$ ,  $m_J'$ ,  $m_J''$  — фактор

Ланде та квантове число  $m_J$  відповідно першого та другого станів, між якими здійснюється перехід.

**Електронний  
парамагнітний  
резонанс**

Явище електронного парамагнітного резонансу було відкрито Е. К. Завойським у 1944 р. Воно спостерігається тільки для парамагнетиків і полягає в поглинанні електромагнітної хвилі атомом, що знаходиться в магнітному полі. Частота електромагнітної хвилі повинна задовольняти умови  $\hbar \omega = E = \mu_B g B$ , де  $E$  — відстань між рівнями зеєманівського розщеплення.

Електронний парамагнітний резонанс застосовується для дослідження структури кристалів, магнітних властивостей атомних ядер і таке інше.

## 8.7. Принцип Паулі. Періодична система елементів Д. І. Менделєєва

**Принцип  
тотожності  
квантових  
частинок**

В класичній механіці всі частинки однакової природи різняться. Їх можна пронумерувати і простежити за їх траєкторіями.

В квантовій механіці, на відміну від класичної, внаслідок дії принципу невизначеності, поняття траєкторії втрачає сенс, тому *частинки однакової природи неможливо розрізнити. Це твердження має назву принципу тотожності квантових частинок.* Наслідки цього *фундаментального принципу* дуже важливі. Розглянемо деякі з них.

Якщо маємо систему двох тотожних частинок і одна з них знаходиться в стані 1, а друга в стані 2, то густина ймовірності системи не зміниться, якщо частинки поміняти місцями, тобто частинку з стану 1 перенести в стан 2 і навпаки. При цьому

$$|\psi^2(1, 2)| = |\psi^2(2, 1)|.$$

Таким чином, хвильова функція  $\psi(2, 1)$ , що відповідає обміну частинок, може мати вигляд

$$\psi(2, 1) = \psi(1, 2)$$

або

$$\psi(2, 1) = -\psi(1, 2).$$

В першому випадку функція — симетрична, в другому — антисиметрична. Зміна знаку хвильової функції не означає зміни стану, оскільки фізичний смисл має лише квадрат модуля хвильової функції.

В. Паулі теоретично довів залежність симетричності або антисиметричності хвильової функції частинки від її спіна.

*Системи тотожних квантових частинок з нульовим або цілим спіном  $s = 0, 1, \dots$  (фотони,  $\pi$ -мезони,  $\alpha$ -частинки, атоми гелію) описуються симетричними хвильовими функціями, належать до класу бозонів і підкоряються функції розподілу Бозе — Ейнштейна (розподіл за енергіями).*

*Системи з напівцілим спіном  $s = 1/2, 3/2, \dots$  (електрони, протони, нейтрони) описуються антисиметричними хвильовими*

*функціями, належать до класу ферміонів і підкоряються закону статистичного розподілу Фермі — Дірака.* (Про ці квантові розподіли йдеться в розділі 13).

**Принцип Паулі**

В 1925 р. Вольфганг Паулі відкрив *фундаментальний закон, згідно з яким ніякі два електрона в атомі не можуть знаходитись в одному і тому ж квантовому стані.*

Цей закон має назву *принципу Паулі.*

Це означає, що кожний електрон в атомі повинен мати свій набір квантових чисел  $(n, l, m_l, m_s)$ , тобто електрони в атомі повинні відрізнитись один від одного хоча б одним квантовим числом. Цьому принципу підкоряються усі ферміони — вони є «індивідуалістами», в кожному стані може бути тільки одна фермі-частинка, тобто в атомі максимальна кількість електронів  $Z(n)$ , що відповідає даному  $n$ , дорівнює

$$Z(n) = \sum_{l=1}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2;$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1; m_l = -l, -l+1, \dots, +l; (2l+1) \text{ значень}; \\ m_s = \pm \frac{1}{2}, (2 \text{ значення}).$$

Бозе-частинки (бозони) цьому принципу не підкоряються — вони «колективісти», тобто у кожному стані може бути будь-яка кількість цих частинок.

Складні частинки з непарного числа ферміонів — також ферміони (сумарний спін — напівцілий), а з парного — бозони (сумарний спін — цілий).

**Періодична  
таблиця  
Менделєєва**

Періодична система елементів вперше встановлена Д. І. Менделєєвим. Вона характерна періодичним повторюванням фізичних і хімічних властивостей елементів при їх розташуванні в порядку зростання атомних номерів.

*Сукупність електронів в багатоелектронному атомі з однако-вим  $n$  називається електронною оболонкою. В кожній оболонці, в залежності від значення квантового числа  $l$ , існують підоболонки, кількість яких дорівнює номеру  $n$  оболонки.*

Максимальне число електронів в підоболонці дорівнює  $2(2l+1)$ .

Розподіл можливих станів електрона в атомі на оболонки і підоболонки показано в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

$n$	Символ оболонки	Кількість електронів в підоболонці					Максимальна кількість електронів в оболонці
		$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	
	$s$		$p$	$d$	$f$	$g$	
		$m_l = 0$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$	$m_l = \pm 1, 0$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$	$m_l = \pm 2, \pm 1, 0$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$	$m_l = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$	$m_l = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$	
1	$K$	2					2
2	$L$	2	6				8
3	$M$	2	6	10			18
4	$N$	2	6	10	14		32
5	$O$	2	6	10	14	18	50



Атомні оболонки і підоболонки, які мають максимальне число електронів, називають *замкнутими*.

Замкнута  $s$ -підоболонка ( $l = 0$ ) має 2 електрона, замкнута  $p$ -підоболонка ( $l = 1$ ) — 6 електронів і т. д. Повні орбітальні і спінові моменти імпульсу електронів, що знаходяться у замкнутих підоболонках, дорівнюють нулю. Тобто орбітальний момент імпульсу та спіновий момент атома визначають електрони, які знаходяться на зовнішніх незаповнених підоболонках атома (валентні електрони).

Хімічна активність елемента залежить від наповненості електронних оболонок. Так, інертні гази з повністю заповненими оболонками хімічно пасивні. Атоми, які мають в зовнішній оболонці по одному електрону (водень, лужні метали), а також ті, у яких в зовнішній оболонці не дістає одного електрона (галогени) — хімічно активні. Перші легко віддають електрон, а другі намагаються одержати електрон для заповнення оболонки.

Заповнення станів електронів в атомі відбувається за двома основними принципами: *принципом мінімуму енергії*, за яким в атомі електрони посідають ті стани, в яких енергія атома буде мінімальною, а також *принципом Паулі*.

Зауважимо, що порядковий номер  $Z$  кожного хімічного елемента дорівнює загальному числу електронів в атомі цього елемента.

Розглянемо положення деяких елементів в таблиці Менделєєва.

Електронну структуру незбудженого атома водню з одним електроном ( $Z = 1$ ), можна записати як  $1s^1$ . Наступним по порядку є атом гелію ( $Z = 2$ ), у якого другий електрон знаходиться також на рівні  $1s$ , але має протилежно направлений спіні. Електронна структура гелію  $1s^2$ . Цими двома елементами заповнюється найближча до ядра  $K$ -оболонка і тим самим завершується перший період системи елементів.

У літія ( $Z = 3$ ) перші два електрона заповнюють  $K$ -оболонку, а третій розташовується на рівні  $2s$   $L$ -оболонки. Електронна структура літію має вигляд  $1s^2 2s^1$ . Структура берилія ( $Z = 4$ ) записується як  $1s^2 2s^2$ , структура бора ( $Z = 5$ )  $1s^2 2s^2 2p^1$  і т. д. до неону ( $Z = 10$ ), структура якого має вигляд  $1s^2 2s^2 2p^6$ . Цим елементом завершується  $L$ -оболонка.  $M$ -оболонка починається з натрію ( $Z = 11$ ) з електронною структурою  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$  і закінчується аргоном ( $Z = 18$ ), який має структуру  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ .

Подальше заповнення електронних рівнів відхиляється від описаної простої схеми в зв'язку з тим, що в багатоелектронних атомах зовнішні електрони не тільки притягуються до ядра, але

й відштовхуються близько розташованими біля ядра електронами, які екранують зовнішні електрони від ядра. Це екранування виявляється неоднаковим для електронів з різними значеннями орбітального квантового числа  $l$ . Це призводить до того, що для досить великих квантових чисел  $n$  стани з великим  $n$  і малим  $l$  можуть мати меншу енергію, ніж стани з меншим  $n$  і більшим  $l$ . Таким чином, порядок заповнення електронних станів в багатоелектронних атомах залежить не тільки від  $n$ , але і від  $l$  і тому порушується.

Наприклад, правильне заповнення електронних оболонок спостерігається до аргону ( $Z = 18$ ), у якого заповнюється  $M$ -оболонка, яка закінчується повністю заповненою  $3p^6$  підоболонкою. Далі у калію ( $Z = 19$ ) 19-й електрон замість того, щоб заповнювати  $3d$  підоболонку  $M$ -оболонки, потрапляє в  $4s$ -стан  $N$ -оболонки, чим і пояснюється подібність оптичних і хімічних властивостей калію з властивостями  $Li$  і  $Na$ , у яких валентний електрон також знаходиться в  $s$ -стані.

Тобто, починаючи з калію, при незаповненій  $3d$  підоболонці  $M$ -оболонки починається забудова  $N$ -оболонки.

Аналогічні порушення тим більші, чим далі розташовані електрони від ядра, тобто чим сильніший екрануючий ефект.

Цікавим є також наявність групи рідкісноземельних елементів від лантану  $La$  ( $Z = 58$ ) до лютецію  $Lu$  ( $Z = 71$ ), які мають майже однакові хімічні і фізичні властивості і називаються *лантанойдами*. Це пояснюється тим, що у лантану підоболонки  $5s$ ,  $5p$  і  $6s$  повністю заповнені і 57-й електрон лантану знаходиться в стані  $5d$  в той час, як підоболонка  $4f$  залишається незаповненою. У атомів елементів від церію  $Ce$  ( $Z = 58$ ) до лютецію ( $Z = 71$ ) заповнюється ця підоболонка  $4f$ , а зовнішня підоболонка  $6s$  залишається незмінною. Цим і пояснюється тотожність властивостей лантанойдів.

Аналогічно пояснюються властивості іншої групи рідкісноземельних елементів — *актиноїдів*. Ця група елементів починається з актинію  $Ac$  ( $Z = 89$ ), включає всі трансуранові елементи (до лоренсію  $Lr$  ( $Z = 103$ )), у яких відбувається заповнення  $5f$ -станів.

Таким чином, періодичність хімічних властивостей елементів пояснюється періодичністю заповнення електронами оболонок в атомах.

## Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню в декартових та сферичних координатах.
2. Яким методом розв'язується рівняння Шредінгера в сферичних координатах? За яких умов можливе розв'язання?
3. Які квантові числа визначають стан електрона в атомі? Які значення можуть мати квантові числа?
4. Квантування яких величин описують чотири квантові числа електрона в атомі  $n, l, m_l, m_s$ ?
5. Скільки буде різних хвильових функцій для  $n = 4$ ?
6. Який квантово-механічний смисл першого борівського радіуса?
7. Який фізичний сенс розподілу густини заряду в електронній хмарці?
8. Як символічно записати стан електрона при: а)  $n = 3, l = 0, 1, 2$ ; б)  $n = 4, l = 2$ ; в)  $n = 2, l = 1$ ?
9. Що таке просторове квантування?
10. Який напрямок мають орбітальні механічний і магнітний моменти електрона? Як це пояснити?
11. Чому дорівнює модуль орбітального механічного і магнітного моменту електрона?
12. Які значення може мати проекція орбітального механічного і магнітного моменту на заданий напрямок?
13. Визначити максимальне значення орбітальних механічного і магнітного моментів електрона в  $3p$ -стані.
14. Що таке магнетон Бора?
15. Чому дорівнює відношення проекцій орбітальних магнітного і механічного моментів електрона на довільну вісь  $z$ ?
16. Запишіть формулу для визначення спектральних термів лужних металів.
17. Які значення може мати проекція спіна електрона на заданий напрямок?
18. Запишіть закон квантування спіна електрона.
19. Чому дорівнює модуль спінового механічного і магнітного моменту електрона?
20. Чому в досліді Штерна і Герлаха використовують атоми хімічних елементів першої групи періодичної системи?
21. Як квантується повний момент імпульсу електрона та його проекція?

22. В чому полягає суть спін-орбітальної взаємодії? Чим вона визначається?
23. Які значення можуть мати квантові числа  $j$  і  $m_j$ ?
24. Чому дорівнює повний момент імпульсу  $3d$ -електрона?
25. Чому відбувається розщеплення енергетичних рівнів в результаті спін-орбітальної взаємодії?
26. В чому суть ефекту Зеемана?
27. На скільки підрівнів розщеплюється в магнітному полі  $f$ -стан?
28. В чому суть принципу тотожності квантових частинок?
29. Які частинки описуються статистикою Фермі — Дірака? Бозе — Ейнштейна?
30. Сформулюйте принцип Паулі. Які частинки підкоряються цьому принципу?
31. Скільки різних станів у електрона з головним квантовим числом  $n = 3$ ?
32. Скільки електронів може знаходитись в підоболонці з  $n = 5$ ,  $l = 2$ ?
33. Які значення можуть мати  $m_l$  і  $m_s$  при  $n = 5$ ,  $l = 4$ ?
34. Яке максимальне число електронів на підоболонці з визначеним орбітальним квантовим числом?
35. Яке максимальне число електронів в атомі з головним квантовим числом  $n$ ?
36. Який фізичний сенс явища магнітного резонансу?
37. Які частинки є бозонами? Ферміонами? Які хвильові функції їх описують?
38. Які магнітомеханічні ефекти ви знаєте? Що вони підтверджують?
39. Який сенс має фактор Ланде?
40. В чому суть векторної моделі електрона?
41. Які види зв'язку існують для багатоелектронних атомів? Чим вони відрізняються?
42. Що таке мультиплетність атома?
43. Чому дорівнює магнітний момент атома?
44. В чому полягає ідея векторної моделі атома?
45. Чим відрізняється нормальний і аномальний ефекти Зеемана?
46. Яка частота ліній спектра атома в магнітному полі?
47. Які правила відбору квантових чисел ви знаєте?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Радіальна частина хвильової функції для основного стану атома водню ( $n = 1, l = 0$ ) має вигляд  $(r) = Ce^{-\frac{r}{a_0}}$ . Знайти сталу  $C$  з умови нормування і визначити найбільш ймовірну відстань електрона від ядра.

#### Розв'язання

Умова нормування для хвильової функції має вигляд

$$\int_0^{\infty} | |^2 dV = 1. \quad (1)$$

Завдяки сферичній симетрії хвильової функції для атома в основному стані елемент об'єму виберемо у вигляді сферичного шару радіусом  $r$  і товщиною  $dr$

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (2)$$

Тоді з (1) і (2) маємо

$$\int_0^{\infty} C^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr = 1.$$

Прінтегруємо цей інтеграл двічі по частинам і одержимо

$$C = \frac{1}{\sqrt{a_0^3}}.$$

Тобто нормована хвильова функція, яка описує  $1s$  стан електрона в атомі водню, має вигляд

$$100(r) = \frac{1}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}. \quad (3)$$

Ймовірність знаходження електрона в об'ємі  $dV$

$$dW = | |^2 dV = | |^2 4\pi r^2 dr.$$

Густина ймовірності

$$w = \frac{dW}{dr} = | |^2 4\pi r^2,$$

з урахуванням (3) маємо

$$w = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}. \quad (4)$$

Щоб розрахувати максимум, треба (4) продиференціювати по  $r$  і похідну прирівняти до нуля

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right) = 0;$$

$$\frac{8r}{a^3} \left( 1 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}} = 0, \text{ звідки } r = a_0.$$

Тобто найбільш ймовірна відстань електрона від ядра для атома водню в основному стані дорівнює борівському радіусу.

### Задача 2

Знайти можливі значення орбітального моменту імпульсу  $L_l$  електрона у збудженому атомі водню, якщо енергія збудження  $E_{36} = 12,09$  еВ.

#### Розв'язання

Орбітальний момент імпульсу електрона дорівнює

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (1)$$

Квантове число  $l$  приймає значення  $l = 0, 1, \dots, n-1$ .

Знайдемо головне квантове число  $n$  за допомогою формули для енергії атома

$$E_n = -\frac{me^4}{32 \cdot \frac{3}{0} \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (2)$$

Врахуємо, що при  $n = 1$   $E_1 = -13,6$  еВ, тоді

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ.}$$

Енергія збудження — це квант енергії, поглинутий атомом при переході з основного стану ( $n = 1$ ) в збуджений, а саме

$$E_n - E_1 = E_{36}; \quad -\frac{13,6}{n^2} + 13,6 = 12,09,$$

звідки  $n = 3$ . Це означає, що  $l = 0, 1, 2$ .

Тепер з (1) знайдемо можливі значення  $L_l$ :

$$l=0, \quad L_l = 0$$

$$l=1, \quad L_l = \hbar\sqrt{2} = 1,49 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$l=2, \quad L_l = \hbar\sqrt{6} = 2,60 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

### Задача 3

Скільки різних станів може мати електрон з головним квантовим числом  $n = 5$ ?

#### Розв'язання

При  $n = 5$  орбітальне квантове число  $l$  може мати значення 0, 1, 2, 3, 4.

Якщо  $l = 0$ ,  $m_l = 0$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , всього 2 стани;

Якщо  $l = 1$ ,  $m_l = 1, 0, -1$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , всього  $3 \cdot 2 = 6$  станів;

Якщо  $l = 2$ ,  $m_l = 2, 1, 0, -1, -2$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , всього  $5 \cdot 2 = 10$  станів;

Якщо  $l = 3$ ,  $m_l = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , всього  $7 \cdot 2 = 14$  станів;

Якщо  $l = 4$ ,  $m_l = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , всього  $9 \cdot 2 = 18$  станів;

Загальна кількість різних станів для  $n = 5$  дорівнює

$$2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50.$$

### Задача 4

Атом крім заповнених оболонок має три електрона ( $s, p, d$ ) і знаходиться в стані з максимально можливим в цьому випадку повним моментом імпульсу. Знайти кут між спіновим  $\vec{L}_S$  і повним  $\vec{L}_J$  моментами імпульсу атома. Застосувати векторну модель атома.

#### Розв'язання

Величина  $L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$  буде найбільшою при максимальному значенні квантового числа  $J_{\max}$ .

$$J_{\max} = L_{\max} + S_{\max},$$

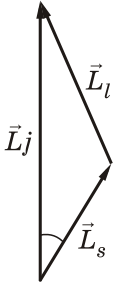
$$L_{\max} = l_1 + l_2 + l_3.$$

Для стану  $s-l_1 = 0$ ;  $p-l_2 = 1$ ;  $d-l_3 = 2$

$$L_{\max} = 3.$$

Максимальне значення спінового квантового числа

$$S_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} J_{\max} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$



Тоді

$$L_L = \hbar \sqrt{L_{\max}(L_{\max} + 1)}; \quad L_L = \frac{\sqrt{48}}{2} \hbar;$$

$$L_S = \hbar \sqrt{S_{\max}(S_{\max} + 1)}; \quad L_S = \frac{\sqrt{15}}{2} \hbar;$$

$$L_J = \frac{\sqrt{99}}{2} \hbar.$$

Рис. 8.12

Кут знаходимо за теоремою косинусів (рис. 8.12)

$$\cos = \frac{L_J^2 + L_S^2 - L_L^2}{2L_S L_J}; \quad \cos = 0,857, \quad = 31^\circ.$$

### Задача 5

Атом знаходиться в стані з мультиплетністю  $\alpha = 4$

і має механічний момент  $L_J = \hbar \frac{\sqrt{63}}{2}$ . Які значення може мати квантове число  $L$  цього стану? Запишіть можливі терми.

#### Розв'язання

Мультиплетність стану  $\alpha = 2S + 1 = 4$ , звідки результуючий спіновий момент атома  $S = 3/2$ .

Результуючий механічний момент дорівнює

$$L_J = \hbar \sqrt{J(J+1)} = \hbar \frac{\sqrt{63}}{2}. \quad (1)$$

Візьмемо до уваги, що  $J = (L_1 + S), (L_2 + S - 1), \dots, |L_4 - S|$ , тобто квантове число  $J$  може приймати значення

$$J = \left( L_1 + \frac{3}{2} \right), \left( L_2 + \frac{1}{2} \right), \left| L_3 - \frac{1}{2} \right|, \left| L_4 - \frac{3}{2} \right|. \quad (2)$$

Якщо підставити (2) в (1), одержимо

$$1) \left( L_1 + \frac{3}{2} \right) \left( L_1 + \frac{5}{2} \right) = \frac{63}{4}; \quad L_1^2 + 4L_1 - 12 = 0, \quad L_1 = 2.$$

$$2) \left( L_2 + \frac{1}{2} \right) \left( L_2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{63}{4}; \quad L_2^2 + 2L_2 - 15 = 0, \quad L_2 = 3.$$



$$3) \left( L_3 - \frac{1}{2} \right) \left( L_3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{63}{4}; \quad L_3^2 - \frac{1}{4} = \frac{63}{4}, \quad L_3 = 4.$$

$$4) \left( L_4 - \frac{3}{2} \right) \left( L_4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{63}{4}; \quad L_4^2 - 2L_4 - 15 = 0, \quad L_4 = 5.$$

В результаті орбітальне квантове число  $L$  може мати значення  $L = 2, 3, 4, 5$ , значення  $J = 7/2$ .

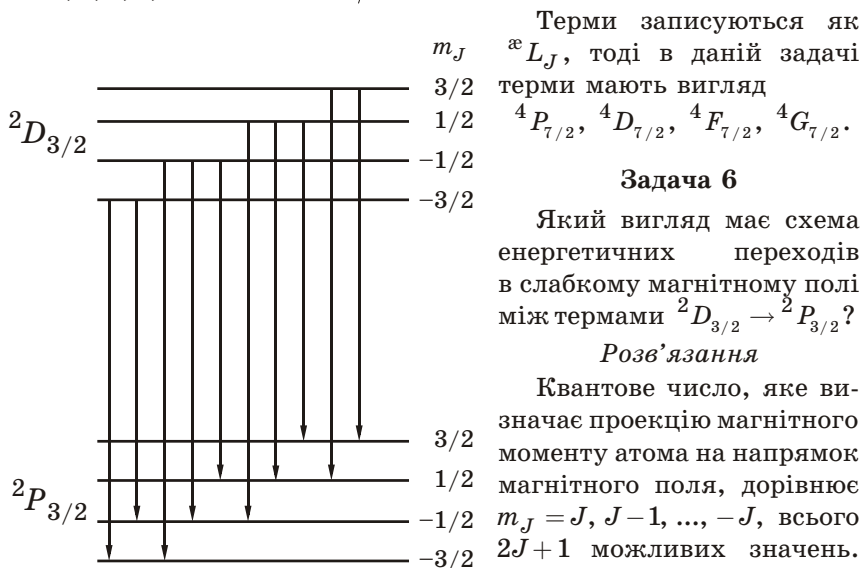


Рис. 8.13

щеплюються на  $2J + 1$  рівні.

Терми  $^2P_{3/2}$  і  $^2D_{3/2}$  розщепляться на 4 рівні кожний, що відповідає значенням

$$m_J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$

Схему можливих 10 переходів зображено на рис. 8.13. Тут враховані правила відбору для переходів

$$L = \pm 1, \quad m_J = 0, \pm 1.$$

### Задача 7

Знайти магнітний момент  $p_{m_J}$  атома в стані  $^3P_2$ . Відповідь надати в магнетонах Бора.

*Розв'язання*

Магнітний момент атома дорівнює

$$p_{m_J} = g \mu_B \sqrt{J(J+1)},$$

де  $g$  — фактор Ланде

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Для атома в стані  $^3P_2$  маємо  $J = 2$ ,  $\kappa = 2S + 1 = 3$ , тоді  $S = 1$ ,  $L = 1$  ( $P$  стан).

Звідки  $g = 3/2$ , і магнітний момент атома буде

$$p_{m_J} = \frac{3}{2} \mu_B \sqrt{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \mu_B.$$

### Задача 8

Спектральний прилад розділяє спектральні лінії в видимій області спектра ( $\lambda = 500$  нм), що відрізняються на  $\Delta\lambda = 10$  пм. Якою повинна бути індукція зовнішнього магнітного поля для спостереження нормального ефекту Зеемана?

#### Розв'язання

При нормальному ефекті Зеемана різниця між будь-якими двома сусідніми спектральними лініями повинна дорівнювати

$$E = \mu_B B, \quad (1)$$

де  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  — магнетон Бора.

Тоді різницю частот можна знайти зі співвідношення  $E = h\nu$ , звідки

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{\mu_B B}{h}.$$

Різниця частот пов'язана з різницею довжин хвиль так:

$$\left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right| = \left| \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \right| = \frac{c}{2}. \quad (2)$$

З (1) і (2) одержимо величину індукції зовнішнього магнітного поля для розщеплення спектральної лінії

$$\frac{\mu_B B}{h} = \frac{c}{2}; \quad B = \frac{hc}{2\mu_B}; \quad B = 0,86 \text{ Тл.}$$

### Задача 9

Пучок атомів натрію (в основному стані) вилітає з печі, температура якої  $T = 350$  К. Пучок розщеплюється в поперечному неоднорідному магнітному полі з градієнтом  $dB/dx = 50$  Тл/м на шляху

$l_1 = 1$  см. Екран віддалений від магніту на відстань  $l_2 = 6,5$  м. Знайти відстань  $b$  між крайніми компонентами розщепленого пучка на екрані.

*Розв'язання*

Атом натрію знаходиться в основному стані  $^2S_{1/2}$  ( $L=0$ ,  $S=1/2$ ;  $J=1/2$ ). Коли він рухається в неоднорідному магнітному полі, на нього діє сила

$$F_x = p_{mx} \frac{dB}{dx} = g_B m_S \frac{dB}{dx},$$

де  $p_{mx} = g_B m_S$  — проекція магнітного моменту атома на напрямок магнітного поля;  $g=2$  — фактор Ланде,  $m_S = \pm 1/2$ ,  $B$  — магнетон Бора.

Тоді сила  $F_x$ , яка розщеплює пучок атомів, що летять вздовж осі  $y$  (рис. 8.14) дорівнює

$$F_x = \pm B \frac{dB}{dx}. \quad (1)$$

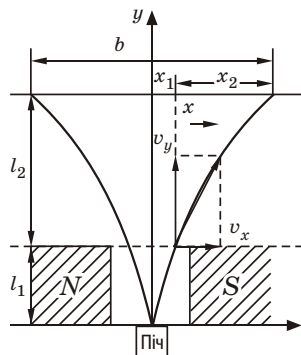


Рис. 8.14

В той же час за другим законом Ньютона ця сила має значення

$$F_x = m_e a_x, \text{ звідки } a_x = \frac{F_x}{m_e},$$

$m_e$  — маса електрона.

Зміщення, яке набуває електрон, перебуваючи в магнітному полі,

$$x_1 = \frac{a_x t_1^2}{2},$$

де  $t_1 = \frac{l_1}{v}$  — час руху в магнітному полі, тоді

$$x_1 = \frac{F_x l_1^2}{2m_e v^2}. \quad (2)$$

Після вильоту з області неоднорідного магнітного поля атоми рухаються зі сталою швидкістю  $v$ , проекції якої  $v_x = a_x t_1$  і  $v_y = l_1/t_1$ .

Вважаючи, що  $t_2$  — час руху атомів від магніту до екрану (шлях  $l_2$ ), а  $x_2$  — зміщення атомів за цей час, маємо

$$l_2 = v_y t_2, \quad t_2 = \frac{l_2}{v_y}, \quad x_2 = v_x t_2 = \frac{v_x}{v_y} l_2 = \frac{a_x t_1^2 l_2}{l_1} = 2x_1 \frac{l_2}{l_1}.$$

З рис. 8.14 маємо  $b = 2(x_1 + x_2)$ , тоді

$$b = 2 \left( x_1 + 2x_1 \frac{l_2}{l_1} \right) = \frac{2x_1}{l_1} (l_1 + 2l_2).$$

З урахуванням (2) і (1) одержимо

$$b = \frac{F_x l_1}{m_e v^2} (l_1 + 2l_2) = \frac{dF}{dx} \frac{(l_1 + 2l_2)}{m_e v^2}.$$

Кінетична енергія атомів при даній температурі

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

$k_B$  — стала Больцмана.

Нарешті одержимо величину розщеплення на екрані

$$b = \frac{dB}{dx} \frac{(l_1 + 2l_2)}{3k_B T}; \quad b \approx 2 \text{ см.}$$

### Задачі для самостійного розв'язання

**8.1.** Електрон в атомі водню знаходиться в основному стані. Розрахуйте ймовірність знайти його за межами борівського радіусу  $a_0$ .

*Відповідь:*  $w = 67,7 \%$ .

**8.2.** Нормована хвильова функція, яка описує  $s$ -стан електрона

в атомі водню, має вигляд  $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{a^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ , де  $a_0$  — перший

борівський радіус. Визначте середню потенціальну енергію  $\langle U \rangle$  електрона в полі ядра.

*Відповідь:*  $\langle U \rangle = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}.$

**8.3.** З умов попередньої задачі знайти середню відстань  $\langle r \rangle$  електрона від ядра.

*Відповідь:*  $\langle r \rangle = \frac{3a_0}{2}.$

**8.4.** Знайти максимально можливий повний механічний момент  $L_{J \text{ max}}$  атома натрію, якщо його валентний електрон має головне квантове число  $n = 4$ .

*Відповідь:*  $L_{J \text{ max}} = \frac{\sqrt{63}}{2} \hbar = 4,18 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

**8.5.** Розрахувати повну енергію, орбітальний момент імпульсу та магнітний момент електрона, що знаходиться в атомі водню в  $2p$ -стані.

*Відповідь:*  $E = -3,4\text{eV}$ ,  $L_l = 1,5 \cdot 10^{-34}$  Дж·с,  $p_m = 1,3 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.

**8.6.**  $1s$ -електрон атома водню поглинув фотон з енергією  $E = 12,1\text{eV}$  і перейшов у збуджений стан з максимально можливим орбітальним квантовим числом. Визначити зміну моменту імпульсу  $L_l$  орбітального руху електрона.

*Відповідь:*  $L_l = 2,57 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

**8.7.** Визначити, у скільки разів орбітальний момент імпульсу  $L_l$  електрона в  $f$ -стані більше, ніж для електрона в  $p$ -стані.

*Відповідь:*  $\frac{L_l^f}{L_l^p} = 2,45$ .

**8.8.** Основний стан атома цезію позначається символікою як  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s$ . Визначити кількість оболонок і підоболонок, кількість електронів у кожній оболонці і підоболонці та загальну кількість електронів.

**8.9.** Знайти можливі значення повних механічних моментів атомів, які знаходяться у станах  $^4P$  і  $^5D$ .

*Відповідь:* для стану  $^4P$ :  $L_J = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar, \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar, \frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$ ;

для стану  $^5D$ :  $L_J = 0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \sqrt{12}\hbar, \sqrt{20}\hbar$ .

**8.10.** Скільки і які значення квантового числа  $J$  може мати атом в стані з квантовими числами  $S = 5/2$  і  $L = 2$ ?

*Відповідь:*  $J = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$ .

**8.11.** Записати символічно основний стан атома хлору.

*Відповідь:*  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ .

**8.12.** Запишіть спектральні позначення термів атома водню, електрон якого знаходиться в стані з головним квантовим числом  $n = 3$ .

*Відповідь:*  $3S_{1/2}, 3P_{1/2}, 3P_{3/2}, 3D_{3/2}, 3D_{5/2}$ .

**8.13.** Побудуйте схему можливих енергетичних переходів в слабкому магнітному полі між такими термами:  $^2P_{1/2}$ ,  $^2S_{1/2}$ ,  $^2P_{3/2}$ ,  $^2S_{1/2}$ .

**8.14.** Електрон в атомі водню знаходиться в  $f$ -стані. Визначити можливі значення (в одиницях  $\hbar$ ) проекції моменту імпульсу  $L_{l_z}$ .

*Відповідь:*  $L_{l_z} = 0, \pm \hbar, \pm 2\hbar, \pm 3\hbar$ .

**8.15.** Електрон в атомі знаходиться в  $d$ -стані. Визначити орбітальний момент імпульсу електрона та максимальне значення проекції моменту імпульсу на напрямок зовнішнього магнітного поля.

*Відповідь:*  $L_l = 2,45\hbar, L_{l_z \max} = 2\hbar$ .

**8.16.** Валентний електрон атома натрію знаходиться в стані з  $n = 4$ . Значення інших квантових чисел електрона такі, що атом має найбільший можливий механічний момент  $L_J$ . Визначити магнітний момент електрона в цьому стані.

*Відповідь:*  $p_m = \frac{4}{7}\sqrt{63} \text{ Б}$ .

**8.17.** Знайти максимально можливий повний механічний момент і відповідне спектральне позначення атома з електронною конфігурацією  $1s^2 2p 3d$ .

*Відповідь:*  ${}^3F_4, L_{J \max} = 2\hbar\sqrt{5}$ .

**8.18.** Система складається із  $d$ -електрона і атома в  ${}^2P_{3/2}$ -стані. Знайти можливі спектральні терми цієї системи.

*Відповідь:*  ${}^1P_1, {}^1D_2, {}^1F_3, {}^3P_{0,1,2}, {}^3D_{1,2,3}, {}^3F_{2,3,4}$ .

**8.19.** Атом знаходиться в стані з мультиплетністю  $\alpha = 3$ , а повний механічний момент  $L_J = \hbar\sqrt{20}$ . Яким може бути відповідне квантове число  $L$ ?

*Відповідь:*  $L = 3, 4, 5$ .

**8.20.** Знайти можливі мультиплетності  $\alpha$  термів: а)  ${}^\alpha D_2$ ; б)  ${}^\alpha P_{3/2}$ ; в)  ${}^\alpha F_1$ .

*Відповідь:* а)  $\alpha = 1, 3, 5, 7, 9$ ; б)  $\alpha = 2, 4, 6$ ; в)  $\alpha = 5, 7, 9$ .

**8.21.** Визначити, які з переходів заборонено правилами відбору:  ${}^2D_{3/2} \quad {}^2P_{1/2}; {}^2P_1 \quad {}^2S_{1/2}; {}^3F_3 \quad {}^3P_2; {}^4F_{7/2} \quad {}^4D_{5/2}$ .

*Відповідь:* другий та третій.

**8.22.** Які з термів  ${}^3P_3, {}^5D_0, {}^1F_0, {}^8F_{13/2}$  записані неправильно?

*Відповідь:* терми  ${}^3P_3, {}^1F_0$ .

**8.23.** Розрахувати фактор Ланде для термів а)  ${}^6F_{1/2}$ , б)  ${}^4D_{1/2}$ , в)  ${}^5F_2$ , г)  ${}^5P_1$ .

*Відповідь:* а)  $g = 2/3$ ; б) 0; в) 1; г)  $5/2$ .

**8.24.** Вузкий пучок атомарного водню пропускається в досліді Штерна і Герлаха через поперечне неоднорідне магнітне поле  $\partial B/\partial z = 2 \text{ кТл/м}$  — довжиною 8 см. Швидкість атомів 4 км/с. Визначити відстань між компонентами розщепленого пучка  $b$  на виході з магнітного поля. Атоми водню знаходяться в основному стані.

*Відповідь:*  $b = 4,46 \text{ мм}$ .

**8.25.** Вузкий пучок атомів рубідію в основному стані пропускається через поперечне неоднорідне магнітне поле довжиною 10 см. На екрані, розташованому на відстані 20 см від магніту, спостерігається розщеплення пучка на дві компоненти. Визначити силу, діючу на атоми рубідію, якщо відстань між компонентами розщепленого пучка дорівнює 4 мм, а швидкість атомів дорівнює 0,5 км/с.

*Відповідь:*  $F = 2,86 \cdot 10^{-21} \text{ Н}$ .

**8.26.** Атом знаходиться в стані, для якого  $S = 2$ , повний механічний момент  $L_J = \hbar\sqrt{2}$ , а магнітний момент дорівнює нулю. Написати спектральний символ відповідного терму.

*Відповідь:*  ${}^5F_1$ .

**8.27.** Знайти повне розщеплення спектральної лінії  ${}^3D_3 \rightarrow {}^3P_2$  в слабкому магнітному полі з індукцією  $B = 0,34 \text{ Тл}$ .

*Відповідь:*  $= 1 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ .

**8.28.** Деяка спектральна лінія, обумовлена переходом в  ${}^2S_{1/2}$ -стан, розщепилась в слабкому магнітному полі на шість компонент. Написати спектральний символ початкового терму.

*Відповідь:*  ${}^2P_{3/2}$ .

**8.29.** Спектральна лінія  $\lambda = 612 \text{ нм}$  атома обумовлена переходом між синглетними термами. Знайти інтервал між крайніми компонентами цієї лінії в магнітному полі з індукцією  $B = 1 \text{ Тл}$ .

*Відповідь:*  $= 35 \text{ пм}$ .

**8.30.** На скільки підрівнів розщепиться в слабкому магнітному полі терм: а)  ${}^3P_0$ , б)  ${}^2F_{5/2}$ , в)  ${}^4D_{1/2}$ .

*Відповідь:* а) не розщепиться, б) на шість, в) не розщепиться.

**8.31.** Атом знаходиться в слабкому магнітному полі з індукцією  $B = 0,25 \text{ Тл}$ . Знайти повну величину розщеплення в електрон-вольтах термів: а)  ${}^1D$ , б)  ${}^3F_4$ .

*Відповідь:* а)  $E = 58 \text{ мкеВ}$ ; б)  $E = 145 \text{ мкеВ}$ .

# 9

## Випромінювання та спектри

---

### 9.1. Атомні спектри

Як розглядалося в розділі 7, спектри випромінювання і поглинання атома водню мають лінійчастий характер. Такий же вигляд мають і спектри воднеподібних атомів, у яких на валентній орбіті знаходиться тільки один електрон, наприклад  $\text{He}^+$ ,  $\text{Mg}^+$ ,  $\text{Be}^+$  і т. інше. В цьому випадку частоти випромінювання визначаються за допомогою узагальненої формули Бальмера

$$\nu = Z^2 R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де  $R$  — стала Рідберга,  $Z$  — порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва.

З цієї формули випливає, що частоту будь-якої спектральної лінії воднеподібного атома можна записати як різницю двох спектральних термів

$$\nu = T(m) - T(n),$$

$$\text{де } T(m) = \frac{Z^2 R}{m^2}; T(n) = \frac{Z^2 R}{n^2}.$$

Спектри випромінювання атомів лужних металів (Li, Na, K, Rb, Cs) в загальних рисах подібні спектру атома водню, тобто також мають лінійчастий характер. Це можна пояснити, виходячи з того, що у лужного металу з порядковим номером  $Z$  (має  $Z$  електронів)  $Z - 1$  електрон створюють замкнуту оболонку, тобто структуру атома інертного газу, який дуже важко іонізувати. Таким чином, валентний електрон рухається в полі  $Z - 1$  внутрішніх електронів (їх заряд  $-(z - 1)e$ ) і ядра (заряд  $+Ze$ ), що нагадують рух електрона в атомі водню. Але в результаті впливу поля внутрішніх електронів на валентний електрон, спектральні терми лужних металів визначаються більш складною емпіричною формулою



$$T(n) = \frac{R}{(n + )^2},$$

де  $R$  — стала Рідберга,  $n$  — головне квантове число, — поправка, стала для кожної серії, але для різних серій різна.

Спектри лужних металів обумовлені переходами валентного (оптичного) електрона з одного енергетичного рівня на інший. Поле, в якому рухається електрон, вже не буде кулонівським, тобто пропорційним  $1/r^2$ , а стане центрально-симетричним ( $\sim 1/r$ ). В такому випадку енергетичні рівні будуть залежати не тільки від головного квантового числа  $n$ , а від орбітального квантового числа  $l$ .

## 9.2. Рентгенівські спектри. Закон Мозлі

Рентгенівське випромінювання спостерігається при бомбардуванні антикатада (анода) електронами, які вириваються із катода рентгенівської трубки при підведенні до неї напруги. При низьких напругах і як наслідок не дуже великих енергіях електронів, що бомбардують антикатод, виникає *гальмівне* рентгенівське випромінювання, якому характерний суцільний спектр і яке не залежить від матеріалу антикатада (виникає при гальмуванні електрона в антикатоді). Особливості гальмівного рентгенівського випромінювання розглянуто у розділі 5.9.

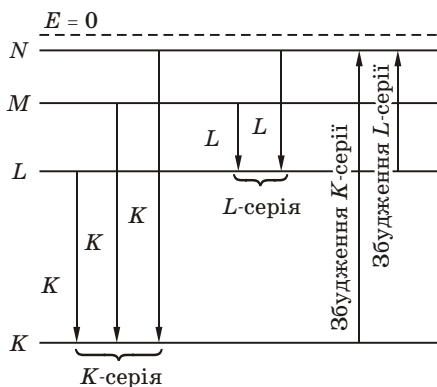
При збільшенні напруги на рентгенівській трубці енергія бомбардуючих електронів стає достатньою для виривання електронів з внутрішніх оболонок атома. На фоні суцільного спектра гальмівного випромінювання з'являються різкі лінії *характеристичного* випромінювання. Лінійчатий рентгенівський спектр називають *характеристичним спектром*, оскільки він визначається матеріалом анода, тобто характеризує природу речовини.

Кожна лінія рентгенівського характеристичного випромінювання, звичайно, виникає внаслідок переходу атома з одного енергетичного рівня на інший. Її частота визначається правилом частот Бора  $h \nu = E_1 - E_2$ .

Оскільки рентгенівське випромінювання короткохвильове, різниця енергії в початковому і кінцевому станах атома дуже велика і у випадку важких елементів перевищує в тисячі, десятки та сотні тисяч разів відповідну різницю в оптичній області спектра.

У порівнянні з оптичними спектрами характеристичні рентгенівські спектри елементів однотипні й складаються з декількох серій, які позначають  $K, L, M, N, O$ . Кожна серія, в свою чергу, має невелику кількість ліній, які позначають у порядку збільшення

частоти (зменшення довжини хвиль) індексами  $K, K, K, \dots, L, L, L, \dots$ . Спектри різних елементів мають східний характер. Із збільшенням атомного номера  $Z$  речовини антикатада увесь рентгенівський спектр лише зміщується в короткохвильову частину спектра не змінюючи своєї структури. Розгляд структури й особливостей характеристичних рентгенівських спектрів приводе до висновку, що їх виникнення пов'язане з процесами, що від-



буваються у внутрішніх, забудованих електронних оболонках атомів, які подібні за будовою.

Тобто, квантові переходи здійснюються *внутрішніми*, а не зовнішніми (валентними) електронами.

Розглянемо механізм виникнення рентгенівських серій, який схематично показано на рис. 9.1. Припустимо, що під дією зовнішнього швидкого електрона або високоенергетичного фотона виривається один із двох електронів K-оболонки атома. Тоді на його місце може перейти електрон з більш віддалених від ядра оболонок L, M, N, ... Такі переходи супроводжуються випромінюванням рентгенівських квантів та виникненням спектральних ліній K-серії. Серія K найпростіша за своєю структурою й складається з трьох ліній: K, K, K.

Тоді на його місце може перейти електрон з більш віддалених від ядра оболонок L, M, N, ... Такі переходи супроводжуються випромінюванням рентгенівських квантів та виникненням спектральних ліній K-серії. Серія K найпростіша за своєю структурою й складається з трьох ліній: K, K, K.

$$K (L \rightarrow K), K (M \rightarrow K), K (N \rightarrow K).$$

Найбільшу інтенсивність і найбільшу довжину хвилі K-серії має K-лінія. Виникнення K-серії завжди супроводжується появою інших серій, тому що при випромінюванні її ліній з'являються вакансії в оболонках L, M, ..., які в свою чергу будуть заповнюватися електронами, що знаходяться на більш високих рівнях. В результаті всіх цих процесів виникає *весь спектр* рентгенівського характеристичного випромінювання атома.

На підставі дослідження рентгенівських спектрів елементів англійський фізик Г. Мозлі у 1913 році встановив закон, який зв'язав частоти рентгенівського спектра з атомним номером  $Z$  елемента, що випромінює цю частоту. Відповідно до цього закону частоти ліній визначаються формулою

$$K\text{-лінія} \quad \omega_k = R(Z-1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right);$$

$$K\text{-лінія} \quad \omega_k = R(Z-1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right);$$

$$L\text{-лінія} \quad \omega_L = R(Z-7,5)^2 \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right);$$

або для будь-якої лінії

$$\omega = R(Z - )^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

де  $\omega$  — частота, що відповідає даній лінії характеристичного рентгенівського випромінювання;  $R$  — стала Рідберга;  $\omega$  — стала екранування,  $n_1 = 1, 2, 3, \dots$  (визначає рентгенівську серію);  $n_2$  приймає цілочисельні значення, починаючи з  $n_1 + 1$  (визначають окрему лінію відповідної серії).

**Закон Мозлі** формулюється наступним чином: **корінь квадратний з частоти характеристичного рентгенівського випромінювання є лінійною функцією атомного номера  $Z$  й записується так**

$$\sqrt{\omega} = C(Z - ), \quad (9.1)$$

де  $C$  і  $\omega$  — сталі.

Стала екранування зберігає своє значення в межах однієї серії для всіх елементів, але змінюється при переході від однієї серії до іншої. Зроблені Мозлі виміри дають для  $K$ -серії  $\omega = 1, C = 3/4$ , для  $L$ -серії  $\omega = 7,5$ . Зміст сталої екранування полягає в тому, що електрони, які створюють випромінювання, знаходяться в електричному полі ядра. Внаслідок цього на них діє не весь заряд ядра  $Ze$  а заряд  $(Z - )e$ , зменшений екранованою дією інших електронів.

Графік залежності  $\sqrt{\omega}$  від  $Z$  наведено на рис. 9.2.

Лінійна залежність у законі Мозлі між частотою і номером елемента  $Z$  (або зарядом його ядра) дала можливість точно розмістити елементи в періодичній

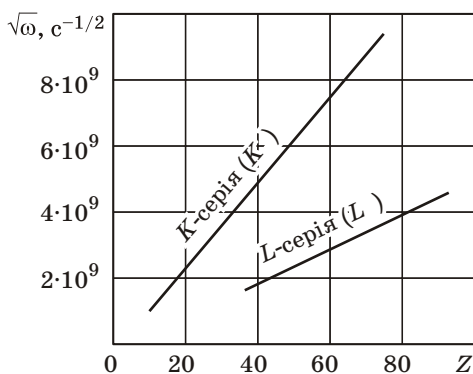


Рис. 9.2

системі елементів. На основі цього закону вперше показано, що не атомна маса, а заряд ядра визначає хімічні властивості атома.

### 9.3. Види хімічних зв'язків у молекулах. Обмінна взаємодія

Молекула — найменша частинка певної речовини, яка складається з однакових або різних атомів, сполучених між собою хімічними зв'язками. Вона є носієм основних хімічних та фізичних властивостей речовини і здатна самостійно існувати.

При утворенні молекули взаємодія між атомами зумовлена взаємодією зовнішніх валентних електронів. Молекули створюються тільки тоді, коли енергія зв'язаної системи менша за енергію системи невзаємодіючих атомів. Електрони внутрішніх оболонок при об'єднанні атомів у молекули участі не приймають й залишаються в попередніх енергетичних станах. (Рентгенівські спектри для атомів та молекул співпадають).

При наближенні двох атомів виникають сили зв'язку, які приводять до утворення молекул. Найчастіше в молекулах зустрічаються два типи зв'язку: гетерополярний (іонний) та гомеополярний (ковалентний або атомний).

#### Іонний зв'язок

Іонний зв'язок здійснюється, коли один або декілька електронів одного атома переходять до іншого атома, внаслідок чого біля одного з ядер виявляється надлишок електронів, а біля другого — їх нестача. Молекула нібито складається з двох іонів протилежних знаків, які притягуються один до одного. Прикладом молекул з гетерополярним зв'язком є молекули NaCl, KCl, KBr, HCl. На рис. 9.3 наведено іонний зв'язок між іонами  $\text{Na}^+$  та  $\text{Cl}^-$  (молекули NaCl).

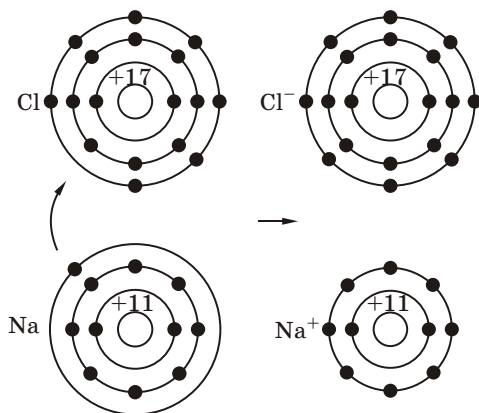


Рис. 9.3

Натрій та хлор об'єднуються хімічним шляхом переходу електронів від атома натрію до атома хлора, причому іони, що виникають, притягуються електростатично.

Зміну потенціальної енергії іонів  $\text{Na}^+$  і  $\text{Cl}^-$  в залежності від відстані між ними наведено на рис. 9.4.

При  $R \rightarrow \infty$   $U = 1,5$  еВ.  
 При  $R = 2,4$  Å  $U = -4,2$  еВ.

Сили взаємного притя-  
 жіння й відштовхування  
 збалансовані. Система зна-  
 ходиться в стані рівноваги.  
 Щоб розщепити молекулу  
 NaCl на іони  $\text{Na}^+$  і  $\text{Cl}^-$ , треба  
 надати енергію 4,2 еВ.

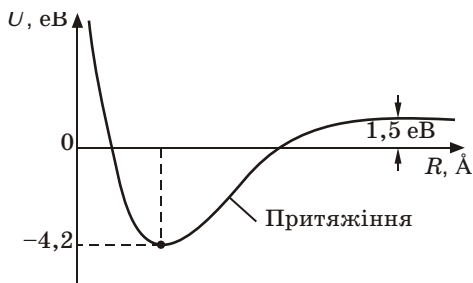


Рис. 9.4

**Ковалентний  
 (атомний)  
 зв'язок**

Ковалентний зв'язок здійснюється, коли пари електронів з *антипаралельними* спінами ста-  
 ють загальними для двох атомів. Прикладом мо-  
 лекул з гомеополярним зв'язком є молекули  $\text{H}_2$ ,  $\text{C}_2$ ,  $\text{CO}$ . Якщо  
 спіни орієнтовані паралельно, виникають сили відштовхування  
 й молекула не утворюється. Ковалентний зв'язок пояснюється  
 принципом нерозрізненості тотожних части-  
 нок, наприклад електронів в молекулі водню.  
 Два електрони молекули  $\text{H}_2$  належать спільно  
 двом протонам (рис. 9.5).

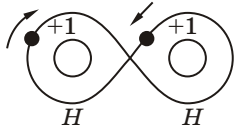


Рис. 9.5

При наближенні атомів спостерігається пере-  
 хрещення хвильових функцій електронів, які  
 стають нерозрізненими. Нерозрізненість електронів приводить до ви-  
 никнення квантово-механічної *обмінної взаємодії*, що виникає між  
 двома тотожними електронами. В результаті цього й виникає зв'язок  
 двох атомів, які утворюють молекулу (спіни антипаралельні).

**Молекула водню**

Найпростішою молекулярною системою  
 є молекулярний іон водню  $\text{H}_2^+$ , в якому два про-  
 тона зв'язані спільним електроном. Спочатку проаналізуємо,  
 яким чином два протони можуть мати спільний електрон, та чому  
 це призводить до меншої енергії, і, як наслідок, до виникнення  
 стабільної системи.

В розділі 6 було розглянуто потенціальну яму й явище кванто-  
 во-механічного проходження частинки крізь бар'єр. Частинка мо-  
 же пройти за бар'єр навіть тоді, коли її енергії не вистачає, щоб  
 пробитися за його стінку, тому що хвильова функція простира-  
 ється за стінку. Такого немає, якщо потенціальна яма нескінченно  
 глибока. Електричне поле навкруги протона відіграє роль ящика  
 для електрона, а два близько розташованих протони — це два ящи-  
 ки зі стінкою між ними.

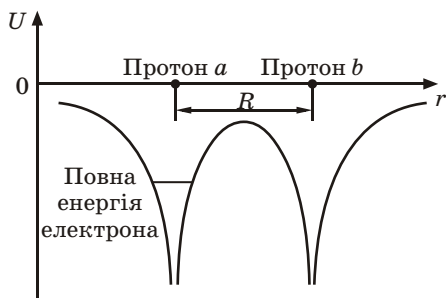


Рис. 9.6

На рис. 9.6 наведено потенціальну енергію електрона в електричному полі двох близько розташованих протонів. Вказана повна енергія електрона в основному стані атома водню.

В класичній фізиці кожен електрон знаходиться біля свого протона.

В квантовій фізиці існує якась імовірність того, що електрон, рух якого обмежений ящиком, пройде крізь стінку і потрапить у інший ящик. Разом з тим рівноімовірне й зворотнє тунелювання. Ця ситуація описується тим, що електрон став загальним для двох протонів.

Імовірність цього процесу (узагальнення електронів) залежить від відстані між протонами. Якщо вона дорівнює  $1 \text{ \AA}$  ( $10^{-10} \text{ м}$ ), то можна вважати, що електрон переходить від одного протона до іншого кожні  $10^{-15} \text{ с}$ , тобто електрон належить до обох протонів. Але якщо проміжок між протонами становить  $10 \text{ \AA}$ , то електрон в середньому переміщується тільки один раз в секунду, що в атомному масштабі є нескінченно великим проміжком часу. Маючи на увазі, що ефективний радіус хвильової функції  $1S$  водню дорівнює  $0,53 \text{ \AA}$ , приходимо до висновку, що колективізація електронів можлива тільки у тих атомів, хвильові функції яких помітно перекриваються.

У випадку загального електрона для двох протонів покажемо, що система буде мати меншу енергію, ніж у окремого атома. Згідно принципу невизначеностей, чим менша область, де рухається частинка, тим більше її імпульс, а разом з тим і кінетична енергія. Електрон, який належить до двох протонів, менше обмежений в своєму русі, ніж електрон, зв'язаний тільки з одним протоном, а це означає, що він має меншу кінетичну енергію.

#### 9.4. Енергія молекули

У 1927 році англійські вчені Гайтлер і Лондон на основі законів квантової механіки розрахували енергетичний стан молекули  $\text{H}_2$ . Вони розв'язали рівняння Шредингера для системи, що складається з двох протонів (ядер атома водню) та двох електронів (рис. 9.7).

Якщо відстань між ядрами  $R$ , а між електронами (1 і 2) та протонами ( $a, b$ )  $r_{1a}, r_{2a}, r_{1b}, r_{2b}$ ; а відстань між електронами  $r_{12}$ , то потенціальна енергія такої системи  $U$  дорівнює:

$$U = -\frac{e^2}{r_{1a}} - \frac{e^2}{r_{2a}} - \frac{e^2}{r_{1b}} - \frac{e^2}{r_{2b}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R}.$$

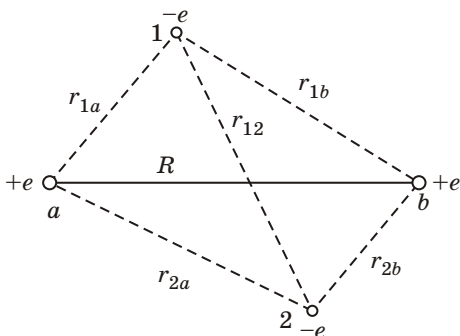


Рис. 9.7

Оскільки хвильова функція залежить від координат обох електронів, то рівняння Шредингера виглядає так:

$$\Delta \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left[ E - e^2 \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r_{1a}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2a}} - \frac{1}{r_{2b}} \right) \right] \psi = 0. \quad (9.2)$$

Як виявилось, власні значення енергії, отримані розв'язком рівняння (9.2), залежать від відстані між ядрами, тобто  $E = E(R)$ . Характер залежності  $E$  від  $R$  для паралельної ( $\uparrow\uparrow$ ) та антипаралельної ( $\uparrow\downarrow$ ) орієнтації спінів суттєво різний (рис. 9.8). Молекула

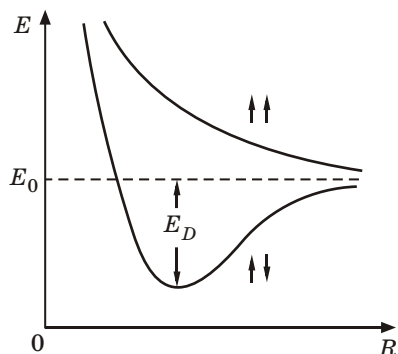


Рис. 9.8

утворюється тільки при наближенні атомів з антипаралельними спінами. Величина  $E_0$  дорівнює сумі енергії ізолюваних атомів; величина  $E_D$  — це енергія зв'язку молекули.

Повна енергія ізолюваної молекули

$$E = E_e + E_v + E_r \quad (E_e > E_v > E_r), \quad (9.3)$$

де  $E_e$  — електронна енергія — енергія руху електронів відносно ядер;  $E_v$  — коливальна енергія — енергія коливань ядер, внаслідок яких періодично змінюється відносно положення ядер;  $E_r$  —

обертальна енергія — енергія обертання ядер, внаслідок чого періодично змінюється орієнтація молекули в просторі.

В формулі (9.3) не врахована енергія поступального руху центра мас молекули, бо вона не квантується і її зміна не може привести до виникнення молекулярного спектра. Також не врахована енергія ядер атомів в молекулі, бо вона враховується лише при розгляданні надтонкої структури спектральних ліній.

Кожна із енергій, що входить у вираз (9.3), квантується. Тобто їй відповідає набір дискретних рівнів енергії з визначеними квантовими числами.

**Електронна енергія**

Енергетичні *електронні* рівні молекули визначаються її електронною конфігурацією, тобто сукупністю квантових чисел, що відповідають станові всіх електронів молекули. Електронні рівні молекули виникають з електронних рівнів її атомів, які знаходяться в електричному полі інших атомів, коли входять до складу молекули. Електронна енергія будь-якої двохатомної молекули має мінімум  $E_{01}$  при деякому значенні відстані  $R$  між її ядрами (крива 1 на рис. 9.9).

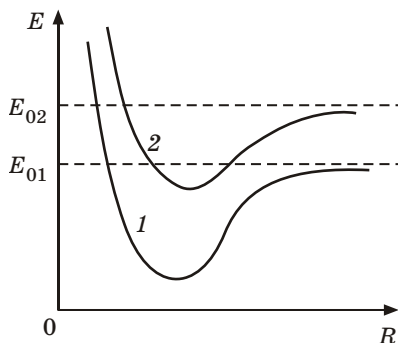


Рис. 9.9

При збудженні молекули, тобто зміні електронної конфігурації змінюється й крива залежності електронної енергії від  $R$  (крива 2 на рис. 9.9).

**Коливальна енергія**

Енергія коливальних рухів  $E_v$  менша за енергію електронних станів, вона виникає при зміщенні атомів з рівноважних положень. Коливання атомів у молекулі розглядають як коливання гармонічних осциляторів, які мають енергію

$$E_v = \left( v + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu, \dots (v = 0, 1, 2), \quad (9.4)$$

де  $v$  — коливальне квантове число,  $\nu$  — класична частота осцилятора.

Для коливального квантового числа має місце правило відбору



$$v = \pm 1.$$

Крива потенціальної енергії молекули (див. рис. 9.9) співпадає з параболою тільки при малих коливаннях, де рівні енергії еквідистантні. При збільшенні інтенсивності коливань спостерігається ангармонічність (відхилення від гармонічності), що призводить до згущуваності рівнів при збільшенні квантового числа  $v$  (рис. 9.10),  $E_v$  — гранична енергія дисоційованої молекули.

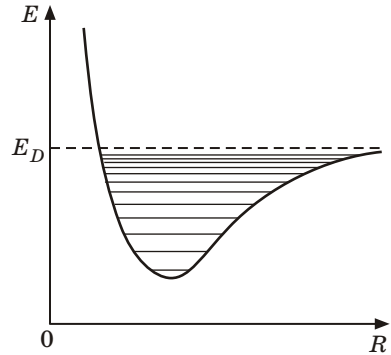


Рис. 9.10

Коливальна енергія ангармонічного осцилятора

$$E_v = \left[ \left( v + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \hbar \nu,$$

де  $\nu$  — коефіцієнт ангармонічності;  $v$  — коливальне квантове число ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ). Правила відбору для гармонічного осцилятора ( $v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). Але чим більша зміна  $v$ , тим менша імовірність переходу, тому на практиці переходи з  $v = +1$  виявляються більше поширеними.

**Обертальна енергія**

Енергія обертальних рухів  $E_r$  менша за енергію коливальних рухів, вона пов'язана із обертанням молекули як цілого відносно деякого напрямку та обертанням деяких частин молекули відносно інших.

Розглянемо обертальні рівні енергії двохатомної молекули. Нехай молекула складається з атомів, маси яких  $m_1$  та  $m_2$ , а відстань між ними  $R$  (рис. 9.11).

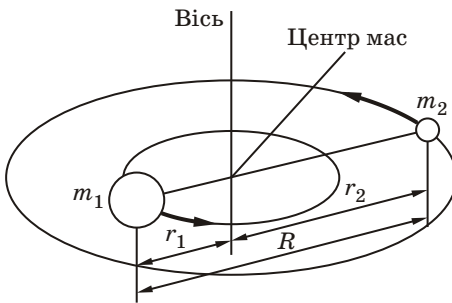


Рис. 9.11

Момент інерції такої молекули відносно осі, що проходить через її центр мас перпендикулярно лінії, яка з'єднує атоми, дорівнює

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \quad (9.5)$$

де  $r_1$  та  $r_2$  — відстані від центра мас до атомів 1 і 2 відповідно.

Оскільки  $m_1 r_1 = m_2 r_2$  за означенням, то (9.5) можна переписати у вигляді:

$$I = \left[ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right] \cdot (r_1 + r_2)^2 = R^2, \quad (9.6)$$

де  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  є *приведена маса* молекули.

З рівняння (9.6) випливає, що обертання двохатомної молекули рівноцінне обертанню одиночної частинки з масою відносно осі, що знаходиться на відстані  $R$  від неї.

Момент імпульсу молекули дорівнює

$$L = I \cdot \omega,$$

де  $\omega$  — кутова швидкість обертання. Момент імпульсу, як відомо, за своєю природою завжди квантується, тобто приймає тільки дискретні значення

$$L = \hbar \sqrt{J(J+1)}, \quad J = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $J$  — оберतालне квантове число, для якого діє правило відбору  $J = \pm 1$ .

Обертальна енергія молекули

$$E_r = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

і тому для її оберталних рівнів енергії встановлюється значення:

$$E_r = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I} = B J(J+1), \quad (9.7)$$

де  $B = \frac{\hbar^2}{2I}$  — обертальна стала.

Отже, у відповідності з (9.4) та (9.7) повна енергія дорівнює

$$E = E_e + \left( v + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_v + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}, \quad (9.8)$$

де квантові числа  $v$  та  $J$  приймають значення:  $v = 0, 1, 2, \dots$ ;  $J = 0, 1, 2, \dots$  та підпорядковуються правилу відбору  $v = \pm 1$ ;  $J = \pm 1$ .

При переході від одного енергетичного стану до іншого поглинається або випромінюється енергія  $E = h\nu$ ; одночасно змінюються енергії руху електронів, енергії коливання та обертання.

Теорія й дослід показують, що відстань між оберतालними рівнями енергії  $E_r$ , значно менша за відстань між коливальними рівнями  $E_v$ , які, в свою чергу, менші за відстань між електронними рівнями  $E_e$ . Схема енергетичних рівнів молекули виглядає так, як це показано на рис. 9.12 (наведені лише два електронних рівня).

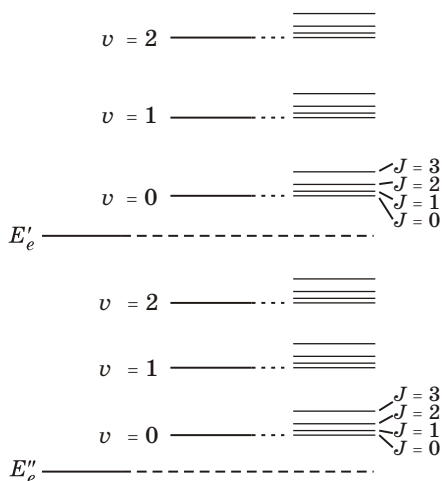


Рис. 9.12

## 9.5. Молекулярні спектри

Будова молекул та властивості їх енергетичних рівнів проявляються в *молекулярних спектрах*, які виникають при квантових переходах між рівнями енергії молекул. Спектр випромінювання молекули визначається структурою її енергетичних рівнів та відповідними правилами відбору.

При різних типах переходів між рівнями енергії молекули виникають різні типи молекулярних спектрів, які утворюють смугу і тому їх називають *смугастими спектрами*.

Якщо при зміні стану молекули  $E_e \neq 0$ , то виникають електронні спектри випромінювання або поглинання, які знаходяться у видимій або ультрафіолетовій частинах спектра. При спостереженні системи ліній в умовах низької роздільної здатності приладу вона матиме вигляд *суцільної смуги*. При високій роздільній здатності спектрального приладу спектральні лінії спостерігаються окремо.

Якщо  $E_e = 0$  і  $E_v \neq 0$ , то утворюються коливальні спектри, що спостерігаються у ближній і середній частинах інфрачервоного спектра.

У випадку, коли  $E_e = 0$ ,  $E_v = 0$ , а  $E_r \neq 0$ , спостерігаються спектри поглинання, що складаються з *окремих ліній* обертально-го спектра в далекій інфрачервоній частині спектра.

Коливальні та обертальні спектри притаманні лише багатоатомним молекулам, двоатомні молекули їх не мають.

Таким чином, спектри молекул значно складніші ніж спектри атомів, бо молекули мають більш складну структуру.

### 9.6. Комбінаційне розсіяння світла

У 1928 р. радянські вчені Ландсберг та Мандельштам і одночасно індійські фізики Раман та Кріштан відкрили явище *комбінаційного розсіяння світла*.

Суть явища полягає в тому, що в спектрі розсіяння, що виникає при проходженні світла через гази, рідини чи прозорі кристалічні тіла, крім незміщеної лінії джерела випромінювання містяться нові лінії, частоти яких є комбінацією частоти падаючого світла  $\nu_0$  і частот  $\nu_i$  коливальних або обертальних переходів розсіюючих молекул:

$$\nu = \nu_0 \pm \nu_i.$$

Спектр комбінаційного розсіяння (рис. 9.13) складається з незміщеної лінії  $\nu_0$ , відносно якої симетрично розташовуються ряд супутників. Лінії в спектрі з частотами  $\nu_0 - \nu_i$ , меншими за частоту  $\nu_0$ , називають *червоними* (або *стоксовими*) супутниками;

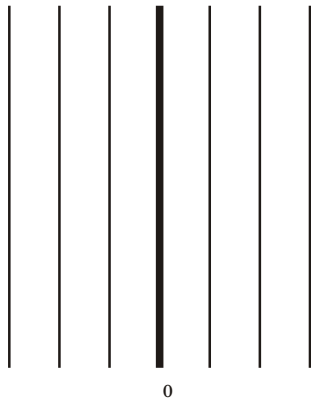


Рис. 9.13

лінії з частотами  $\nu_0 + \nu_i$ , більшими за частоту  $\nu_0$ , — *фіолетовими* (або *антистоксовими*) супутниками.

Аналіз спектрів комбінаційного розсіяння приводить до наступних висновків: лінії супутників розташовуються по обидва боки від незміщеної лінії; частоти  $\nu_i$  визначаються лише речовиною, що розсіюється, і не залежать від частоти падаючого світла  $\nu_0$ ; число супутників визначається речовиною, що розсіюється; інтенсивність фіолетових супутників менша за інтенсивність червоних супутників і при зростанні температури розсіюючої речовини збільшується, в той час як інтенсивність червоних супутників від температури практично не залежить.

Пояснення закономірностей комбінаційного розсіяння світла дає квантова теорія. Згідно з цією теорією процес розсіяння світла можна розглядати як непружне зіткнення фотона з молекулами.

Молекули речовини можуть знаходитися як в основному, так і в збудженому стані. При зіткненні фотона з молекулами, що знаходяться в основному стані, він віддає молекулі квант енергії, який відповідає переходу між енергетичними рівнями молекули. При цьому енергія фотона зменшується, зменшується його частота і в розсіяному випромінюванні виникає лінія з довжиною хвилі, більшою ніж у падаючого світла (*червоний супутник*). При зіткненні фотона з молекулою, що знаходиться в збудженому стані, навпаки, молекула віддає фотону квант енергії, який відповідає її переходу до основного стану. При цьому енергія фотона збільшується, збільшується його частота і в розсіяному випромінюванні з'являється короткохвильова лінія (*фіолетовий супутник*).

Зсув частоти  $\nu_0$  падаючого світла дорівнює частоті переходу між коливальними рівнями молекул.

При низьких температурах число молекул в основному стані набагато перевищує число молекул, що знаходяться в збудженому стані. Тому зіткнення, які супроводжуються зменшенням енергії молекули, відбуваються значно рідше, ніж переходи, що супроводжуються збільшенням енергії. Цим пояснюється мала інтенсивність фіолетових супутників у порівнянні з червоними. При збільшенні температури число збуджених молекул швидко зростає. Це призводить до збільшення інтенсивності фіолетових супутників.

Молекулярні спектри (в тому числі й спектри комбінаційного розсіяння світла) застосовуються для вивчення будови молекул та їх властивостей. Використовуються в молекулярному спектральному аналізі.

За допомогою цього методу легко й швидко визначаються власні частоти коливань молекул; характер їхньої симетрії; проводиться аналіз складних молекулярних сумішей, особливо органічних молекул.

### **Контрольні запитання та завдання для самоперевірки**

1. Чому гальмівне рентгенівське випромінювання має суцільний спектр, а характеристичне — лінійчатий?
2. В чому різняться оптичне та характеристичне рентгенівське випромінювання? Яка цьому причина?
3. Яка з трьох ліній характеристичного рентгенівського спектра —  $K$ ,  $K$ ,  $L$  — найкороткохвильова? найінтенсивна?
4. Запишіть закон Мозлі. Поясніть його фізичний зміст.
5. Що таке стала екранування? В чому її зміст?

6. Що таке молекула? Які типи зв'язку виникають у молекулах?
7. Коли в молекулах здійснюється іонний зв'язок? Навести приклад молекули з іонним зв'язком.
8. Коли в молекулах здійснюється ковалентний зв'язок? Наведіть приклад молекул з ковалентним зв'язком.
9. Яка молекулярна система найпростіша? Чому?
10. Чому дорівнює повна енергія ізольованої молекули?
11. Дати визначення електронній  $E_e$ , коливальній  $E_v$  та обертальній  $E_r$  енергіям.
12. Чим визначаються енергетичні електронні рівні молекули?
13. При якій умові виникає енергія коливального руху  $E_v$ ? Яка з енергій молекули більша: електронна чи коливальна?
14. Запишіть формулу енергії коливання атомів в молекулі. Яке правило відбору для коливального квантового числа  $\nu$ .
15. З чим пов'язане виникнення обертальної енергії молекули?
16. Яка з енергій молекули більша: обертальна чи коливальна?
17. Запишіть співвідношення, яким визначається обертальна енергія. Пояснити фізичні величини, що входять до цього співвідношення.
18. Які значення приймає момент імпульсу системи? В чому полягає правило відбору для квантового числа  $J$ ?
19. Запишіть формулу для обертальної енергії молекули.
20. Порівняйте між собою відстані між обертальними  $E_r$ , коливальними  $E_v$  та електронними  $E_e$  рівнями енергії.
21. Коли виникають молекулярні спектри?
22. Дайте визначення смугастим спектрам, суцільним?
23. В чому полягає суть явища комбінаційного розсіяння світла?
24. З яких ліній складається спектр комбінаційного розсіяння?
25. Що таке червоні супутники? фіолетові? Які з них мають більшу інтенсивність?
26. Інтенсивність яких супутників не залежить від температури?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Знайти порядковий номер елемента в періодичній системі Менделєєва, якщо гранична частота  $\infty$   $K$ -серії характеристичного рентгенівського випромінювання складає  $5,55 \cdot 10^{18}$  Гц.

#### Розв'язання

Закон Мозлі для  $K$ -серії має вигляд

$$= R(Z - ) \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де  $= 1$ ;  $R = R'c$ ;  $m = 1$ ;  $n = 2$ .

В даному випадку  $n = \infty$ , тому що дана гранична частота  $\infty$ .  
Таким чином:

$$\infty = c \cdot R'(Z - 1) \cdot \frac{1}{m^2} = c \cdot R'(Z - 1)^2,$$

звідки

$$Z = \sqrt{\frac{\infty}{R'c}} + 1 = 42.$$

Відповідь:  $Z = 42$ , молибден.

### Задача 2

Знайти довжину хвилі лінії  $K$  характеристичного рентгеновського випромінювання для молибдена ( $Z = 42$ ).

#### Розв'язання

Оскільки  $= \frac{c}{\lambda}$ , маємо

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - )^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

$= 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$  для  $K$  -серії

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - 1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = R'(Z - 1)^2 \cdot \frac{3}{4};$$

$$\lambda = \frac{4}{3R'(Z - 1)^2} = 72 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

### Задача 3

Власна циклічна частота  $\nu$  коливань молекули HCl дорівнює  $5,63 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ , коефіцієнт ангармонічності  $= 0,0201$ . Визначити: 1) енергію  $E_{21}$  переходу молекули з першого на другий коливальний енергетичний рівень; 2) максимальне квантове число  $\nu_{\max}$ ; 3) максимальну коливальну енергію  $(E_\nu)_{\max}$ ; 4) енергію дисоціації  $E_d$ .

#### Розв'язання

1. Енергію переходу між двома сусідніми рівнями знайдемо як різницю двох значень коливальної енергії:

$$E_{v+1,v} = E_{v+1} - E_v.$$

Оскільки коливальна енергія двоатомної молекули визначається співвідношенням

$$E_v = \hbar \nu \left[ \left( v + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right)_2 \right], \quad (1)$$

то

$$\begin{aligned} E_{v+1,v} &= \hbar \nu \left[ \left( v + \frac{3}{2} \right) - \left( v + \frac{3}{2} \right)_2 \right] - \left[ \left( v + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right)_2 \right] = \\ &= \hbar \nu [1 - 2(v+1)] = 1,09 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,682 \text{ еВ} \end{aligned}$$

2. Прирівняємо різницю сусідніх енергетичних рівнів до нуля і знайдемо максимальне квантове число  $\nu_{\max}$ .

$$E_{v+1,v} = \hbar \nu [1 - 2(\nu_{\max} + 1)] = 0$$

або

$$1 - 2(\nu_{\max} + 1) = 0, \text{ звідки } \nu_{\max} = \frac{1}{2} - 1 = 23.$$

3. Максимальну коливальну енергію  $E_{\max}$  знайдемо, якщо у формулу (1) замість  $\nu$  підставимо  $\nu_{\max}$ :

$$E_{\max} = \hbar \nu \left[ \left( \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right)_2 \right].$$

Оскільки  $\frac{1}{4} \ll \frac{1}{4}$ , то отримаємо:

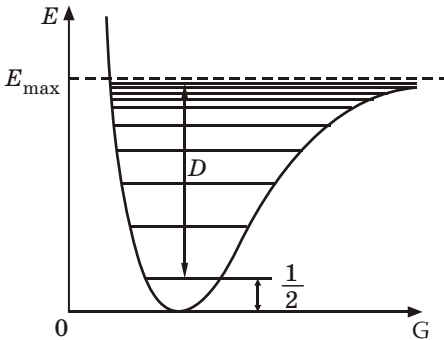


Рис. 9.14

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{\hbar}{4} = 7,37 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \\ &= 4,61 \text{ еВ} \end{aligned}$$

4. Енергія дисоціації — це енергія, необхідна для розділення атомів в молекулі один від одного й віддалення їх без надання їм кінетичної енергії на відстані, на яких взаємодією атомів можна знехтувати. На рис. 9.14 ця енергія



відповідає переходу з нульового коливального рівня на найвищий збуджений, який відповідає  $\nu_{\max}$ . Тоді енергія дисоціації

$$E_d = E_{\max} - E_0 = \frac{\hbar \nu}{4} - \frac{1}{2} \hbar \nu = \frac{\hbar \nu}{4} [1 - 2] =$$

$$= 7,09 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,43 \text{ еВ.}$$

### Задачі для самостійного розв'язання

**9.1.** Яку напругу треба прикласти до рентгенівської трубки з нікелевим антикатодом, якщо різниця довжини хвиль  $K$  - лінії та короткохвильової межі суцільного спектра дорівнює 84 м?

*Відповідь:*  $U = 1,5 \cdot 10^4 \text{ В.}$

**9.2.** Знайти максимальну швидкість електронів, що долітають до антикатада рентгенівської трубки, якщо короткохвильова межа рентгенівського спектра дорівнює 2 нм.

*Відповідь:*  $v = 1,48 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$

**9.3.** У рентгенівській трубці антикатод зроблено з ніобію  $_{41}\text{Nb}$ . Визначити довжину хвилі та енергію кванта для  $K$  - лінії.

*Відповідь:*  $\lambda = 7,6 \cdot 10^{-11} \text{ м; } E = 16,25 \text{ кеВ.}$

**9.4.** При дослідженні лінійчатого рентгенівського спектра деякого елемента було знайдено, що довжина хвилі  $K$  - лінії становить 22 пм. Який це елемент?

*Відповідь:*  $Z = 74$ , вольфрам.

**9.5.** Визначити довжину хвилі  $K$  та  $K$  - ліній характеристичного рентгенівського спектра, одержаного в трубці з молібденовим антикатодом. Чи можна дістати цієї лінії при напрузі 12 кВ?

*Відповідь:*  $\lambda = 7,2 \cdot 10^{-11} \text{ м; } \lambda = 6,1 \cdot 10^{-11} \text{ м;}$  неможливо.

**9.6.** Розглядаючи молекулу як квантовий гармонічний осцилятор, який перебуває в основному стані ( $n = 0$ ), визначити амплітуду  $A$  класичних коливань (через параметр  $a$ ).

*Відповідь:*  $A = \frac{1}{a}.$

**9.7.** Власна кругова частота коливань молекули водню дорівнює  $8,08 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Знайти амплітуду  $A$  класичних коливань молекули.

*Відповідь:*  $A = 12,5 \text{ м.}$

**9.8.** Знайти енергію  $E_{36}$  збудження молекули HCl з нульового коливального енергетичного рівня на перший, якщо відома власна частота обертання  $= 5,63 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$  та коефіцієнт ангармонічності  $= 0,0201$ .

*Відповідь:*  $E_{36} = 0,356 \text{ еВ}$ .

**9.9.** Знайти енергію дисоціації  $D$  молекули CO, якщо її власна частота  $= 4,08 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$  та коефіцієнт ангармонічності  $= 5,83 \cdot 10^{-3}$ .

*Відповідь:*  $D = 11,4 \text{ еВ}$ .

**9.10.** Знайти число  $N$  коливальних енергетичних рівнів молекули HBr, якщо коефіцієнт ангармонічності  $= 0,0208$ .

*Відповідь:*  $N = 24$

**9.11.** Максимальна коливальна енергія  $E_{\text{max}}$  молекули  $\text{O}_2$  дорівнює  $5,18 \text{ еВ}$ . Знайти власну частоту обертання, якщо коефіцієнт ангармонічності  $= 9,46 \cdot 10^{-3}$ .

*Відповідь:*  $= 2,98 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ .

**9.12.** Знайти коефіцієнт ангармонічності молекули  $\text{N}_2$ , якщо її енергія дисоціації  $D = 9,8 \text{ еВ}$  і власна частота обертання  $= 445 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ .

*Відповідь:*  $= 7,36 \cdot 10^{-3}$ .

**9.13.** Знайти момент імпульсу  $L$  молекули кисню, оберտальна енергія якої  $E_J = 2,16 \text{ меВ}$ .

*Відповідь:*  $L = 3,66 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**9.14.** Для молекули HCl знайти оберտальні квантові числа  $J$  двох сусідніх рівнів, різниця енергій яких  $E_{J+1, J}$  дорівнює  $7,86 \text{ меВ}$ .

*Відповідь:*  $J_1 = 2, J_2 = 3$

**9.15.** Для молекули  $\text{N}_2$  знайти: 1) момент інерції  $I$ , якщо між'ядерна відстань  $d = 110 \text{ м}$ ; 2) оберտальну сталу  $B$ ; 3) зміну  $E$  енергії при переході молекули з третього оберտального енергетичного рівня на другий. Відносна атомна маса  $A_N = 14$ .

*Відповідь:*  $I = 1,4 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $B = 0,259 \text{ меВ}$ ;  $E = 1,55 \text{ меВ}$ .

**9.16.** Для молекули HF знайти: 1) момент інерції  $I$ , якщо між'ядерна відстань  $d = 91,7 \text{ м}$ ; 2) оберտальну сталу  $B$ ; 3) енергію, необхідну для збудження молекули на перший оберտальний рівень.

*Відповідь:*  $I = 1,33 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $B = 2,73 \text{ меВ}$ ;  $E = 5,46 \text{ меВ}$ .

**9.17.** Визначити зміну  $L$  моменту імпульсу двохатомної молекули при переході її з першого обертового рівня на другий.

*Відповідь:*  $L = 1,1 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с.

**9.18.** Обчислити обертову сталу  $B$  для молекули CO, якщо між'ядерна відстань  $d = 113$  м.

*Відповідь:*  $B = 0,238$  меВ.

**9.19.** Знайти момент інерції та між'ядерну відстань молекули CO, якщо інтервали  $E$  між сусідніми рівнями чисто обертового спектра випромінювання молекул CO дорівнюють 0,48 меВ?

*Відповідь:*  $I = 1,46 \cdot 10^{-46}$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>;  $d = 113$  м.

**9.20.** Між'ядерна відстань молекули HCl  $d = 0,127$  нм. Знайти кутову швидкість обертання  $\nu$  молекули, що знаходиться на першому збудженому обертовому рівні.

*Відповідь:*  $\nu = 5,8 \cdot 10^{12}$  с<sup>-1</sup>.

**9.21.** Визначити між'ядерну відстань молекули CN, якщо інтервал між сусідніми лініями чисто обертового спектра випромінювання даної молекули дорівнює  $5,47 \cdot 10^{12}$  с<sup>-1</sup>.

*Відповідь:*  $d = 112$  м.

**9.22.** Між'ядерна відстань молекули NO дорівнює 115 м. Знайти температуру  $T$ , при якій середня кінетична енергія поступального руху молекули дорівнює енергії, яка необхідна для її збудження на перший обертовий енергетичний рівень. Відносні атомні маси  $A_N$  і  $A_O$  дорівнюють відповідно 14 і 16.

*Відповідь:*  $T = 3,3$  К.

**9.23.** Знайти частоту коливань та коефіцієнт квазіпружної сили  $K$ , якщо відомо, що в коливальному спектрі комбінаційного розсіяння світла довжина хвилі червоного та фіолетового супутників, найближчих до незміщеної лінії, дорівнюють 3466 та 3300 Å. Анггармонічність знехтувати.

*Відповідь:*  $\nu = 1,37 \cdot 10^{14}$  с<sup>-1</sup>,  $K = 4,96$  Н/см.

**9.24.** Відомо, що в спектрі комбінаційного розсіювання крім незміщеної спектральної лінії виникають стоксові (червоні) й антистоксові (фіолетові) супутники. Поясніть механізм їх виникнення та їхні властивості.

**9.25.** Знайти відношення інтенсивностей фіолетового та червоного супутників, найближчих до незміщеної лінії, в коливальному спектрі комбінаційного розсіяння світла на молекулах Cl<sub>2</sub> при

температурі 300 К. У скільки разів зміниться це відношення при збільшенні температури удвічі?

*Відповідь:*  $\frac{J_{\Phi}}{J_r} = 0,067$ ; збільшиться в 3,9 рази.

**9.26.** Обчислити частоту власних коливань розсіювачої молекули, якщо при комбінаційному розсіюванні монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda = 2536,5 \text{ \AA}$  утворюється супутник з  $\lambda_1 = 2536,5 \text{ \AA}$ .

*Відповідь:*  $\nu_0 = 7,9 \cdot 10^{11}$  Гц.

**9.27.** Чи можна виміряти зміну частоти монохроматичного світла в результаті комбінаційного розсіювання, якщо молекула, що розсіює, перейшла із стану з коливальним квантовим числом  $\nu = 4$  в стан з коливальним числом  $\nu = 5$ . Нижній рівень енергії ( $\nu = 0$ ) дорівнює  $0,4 \cdot 10^{-9}$  Дж. Коефіцієнт ангармонічності  $= 0,0285$ .

*Відповідь:*  $\nu_0 = 4,3 \cdot 10^{23}$  Гц, неможна.

**9.28.** Обчислити зсув фази падаючого світла при комбінаційному розсіюванні, якщо поруч із основною лінією (незмщеною)  $\lambda = 6234 \text{ \AA}$  у спектрі спостерігається антистоксовий супутник, довжина хвилі якого відрізняється від основної на  $\Delta\lambda = 103 \text{ \AA}$ .

*Відповідь:*  $\nu_0 = 7,8 \cdot 10^{12}$  Гц.

# 10 Випромінювання й поглинання електромагнітних хвиль речовиною

---

---

## 10.1. Спонтанне й вимушене випромінювання

У попередніх розділах було з'ясовано, що атоми можуть знаходитися лише в квантових станах з дискретними значеннями енергії  $E_1, E_2, E_3, \dots$ . Розглянемо тільки два з цих станів (1 і 2) з енергіями  $E_1$  і  $E_2$ . Під дією зовнішнього випромінювання атом, який знаходиться в основному стані 1, може здійснити вимушений перехід у збуджений стан 2 (рис. 10.1, а). Такий перехід призведе до *поглинання випромінювання*.

Час життя атома у збудженому стані 2 складає  $10^{-8}$  с. Потім атом *спонтанно* без будь-яких впливів зовні переходить в основний стан 1, при цьому віддає надлишкову енергію у вигляді випромінювання фотона з енергією  $h\nu = E_2 - E_1$ . Процес випромінювання фотона збудженим атомом без будь-яких впливів зовні називається *спонтанним* (або *самовільним*) *випромінюванням* (рис. 10.1, б). Величина  $A$ , обернена часу життя атома у збудженому стані називається імовірністю спонтанного переходу.

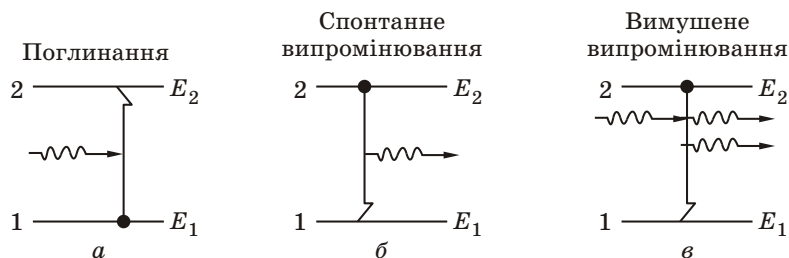


Рис. 10.1

$$A_{nm} = \frac{1}{\dots}$$

Чим більша імовірність спонтанних переходів, тим менший час життя атома у збудженому стані. Випадковий характер спонтанного випромінювання призводить до випадкового напрямку, випадковій поляризації й випадковій початковій фазі. Тобто, оскільки спонтанні переходи взаємно не зв'язані, то *спонтанне випромінювання некогерентне*.

У 1916 р. Ейнштейн звернув увагу на те, що для пояснення існування станів рівноваги між випромінюванням і речовиною недостатньо двох вказаних видів випромінювання (поглинання й спонтанного випромінювання).

Імовірність *спонтанних переходів* визначається лише внутрішніми властивостями атомів й не залежить від падаючого випромінювання.

Імовірність *поглинальних переходів* залежить як від властивостей атомів, так і від інтенсивності падаючого випромінювання.

Для встановлення рівноваги при довільній інтенсивності падаючого випромінювання необхідно існування «випромінювальних» переходів, які визиваються випромінюванням, тобто *вимушене (індуковане) випромінювання*.

Якщо на атом, що знаходиться в збудженому стані 2, діє зовнішнє випромінювання з частотою  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ , то виникає *вимушений перехід* в основний стан 1 з випромінюванням фотона тієї самої енергії  $h\nu = E_2 - E_1$  (рис. 10.1, в). Таким чином, на відміну від спонтанного випромінювання, при якому виникає лише один фотон, у випадку вимушеного випромінювання крім того фотону, що явився причиною акту випромінювання, завжди є ще й *другий фотон*, випущений атомом.

Як показали Ейнштейн і Дірак, вимушене випромінювання (вторинні фотони) *тотожне* вимушуваному випромінюванню (первинним фотонам), тобто воно має таку ж саму:

частоту;

фазу;

поляризацію;

напрямок розповсюдження, як і вимушуюче випромінювання.

Отже, вимушене й вимушуюче випромінювання *строго когерентні*, тобто випущений фотон нічим не відрізняється від падаючого на атом.

**Принцип  
детальної  
рівноваги**

В статистичній фізиці відомий *принцип детальної рівноваги*, який полягає в тому, що в рівноважній термодинамічній системі кожний мікроскопічний процес супроводжується оберненим йому процесом з однаковою імовірністю обох цих процесів. На основі цього принципу Ейнштейн сформулював такий **постулат**: *імовірність вимушених переходів, що супроводжується випромінюванням, повинна бути рівною імовірності вимушених переходів, які супроводжуються поглинанням світла, тобто*

$$P_{nm} = P_{mn}, \quad (10.1)$$

де  $P_{nm}$  — імовірність вимушеного переходу атома в одиницю часу з енергетичного рівня  $E_n$  на рівень  $E_m$ ,  $P_{mn}$  — імовірність оберненого переходу.

Цей постулат ще називають *умовами симетрії* Ейнштейна.

Імовірність вимушених переходів пропорціональна густині енергії  $u$  вимушеного випромінювання

$$P_{nm} = B_{nm} u ;$$

$$P_{mn} = B_{mn} u ,$$

де  $B_{nm}$  та  $B_{mn}$  — так звані коефіцієнти Ейнштейна.

Згідно (10.1)  $B_{nm} = B_{mn}$ .

Якщо число атомів у стані  $n$  буде  $N_n$ , а у стані  $m$  —  $N_m$ , то кількість атомів, що здійснюють в одиницю часу вимушений перехід  $n \rightarrow m$  виявиться рівним

$$N_{nm} = P_{nm} N_n = B_{nm} u N_n, \quad (10.2)$$

а здійснюючи перехід  $m \rightarrow n$ :

$$N_{mn} = P_{mn} N_m = B_{mn} u N_m. \quad (10.3)$$

На основі рівноймовірності вимушених переходів  $n \rightarrow m$ ,  $m \rightarrow n$  Ейнштейн отримав формулу Планка.

Рівновага між речовиною й випромінюванням досягається при умові, що число атомів  $N_i$  в кожному стані не змінюється. А це можливо лише тоді, коли число атомів, що переходять в одиницю часу із стану  $n$  в стан  $m$  буде дорівнювати числу атомів оберненого переходу.

Нехай  $E_n > E_m$ . Тоді переходи  $m \rightarrow n$  зможуть відбуватися лише під дією випромінювання. Переходи  $n \rightarrow m$  будуть здійснюватися як *вимушено*, так і *спонтанно*.

Позначимо імовірність спонтанного переходу атома в одиницю часу із стану  $n$  в стан  $m$  через  $A_{nm}$ , тоді маємо:

$$N'_{nm} = A_{nm} N_n. \quad (10.4)$$

В стані рівноваги повинна виконуватися умова:

$$N_{mn} = N_{nm} + N'_{nm}. \quad (10.5)$$

Підставимо в формулу (10.5) значення (10.2), (10.3) та (10.4), в яких слід взяти рівноважне значення густини енергії, тобто  $u(, T)$ , отримаємо:

$$B_{mn} u(, T) N_m = B_{nm} u(, T) N_n + A_{nm} N_n. \quad (10.6)$$

Звідки густина енергії

$$u(, T) = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} N_m - B_{nm} N_n}. \quad (10.7)$$

Оскільки  $B_{mn} = B_{nm}$ , то (10.7) можна переписати у вигляді

$$u(, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{\frac{N_m}{N_n} - 1}. \quad (10.8)$$

Відомо, що рівноважний розподіл атомів по станам з різними енергіями визначається законом Больцмана:

$$\frac{N_m}{N_n} = e^{(E_n - E_m)/kT} = e^{\frac{\hbar}{kT}}. \quad (10.9)$$

Таким чином, приходимо до формули

$$u(, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{e^{\hbar/kT} - 1}. \quad (10.10)$$

Для визначення коефіцієнта  $A_{nm}/B_{nm}$  Ейнштейн скористувався тим, що при малих частотах вираз (10.10) повинен переходити у формулу Релея — Джинса. У випадку  $\hbar \ll kT$  зробимо заміну

$$e^{\hbar/kT} \approx 1 + \frac{\hbar}{kT},$$

тоді (10.10) приймає вид:

$$u(, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{kT}{\hbar}. \quad (10.11)$$

Порівняння з формулою Релея — Джинса дає:



$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar^3}{2c^3}. \quad (10.12)$$

Підставимо (10.12) в (10.10), отримаємо формулу

$$u(\nu, T) = \frac{\hbar^3}{2c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1}. \quad (10.13)$$

Оскільки густина енергії і функція спектрального розподілу  $f(\nu, T)$  пов'язані співвідношенням  $f(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)$ , то маємо формулу (10.14), яка і є формулою Планка.

$$f(\nu, T) = \frac{\hbar^3}{4 \cdot 2c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1}, \text{ або } f(\nu, T) = \frac{2}{c^2} \cdot \frac{\hbar^3}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1}. \quad (10.14)$$

## 10.2. Заселеність енергетичних рівнів. Інверсна заселеність

Кількість атомів  $N_i$ , що знаходяться при температурі  $T$  у стані з енергією  $E_i$ , має назву *заселеності енергетичних рівнів* і визначається розподілом Больцмана

$$N_i = C e^{-E_i/kT}. \quad (10.15)$$

Із формули (10.15) витікає, що із збільшенням енергії стану заселеність рівня, тобто кількість атомів у даному стані, зменшується. Більш високі рівні заселені менше, а імовірність переходів з одного рівня на другий пропорційна заселеності рівня. Таким чином число атомів, що переходять з верхнього рівня на нижній з випромінюванням енергії, буде меншим за число атомів, що переходять з нижнього рівня на верхній з поглинанням енергії. Поглинання переважає над випромінюванням, тобто випромінювання, що падає при проходженні через речовину, буде ослабленим.

Для того щоб середовище підсилювало випромінювання, що на нього падає, необхідно створити *нерівноважний стан системи*, тобто створити так, щоб у стані з більшою енергією  $E_n$  знаходилося більше число атомів, ніж у стані з меншою енергією  $E_m$ .

Такі стани називаються станами з *інверсною заселеністю*, а процес створення нерівноважного стану речовини (перевод системи в стан з інверсною заселеністю) називається *накачкою*. Накачку можна здійснити оптичним, електричним та іншими способами. Згідно з формулою (10.15):

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-(E_n - E_m)/kT}. \quad (10.16)$$

Зрозуміло, що у випадку інверсної заселеності  $N_n / N_m > 1$  при  $(E_n - E_m) > 0$ .

Це призведе до того, що треба вважати  $T < 0$ . Тому стани з інверсною заселеністю називають станами з від'ємною температурою. Зауважимо, що тут термін від'ємна температура є чисто умовним, бо поняття температури застосовне тільки до рівноважних станів, а стани з інверсною заселеністю не є рівноважними. Ця температура характеризує заселеність рівнів (температура переходів).

### 10.3. Квантове підсилення та генерація світла

При розповсюдженні світла в різних середовищах його інтенсивність зменшується згідно **закону Бугера — Ламберта**:

$$I_x = I_0 e^{-\alpha x}. \quad (10.17)$$

де  $x$  — товщина поглинального середовища;  $\alpha$  — коефіцієнт поглинання, залежить від середовища ( $\alpha > 0$ );  $I_0$  та  $I_x$  — інтенсивності світла на вході та виході поглинального середовища відповідно.

У середовищах в інверсному стані вимушене випромінювання може перевищити поглинання, внаслідок чого падаючий пучок світла при проходженні через ці середовища буде підсилюватися. Такі середовища називаються *активними*. В такому випадку коефіцієнт поглинання  $\alpha$  стає від'ємним ( $\alpha < 0$ ), а закон Бугера — Ламберта (10.17) для активних середовищ записується у вигляді

$$I = I_0 e^{\alpha x}. \quad (10.18)$$

Таким чином, для того щоб отримати підсилення падаючої світлової хвилі, потрібно створити в речовині (середовищі) інверсійну заселеність атомів.

В 1939 році радянський вчений В. О. Фабрикант вперше спостерігав підсилення світла, що пройшло крізь пари ртуті, які світилися під дією електричного розряду.

В 1950 році американські фізики Е. М. Парселл і Р. В. Паунд спостерігали індуковане випромінювання, здійснивши інверсію заселеностей ядерних спінових систем шляхом швидкої зміни напрямку магнітного поля.

Американський фізик Дж. Вебер у 1952—1953 рр. обґрунтував можливість підсилення електромагнітних хвиль за допомогою індукованого випромінювання і сформулював принципи дії лазера.

В 1953 році радянські фізики М. Г. Басов і О. М. Прохоров і незалежно від них американський фізик Ч. Х. Таунс створили перший молекулярний генератор (мазер).

В 1964 році вони були удостоєні Нобелівської премії за фундаментальні роботи, що привели до створення мазерів та лазерів.

#### 10.4. Квантові генератори (лазери) та їх застосування

Створення *лазерів*, або оптичних квантових генераторів, стало найвидатнішим досягненням середини ХХ сторіччя. *Лазер* — це унікальне джерело світла, яке характеризується дуже високою когерентністю, монохроматичністю, поляризованістю при відносно високій інтенсивності лазерного випромінювання та малих розходженнях променя. Всі інші джерела світла є некогерентними, немонохроматичними, неполяризованими і характеризуються значним розходженням променя.

Основною фізичною проблемою при створенні лазерів було знаходження речовини з достатньо великим коефіцієнтом від'ємного поглинання для певної частоти.

В залежності від робочої речовини лазерів вони поділяються на твердотільні, газові та рідинні.

Лазер обов'язково має три основні компоненти: 1) *активне середовище*, в якому створюються стани з інверсною заселеністю; 2) *система накачки* (прилад для створення інверсії в активному середовищі); 3) *оптичний резонатор* (прилад, що виділяє в простір вибірний напрямок пучка фотонів й формує вихідний світловий пучок).

Твердотільні лазери
------------------------

До групи твердотільних лазерів відносяться всі похідні рубінового лазера, який в 1960 році створив американський вчений Т. Г. Мейман. Робочим елементом рубінового лазера Меймана є циліндр із кристала рубіна — оксид алюмінію  $Al_2O_3$ . В кристалічній ґратці  $Al_2O_3$  деякі з атомів Al заміщені тривалентними іонами  $Cr^{+++}$ .

Для оптичної *накачки* використовується імпульсна газорозрядна лампа. Більша частина енергії лампи переходить у тепло, а частина енергії випромінюється у вигляді блакитного та зеленого випромінювання, яке поглинається рубіном. Ця енергія збуджує іони хрому і в результаті створюється *інверсійна заселеність* рівня 3, а рівень 1 збіднюється (рис. 10.2). Збудження іонів за рахунок накачки зображено стрілкою  $W_{13}$ .

Оскільки час життя атомів хрому в збудженому стані малий ( $\sim 10^{-8}$  с), то його надлишкова заселеність довго не утримується.

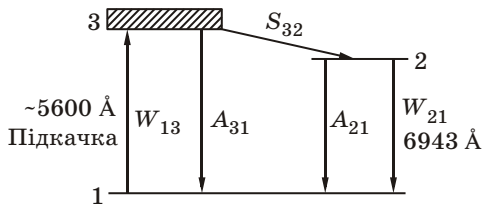


Рис. 10.2

Здійснюються або спонтанні переходи  $3 \rightarrow 1$  (вони незначні і на рис. 10.2 показані стрілкою  $A_{31}$ ), або більш імовірні безвипромінювальні переходи на рівень 2, час життя на якому в  $10^3$  разів довший, ніж на

рівні 3. На рис. 10.2 ці переходи зображені стрілкою  $S_{32}$ . При цьому надлишок енергії передається кристалічній гратці рубіна. Рівень 2 називається *метастабільним*. Правила відбору забороняють перехід  $2 \rightarrow 1$ . Це приводить до «накопичення» атомів хрому на рівні 2, тобто виникає інверсна заселеність рівня 2 відносно 1.

Стрілка  $A_{21}$  на рис. 10.2 зображує спонтанний перехід з метастабільного рівня 2 на основний 1. Випромінюваний при цьому фотон може визвати вимушене випускання додаткових фотонів (перехід  $W_{21}$ ), які у свою чергу викличуть в активному середовищі багато вимушених переходів  $2 \rightarrow 1$ , результатом чого є ціла лавина вторинних фотонів, які є точною копією первинних. Так зароджується *лазерна генерація*. Оскільки спонтанні переходи носять випадковий характер, а спонтанно народжені фотони випускаються в різних напрямках, то й лавини вторинних фотонів розповсюджуються так саме, тобто випромінювання не може мати високі когерентні властивості. Так, при проходженні світла вздовж рубінового циліндра довжиною 1 м ступінь підсилення світла ледве сягав би 1 %. Щоб перетворити такий підсилювач в генератор, необхідно створити такі умови, щоб виникав позитивний зворотній зв'язок. Під *зворотнім зв'язком* взагалі слід розуміти взаємодію вихідного сигналу з вхідним, а під *позитивним зворотнім зв'язком* розуміють такий вплив вихідного сигналу на вхідний, який призводить до підсилення вхідного сигналу.

Позитивного зворотнього зв'язку в лазерах досягають за допомогою *оптичного резонатора*, який є системою двох плоских (або ввігнутих) обернених одне до одного дзеркал, розташованих на одній оптичній осі. Між дзеркалами розміщується активне середовище (кристал або кювета з газом). Дзеркала виготовляються так, що від одного з них випромінювання повністю відбивається, а друге — напівпрозоре. Фотони, що рухаються уздовж осі, багаторазово відбиваються від протилежних торців циліндра, викликаючи кожен раз вимушене випромінювання вторинних фотонів, які в свою чергу визивають вимушене випромінювання, і так далі.

Потік фотонів лавіноподібно наростає, виходить через напівпрозоре дзеркало і створює строго напрямлений уздовж оптичної осі пучок світла величезної яскравості.

У результаті з лазера виходить випромінювання з високими когерентними властивостями, а сам лазер за своїми функціями з підсилювача світла перетворюється в *оптичний генератор*.

**Газові лазери**

Активним середовищем лазерів (робочим тілом) можуть бути не лише тверді тіла, але й гази або рідини. Першим газовим лазером був гелій-неоновий лазер, створений в 1961 році колективом під керівництвом американського фізика Алі Джавана. Накачка в ньому здійснюється високочастотним генератором ( $\approx 30$  МГц) або джерелом постійного струму, які викликають тліючий розряд в He-Ne суміші.

Частина атомів He іонізується, виникає плазма, що містить в собі як електрони, так і іони, які прискорюються електричним полем. В процесі зіткнення вони збуджують атоми He, переводячи їх з основного стану на метастабільні рівні  $2^3S$  та  $2^1S$  (рис. 10.3) з часом життя  $\approx 10^{-3}$  с.

Енергетичні рівні гелію близькі до рівнів  $2S$  і  $3S$  неону, тому імовірно, що під час зіткнень енергія буде передаватися від збуджених атомів гелію до атомів неону. Атоми He після зіткнень переходять у основний стан, а атоми Ne у збуджений.

Імовірність збудження атомів неону до станів  $1S$ ,  $2p$ ,  $3p$  дуже мала.

Застосування буферного газу — гелію дає можливість утворити селективну заселеність визначених рівнів неону й створити інверсну заселеність.

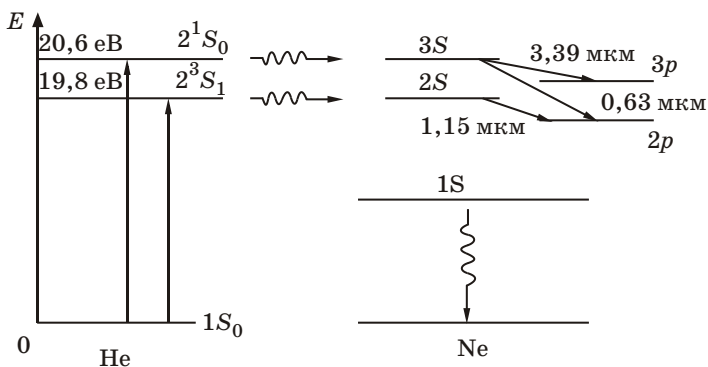


Рис. 10.3

Гелій-неонові лазери працюють в безперервному режимі. Їх випромінювання характеризується найвищими ступенями когерентності і монохроматичності в порівнянні з лазерами інших типів, але вони мають малу потужність (близько декількох десятків міліватт).

Незвичайні властивості лазерного випромінювання знаходять широке застосування. Вони застосовуються в фізиці, хімії, біології, техніці, медицині, різних технологіях. Їх застосовують для плавлення, різання й зварювання металів, в голографії, як безкровні скальпелі при лікуванні очних і шкірних захворювань, для вимірювання відстаней в локації, застосовуються лазерні радари. З їх допомогою вчені намагаються розв'язати проблему термоядерного синтезу.

### **Контрольні запитання та завдання для самоперевірки**

1. Яка умова необхідна для виникнення вимушеного випромінювання у речовині?
2. Який процес випромінювання називається спонтанним?
3. Як визначається імовірність спонтанного переходу?
4. Чи є спонтанне випромінювання когерентним? Поясніть.
5. Чим визначається імовірність спонтанних переходів?
6. Чим відрізняється вимушене випромінювання від спонтанного?
7. Вимушене й вимушуюче випромінювання когерентні чи ні?
8. Що таке заселеність енергетичних рівнів? Чим вона визначається?
9. Що відбувається з заселеністю енергетичного рівня при збільшенні енергії стану?
10. Які стани мають назву станів з інверсною заселеністю?
11. Який процес називається накачкою?
12. Поясніть, чому для утворення стану з інверсною заселеністю необхідна накачка.
13. Запишіть закон Бугера — Ламберта.
14. Чому одним із обов'язкових компонентів лазера є оптичний резонатор?
15. Які типи лазерів вам відомі?
16. Чому активні середовища, які використовуються в оптичних квантових генераторах, розглядаються як середовища з від'ємним коефіцієнтом поглинання?
17. Поясніть, які три компоненти обов'язково містить в собі лазер та яке їх призначення.
18. Перерахуйте та прокоментуйте основні властивості лазерного випромінювання.



# ФІЗИКА ТВЕРДОГО ТІЛА



## Квантові явища в твердих тілах

---

### 11.1. Фазовий простір. Квантові статистики

Класична статистична механіка описує системи з великою кількістю частинок, що знаходяться у стані термодинамічної рівноваги. Розподіл частинок такого газу при наявності потенціального поля описується розподілом Максвелла — Больцмана (див. «Загальна фізика», ч. I, розділ 7)

$$f_{\text{М.Б}}(E) = A \cdot e^{-\frac{E_{\text{к}} + E_{\text{п}}}{k_{\text{Б}}T}} = A \cdot e^{-\frac{E}{k_{\text{Б}}T}}, \quad (11.1)$$

де  $E_{\text{к}}$  і  $E_{\text{п}}$  — відповідно кінетична та потенціальна енергії частинки,  $k_{\text{Б}}$  — стала Больцмана,  $T$  — абсолютна температура,  $E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$ .

В основі описання класичної статистики лежать 4 положення:

1. В системі частинок виконуються закони збереження імпульсу, моменту імпульсу, енергії, заряду, кількості частинок.
2. Всі фізичні процеси проходять безперервно.
3. Всі частинки відмінні одна від одної.
4. Мінімальний об'єм у фазовому просторі  $d\Gamma$  нічим не обмежений і може бути яким завгодно малим.

**Поняття  
квантової  
статистики**

Але в залежності від умов, частинки системи можуть підкорятись законам квантової механіки і, як наслідок, описуватись *квантовою статистикою*.

Однією з основних задач квантової статистики є виявлення закону розподілу частинок за різними квантовими станами. В основі квантової статистики лежать перші два положення, що і для класичної статистики, але третє і четверте положення суттєво відрізняються.

3. *Принциповою відмінною квантової статистики від класичної, де всі однакові частинки відмінні, є принцип тотожності частинок в квантовій механіці (див. розділ 8.7).*

4. *Крім того, положення квантової частинки не можна задати точкою в просторі, існує мінімальна величина фазового об'єму  $d\Gamma$ , яку займає частинка, про що мова йтиме нижче.*

**Фазовий простір**

Маємо систему, що складається з великої кількості квантових частинок  $N$ . Для повної характеристики частинки необхідно задати її координати та імпульс. В шестивимірному фазовому просторі (  $\mu$ -просторі), який складається з трьох вимірів координат частинки  $x, y, z$  і трьох проєкцій її імпульсу на осі координат  $p_x, p_y, p_z$ , стан частинки повинен визначатися точкою. Стан системи частинок описується розподілом точок в  $\mu$ -просторі.

Але беручи до уваги корпускулярно-хвильову двоїстість властивостей квантових частинок і співвідношення невизначеностей Гейзенберга, природно вважати, що стан квантової частинки в  $\mu$ -просторі описується не точкою, а коміркою фазового об'єму (коміркою Больцмана)

$$= x y z p_x p_y p_z = h^3, \quad (11.2)$$

де  $h$  — стала Планка.

Елементарний об'єм не може бути меншим за  $h^3$ . Тобто, на відміну від класичної статистики, *задача полягає в тому, щоб знайти найбільш імовірний розподіл частинок по комірках  $\mu$ -простору.*

Суттєвою є кількість частинок в комірці, незалежно від сорту частинок, тому що стан системи тотожних частинок не змінюється при перестановці частинок як всередині даної комірки, так і між комірками. Зауважимо, що для системи ферміонів треба враховувати принцип Паулі.



При розміщенні по комірках  $\epsilon$ -простору ферміони і бозони ведуть себе по-різному: ферміони можуть знаходитися в комірках лише поодиноці (внаслідок принципу Паулі), вони «індивідуалісти», а кількість бозонів в комірці може бути якою завгодно — це типові «колективісти».

У відповідності з такими властивостями частинок існують дві квантові статистики: Бозе — Ейнштейна і Фермі — Дірака.

**Функція розподілу Бозе — Ейнштейна**

*Бозони* — частинки з цілим або нульовим спіном, що не підкоряються принципу Паулі, для них немає межі на кількість частинок, які знаходяться в певному квантовому стані. До них належать фотони, фонони та деякі ядра.

Функція розподілу Бозе — Ейнштейна  $f_{B-E}$  визначає середню кількість частинок в даному стані  $\langle n \rangle$ , тобто з даною енергією  $E$ .

За умови збереження повної кількості частинок в системі  $N$  та повної енергії системи  $E$ , можна одержати розподіл Бозе — Ейнштейна:

$$f_{B-E} = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{k_B T}} - 1} \quad (11.3)$$

Тут  $k_B$  — стала Больцмана,  $T$  — абсолютна температура,  $\mu$  — хімічний потенціал.

Хімічний потенціал

$$\mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{V, S}$$

характеризується зміною енергії системи, що спостерігається в ізохорно-ізоентропійному ( $V = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ ) процесі при збільшенні числа частинок в системі на одну.

Якщо умова збереження повного числа частинок не виконується, наприклад, як для газу фотонів, хімічний потенціал дорівнює нулю.

За допомогою розподілу Бозе — Ейнштейна можна одержати формулу Планка для спектральної густини випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла (див. розділ 5.5).

**Функція розподілу Фермі — Дірака**

До ферміонів належать частинки з напівцілим спіном (електрони, протони, нейтрони і т. п.), що підкоряються принципу Паулі, і в даному квантовому стані не може бути більше

однієї частинки. Системи ферміонів описуються квантовою статистикою Фермі — Дірака:

$$f_{\text{Ф-Д}} = \frac{1}{\frac{E-\mu}{k_B T} + 1}. \quad (11.4)$$

Позначення тут ті самі, що і для розподілу Бозе — Ейнштейна.

Функції розподілу в класичній і квантовій статистиках можна об'єднати в одній формулі:

$$f = \langle n \rangle = \frac{1}{\frac{E-\mu}{k_B T} + \alpha}. \quad (11.5)$$

Тут  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0$  для розподілу Максвелла — Больцмана,  $\alpha = -1$  для розподілу Бозе — Ейнштейна,  $\alpha = +1$  для розподілу Фермі — Дірака.

В результаті всі частинки тотожні, тобто всі вони підкоряються або статистиці Бозе — Ейнштейна, або статистиці Фермі — Дірака, але для великої кількості станів, коли кількість комірок  $G$  у фазовому просторі набагато більша кількості частинок  $G \gg \gg N$ , то формули квантової статистики переходять у формули статистики Максвелла — Больцмана.

Ця відміна полягає тільки у зовнішньому вигляді формул, а частинки є або ферміонами, або бозонами.

## 11.2. Виродження систем квантових частинок

### Вироджені системи

Система частинок називається *виродженою*, якщо її властивості відмінні від властивостей класичної системи, що описується розподілом Максвелла — Больцмана, а підкоряється розподілу Бозе — Ейнштейна або Фермі — Дірака, тобто поведінка цих частинок описується квантовими законами. Зважаючи на те, що ми не враховуємо взаємодію частинок між собою, їх можна розглядати як газ ферміонів або бозонів. Виродження газів стає суттєвим при низьких температурах та великій густині.

### Параметр виродження

Для характеристики ступеня виродження газу вводиться *параметр виродження*

$$A = e^{\frac{\mu - \epsilon_0}{k_B T}},$$

де  $\epsilon_0$  — хімічний потенціал.

За умови  $A \ll 1$ ,  $\ll k_B T$  (мале виродження) в квантових функціях розподілу  $f_{\text{Б-Е}}$  (11.3) і  $f_{\text{Ф-Д}}$  (11.4) одиницею у знаменнику

можна знехтувати, і ці функції переходять у класичну функцію розподілу Максвелла — Больцмана (11.1).

**Температура  
виродження**

Температура виродження  $T_B$  — це температура, нижче якої виявляються квантові властивості частинок. Розрахунки показують, що для електронного газу в металах  $T_B \sim 10^4$  К, тобто цей газ завжди вироджений, тому що існування металу в конденсованому стані при  $T > T_B$  неможливе.

Для напівпровідників  $T_B \sim 10^{-4}$  К і електронний газ в них не вироджений та підкоряється класичній статистиці.

Прикладом виродженого газу може бути фотонний газ, для якого  $T_B = \infty$ . Фотонний газ вироджений при будь-яких температурах.

### 11.3. Кількість станів у фазовому просторі

Оскільки, як уже було сказано, вигляд функції розподілу частинок у фазовому просторі залежить від кількості частинок у комірниці, розрахуємо кількість станів (кількість фазових комірок) у  $p$ -просторі.

Для визначення кількості станів в фазовому просторі, в яких може знаходитись частинка в інтервалі імпульсів від  $p$  до  $p + dp$  (або в інтервалі енергій від  $E$  до  $E + dE$ ), розглянемо фазовий простір імпульсів (рис. 11.1).

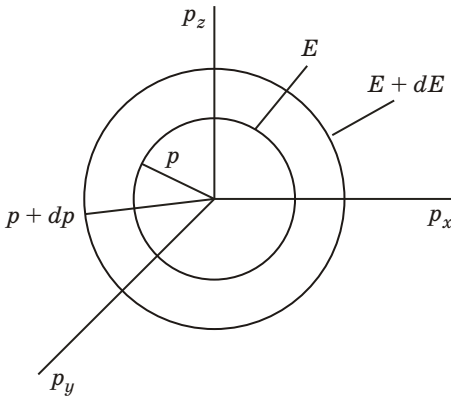


Рис. 11.1

В цьому випадку об'єм (11.2) у  $G$ -вимірному фазовому просторі можна представити як

$$\begin{aligned} &= x y z p_x p_y p_z = \\ &= V p = h^3. \end{aligned}$$

Тоді об'єм в фазовому просторі можна знайти як

$$p = \frac{h^3}{V}.$$

Об'єм сферичного шару, обмеженого значеннями імпульсу  $p$  і  $p + p$  (рис. 11.1), дорівнює  $4 p^2 dp$ .

Кількість комірок в цьому шарі, тобто число квантових станів, які може займати частинка, що має імпульс в інтервалі від  $p$  до  $p + dp$ , дорівнює

$$\frac{4 p^2 dp}{h^3 / V} = \frac{4 V p^2 dp}{h^3} = g(p) dp. \quad (11.6)$$

Тут

$$g(p) = \frac{dG(p)}{dp} = \frac{4 V p^2}{h^3} \quad (11.7)$$

— густина станів, тобто кількість станів на одиничний інтервал імпульсів.

Повне число станів (число комірок) для даної системи таке:

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(p) dp. \quad (11.8)$$

Якщо перейти у фазовий простір енергій і пов'язати імпульс з енергією, будемо мати:

$$E = \frac{p^2}{2m_e}; \quad p = \sqrt{2m_e E}; \quad dp = \frac{\sqrt{2m_e}}{2} E^{-1/2} dE;$$

$$dG(E) = g(E) dE = \frac{2 V}{h^3} (2m_e)^{3/2} \sqrt{E} dE, \quad (11.9)$$

де  $m_e$  — маса електрона.

Повне число станів, які може займати частинка з енергією  $E$ :

$$G(E) = \int_0^E \frac{2 V}{h^3} (2m_e)^{3/2} \sqrt{E} dE = \frac{4 V}{3h^3} (2m_e E)^{3/2}. \quad (11.10)$$

Порівнюючи  $G$  з  $N$ , можна зробити висновок про ступінь виродження системи.

Якщо кількість станів  $G$  набагато більша за кількість частинок  $G \gg N$ , тоді система невироджена, тобто немає значення частинки — ферміони, чи бозони. Така система описується розподілом Максвелла — Больцмана.

Коли кількість станів того ж порядку, що й кількість частинок  $G \sim N$ , то така система вироджена і в залежності від виду частинок (ферміони або бозони) буде описуватись однією з квантових статистик.

#### 11.4. Квантова теорія вільних електронів у металі

Велика кількість вільних електронів в металі, що є електронами провідності, може розглядатись подібно молекулам ідеального газу. Тому вони одержали назву *електронного газу*. Але класична

електронна теорія провідності металів Друде — Лоренца була неспроможна пояснити цілий ряд явищ. Ці труднощі були подолані теорією Зоммерфельда, який зберіг модель вільних електронів (електронного газу), але застосував до них не класичну, а квантову статистику Фермі — Дірака, яка враховувала принцип Паулі.

Якщо розглянути зразок металу у вигляді куба (зі стороною  $L$ ), то для електронів він буде являти собою тривимірну потенціальну яму. В результаті розв'язання рівняння Шредінгера для такого випадку одержуємо квантовані (дискретні) значення енергії електрона, аналогічно як і для електрона в одновимірній потенціальній ямі (див. розділ 6.6)

$$E = \frac{2\hbar^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

де  $m_e$  — маса електрона,  $n_x, n_y, n_z$  — квантові числа (для кожного ступеня свободи).

Наприклад, для основного стану  $n_x = n_y = n_z = 1$  енергія дорівнює

$$E_1 = \frac{3 \cdot 2\hbar^2}{2m_e L^2}.$$

Можна зробити висновок, що стан електрона провідності визначається чотирма квантовими числами  $n_x, n_y, n_z$  і  $m_s$ , де  $m_s$  — спінове квантове число, враховує спін електрона.

Одній і тій самій сумі  $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  відповідають різні комбінації квантових чисел, тобто рівні енергії є виродженими. Наприклад рівень  $E_1$  може реалізуватися при 12 комбінаціях квантових чисел, тобто кратність виродження дорівнює 12.

**$T = 0$**  Розглянемо метал при температурі абсолютного нуля  $T = 0$ .

Електрони, які є ферміонами і стан яких описується статистикою Фермі — Дірака, розподіляються, відповідно до принципу Паулі, так, що в кожному квантовому стані буде тільки один електрон. Тобто електрони займуть всі стани з енергіями від найменшого рівня до найбільшого, величина якого визначається числом електронів у газі. При цьому будуть заповнені всі комірки з усіма імпульсами до деякого максимального імпульсу  $p_F$ , який має назву імпульсу Фермі. Повне число станів розрахуємо, застосувавши (11.6) і (11.8)

$$G(p) = \int_0^{p_F} g(p) dp = \int_0^{p_F} \frac{4}{h^3} V p^2 dp = \frac{4}{3h^3} V p_F^3. \quad (11.11)$$

Повну кількість електронів  $N$ , що заповнюють всі комірки  $G(p_F)$ , знайдемо, помістивши в кожен комірку по два електрона з різними проекціями спіна

$$N = 2 \frac{4 V p_F^3}{3 h^3}, \quad (11.12)$$

звідки граничний фермієвський імпульс дорівнює

$$p_F = \hbar \left( \frac{3n}{8} \right)^{1/3} = \hbar (3^2 n)^{1/3}, \quad (11.13)$$

де  $n = N/V$  — концентрація електронного газу.

Зауважимо, що навіть при абсолютному нулі електрони в метали інтенсивно хаотично рухаються зі швидкостями від 0 до  $v_F = p_F/m_e$  — фермієвська швидкість.

В цьому випадку розподіл електронів, який відповідає мінімуму енергії, такий: всі стани електронів з імпульсами в інтервалі  $0 < p \leq p_F$  зайняті, а стани з  $p > p_F$  вільні.

**Енергія Фермі**

Імпульсу  $p_F$  відповідає гранична енергія електрона — енергія Фермі  $E_F$ .

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{3n}{8} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3^2 n)^{2/3}. \quad (11.14)$$

Всі стани з енергією меншою  $E_F$  заповнені, а з  $E > E_F$  — вільні.

Поверхня в фазовому  $k$ -просторі (просторі хвильових чисел), що відповідає енергії Фермі, називається поверхнею Фермі  $E_F = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$  і має форму сфери.

**Розподіл Фермі — Дірака при  $T = 0$**

При  $T = 0$  функція розподілу Фермі — Дірака має вигляд

$$f_{\text{Ф-Д}} = \frac{1}{e^{\frac{E - (0)}{k_B T}} + 1}$$

При  $E < (0)$   $f = 1$ , коли  $E > (0)$ ,  $f = 0$ .

На рис. 11.2 зображено графік функції  $f(E)$  при  $T = 0$ . Очевидно, що тут всі енергетичні стани рівномірно заповнені по одному електрону в кожному стані до максимальної енергії —

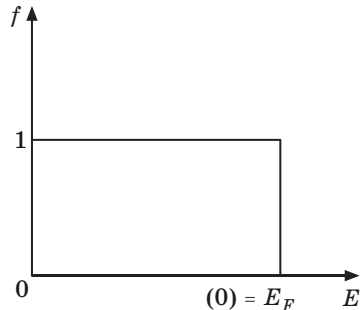


Рис. 11.2

енергії Фермі  $E_F = (0)$ . Тоді розподіл Фермі — Дірака можна записати

$$f_{\text{Ф-Д}} = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \quad (11.15)$$

### 11.5. Розподіл електронів провідності за енергіями в металі

Кількість електронів в металі об'ємом  $V$ , енергія яких лежить в інтервалі від  $E$  до  $E + dE$ , дорівнює

$$dN = 2f_{\text{Ф-Д}} dG(E) = 2f_{\text{Ф-Д}} g(E)dE,$$

де 2 — за рахунок спіна,  $dG(E)$  — кількість станів з енергією у межах від  $E$  до  $E + dE$  (11.9):

$$dG(E) = g(E)dE = \frac{2}{h^3} V (2m_e)^{3/2} \sqrt{E} dE.$$

Розподіл електронів за енергіями, тобто кількість електронів, що припадає на одиничний інтервал енергії, дорівнює

$$\frac{dN}{dE} = \frac{4}{h^3} V \frac{(2m_e)^{3/2} \sqrt{E}}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \quad (11.16)$$

При  $T = 0$  К, коли  $f = 1$ , цю функцію зображено на рис. 11.3. Розрахуємо кількість електронів в одиниці об'єму ( $V = 1$ ), енергія яких знаходиться в інтервалі від 0 до  $E_F$ .

$$n = \frac{N}{V} = \frac{4}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE = \frac{4}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{3} E_F^{3/2}. \quad (11.17)$$

Якщо розрахувати середнє значення енергії електрона провідності, то наближено воно дорівнює

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F. \quad (11.18)$$

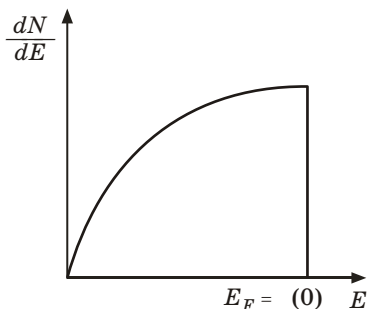


Рис. 11.3

При  $n \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$  одержимо  $E_F \approx 10^{-18} \text{ Дж} \approx 6 \text{ еВ}$ , а середнє значення енергії  $\langle E \rangle \approx 6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 3,5 \text{ еВ}$ .

Якщо порівняти цю енергію зі середньою енергією молекули невідродженого одноатомного газу

$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ , яка при кімнатній температурі дорівнює  $\sim 4 \cdot 10^{-21}$  Дж  $\approx 0,03$  еВ, то можна одержати приблизне значення температури виродження  $T_B$

$$\frac{3}{5} E_F \approx \frac{3}{2} k_B T_B,$$

звідки

$$T_B \approx \frac{2}{5} \frac{E_F}{k_B}, \quad T_B \approx 10^4 \text{ К}$$

( $k_B$  — стала Больцмана), звідки випливає, що  $\frac{k_B T}{E_F} \ll 1$ .

Тобто, як уже згадувалось в розділі 11.2, електронний газ в металах завжди вироджений.

Температура  
відмінна від  
нуля

Квантовий розподіл Фермі — Дірака дуже мало змінюється при зростанні температури. Як це видно з рис. 11.4, при  $T > 0$  К функція розподілу  $f$  плавно змінюється від 1 до 0, проходячи через значення  $1/2$ , що відповідає  $E_F = 0$ . Замість вертикального стрибка (пунктир) при  $T = 0$  зниження відбувається на інтервалі  $\sim 2k_B T$  на хвості функції розподілу. Це означає, що тільки дуже мала частина електронів збуджується і переходить на більш високі рівні енергії. Наприклад при кімнатній температурі  $T = 300$  К в тепловому русі приймає участь тільки приблизно 1 % від загального числа електронів. Саме ці електрони можна розглядати як класичні частинки, кожна з яких має теплову енергію  $\frac{3}{2} k_B T$ . Такі електрони беруть участь у тепловому русі, безперервно переходячи рівень Фермі в прямому і зворотному напрямках.

В цьому випадку всі квантові стани нижче рівня Фермі, для яких  $-E \gg k_B T$  заповнені електронами, як і при  $T = 0$ .

Значення хімічного потенціалу ( $T$ ) можна знайти за умови збереження повного числа частинок. Ця залежність має вигляд

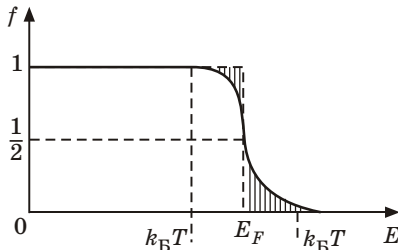


Рис. 11.4

$$(T) = E_F \left[ 1 - \frac{2}{12} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right]. \quad (11.19)$$



Для всіх температур, відповідаючих твердому та рідкому стану металу,  $k_B T \ll E_F$ , тому  $(T)$  майже не відрізняється від  $E_F$  і параметр виродження електронного газу

$$A = \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) \gg 1,$$

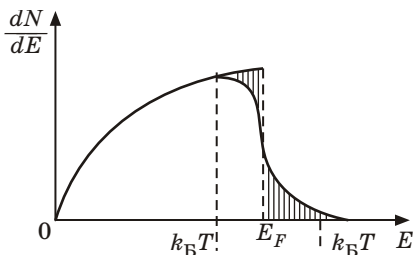


Рис. 11.5

що ще раз підтверджує виродження електронного газу в металі. Розподіл електронів за енергіями також зазнає спотворення тільки поблизу верхньої границі (рис. 11.5) на інтервалі  $\sim 2k_B T$ .

### 11.6. Елементи квантової теорії електропровідності металів

Квантова теорія електропровідності металів була створена на основі теорії Друде — Лоренца з залученням квантової статистики Фермі — Дірака.

Електрони в металі знаходяться всередині потенціального ящика (рис. 11.6), де вони попарно заповнюють дозволені енергетичні рівні, починаючи з дна потенціальної ями. Максимальна енергія, яку можуть мати електрони, відповідає рівню Фермі — верхній енергетичний рівень, зайнятий електронами.

Зовні потенціальної ями енергія електронів дорівнює нулю. Для того щоб електрон покинув метал, він повинен виконати роботу  $A$  — роботу виходу, яка відраховується від рівня Фермі.

Щоб з'явився електричний струм, потрібне існування зовнішнього електричного поля, завдяки якому на хаотичний тепловий рух електронів накладається впорядкований рух. Збільшення енергії електронів в електричному полі супроводжується їх переходом на близькі вільні енергетичні рівні — виникає електричний струм в напрямку зовнішнього електричного поля.

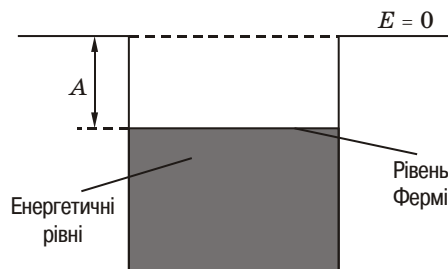


Рис.11.6

Закон Ома, доведений з квантової точки зору, має той же вигляд, що і закон Ома, одержаний з класичної точки зору

$$\vec{j} = \vec{E},$$

де  $\vec{j}$  — густина струму,  $\vec{E}$  — напруженість електричного

поля  $i$  — питома електропровідність, яка в квантовій теорії металів має вигляд

$$= \frac{ne^2 \langle u_F \rangle}{m_e \langle u_F \rangle}. \quad (11.20)$$

Тут  $n$  — концентрація електронів,  $e$  — заряд електрона,  $m_e$  — його маса,  $\langle u_F \rangle$  — середня довжина вільного пробігу електрона, який має енергію, рівну енергії Фермі,  $\langle u_F \rangle$  — середня швидкість такого електрона.

Незважаючи на зовнішню подібність цієї формули з її класичним аналогом (див. «Загальну фізику» ч. II, розділ 5), є суттєва різниця в тлумаченні  $\langle u \rangle$  і  $\langle u \rangle$ . З класичної точки зору  $\langle u \rangle$  — середня довжина вільного пробігу електрона.

З квантової точки зору рух електронів провідності — це процес поширення хвиль де Бройля. Електрони провідності повинні проходити крізь кристалічну решітку з нерухомими іонами вільно, без розсіяння на вузлах решітки, тобто без опору електричному струму. Розсіяння електронних хвиль і пов'язаний з ним опір провідника виникають при наявності дефектів решітки з розмірами  $d$ , більшими за довжину хвиль де Бройля  $d > \lambda$ . Це розсіяння і є причиною наявності електричного опору у чистих металах. Ці дефекти решітки (центри розсіяння) являються, в основному, флуктуаціями густини, що з'являються в результаті теплових коливань вузлів решітки. Розрахунки показали, що довжина вільного пробігу  $\langle u_F \rangle$  дорівнює

$$\langle u_F \rangle = \frac{E_{\text{Ю}} d}{nk_B T}. \quad (11.21)$$

де  $E_{\text{Ю}}$  — модуль Юнга,  $d$  — стала решітки,  $n$  — концентрація електронів,  $k_B$  — стала Больцмана,  $T$  — температура.

Якщо підставити (11.21) в (11.20), одержимо

$$= \frac{e^2 E_{\text{Ю}} d}{m_e \langle u_F \rangle k_B T}. \quad (11.22)$$

Очевидно, що  $\rho = 1/T$ , тоді питомий опір  $\rho = 1/\sigma \sim T$ , що добре узгоджується з експериментом на відміну від класичної теорії, за якою  $\rho \sim \sqrt{T}$ .

Іншою причиною розсіяння електронних хвиль і електричного опору металів є наявність домішок в кристалічній решітці.

В результаті питомий опір металу складається з двох частин:

$$= \phi + \rho_d,$$

де  $\phi$  — питомий опір, пов'язаний з розсіянням електронів на флуктуаціях густини, і  $\rho_d$  — питомий опір, обумовлений розсіянням на домішках.

$\rho_d$  не залежить від температури і коли  $T \rightarrow 0$ ,  $\phi \rightarrow 0$ , тоді  $\rho \approx \rho_d$ , що має назву залишкового питомого опору (рис. 11.7).

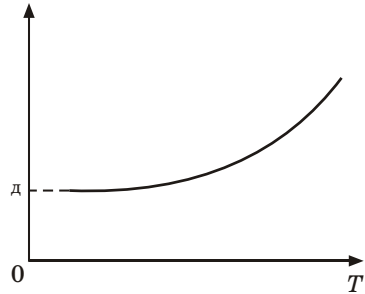


Рис. 11.7

**Електронна  
теплоємність**

Згідно з емпіричним законом Дюлонга і Пті молярна теплоємність твердого тіла дорівнює  $3R$ :

$$C_V = 3R,$$

де  $R$  — універсальна газова стала.

Цю формулу легко одержати при застосуванні теореми про рівнорозподіл енергії за ступенями свободи, яка відома з молекулярної кінетичної теорії.

За класичною електронною теорією молярна теплоємність металу повинна складатись з теплоємності іонної кристалічної решітки, яка дорівнює  $3R$ , і теплоємності електронного газу, що дорівнює  $\frac{i}{2}R$  ( $i=3$  — кількість ступенів вільності електрона). Тобто молярна теплоємність металу повинна дорівнювати  $\frac{9}{2}R$ . Але з експериментів відомо, що молярна теплоємність металів і діелектриків майже однакова і дорівнює  $3R$ .

Це явище досить легко пояснюється, якщо взяти до уваги, що електронний газ є виродженим і в тепловому русі бере участь тільки дуже мала частина електронів провідності, тобто тільки електрони, що знаходяться біля рівня Фермі. Тому молярна теплоємність цих електронів набагато менша, ніж молярна теплоємність кристалічної решітки, і вкладом електронів у загальну теплоємність металів можна знехтувати. Цим і розв'язуються труднощі, що виникли в класичній теорії металів щодо їх теплоємності.

### 11.7. Квантові явища при низьких температурах

**Надпровідність**

Явище надпровідності вперше спостерігав Х. Камерлінг-Оннес у 1911 році при дослідженні питомого опору чистої ртуті при низьких температурах. При температурі  $T = 4,15$  К спостерігалось різке падіння опору

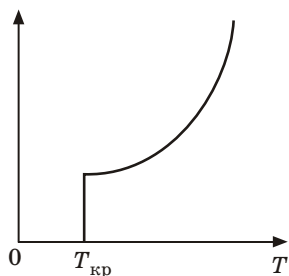


Рис. 11.8

(рис. 11.8), при цьому струм, створений в замкнутому провіднику, продовжував йти без зменшення кількка років без зовнішньої ЕРС. Такі метали одержали назву *надпровідників*.

Надпровідність спостерігається у 27 металів і більше ніж у тисячі металічних сполук і сплавів. Температура, при якій відбувається це явище, так звана *критична температура*  $T_{кр}$ , для різних надпровідників змінюється від 0,1 до

20 К. Наприклад, для вольфраму  $T_{кр} = 0,1$  К, для цинку  $T_{кр} = 0,85$  К, для алюмінія  $T_{кр} = 1,2$  К, для свинця 7,2 К, для ртуті — 4,15 К.

При температурі вище критичної  $T > T_{кр}$  надпровідники втрачають свої виняткові властивості і перетворюються на звичайні метали. Очевидно, що надпровідність — це винятковий стан, який відрізняється від нормального стану. При  $T = T_{кр}$  відбувається фазовий перехід від нормальної у надпровідну фазу. Це фазовий перехід другого роду, при якому кристалічна структура не змінюється, не спостерігається ні виділення, ні поглинання тепла, проте відбувається стрибок електронної теплоємності метала.

**Надпровідники  
в магнітному  
полі**

Явище руйнування надпровідного стану магнітним полем було виявлене у 1914 р. Камерлінг-Оннесом. При цьому напруженість поля  $\vec{H}$  повинна перевищувати деяке *критичне*

значення  $H_{кр}$ , яке залежить від природи провідника і його температури (рис. 11.9).

При проходженні сильного струму по надпровіднику може також виникати *критичне магнітне поле*, при якому надпровідність зникне. Таке значення струму має назву *критичного струму*. Кожній температурі відповідає певне значення критичного магнітного поля і струму.

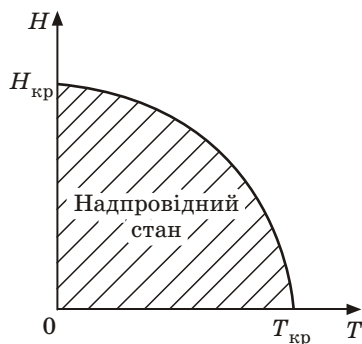


Рис. 11.9

Таким чином можна зробити *висновок, що надпровідність металу може руйнуватися великим магнітним полем, сильним струмом и зростанням температури*.

**Ефект  
Мейсснера**

В 1933 р. німецькі фізики В. Мейсснер і Р. Оксенфельд відкрили, що зовнішнє магнітне поле напруженістю  $H < H_{кр}$  не проникає всередину надпровідника, а виштовхується з нього і магнітна індукція всередині обертається на нуль. У надпровідника спостерігається нульова магнітна проникність ( $\mu = 0$ ), тобто він *ідеальний діаманетик*. Це явище одержало назву *ефекта Мейсснера*.

Ефект Мейсснера пояснюється тим, що в слабкому магнітному полі, напрямленому вздовж осі надпровідника, в поверхневому шарі провідника товщиною  $10^{-7} - 10^{-8}$  м створюються колові незгадаючі струми, які своїм магнітним полем повністю компенсують магнітне поле всередині надпровідника. Таким чином зовнішнє магнітне поле проникає тільки на глибину поверхневого шару, в якому проходять струми.

**Природа  
надпровідності**

Пояснення ефекту надпровідності було дано тільки в 1957 р. (через 46 років після його відкриття), коли Бардін, Купер і Шриффер створили квантово-механічну теорію надпровідності (теорія БКШ).

Суттєвою характерною рисою надпровідних металів є існування у них деякої частини електронів провідності у вигляді так званої «надплинної рідини», яка може рухатись через кристал як єдине ціле без опору.

Пояснимо це з точки зору теорії БКШ. За цією теорією електрон, який рухається в кристалічній решітці, завдяки поляризації змінює характер коливань решітки, при цьому збуджується фонон (квант збудження решітки), який поглинається іншим електроном. Ця додаткова взаємодія між електронами носить характер притягання. Ця взаємодія найбільш сильна у електронів з протилежно напрямленими імпульсами і спінами. Такі два електрона, що перебувають поблизу рівня Фермі, створюють зв'язану *куперовську пару*, яка представляє собою бозе-частинку з нульовим значенням спіна, електричним зарядом  $-2e$  і невеликою енергією зв'язку. Це і буде так звана «надпровідна рідина».

Зауважимо, що відстань між електронами в парі досить велика  $\sim 10^{-4}$  см, тому приблизно  $10^6$  куперовських пар перекриваються, тобто заповнюють весь об'єм. При температурі, вищій за критичну, надпровідний стан неможливий. При зменшенні температури  $T < T_{кр}$  поряд зі «звичайними» електронами з'являються куперовські пари, кількість яких збільшується при наближенні температури до 0 К.

Створення куперовських пар пов'язано зі змінами в енергетичному спектрі метала, який вже не буде безперервним.

В енергетичному спектрі електронів в надпровідному стані поблизу рівня Фермі існує щілина шириною  $E_{зв}$ . Ця енергія ( $E_{зв}$ ) — енергія зв'язку електронів в парі, і є мінімальною енергією, яку можуть сприйняти електрони в надпровіднику. Квантові переходи електронної системи не відбуваються при малих збудженнях, менших ширини енергетичної щілини. Це означає, що при співударі електронів з вузлами кристалічної решітки не змінюється енергія електронів, тобто електричний опір відсутній.

**Квантування  
магнітного  
потoku**

Якщо розглянути надпровідне кільце з циркулюючим по ньому струмом, то магнітний потік  $\Phi$ , створений цим струмом, повинен квантуватися, тобто бути цілим, кратним величині

$2 \hbar/q$ , де  $q$  — заряд носія струму:

$$= n \frac{2 \hbar}{q},$$

де  $\Phi_0 = 2 \hbar/q$  — квант магнітного потоку.

В експериментах було показано, що за заряд  $q$  треба взяти подвійний заряд електрона ( $q = -2e$ ), що служить додатковим підтвердженням теорії БКШ.

**Ефект  
Джозефсона**

В 1962 р. на основі теорії надпровідності Б. Джозефсон передбачив явище, яке було експериментально виявлене в 1963 р. і одержало

назву *ефекта Джозефсона*.

Цей ефект полягає в проходженні надпровідного струму (без джерела струму) крізь тонкий шар діелектрика, що розділяє два надпровідника. Зазвичай цей шар — плівка окису метала товщиною  $\sim 1$  нм і має назву *контакта Джозефсона*. При цьому електрони провідності проходять через діелектрик завдяки тунельному ефекту.

Розрізняють *стаціонарний і нестаціонарний ефекти Джозефсона*.

*Стаціонарний ефект* спостерігається за умови, що струм крізь контакт Джозефсона не перевищує певного значення — *критичного струму контакта*. В цьому випадку немає падіння напруги на контакті.

*Нестационарний ефект Джозефсона* виникає, якщо струм через контакт перевищує критичне значення. В цьому випадку на контакті з'являється падіння напруги  $U$  і контакт випромінює електромагнітні хвилі з частотою  $\omega = 2eU/\hbar$ .

Тобто при постійному падінні напруги на контакті проходить змінний струм. Пояснення цього ефекту полягає в тому, що електронна пара, при проходженні через контакт, набуває додаткову енергію по відношенню до енергії основного стану надпровідника. Повертаючись в основний стан, електронна пара випромінює квант частотою  $= 2eU / h$ .

Подвійний заряд електрона у виразі для частоти є експериментальним підтвердженням існування електронних пар в надпровідниках.

Ефект Джозефсона застосовується для створення надточних приладів для вимірювання малих струмів (до  $10^{-10}$  А), напруг (до  $10^{-15}$  В), магнітних полів (до  $10^{-18}$  Тл) та інше.

<b>Високотемпературна надпровідність</b>
--

Протягом цілого ряду десятиріч наука мала справу з надзвичайно низькими критичними температурами переходу в надпровідний стан. Навіть у технеція, який має найвищу серед чистих металів критичну температуру переходу, вона дорівнює тільки 11,2 К.

Така наднизька критична температура дуже стримувала застосування надпровідників на практиці, завдяки необхідності створення складних криогенних установок і великих витрат на переведення металів в стан надпровідності.

Навесні 1986 р. Беднорц і Мюллер сповістили про відкриття надпровідності в сполуці оксиду лантана, барія та міді (так звана метало-оксидна кераміка) з критичною температурою  $\sim 33$  К. Таким чином був відкритий новий клас речовин, здатний переходити в надпровідний стан при більш високих температурах.

Через півроку Чу одержав сполуку оксиду барію, іттрію і міді з  $T_{кр} > 90$  К, тобто з критичною температурою, вищою за точку кипіння азоту (77 К).

На даний час відомо більше 50 сполук з високою критичною температурою. Найвищу  $T_{кр} = 135$  К має сполука  $HgBa_2Cu_3O_{8+x}$ , відкрита у 1993 р. М. С. Путилїним і Є. В. Антиповим із МДУ (Москва).

Дослідження цих сполук дуже складне внаслідок складної технології їх одержання і непередбаченості результатів. Теорії високотемпературної надпровідності досі не існує.

Восени 1987 р. Беднорцу і Мюллеру за відкриття високотемпературної надпровідності була присуджена Нобелівська премія з фізики.

Нині ведуться пошуки нових матеріалів, здатних переходити у стан надпровідності при звичайних температурах, що матиме дуже важливе значення для науково-технічного прогресу.

#### **Застосування надпровідності**

Спектр застосування надпровідників зручно поділити на відносно малопотужну електроніку (кріоелектроніка), а також силове застосування (кріоенергетика).

Ці два напрями дуже різні і практично не стикаються.

Базою силових елементів є провідники довжиною більше кілометра, що проводять великий струм.

Застосування надпровідних матеріалів дозволить зменшити енерговтрати і скоротити масу і габарити обладнання. Але на даний момент використання надпровідників для передачі енергії не ефективно внаслідок дорожнечі. Незважаючи на це, вони дуже широко застосовуються для одержання великих магнітних полів для роботи магнітоплазмених генераторів, а також при створенні установок керованого ядерного синтезу (магнітні поля порядку декілька тисяч ерстед). Висока густина струму в надпровідниках дозволяє зменшити розміри устаткування при застосуванні їх для виробництва різного типу моторів та генераторів.

Розглядається також можливість використання надпровідників для акумулювання електроенергії, в магнітній гідродинаміці, а також для магнітної левітації в транспорті.

В кріоелектроніці використовуються властивості переходу Джозефсона, тобто квантування магнітного потоку. Цей ефект дуже важливий при створенні швидкодіючих елементів для комп'ютерних технологій, де надпровідні елементи можуть забезпечити дуже малий час переключення і незначні втрати потужності.

Крім того, на основі надпровідників створюються прилади, що рееструють дуже малі зміни електричного і магнітного полів тощо.

Збільшення критичної температури надпровідників дозволить ще інтенсивніше їх застосовувати в науці і техніці.

#### **Контрольні запитання та завдання для самоперевірки**

1. Чим принципово відрізняються квантові статистики від класичних?
2. Виходячи з розподілів Бозе — Ейнштейна і Фермі — Дірака одержати розподіл Максвелла — Больцмана.
3. Поясніть за яких умов до електронів в металі застосовується:  
а) класична статистика; б) квантова статистика.
4. Поясніть фізичний смисл енергії Фермі, рівня Фермі.



5. Поясніть, чому роботу виходу електрона з металу треба відрахувати від рівняння Фермі, а не від дна «потенціальної ями», як це робиться в класичній теорії.
6. Що таке фазовий простір? Фазовий об'єм?
7. Що відбувається з енергетичним спектром вільних електронів при збільшенні числа  $N$  атомів кристала в разів?
8. Що відбувається з інтервалом  $E$  між сусідніми рівнями енергії вільних електронів в металі при збільшенні об'єму метала в 3 рази?
9. Визначте кількість вільних електронів, що знаходяться в середньому на рівні енергії, що дорівнює енергії Фермі.
10. Яка різниця між квантовими статистиками Фермі — Дірака та Бозе — Ейнштейна?
11. Які властивості має вироджений електронний газ в металі?
12. Як пояснюється мала теплоємність електронного газу в металах?
13. Чим відрізняється квантова теорія електропровідності металів від класичної?
14. Як пояснюється залежність питомої електропровідності від температури з точки зору квантової теорії?
15. Яка суть явища надпровідності?
16. Поясніть фізичні основи теорії явища надпровідності.
17. В чому суть ефекту Мейсснера і як він пояснюється?
18. В яких випадках спостерігаються стаціонарний і нестаціонарний ефекти Джозефсона?
19. Коли і як спостерігається квантування магнітного потоку?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Натрій — одновалентний метал з густиною  $\rho = 0,97 \text{ кг/см}^3$  і молярною масою  $M = 23 \text{ г/моль}$ . Виходячи з цих даних, знайти:  
 а) концентрацію електронів провідності; б) енергію Фермі;  
 в) фермієвську швидкість для електронів.

#### *Розв'язання*

а) Беручи до уваги, що Na — одновалентний, можна зробити висновок, що на кожний атом припадає один електрон провідності. Тоді кількість атомів в одиниці об'єму дорівнює концентрації електронів  $n$  і

$$n = \frac{N_A}{M},$$

де  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> — число Авогадро,

$$n = \frac{0,97 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{23 \cdot 10^{-3}} = 2,54 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} = 2,54 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

б) Знаючи концентрацію електронів провідності, легко знайти енергію Фермі

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{2/3},$$

де  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — маса електрона,

$$E_F = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \left( \frac{3 \cdot 2,54 \cdot 10^{28}}{3,14} \right)^{2/3} = 5,05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 3,15 \text{ еВ}.$$

в) Фермієвську швидкість знаходимо за умови

$$E_F = \frac{m_e v_F^2}{2}$$

звідки

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}}.$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,05 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,05 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

### Задача 2

Знайти вираз для інтервалу  $E$  між сусідніми рівнями енергії вільних електронів в металі. Об'єм зразка  $V$ . Енергія електронів  $E$ .

#### Розв'язання

Кількість станів, що припадають на одиничний інтервал енергії (густина станів), дорівнює

$$g(E) = \frac{4 V (2m_e)^{3/2}}{h^3} E^{1/2},$$

де  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — маса електрона.

Тоді інтервал  $E$  між сусідніми рівнями енергії вільних електронів дорівнює

$$E = \frac{1}{g(E)};$$

$$E = \frac{h^3}{4 V(2m_e)^{3/2} E^{1/2}}.$$

### Задача 3

Електрон рухається в тривимірному кубічному ящику з ребром  $L$  і об'ємом  $L^3$ . Якщо хвильова функція частинки  $= A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$ , знайти його енергію.

#### Розв'язання

Хвильова функція на границях куба  $x=0$  і  $x=L$  дорівнює 0. Тоді

$$\begin{aligned} \sin k_x L &= 0; & k_x L &= n_x ; \\ \sin k_y L &= 0; & k_y L &= n_y ; \\ \sin k_z L &= 0; & k_z L &= n_z ; \end{aligned}$$

$$= A \sin\left(\frac{n_x x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z z}{L}\right).$$

З рівняння Шредінгера маємо

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}(E-U) = 0.$$

Всередині  $U=0$ , тоді

$$\left( \frac{n_x^2}{L^2} - \frac{n_y^2}{L^2} - \frac{n_z^2}{L^2} \right) = \frac{2m_e}{\hbar^2}(-E) ;$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2); \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

Зовні ящика  $= 0$ .

Стан з мінімальною енергією всередині ящика при  $n_x = n_y = n_z = 1$ , тобто

$$E = \frac{3\hbar^2}{2m_e L^2}.$$

#### Задача 4

Зразок металу об'ємом  $V = 10 \text{ см}^3$  знаходиться при  $T = 0$ . Визначити число вільних електронів  $N$ , імпульси яких відрізняються від максимального імпульсу  $p_{\text{max}}$  не більше ніж на  $0,15p_{\text{max}}$ . Енергія Фермі  $E_F = 5 \text{ еВ}$ .

#### Розв'язання

Запишемо кількість станів, які може мати квантова частинка з імпульсом в інтервалі від  $p$  до  $p + dp$ :

$$g(p)dp = \frac{4}{h^3} V p^2 dp.$$

Тоді кількість електронів в об'ємі  $V$  з імпульсами від  $p$  до  $p + dp$ , дорівнює

$$dn(p) = 2f_{\text{Ф-Д}} g(p)dp$$

(тут двійка за рахунок двох напрямків спіну для ферміонів). Функція розподілу Фермі — Дірака при  $T = 0$

$$f_{\text{Ф-Д}} = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} = 1,$$

тоді

$$dn(p) = \frac{8}{h^3} V p^2 dp.$$

Кількість електронів в об'ємі  $V$ , імпульси яких знаходяться в інтервалі в  $(p_{\text{max}} - 0,15p_{\text{max}})$  до  $p_{\text{max}}$ , знайдемо інтегруванням

$$N = \frac{8}{h^3} V \int_{0,85p_{\text{max}}}^{p_{\text{max}}} p^2 dp = \frac{8}{h^3} V p_{\text{max}}^3 (1 - 0,85^3);$$

$$N = \frac{1,64}{h^3} V p_{\text{max}}^3.$$

Максимальне значення імпульсу — це фермієвський імпульс  $p_F = p_{\text{max}}$ , який легко одержати, знаючи енергію Фермі:

$$E_F = \frac{p_{\max}^2}{2m_e}, \quad p_{\max} = \sqrt{2m_e E_F},$$

звідки

$$N = \frac{1,64}{h^3} V (2m_e E_F)^{3/2},$$

$$N = \frac{1,64 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}}{(6,62 \cdot 10^{-34})^3} \cdot (2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})^{3/2} =$$

$$= 3,1 \cdot 10^{23} \text{ електронів}$$

$$N = 3,1 \cdot 10^{23} \text{ електронів}$$

### Задачі для самостійного розв'язання

11.1. Знайти при  $T=0$ : а) максимальну кінетичну енергію вільних електронів в металі, якщо їх концентрація дорівнює  $n$ ; б) середню кінетичну енергію вільних електронів, якщо їх максимальна кінетична енергія дорівнює  $E_{\max}$ .

$$\text{Відповідь: а) } E_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} (3/2 n)^{2/3}; \text{ б) } \langle E \rangle = \frac{3}{5} E_{\max}.$$

11.2. Знайти відносне число вільних електронів в металі, енергія яких відрізняється від енергії Фермі не більше ніж на  $= 1\%$  при температурі метала  $T=0$ .

$$\text{Відповідь: } \frac{n}{n} = \frac{3}{2} = 0,015.$$

11.3. Який відсоток вільних електронів в металі при  $T=0$  має кінетичну енергію, більшу за половину максимальної?

$$\text{Відповідь: } = 1 - 2^{-3/2} \approx 0,65.$$

11.4. Знайти число вільних електронів, що припадають на один атом натрію при  $T=0$ , якщо рівень Фермі  $E_F = 3,07$  еВ. Густина натрію  $970$  кг/м<sup>3</sup>.

$$\text{Відповідь: } n \approx 0,93.$$

11.5. До якої температури треба було б нагріти класичний електронний газ, щоб середня енергія його електронів дорівнювала середній енергії вільних електронів у міді при  $T=0$ ? Вважати, що на кожний атом міді припадає один вільний електрон.

$$\text{Відповідь: } T \approx 3 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

**11.6.** Розрахувати інтервал (в електрон-вольтах) між сусідніми рівнями вільних електронів в металі при  $T=0$  поблизу рівня Фермі, якщо концентрація вільних електронів  $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  і об'єм металу  $V = 1 \text{ см}^3$ .

*Відповідь:*  $E = 2 \cdot 10^{-22} \text{ еВ}$ .

**11.7.** Знайти при  $T = 0$  а) розподіл вільних електронів за швидкостями; б) відношення середньої швидкості вільних електронів до їх максимальної швидкості.

*Відповідь:* а)  $dn_v = \left( \frac{m_e^3}{2\hbar^2} \right) v^2 dv$ ; б)  $\frac{\langle v \rangle}{v_{\max}} = \frac{3}{4}$ .

**11.8.** Знайти середню енергію електронів при  $T = 0$ , якщо їх концентрація в металі  $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ .

*Відповідь:*  $\langle E \rangle = 7,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,8 \text{ еВ}$ .

**11.9.** Розрахувати енергію електрона на рівні Фермі, якщо концентрація електронів в металі  $n = 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

*Відповідь:*  $E_F \approx 1,15 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

**11.10.** Порівняйте максимальну енергію електрона для верхнього заповненого при  $T = 0$  енергетичного рівня метала з енергією електрона на рівні Фермі при звичайній температурі.

*Відповідь:*  $\frac{E_{\max}}{E_F} = 4,6$ .

**11.11.** Розрахуйте параметр виродження енергетичних рівнів в металі при температурі  $T = 300 \text{ К}$ , якщо концентрація електронів  $n = 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

*Відповідь:*  $A \approx 9,1 \cdot 10^{-13}$ .

**11.12.** Чому дорівнює інтервал  $E$  між сусідніми рівнями енергії вільних електронів в металі? Об'єм зразка  $V = 1 \text{ см}^3$ , енергія електронів  $E = 0,1 \text{ еВ}$ .

*Відповідь:*  $E = 4,7 \cdot 10^{-22} \text{ еВ}$ .

**11.13.** Вважаючи об'єм зразка метала  $V = 2 \text{ см}^3$ , розрахуйте інтервал  $E$  (в еВ) між сусідніми рівнями енергії вільних електронів для значень енергії: а)  $E = 0,1 \text{ еВ}$ ; б)  $E = 1 \text{ еВ}$ ; в)  $E = 3 \text{ еВ}$ ; г)  $E = 5 \text{ еВ}$ .

*Відповідь:*  $E =$  а)  $2,35 \cdot 10^{-22} \text{ еВ}$ ; б)  $0,75 \cdot 10^{-22} \text{ еВ}$ ; в)  $0,425 \cdot 10^{-22} \text{ еВ}$ ; г)  $0,33 \cdot 10^{-22} \text{ еВ}$ .

**11.14.** Якщо на кожний атом міді припадає один вільний електрон, знайти: а) рівень Фермі при абсолютному нулі  $E_F(0)$ ; б) середню кінетичну енергію  $\langle E \rangle$  вільних електронів при  $T=0$ ; в) температуру  $T$ , при якій середня кінетична енергія електронів класичного електронного газу рівнялась би середній енергії вільних електронів в міді при  $T=0$ .

*Відповідь:* а)  $E_F(0) = 7,04$  еВ б)  $\langle E \rangle = 4,23$  еВ в)  $T = 3,27 \cdot 10^4$  К.

**11.15.** Яка частина вільних електронів в металі має при  $T=0$  кінетичну енергію, вищу за середню енергію?

*Відповідь:*  $= 0,54$ .

**11.16.** Розрахувати концентрацію  $n$  вільних електронів в металі при  $T=0$ . Енергію Фермі вважати рівною 1 еВ.

*Відповідь:*  $n = 4,57 \cdot 10^{27}$  м<sup>-3</sup>.

**11.17.** Визначте відношення концентрацій  $n_1/n_2$  вільних електронів при  $T=0$  в літій і цезії, якщо рівні Фермі в цих металах дорівнюють  $E_{F_1(\text{Li})} = 4,72$  еВ;  $E_{F_2(\text{Cs})} = 1,53$  еВ.

*Відповідь:*  $\frac{n_1}{n_2} = 5,41$ .

**11.18.** У скільки разів кількість вільних електронів, що припадає на один атом метала при  $T=0$ , більше в алюмінії, ніж у міді, якщо рівні Фермі дорівнюють відповідно  $E_{F_1(\text{Al})} = 11,7$  еВ;  $E_{F_2(\text{Cu})} = 7,0$  еВ.

*Відповідь:*  $\frac{N_1}{N_2} = 3$ .

**11.19.** Метал знаходиться при температурі  $T=0$ . Знайти, у скільки разів кількість електронів  $N_1$  з кінетичною енергією від  $E_F/2$  до  $E_F$  більше кількості електронів  $N_2$  з енергією від 0 до  $E_F/2$ .

*Відповідь:*  $\frac{N_1}{N_2} = 1,83$ .

**11.20.** Оцінити температуру  $T_{\text{вир}}$  виродження для калію, якщо прийняти, що на кожний атом приходить по одному вільному електрону. Густина калію  $= 860$  кг/м<sup>3</sup>.

*Відповідь:*  $T_{\text{вир}} = 3,12 \cdot 10^4$  К.

**11.21.** Яка частина електронів провідності у сріблі має енергію, вищу за енергію Фермі при температурі плавлення  $T_{\text{пл}}$ ? (Для срібла  $T_{\text{пл}} = 1234$  К;  $E_F = 5,48$  еВ.)

*Відповідь:*  $= 2$  %.

**11.22.** Енергія Фермі для срібла  $E_F = 5,48$  еВ, густина срібла  $10,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> і атомна маса 108. Виходячи з цих даних покажіть, що срібло має один вільний електрон на атом.

**11.23.** Знайдіть швидкість електронів провідності в міді  $v$ , вважаючи, що їх кінетична енергія дорівнює енергії Фермі  $E_F = 7,05$  еВ. Порівняйте цю швидкість з дрейфовою швидкістю електронів  $v_{др} \approx 0,1$  мм/с.

*Відповідь:*  $v = 1,57 \cdot 10^6$  м/с, різниця з  $v_{др} \approx 10$  порядків.

**11.24.** Розрахуйте енергію електрона провідності в сріблі при  $T = 800$  К, якщо ймовірність його знаходження в цьому стані 0,95. Енергія Фермі при цій температурі 5,48 еВ.

*Відповідь:*  $E = 5,28$  еВ.

**11.25.** Розрахувати число електронів провідності  $N$  для зразка золота у вигляді куба з ребром 1 мм, енергія яких лежить в інтервалі від 4,000 до 4,025 еВ.

*Відповідь:*  $N = 3,40 \cdot 10^{17}$  електронів.



# 12 Теплові властивості твердих тіл

Тверде тіло складається з щільно укладених атомів, іонів або молекул, близьке розташування яких обумовлює характерні особливості цього стану речовини.

Більшість твердих тіл має *кристалічну структуру*. Атоми, іони або молекули, з яких вони складаються, утворюють правильні трьохвимірні ґратки, комірки яких повторюються в просторі. Наявність *далекого порядку* — визначаюча властивість кристала. Відсутність далекого порядку визначає переохолоджену рідину, яка має дуже велику в'язкість. Це — *аморфні тіла*. Аморфні тіла мають *близький порядок*. Різниця між двома видами порядку дуже добре виявляється у випадку триоксиду бору  $B_2O_3$ , який зустрічається як у кристалічному, так і в аморфному стані.

В обох випадках кожен атом бору оточують три атоми кисню, що характеризує близький порядок. Але, якщо в аморфному  $B_2O_3$  проявляється тільки близький порядок (рис. 12.1, а), то в кристалічному  $B_2O_3$  є, крім того, і далекий порядок (рис. 12.1, б).

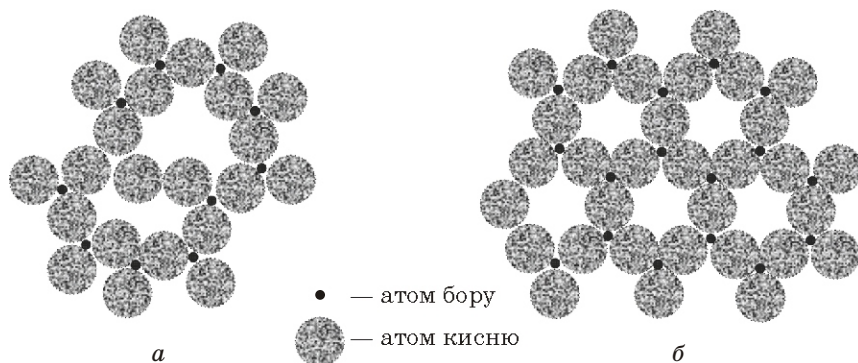


Рис. 12.1

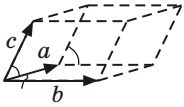
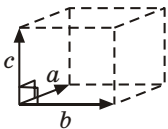
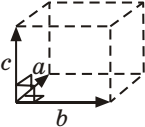
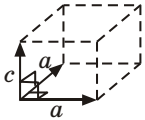
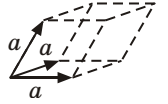
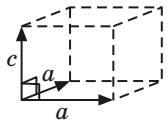
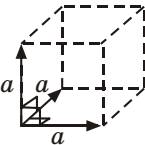
## 12.1. Класифікація кристалічних твердих тіл

Структура  
кристалів

Класифікацію кристалів можна провести за двома ознаками: 1) за структурою або 2) за типом зв'язку між атомами (іонами або молекулами).

Таблиця 12.1

### Кристаліграфічні системи

№ п/п	Кристаліграфічна система	Кристаліграфічна підсистема	Параметри елементарної комірки	Форма елементарної комірки
1.	Триклинна	—	$a \neq b \neq c$ $\neq \neq$	
2.	Моноклинна	Проста, базоцентрована	$a \neq b \neq c$ $= = 90^\circ \neq$	
3.	Орторомбічна	Проста, базоцентрована, об'ємцентрована гранецентрована	$a \neq b \neq c$ $= = = 90^\circ$	
4.	Тетрагональна	Проста, об'ємцентрована	$a = b \neq c$ $= = = 90^\circ$	
5.	Ромбоедрична (тригональна)	—	$a = b = c$ $= = \neq 90^\circ$	
6.	Гексогональна	—	$a = b \neq c$ $= = 90^\circ$ $= 60^\circ$	
7.	Кубічна	Проста, об'ємцентрована, гранецентрована	$a = b = c$ $= =$	

Класифікація кристалів за кристалографічними ознаками (структурою кристалів) заснована на розгляді просторової періодичності в розташуванні частинок. Тому можна відволіктися від внутрішньої структури частинок та сил взаємодії між ними.

Виділяється характерний структурний елемент — *елементарна комірка*. Шляхом повтору її у трьох різних напрямках можна скласти будь-яку просторову ґратку (ґратка Браве).

Всього існує 14 типів ґраток Браве. Вони розподіляються за сім'ю *кристалографічними системами* або *сингоніями*, які подані в порядку зростаючої симетрії в табл. 12.1. Елементарна кристалічна комірка — це паралелепіпед, побудований на ребрах  $a, b, c$  з кутами  $\alpha, \beta, \gamma$  між ними. Величини  $a, b, c$  та  $\alpha, \beta, \gamma$  називаються *параметрами елементарної комірки*.

Типи зв'язку в кристалах
-----------------------------

Важливу роль у формуванні властивостей кристалу відіграє природа частинок, розташованих у вузлах кристалічної ґратки, а також характер сил взаємодії між ними. За характером взаємодії та типом частинок (атоми, іони, молекули) кристали поділяються на 4 типи: іонні, атомні, металічні, молекулярні.

**1. Іонний зв'язок.** У вузлах кристалічної ґратки розміщуються по черзі іони протилежних знаків. Найбільш характерним іонним кристалом є кристал NaCl. Його ґратка — це дві однакові *гранецентровані* кубічні ґратки, вкладені одна в одну; у вузлах однієї знаходяться іони  $\text{Na}^+$ , а у вузлах іншої — іони  $\text{Cl}^-$ . Сили взаємодії між іонами переважно електростатичні (кулонівські). Зв'язок, обумовлений кулонівськими силами притягання між різноіменними іонами, називається *іонним* (або *гетерополярним*).

Для іонних кристалів характерно: велика енергія зв'язку; мала енергія іонізації; вони дуже крихкі; електропровідність зростає з ростом температури (у металів вона падає).

**2. Ковалентний зв'язок.** У вузлах кристалічної ґратки розміщуються нейтральні атоми. Зв'язок здійснюється валентними електронами, які належать одночасно двом сусіднім атомам. Два атоми при наближенні один до одного утворюють загальну електронну орбіту на яку віддають по одному електрону. Ця пара електронів належить обом атомам одночасно. Взаємне притягання атомів внаслідок існування загальної пари електронів і утворює *ковалентний* (або *гомеополярний зв'язок*). Кристали з ковалентним зв'язком називаються *ковалентними* (або *атомними*). Ковалентними є кристали алмазу та графіту. Енергія зв'язку у ковалентних кристалів нижча за енергію іонних кристалів; вони менш крихкі,

електропровідність дуже чутлива до температури. В залежності від температури вони можуть бути діелектриками або напівпровідниками.

**3. Металевий зв'язок.** У вузлах кристалічної ґратки розміщуються позитивні іони металу. При ковалентному зв'язку колективізація електронів локальна. При *металевому зв'язку* дуже високий ступінь колективізації. *Метал* — це іонна ґратка, занурена в електронний газ (рідину). Оскільки металевий зв'язок не має напрямленої дії, а позитивні іони ґратки однакові за своїми властивостями, то метали повинні мати симетрію високого порядку. Так воно і є. Більшість металів мають кубічну об'ємцентровану (Li, Na, K, Rb, Cs) та кубічну гранецентровану (Cu, Ag, Pt, Au) ґратки.

Енергія зв'язку металів не дуже велика; електропровідність електронна та дуже висока.

**4. Молекулярний зв'язок.** У вузлах кристалічної ґратки розміщуються нейтральні *молекули* речовини. Сили взаємодії між молекулами Ван-дер-Ваальсові, а зв'язок, ними обумовлений, називається *молекулярним*. Молекулярний зв'язок мають кристали парафіну, газу  $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  у твердому стані. Такі кристали утворюють скраплені неон, аргон та інші інертні газу.

## 12.2. Класична теорія теплоємності твердих тіл (кристалів)

У класичній теорії теплоємності кристалічне тверде тіло, що складається із  $N$  атомів (іонів), розглядається як система  $N$  не взаємодіючих класичних гармонічних осциляторів, кожен з яких має 3 ступеня свободи. Частоти коливань усіх осциляторів однакові. Так, як на один ступінь свободи коливального руху припадає енергія, що дорівнює  $k_B T$  ( $\overline{W}^n = \frac{1}{2}k_B T$ ,  $\overline{W}^k = \frac{1}{2}k_B T$ ), внутрішня енергія такої системи в розрахунку на один моль дорівнює

$$U_m = 3N_A k_B T = 3RT, \quad (12.1)$$

де  $R$  — універсальна газова стала,  $N_A$  — число Авогадро,  $k_B$  — стала Больцмана.

Молярна теплоємність хімічно простих кристалів

$$C_V = \left( \frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V = 3R \approx 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (12. 2)$$

Цей результат співпадає з емпіричним законом Дюлонга і Пті.

**Закон Дюлонга  
і Пті**

**Молярна теплоємність будь-якого твердого тіла при високих температурах дорівнює  $3R$  та не залежить від температури.**

Закон Дюлонга і Пті задовільно виконується для більшості хімічних елементів та простих сполук при кімнатній та більш високій температурі.

Досліди свідчать про те, що при зниженні температури теплоємність зменшується, наближаючись до нуля, як  $T^3$  у діелектриків і як  $T$  — у металів. (рис. 12.2). Класична теорія пояснити це не може.

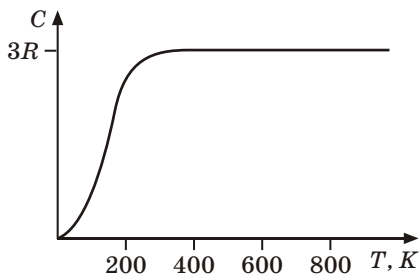


Рис. 12.2

### 12.3. Квантова теорія теплоємності Ейнштейна

У квантовій теорії теплоємності Ейнштейна кожен атом (іон), що міститься у вузлах кристалічних ґраток, розглядається як квантовий осцилятор. Усі осцилятори коливаються з однаковою частотою (осцилятори не взаємодіють). Енергія осцилятора квантується й приймає значення

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (12.3)$$

де  $n$  — коливальне квантове число.

Середнє значення енергії  $E$  квантового осцилятора, що припадає на один ступінь свободи, дорівнює

$$\langle E \rangle = \frac{h}{e^{\frac{h}{k_B T}} - 1} + E_0, \quad (12.4)$$

де  $E_0 = h/2$  — енергія нульових коливань.

Оскільки нульові коливання здійснюються лише при  $T = 0$  і енергія їх є величиною сталою, то враховувати цю енергію при розгляді залежності енергії від температури не слід.

Внутрішня енергія одного моля кристала

$$U = 3N_A \langle E \rangle = 3N_A \frac{h}{e^{\frac{h}{k_B T}} - 1},$$

або

$$U = 3R \frac{E}{e^{\frac{E}{T}} - 1}, \quad (12.5)$$

де  $E = h \nu / k_B$  — *характеристична температура Ейнштейна*.  
**Молярна теплоємність** кристала за теорією Ейнштейна:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \left( \frac{h \nu}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{-\frac{h \nu}{k_B T}}}{\left( e^{\frac{h \nu}{k_B T}} - 1 \right)^2},$$

або

$$C_V = 3R \left( \frac{E}{T} \right)^2 \frac{e^{-E/T}}{\left( e^{E/T} - 1 \right)^2}. \quad (12.6)$$

Слід розглядати дві області температур відносно  $E$ .

**Високі температури**  $T \gg E$ .

Оскільки  $E/T \ll 1$ , то в першому наближенні можна вважати

$$e^{E/T} = 1 + \frac{E}{T}.$$

Тоді формула (12.6) набуває вигляду

$$C_V = 3R \left( \frac{E}{T} \right)^2 \frac{1 + \frac{E}{T}}{\left( 1 + \frac{E}{T} - 1 \right)^2} = 3R, \quad (12.7)$$

тобто виконується закон Дюлонга і Пті.

**Низькі температури**  $T \ll E$ .

$$\frac{E}{T} \gg 1; e^{\frac{E}{T}} \gg 1$$

і формула (12.6) запишеться так:

$$C_V = 3R \left( \frac{E}{T} \right)^2 e^{-\frac{E}{T}}. \quad (12.8)$$

Якщо  $T \rightarrow 0$ , то  $\frac{E}{T} \rightarrow \infty$ , а  $e^{-\frac{E}{T}} \rightarrow 0$  швидше ніж  $\frac{E}{T} \rightarrow \infty$ . Тому при  $T \rightarrow 0$   $C_V \rightarrow 0$ .

Із теорії Ейнштейна витікає, що  $C_V$  є функцією температури (і це вірно) та що при  $T \rightarrow 0$   $C_V \rightarrow 0$  по експоненціальному закону.

Це невірно, бо не співпадає з результатами дослідів. Експерименти свідчать, що при низьких температурах  $C_V \sim T^3$ .

Грубим є припущення про те, що атоми (осцилятори) коливаються незалежно. Але головне, що хотів показати Ейнштейн і він це показав, полягає в тому, що коливання механічних осциляторів треба квантувати таким чином, як Планк квантував осцилятори випромінювання.

#### 12.4. Квантова теорія теплоємності Дебая

Як і Ейнштейн, Дебай вважав, що коливання атомів у кристали можна уявити як коливання осциляторів. Але на відміну від Ейнштейна, який вважав коливання осциляторів незалежними, Дебай врахував те, що осцилятори взаємодіють один з одним і в системі взаємодіючих осциляторів вже присутня не одна частота, а цілий спектр частот, обмежений як зверху, так і знизу.

У зв'язку з упорядкованістю структури і обмеженістю лінійних розмірів в системі не може бути необмеженого числа коливань. Дебай вважав, що в системі може бути  $3N$  коливань, а як наслідок і  $3N$  частот. (Це вірно для одноатомних кристалів, де присутня лише акустична гілка. В кожній гілці  $N$  коливань.) Частоти в системі не можуть бути більшими за частоту коливання одного незалежного осцилятора, тобто довжина хвилі не може бути меншою за лінійні розміри ґратки  $\lambda_{\min} \sim 2a$  ( $a$  — параметр ґратки). З боку *низьких частот* спектр також обмежений, тому що довжина хвилі не може бути більшою подвійного розміру системи, тобто  $\lambda_{\max} \sim 2L$  ( $L$  — довжина кристала).

Таким чином, в системі спектр складається із  $3N$  частот, причому  $\nu_{\max} \geq \nu \geq \nu_{\min}$ , або  $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ .

Необхідно з'ясувати, як  $3N$  коливань розподілені за частотами, тобто треба знати функцію  $g(\nu)$ , яка називається *функцією розподілу*. Тоді повна енергія системи може бути знайдена як

$$U = \int_{\min}^{\max} \langle E \rangle g(\nu) d\nu, \quad (12.9)$$

де  $\langle E \rangle$  — середнє значення енергії.

З урахуванням значення  $\langle E \rangle$  (12.4) формулу (12.9) перепишемо у вигляді

$$U = \int_{\min}^{\max} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} g(\nu) d\nu. \quad (12.10)$$

Кількість частот в інтервалі  $d$  позначимо

$$dn = g(\omega) d \omega. \quad (12.11)$$

Для зручності інтегрування нижню границю  $\omega_{\min}$  можна замінити на нуль, тому що функція  $g(\omega)$  в інтервалі  $(0, \omega_{\min})$  незначна й похибка невелика.

Отже, треба знайти вид функції  $g(\omega)$ .

Якщо є лінійний кристал довжиною  $L$ , то кількість довжин хвиль  $n$  менше за деяке фіксоване  $n$  і може бути визначене як  $n \sim L/\lambda_n$ . По аналогії для трьохвимірного кристала  $n \sim \frac{L^3}{\lambda_n^3} \sim \frac{V}{v_n^3}$ . Точний підрахунок дає:

$$n = \frac{4}{3} \frac{V}{v_n^3} = \frac{4}{3} \frac{V}{v_0^3}, \quad (12.12)$$

де  $v_0$  — швидкість розповсюдження пружних (акустичних) хвиль в кристалі. (Нагадуємо, що  $v = v/\lambda$ ). Треба врахувати, що кристал має три гілки коливань — одна поздовжня та дві поперечні, їх швидкості відповідно дорівнюють  $v_{||}$  та  $v_{\perp}$ .

Тоді

$$n = \frac{4}{3} V \left( \frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right),$$

а

$$\frac{dn}{d\omega} = g(\omega) = \frac{4}{3} V \left( \frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right) \cdot 3 \omega^2. \quad (12.13)$$

Середня швидкість акустичних хвиль  $v_0$  визначається співвідношенням

$$\frac{3}{v_0^3} = \frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3}. \quad (12.14)$$

З урахуванням (12.14) маємо:

$$dn = g(\omega) d\omega = 4 V \frac{3}{v_0^3} \omega^2 d\omega. \quad (12.15)$$

Підставимо (12.15) у формулу (12.10) і знайдемо енергію кристалу.



$$U = \int_0^{\max} \frac{4}{v_0^3} V^2 \frac{h}{e^{\frac{h}{k_B T}} - 1} d = \frac{12}{v_0^3} V \int_0^{\max} \frac{h^3}{e^{\frac{h}{k_B T}} - 1} d. \quad (12.16)$$

Для зручності інтегрування введемо безрозмірну енергію  $x = \frac{h}{k_B T}$ , тоді

$$x_{\max} = \frac{h}{k_B T} \max = \frac{D}{T},$$

де  $D = \frac{h}{k_B} \max$  — *характеристична температура Дебая*.

Перейдемо від змінної до  $x$ .

$$= \frac{k_B T}{h} x; \quad d = \frac{k_B T}{h} dx.$$

Енергія кристала

$$U = \frac{12}{v_0^3} V \frac{k_B^4 T^4}{h^3} \int_0^{x_{\max}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (12.17)$$

Із формули (12.12) виразимо об'єм кристала

$$V = \frac{3v_0^3}{4} n. \quad (12.18)$$

Оскільки нас цікавить енергія одного моля, то в формулі (12.18) треба покласти  $n = N_A$  ( $N_A$  — число Авогадро).

Введемо температуру Дебая, замінимо об'єм виразом (12.18) і запишемо енергію кристала у вигляді

$$U = 9RT \left( \frac{T}{D} \right)^3 \int_0^{\frac{D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (12.19)$$

З урахуванням молярної нульової енергії  $U_{m0} = \frac{9}{8} R$  Д повна енергія кристала має вигляд

$$U = U_{m0} + 9RT \left( \frac{T}{D} \right)^3 \int_0^{\frac{D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (12.20)$$

Молярна теплоємність за Дебаєм

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \left[ 12 \left( \frac{T}{D} \right)^3 \int_0^{\frac{D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - \frac{3 \left( \frac{D}{T} \right)}{e^{\frac{D}{T}} - 1} \right]; \quad (12.21)$$

$$D(\theta) = 12 \int_0^{\frac{1}{\theta}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - \frac{3}{e^{1/\theta} - 1}. \quad (12.22)$$

— функція Дебая, де  $\theta = T/D$ .

Проведемо асимптотичне дослідження функції  $D(\theta)$ , а значить і залежність теплоємності від температури  $C(T)$ .

**Високі температури**  $T \gg D$ .

Тоді  $\theta \gg 1$ , і  $D(\theta) \rightarrow 1$ .

Формула (12.21) переходить в класичну

$$C_V = 3R,$$

тобто виконується закон Дюлонга і Пті.

**Низькі температури**  $T \ll D$ .

Тоді  $\theta \ll 1$ , а  $D/T \rightarrow \infty$ , тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{4}{15},$$

а формула Дебая (12.21) для молярної теплоємності набуває вигляду

$$C_V = \frac{4}{15} \cdot 3R \cdot 12 \theta^2 = \frac{12}{5} 4R \left( \frac{T}{D} \right)^3 \quad (12.23)$$

та має назву *граничного закону Дебая*.

Таким чином, *теплоємність кристала поблизу абсолютного нуля температур змінюється пропорційно третьому ступеню температури*  $C(T) \sim T^3$ . Це закон кубів Дебая.

## 12.5. Електронна теплоємність

Розглянуті теорії теплоємності описують теплові властивості, обумовлені коливаннями кристалічної ґратки. Але в металах крім кристалічної ґратки (іонної підсистеми) існує ще підсистема вільних електронів, тому їх неупорядкований рух має вносити вклад в загальну теплоємність металу.

Коли метал нагрівається, то тільки ті електрони, які знаходяться поблизу самої вершини енергетичного розподілу (на відстані порядку  $k_B T$  від енергії Фермі), збуджуються й переходять на більш високі рівні. Електрони меншої енергії не можуть більше поглинати енергію, тому що стани над ними вже заповнені і неймовірно, щоб електрон з енергією (наприклад на 0,5 еВ нижчою за  $E_F$ ) міг перескочити через розташовані вище заповнені стани у найближчий вільний стан, якщо при кімнатній температурі  $k_B T \sim 0,025$  еВ і навіть при 500 К  $k_B T = 0,043$  еВ.

Таким чином, якщо нагріти метал, то лише ті електрони придбають додаткову енергію, які віддалені по енергії від рівня Фермі на величину, яка лежить приблизно у межах  $k_B T$ . Зробити оцінку числу таких електронів можна, якщо припустити, що  $n(E)$  й поблизу вершини енергетичного розподілу прямо пропорційна  $E$  (рис. 12.3).

В цьому випадку кількість електронів  $N$ , що дають вклад в теплоємність одного моля одновалентного металу, при температурі  $T$  дорівнює

$$N = N_A \left( \frac{E}{E_F} \right) = N_A \left( \frac{k_B T}{E_F} \right),$$

де  $N_A$  — число Авогадро.

Якщо ці електрони поведуть себе як молекули ідеального газу, то кожний із електронів, що лежить по енергії в інтервалі  $k_B T$  поблизу  $E_F$ , додатково набуває  $\frac{3}{2} k_B T$  енергії.

Тоді внутрішня енергія одного моля металу складає

$$U_e = N_A \left( \frac{k_B T}{E_F} \right) \cdot \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right) RT. \quad (12.24)$$

Результуюча електронна теплоємність

$$(C_V)_e = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right) \cdot R, \quad (12.25)$$

а не  $\frac{3}{2} R$ , як це передбачає класична теорія електронного газу.

Більш детальні розрахунки показують, що електронна теплоємність визначається формулою

$$(C_V)_e = \left( \frac{2}{2} \right) \left( \frac{k_B T}{E_F} \right) R. \quad (12.26)$$

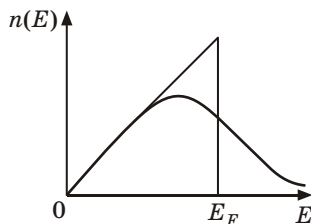


Рис. 12.3

Переважаання теплоємності ґратки  $C_V$  над електронною теплоємністю проявляється у широкому діапазоні температур.

При дуже низьких температурах  $(C_V)_e$  стає важливою, тому що  $C_V$  пропорціональна  $T^3$ , коли  $T \ll \dots$ , в той час коли  $(C_V)_e$  пропорціональна  $T$ .

При дуже високих температурах  $C_V$  виходить на постійний рівень  $C_V = 3R$ , а  $(C_V)_e$  продовжує зростати і вклад  $(C_V)_e$  в загальну теплоємність стає відчутним, хоч задовго до того, як починає виконуватися умова  $(C_V)_e > C_V$ , настає плавлення.

## 12.6. Фонони

У відповідності до гіпотези де Бройля, яка підтверджена дослідними фактами, з кожною монохроматичною хвилею пов'язані енергія та імпульс, які визначаються співвідношеннями

$$E = h\nu, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (12.27)$$

які введені за аналогією з теорією фотонів. Хвиля, визначена цими формулами, в якомусь розумінні поводить себе як частинка. Частинка, уподібнена звуковій хвилі у вищевказаному розумінні, називається *фононом*. Термін фонон ввів академік І. Тамм. Не слід вкладувати в уявленні про фонон щось більше, ніж те, що міститься в цьому визначенні. Фонон несе енергію й імпульс, пов'язані з частотою  $\nu$  і хвильовим вектором  $\vec{k}$  через сталу Планка  $h$ . Але немає рації говорити про форму і розміри фонона, уявляючи його якоюсь маленькою кулькою. Тому фонон називають не частинкою, а «квазічастинкою», а його імпульс — «квазіімпульсом».

Пружні хвилі в кристали мають квантовий характер.

Енергія звукової хвилі може приймати значення

$$E_i = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu_i = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.28)$$

тобто хвилі з частотою  $\nu_i$  можна співставити *квазічастинку* — *фонон*, швидкість розповсюдження якого  $v$  — це швидкість звука в цьому середовищі. Квазічастинка — фонон не може виникнути у вакуумі. Для його виникнення та існування необхідне середовище.

Енергія фонона  $E = h\nu$ , квазіімпульс  $p = \hbar k$ .

Квазіімпульс має напрям, який співпадає з напрямком розповсюдження звукової хвилі.

$$p = \hbar k = \frac{h\nu}{v} = \frac{h}{\lambda}.$$

Найбільш істотна різниця квазіімпульса від імпульса в тому, що при зіткненні фонона з кристалічною ґраткою квазіімпульс може передаватися ґратці дискретними порціями — сам він при цьому не зберігається.

Енергія кристалічної ґратки розглядається як енергія *фононного газу*, який підпорядковується статистиці Бозе — Ейнштейна, оскільки фонони є бозонами (їх спин дорівнює нулю). Фонони можуть випромінюватися і поглинатися, але їх число не зберігається, тому хімічний потенціал для фононів дорівнює нулю ( $= 0$ ).

Таким чином, система звукових хвиль, що проходять через кристал, еквівалентна фононному газу, який заповнює кристал.

Термічні властивості кристала розглядаються як властивості такого газу.

### Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Із яких частинок можуть складатися кристали?
2. За якими ознаками проводять класифікацію кристалів?
3. Що таке елементарна комірка?
4. Які типи зв'язку в кристалах вам відомі?
5. Охарактеризуйте іонний зв'язок. Наведіть приклад.
6. Як здійснюється ковалентний зв'язок?
7. У яких кристалів енергія зв'язку більша: у іонних чи ковалентних?
8. Запишіть закон Дюлонга і Пті.
9. При яких температурах виконується закон Дюлонга і Пті?
10. Як визначається характеристична температура Ейнштейна?
11. Як визначається молярна теплоємність за Ейнштейном?
12. Запишіть, як визначається характеристична температура Дебая?
13. Як визначається молярна теплоємність за Дебаєм?
14. Запишіть закон Дебая.
15. Поясніть існування електронної теплоємності.
16. Дайте визначення фонону. Які він має властивості?
17. В чому полягає різниця між частинкою і квазічастинкою? Імпульсом і квазіімпульсом?

### Приклади розв'язання задач

#### Задача 1

При яких температурах  $T$  проявляється квантова природа енергії? Тобто при яких температурах закон Дюлонга і Пті перестає виконуватися?

### Розв'язання

Відомо, що закон Дюлонга і Пті приблизно виконується для багатьох хімічно простих (що складаються з однакових атомів) твердих тіл при температурах, близьких до кімнатної та вище. Проте цей закон зовсім не описує зменшення  $C_V$  при зниженні температури. Отже класична теорія теплоємності не виявляє залежності  $C_V$  від температури. Це є наслідком того, що в рамках класичної теорії здійснюється тільки загальний підрахунок числа ступенів свободи частинок без їх диференціації відносно частоти коливань.

Середнє значення енергії  $\bar{\epsilon}$  квантового осцилятора, яка припадає на один ступінь свободи, можна записати як

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{k_B T} - 1}. \quad (1)$$

При високих температурах ( $h\nu \ll k_B T$ ) з (1) одержимо класичний результат

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{k_B T} - 1} \approx \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = k_B T.$$

При низьких температурах ( $h\nu \gg k_B T$ ), коли енергія теплового руху частинок, яка приходить на один ступінь свободи, стає одного порядку з квантом енергії, маємо

$$\bar{\epsilon} = h\nu \cdot e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}.$$

Якщо прийняти, що частота коливань окремих частинок  $\nu = 5 \cdot 10^{15}$  Гц, то для енергії відповідного кванта одержимо  $h\nu \approx 33 \cdot 10^{-22}$  Дж. Таким чином, квантову природу енергії потрібно враховувати при температурах  $T$ , для яких  $k_B T < 33 \cdot 10^{-22}$  Дж, або  $T < 235$  К.

### Задача 2

Визначити внутрішню енергію  $U$  та молекулярну теплоємність  $C_V$ , які відповідають теорії Дебая для високих ( $T \gg T_D$ ) та низьких ( $T \ll T_D$ ) температур.

### Розв'язання

За теорією Дебая внутрішня енергія кіломоля твердого тіла

$$U = 3RT \frac{3T^3}{D} \int_0^{\frac{D}{T}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 3RT F_D \left( \frac{D}{T} \right).$$

Тут

$$F_D \left( \frac{D}{T} \right) = \frac{3T^3}{D} \int_0^{\frac{D}{T}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad x = \frac{h}{k_B T}. \quad (2)$$

При  $T \gg D$

$$F_D \left( \frac{D}{T} \right) \approx 1 - \frac{3}{8} \frac{D}{T} + \frac{1}{20} \left( \frac{D}{T} \right)^2 - \dots$$

Тоді маємо

$$U = 3RT \cdot \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{D}{T} + \frac{1}{20} \left( \frac{D}{T} \right)^2 - \dots \right]$$

При  $\frac{D}{T} \ll 1$  можна приблизно взяти  $F_D \left( \frac{D}{T} \right) = 1$ , тоді

$$U = 3RT, \quad C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R.$$

Це повністю відповідає закону Дюлонга і Пті. При низьких температурах  $T < D$ , верхню межу інтеграла в (2) можна замінити на  $\infty$ . Тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{4}{15}.$$

Тобто

$$U = \frac{3}{5} \frac{4R}{D} \cdot T^4.$$

Отже, для низькотемпературної області з теорії Дебая одержимо

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{12}{5} 4R \left( \frac{T}{D} \right)^3 = a \left( \frac{T}{D} \right)^3,$$

де  $a = 1,94 \cdot 10^6$  Дж/(моль · К).

### Задача 3

Знайти відношення характеристичних температур Дебая та Ейнштейна, якщо молярні енергії  $U_{0m}$ , визначені за формулами Дебая та Ейнштейна, дорівнюють одна одній.

#### Розв'язання

Нульова молярна енергія в теорії Дебая визначається за формулою

$$U_{0m} = \frac{9}{8} N_A \hbar \nu_{\max}, \quad (3)$$

тут  $N_A$  — стала Авогадро.

Визначаємо характеристичну температуру Дебая як

$$D = \frac{\hbar \nu_{\max}}{k_B};$$

тут  $\nu_{\max}$  — максимальна частота нормальних коливань решітки. Тоді із (3) маємо

$$U_{0m} = \frac{9}{8} R D. \quad (4)$$

За Ейнштейном нульова молярна енергія визначається як

$$U_{0m} = \frac{3}{2} N_A \hbar \nu,$$

тут  $\nu$  — власна частота коливань решітки.

Із урахуванням характеристичної температури Ейнштейна

$$E = \frac{\hbar \nu}{k_B} \text{ маємо}$$

$$U_{0m} = \frac{3}{2} R E. \quad (5)$$

З формул (4) та (5) знайдемо відношення характеристичних температур

$$\frac{D}{E} = \frac{4}{3}.$$

### Задачі для самостійного розв'язання

**12.1.** Обчислити питомі теплоємності кристалів алюмінію й міді за класичною теорією теплоємності.

*Відповідь:* 925 Дж/кг · К; 390 Дж/кг · К.



**12.2.** Обчислити за класичною теорією теплоємність кристала броміду алюмінію  $\text{AlBr}_3$ , об'єм якого  $V = 1 \text{ м}^3$ . Густина кристала броміду алюмінію дорівнює  $3,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

*Відповідь:*  $1,12 \text{ Дж/К}$ .

**12.3.** Вивести формулу для середньої енергії класичного лінійного гармонічного осцилятора при тепловій рівновазі. Обчислити значення  $\langle \epsilon \rangle$  при  $T = 300 \text{ К}$ .

*Відповідь:*  $\langle \epsilon \rangle = k_B T$ ;  $\langle \epsilon \rangle = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ .

**12.4.** Знайти енергію  $U$  і теплоємність  $C$  системи, що складається із  $N = 10^{25}$  класичних тривимірних незалежних гармонічних осциляторів. Температура  $T = 300 \text{ К}$ . Використати результати розв'язання задачі 12.3.

*Відповідь:*  $U = 124 \text{ Дж}$ ;  $C = 414 \text{ Дж/К}$ .

**12.5.** Визначити середню енергію  $\langle \epsilon \rangle$  лінійного одномірного квантового осцилятора при температурі  $T = T_E$  ( $E = 200 \text{ К}$ ).

*Відповідь:*  $\langle \epsilon \rangle = 2,99 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ .

**12.6.** Визначити енергію  $U$  системи, що складається із  $N = 10^{25}$  квантових тривимірних незалежних осциляторів при  $T = T_E$  ( $E = 300 \text{ К}$ ).

*Відповідь:*  $U = 134 \text{ кДж}$ .

**12.7.** Характеристична температура  $T_E$  срібла дорівнює  $165 \text{ К}$ . Знайти частоту коливань атомів срібла за теорією теплоємності Ейнштейна.

*Відповідь:*  $\nu = 3,44 \text{ ТГц}$ .

**12.8.** Температура збільшилася від  $T_1 = \frac{E}{2}$  до  $T_2 = T_E$ . У скільки разів при цьому змінилася середня енергія  $\langle \epsilon \rangle$  квантового осцилятора? Нульову енергію врахувати.

*Відповідь:* у  $3,7$  рази.

**12.9.** Використовуючи квантову теорію теплоємності Ейнштейна, обчислити зміну  $U_m$  молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його на  $\Delta T = 2 \text{ К}$  від температури  $T = T_E / 2$ .

*Відповідь:*  $U = 36 \text{ кДж/моль}$ .

**12.10.** Обчислити за теорією Ейнштейна молярну нульову енергію  $U_{m0}$  кристала цинку. Характеристична температура  $T_E$  для цинку дорівнює  $230 \text{ К}$ .

*Відповідь:*  $U_{m0} = 2,87 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ .

**12.11.** Обчислити за теорією Дебая молярну нульову енергію  $U_{m0}$  кристала міді. Характеристична температура  $\Theta$  міді дорівнює 320 К.

*Відповідь:*  $U_{m0} = 2,99$  МДж.

**12.12.** Знайти відношення зміни  $U$  внутрішньої енергії кристала при нагріванні його від нуля до  $T = 0,1 \Theta$  до нульової енергії  $U_0$ . Вважати  $T \ll \Theta$ .

*Відповідь:*  $\frac{U}{U_0} = 5,2 \cdot 10^{-3}$ .

**12.13.** Визначити максимальну частоту  $\nu_{\max}$  власних коливань в кристалі золота, дебаївська температура якого  $\Theta = 180$  К.

*Відповідь:*  $\nu_{\max} = 2,36 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

**12.14.** Обчислити максимальну частоту  $\nu_{\max}$  Дебая, якщо відомо, що молярна теплоємність  $C_m$  срібла при  $T = 20$  К дорівнює 1,7 Дж/моль  $\cdot$  К.

*Відповідь:*  $\nu_{\max} = 2,75 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

**12.15.** Знайти відносну похибку, яка буде допущена при обчисленні теплоємності кристала, якщо замість значення, що його дає теорія Дебая (при  $T = \Theta$ ), скористатися значенням, що його дає закон Дюлонга і Пті.

*Відповідь:*  $= 4,83 \%$ .

**12.16.** Знайти відношення  $\frac{E}{\Theta}$  характеристичних температур Ейнштейна і Дебая.

*Відповідь:*  $\frac{E}{\Theta} = 0,75$ .

**12.17.** При нагріванні срібла масою  $m = 10$  г від  $T_1 = 10$  К до  $T_2 = 20$  К було підведено  $Q = 0,71$  Дж теплоти. Знайти характеристичну температуру Дебая срібла. Вважати  $T \ll \Theta$ .

*Відповідь:*  $\Theta = 212$  К.

**12.18.** Обчислити молярну внутрішню енергію  $U_m$  кристалів з двовимірною ґраткою, якщо характеристична температура  $\Theta$  Дебая дорівнює 350 К.

*Відповідь:*  $U_m = 2,01$  МДж.

**12.19.** Отримати вираз для молярної теплоємності, використовуючи формулу для молярної внутрішньої енергії кристала з одновимірною ґраткою.

$$\text{Відповідь: } C = 3R \left\{ 2 \left( \frac{T}{\Delta} \right)^{\Delta/T} \int_0^{\Delta/T} \frac{x dx}{e^x - 1} - \frac{\Delta/T}{e^{\Delta/T} - 1} \right\}.$$

**12.20.** Обчислити молярну нульову енергію  $U_{m0}$  кристала з одновимірною ґраткою, якщо характеристична температура Дебая  $\Delta$  дорівнює 300 К.

$$\text{Відповідь: } U_{m0} = 1,87 \text{ МДж.}$$

**12.21.** Знайти енергію фонона, що відповідає максимальній частоті  $\nu_{\max}$  Дебая, якщо характеристична температура  $\Delta$  Дебая дорівнює 250 К.

$$\text{Відповідь: } \epsilon_{\text{ф}} = 3,45 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

**12.22.** Знайти квазіімпульс  $p_{\text{ф}}$  фонона, який відповідає частоті  $\nu = 0,1 \nu_{\max}$ . Усереднена швидкість звука в кристалі дорівнює 1380 м/с, характеристична температура Дебая  $\Delta$  дорівнює 100 К. Дисперсією звукових хвиль у кристалі знехтувати.

$$\text{Відповідь: } p_{\text{ф}} = 10^{-25} \text{ Н} \cdot \text{с.}$$

**12.23.** Довжина хвилі  $\lambda$  фонона, що відповідає частоті  $\nu = 0,01 \nu_{\max}$ , дорівнює 52 нм. Нехтуючи дисперсією звукових хвиль, знайти характеристичну температуру Дебая  $\Delta$ , якщо усереднена швидкість звука в кристалі дорівнює 4,8 км/с.

$$\text{Відповідь: } \Delta = 443 \text{ К.}$$

**12.24.** Характеристична температура  $\Delta$  Дебая для вольфраму дорівнює 310 К. Знайти довжину хвилі  $\lambda$  фононів, що відповідають частоті  $\nu = 0,1 \nu_{\max}$ . Усереднену швидкість звука у вольфрамі обчислити. Дисперсією хвиль у кристалі знехтувати.

$$\text{Відповідь: } \lambda = 4,8 \text{ нм.}$$

**12.25.** Обчислити фононний тиск  $p_{\text{ф}}$  у свинці при температурі  $T = 42,5 \text{ К}$ . Характеристична температура  $\Delta$  Дебая свинцю дорівнює 85 К.

$$\text{Відповідь: } p_{\text{ф}} = 46 \text{ МПа.}$$

# 13 Зонна теорія твердого тіла

---

Розглянута в розділі 11 зоммерфельдівська модель твердого тіла враховувала тільки принципи Паулі, а взаємодією електронів між собою і з кристалічною решіткою нехтувалось.

В зонній теорії твердого тіла враховується вплив на електрони усередненого електричного поля, створеного іонами кристалічної решітки, що має строгу періодичну структуру з періодом, рівним періоду решітки. Задача описання поведінки електронів в такому полі ускладнюється неможливістю точного розв'язання рівняння Шредінгера для такої системи множини частинок.

Існують два методи розв'язання цієї задачі, які дають практично однакові результати.

**1. Перший метод — наближення сильного зв'язку.** В цьому випадку розглядається сукупність ізольованих атомів з дискретними енергетичними рівнями. Енергія зв'язку електронів зі своїми атомами набагато більша за кінетичну енергію руху в кристалічній решітці. Розглядається, що відбувається з енергетичними рівнями при зближенні атомів і створенні кристала. При цьому тільки валентні електрони можуть переходити від одного атома до іншого.

**2. Другий метод — наближення слабого зв'язку** (наближення вільних електронів). Енергія взаємодії електронів з решіткою набагато менша за їх кінетичну енергію. Тобто електрон вважається вільним і використовується рівняння Шредінгера для вільних електронів, які рухаються в періодичному полі кристалічної решітки.

## 13.1. Створення енергетичних зон в кристалах

Як уже розглядалось, кожний ізольований атом має дискретний спектр енергій. Якщо такі атоми розташовані досить далеко один від одного, тобто відстань між ними набагато більша сталої решітки, то між електронами існує широкий потенціальний бар'єр  $l$ , який електрони не можуть подолати ні за яких умов (рис. 13.1).

Ширину енергетичного рівня (природну ширину енергетичного рівня) можна розрахувати, виходячи з принципу невизначеності Гейзенберга  $E \cdot \tau \sim h$ .

Для збудженого стану  $\tau \sim 10^{-8}$  с, тоді  $E \sim 10^{-7} - 10^{-6}$  еВ. Очевидно, що ця величина набагато менша за відстань між рівнями (1 еВ).

Якщо систему таких атомів всебічно стискати так, щоб атоми опинились на відстанях порядку сталої решітки, тоді потенціальні бар'єри між атомами стають вужче і нижче, а для валентних електронів вони взагалі зникають. Замість індивідуальних атомних орбіт виникають колективні, тобто валентні електрони стають власністю всього кристала. Суттєву роль в колективізації електронів відіграє тунельний ефект, внаслідок чого електрон може переходити від одного атома до іншого (рис. 13.2).

В цьому випадку, як показали розрахунки, час життя електрона біля атома скорочується до  $\tau \sim 10^{-15}$  с, тобто його можна вважати вільним. Інтервал енергій, який може мати цей електрон, дорівнює  $E \approx \frac{h}{\tau} \approx 2$  еВ. Це означає, що вузький енергетичний рівень валентного електрона в кристалі перетворюється в зону дозволених значень енергії електронів.

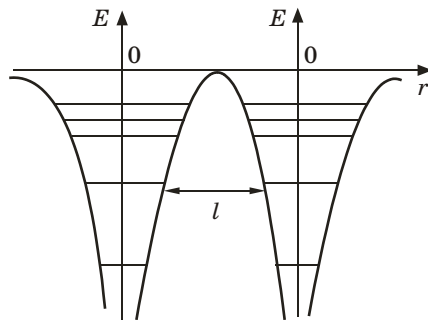


Рис. 13.1

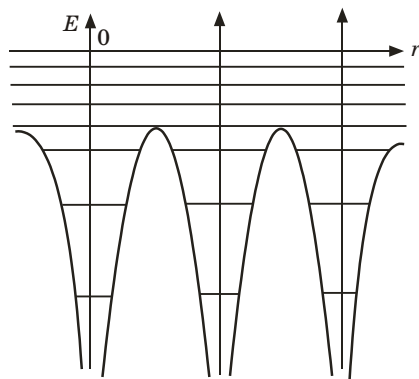


Рис. 13.2

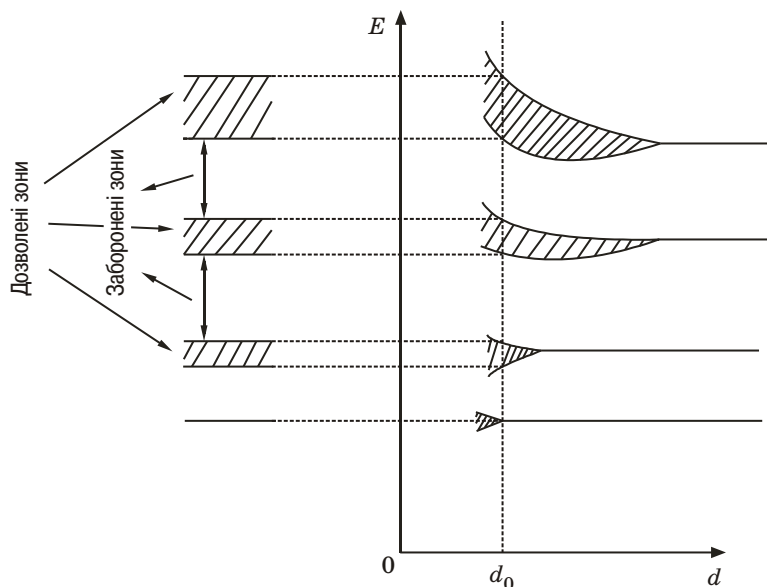


Рис. 13.3

На рис. 13.3 показано залежність спектра енергії електрона від відстані між атомами  $d$  ( $d_0$  — рівноважна відстань між атомами в кристалі). В кристалі, що складається з  $N$  атомів, рівню енергії  $E_{nl}$  ізольованого атома буде відповідати зона з  $(2l + 1)N$  дискретних рівнів, на кожному з яких, згідно з принципом Паулі, може знаходитись 2 електрона з протилежно направленими спінами. Ширина зон не залежить від розмірів кристала. Збільшення кількості атомів призводить до згущення рівнів у зоні. Ширина дозволених зон порядку декількох електрон-вольт, а енергетична відстань між рівнями  $\sim 10^{-23}$  еВ.

Імовірність тунельного ефекту для електронів на внутрішніх оболонках значно менша, тому ці рівні розщеплюються значно менше, або зовсім не розщеплюються.

Як відомо, внутрішні оболонки в ізольованих атомах цілком заповнені і оскільки кількість місць в зоні кристала залишається тією ж, то відповідні зони також повністю заповнені, з чого можна зробити важливий висновок: *електрони внутрішніх оболонок не можуть переносити електричний струм.*

Між дозволеними зонами енергії розташовані *заборонені зони* — значення енергії, які електрон в кристалі не може мати, що

пов'язано з періодичним потенціальним полем іонної решітки кристала.

### 13.2. Зонна структура металів, діелектриків, напівпровідників

Електричні властивості твердих тіл визначаються в зонній теорії різним заповненням електронами дозволених енергетичних зон і шириною забороненої зони. Основними є верхні дозвалені зони: **зона провідності (вільна зона)**, яка може бути або частково заповнена електронами, або вільна і створена з енергетичних рівнів зовнішніх «колективізованих» електронів.

Другою важливою зоною є повністю заповнена **валентна зона**, яка походить із внутрішніх рівнів вільних атомів.

**Метали** Якщо валентна зона заповнена електронами частково (рис. 13.4, а), то при наданні електронам навіть дуже малої додаткової енергії ( $\sim 10^{-23} - 10^{-22}$  eВ) електрони з верхніх заповнених рівнів можуть перейти на вищі рівні — вільні і за наявності електричного поля створювати електричний струм.

Додаткову енергію електрон може одержати внаслідок теплового збудження або під дією зовнішнього електричного поля.

Беручи до уваги, що енергія теплового руху при температурі 1 К дорівнює  $\sim 10^{-4}$  eВ, тобто значно більша за різницю енергій між сусідніми рівнями, частина електронів при  $T > 0$  К переходить на вищі рівні. В цьому випадку валентна зона відіграє роль зони провідності. Таку зонну структуру мають метали.

Інший випадок зонної структури для металів зображений на рис. 13.4, б, де повністю заповнена електронами валентна зона перекривається вільною зоною і утворюється гібридна зона,

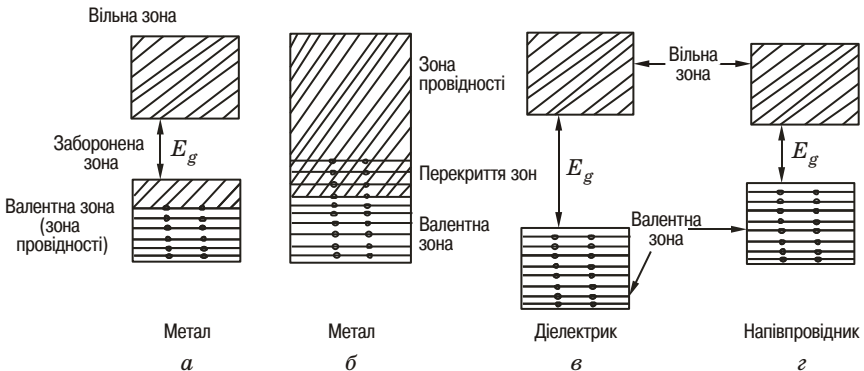


Рис. 13.4

заповнена електронами частково. Металеві властивості лужноземельних елементів (Be, Mg, Ca, Zn, ...) обумовлені саме гібридизацією зони провідності і валентної зони.

#### Діелектрики

Тверді тіла, у яких валентна зона повністю заповнена електронами, зона провідності вільна, а ширина забороненої зони  $E_g$  велика (кілька електрон-вольт), є *діелектриками* (рис. 13.4, в). В цьому випадку енергії теплового руху при всіх температурах не вистачить для переведення у вільну зону достатньої кількості електронів.

#### Напівпровідники

Якщо ширина забороненої зони невелика ( $E_g \leq 1$  eV), валентна зона повністю заповнена, а зона провідності вільна, то таке тверде тіло називають *напівпровідником* (рис. 13.4, г). В цьому випадку навіть при звичайних температурах енергії теплового руху достатньо для переводу електрона із валентної зони в зону провідності. Одночасно можливі переходи електронів валентної зони на її звільнені верхні рівні. Такі напівпровідники називаються *власними напівпровідниками*.

### 13.3. Фізичні властивості напівпровідників

Напівпровідниками вважаються тверді структури, які при  $T = 0$  являються діелектриками, а при кімнатній температурі їх питомий опір змінюється від  $10^{-5}$  до  $10^8$  Ом · м і суттєво залежить від виду і кількості домішків, структури речовини і зовнішніх умов: температури, освітлення та магнітних полів і таке інше. *Найхарактернішим для надпровідників є зменшення опору при підвищенні температури на відміну від металів, у яких опір з температурою збільшується.*

До напівпровідників належать 12 чистих елементів з середини таблиці Менделєєва: бор В, вуглець С, кремній Si, фосфор Р, сірка S, германій Ge, миш'як As, сіре олово Sn, сурма Sb, телур Те, йод J, а також велика кількість сполук.

Різноманітність напівпровідникових сполук з багатоманітними властивостями обумовила їх широке практичне застосування у різних областях.

Напівпровідникові діоди дозволяють випрямляти струм від міліампер до тисяч ампер, від низьких частот до надвисоких частот, від напруги частки вольт до сотень вольт. Тріоди, або транзистори, використовуються для підсилення та генерації коливань в широкому діапазоні частот. Реєстрація світлового та корпускулярного випромінювання, перетворення енергії випромінювання з теплової в електричну досягається за допомогою



напівпровідникових приймачів та перетворювачів з великим коефіцієнтом корисної дії.

У вимірювальній техніці широко використовуються найрізноманітніші датчики, що дозволяють вимірювати тиск, магнітні поля, температуру, енергію випромінювання.

Широко відомі напівпровідникові лазери, в яких електрична енергія перетворюється в когерентне випромінювання з високим ККД.

Важко перерахувати усі області, де напівпровідникові прилади вже ефективно застосовуються.

<b>Власні напівпровідники</b>
-----------------------------------

Розрізняють *власні та домішкові напівпровідники*.

До власних напівпровідників належать хімічно чисті напівпровідники, такі як Si, Ge, SiC, GaAs, InSb. Найбільше значення з чистих напівпровідників мають германій (Ge) та кремній (Si).

Зовнішня оболонка цих атомів має 4 валентні електрони, які пов'язані ковалентними зв'язками з валентними електронами сусідніх атомів. Тобто в зоні провідності хімічно чистих напівпровідників вільні електрони відсутні, тому при абсолютному нулі електропровідність власного напівпровідника відсутня. Але при підвищенні температури окремі ковалентні зв'язки розриваються внаслідок теплових коливань решітки і в кристалі з'являється деяка кількість вільних електронів. Завдяки тому, що заборонена зона у власних напівпровідників досить вузька (у кремнія  $E_g = 1,1$  eV у германія  $E_g = 0,72$  eV), енергії теплового руху достатньо, щоб перевести частину електронів у зону провідності. Ці електрони займають рівні поблизу дна зони, а в валентній зоні вивільнюється така ж кількість місць на верхніх рівнях, які мають назву *дірок*.

Енергія, необхідна для переведення електрона з валентної зони у зону провідності, яка мінімально дорівнює ширині забороненої зони  $E_g$ , називається *енергією активації власної провідності*.

При зустрічі вільного електрона і дірки вони рекомбінують (об'єднуються), при цьому одночасно зникають вільний електрон і дірка.

За відсутності зовнішнього електричного поля електрони провідності і дірки рухаються хаотично. Під дією електричного поля електрони в зоні провідності рухаються проти поля. Але і електрони валентної зони одержують можливість переходити на вільні вакантні рівні поблизу верхньої частини валентної зони. Такі переходи можна розглядати як рух в протилежному напрямку

позитивно заряджених частинок — **дірок**. Треба взяти до уваги, що рух дірки не є переміщенням реальної позитивної частинки, а відображує характер руху всієї електронної системи в напівпровіднику.

Провідність власних напівпровідників, обумовлена рухом електронів, називається **електронною провідністю, або провідністю  $n$ -типу (negative)**. Провідність власних напівпровідників, пов'язана з рухом квазічастинок — дірок, називається **дірковою провідністю  $p$ -типу (positive)**. Таким чином, у власному напівпровіднику

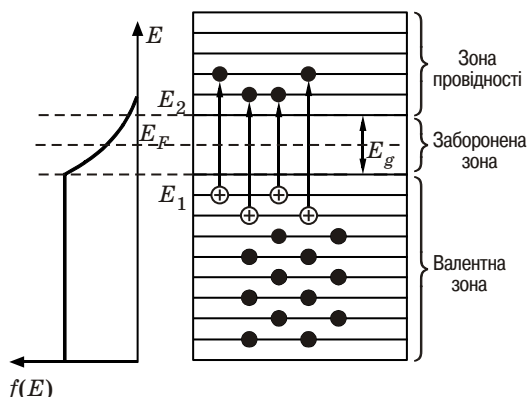


Рис. 13.5

існує два типи провідності: електронний і дірковий. При цьому концентрація електронів провідності  $n_e$  дорівнює  $n_p$  концентрації дірок,

$$n_e = n_p. \quad (13.1)$$

Розподіл електронів по рівням валентної зони і зони провідності підкоряється функції Фермі — Дірака, що наочно зображено на рис. 13.5, де графік функції розподілу наведений разом зі схемою енергетичних зон.

Рівень Фермі у власному напівпровіднику

Знайдемо положення рівня Фермі. Для цього візьмемо до уваги, що концентрація електронів в зоні провідності дорівнює

$$n_e = C_1 e^{-\frac{(E_2 - E_F)}{k_B T}}, \quad (13.2)$$

а концентрація дірок в валентній зоні

$$n_p = C_2 e^{\frac{(E_1 - E_F)}{k_B T}}, \quad (13.3)$$

де  $E_2$  — енергія дна зони провідності,  $E_F$  — енергія Фермі,  $E_1$  — енергія верхньої границі валентної зони, що відраховується вниз від рівня Фермі.  $C_1$  і  $C_2$  — сталі, що залежать від ефективної маси

електрона провідності і ефективної маси дірки, відповідно, та температури.

Ефективні маси електронів та дірок — величини, в яких враховується дія на електрон та дірку внутрішнього періодичного електричного поля кристала.

За умови (13.1), (13.2) та (13.3), маємо

$$C_1 e^{-\frac{(E_2 - E_F)}{k_B T}} = C_2 e^{-\frac{(E_1 - E_F)}{k_B T}}.$$

При однакових ефективних масах електронів та дірок  $C_1 = C_2$ , тоді

$$-(E_2 - E_F) = (E_1 - E_F),$$

звідки

$$E_F = \frac{(E_1 + E_2)}{2} = \frac{E_g}{2}, \quad (13.4)$$

*тобто рівень Фермі у власному напівпровіднику розташований в середині забороненої зони.*

**Електропровідність  
власних  
напівпровідників**

Рівень Фермі у власному напівпровіднику визначає енергію, від якої відбувається збудження електронів і дірок. Як наслідок, для електронів, що перейшли в зону провідності,

величина  $E_2 - E_F$  дорівнює половині ширини забороненої зони.

Тому  $E - E_F \gg k_B T$  і у розподілі Фермі — Дірака

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{(E - E_F)}{k_B T}} + 1}$$

одиноцею у знаменнику можна знехтувати, тоді

$$f(E) \approx e^{-\frac{E - E_F}{k_B T}}. \quad (13.5)$$

Таким чином, очевидно, що розподіли вільних електронів і дірок описуються розподілом Максвелла — Больцмана (невироджений газ). Кількість електронів в зоні провідності і кількість дірок у валентній зоні пропорційні ймовірності (13.5), вони є носіями заряду і можуть створювати струм. Провідність власного напівпровідника пропорційна кількості носіїв, тобто пропорційна (13.5). Отож з підвищенням температури провідність напівпровідника зростає

$$\approx n_0 e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}, \quad (13.6)$$

де  $n_0$  — стала, характерна для даного напівпровідника. Якщо побудувати залежність  $\ln n_0$  від  $1/T$  (рис. 13.6), то для всіх власних напівпровідників це буде пряма, по нахилу якої можна визначити ширину забороненої зони  $E_g$ , а на її продовженні —  $n_0$ . Питомий опір напівпровідників різко зменшується при збільшенні температури за законом

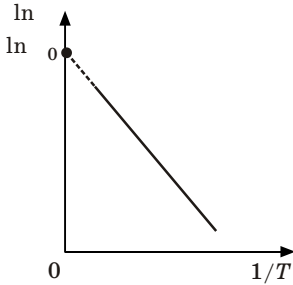


Рис. 13.6

$$\rho \approx \rho_0 e^{\frac{E_g}{2k_B T}}. \quad (13.7)$$

Густина струму  $\vec{j}$  при власній провідності напівпровідника складається з густини струму електронів ( $\vec{j}_e$ ) і дірок ( $\vec{j}_p$ ).

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_p.$$

Якщо їхні концентрації однакові  $n_e = n_p = n_0$ , а рухомості  $u_e$  і  $u_p$ , то можна одержати закон Ома для власної провідності напівпровідника:

$$\vec{j} = en_0(u_e + u_p)\vec{E}, \quad (13.8)$$

де  $\vec{E}$  — напруженість зовнішнього електричного поля.

Тоді питома електрична провідність дорівнює

$$\sigma = en_0(u_e + u_p). \quad (13.9)$$

Зауважимо, що власна провідність спостерігається в усіх напівпровідниках при досить високих температурах.

**Домішкові напівпровідники** Крім власних напівпровідників з власною провідністю, яка визначається власним енергетичним спектром кристала, існує широкий клас сполук, в яких концентрація носіїв і провідність визначається домішками. Такі напівпровідники називаються *домішковими*, а їх провідність — *домішковою* провідністю.

Під *домішками* розуміють як атоми та іони сторонніх елементів, так і різні механічні дефекти (порожні вузли, тріщини, зсуви) кристалічної решітки.

**Електронні домішкові напівпровідники** Якщо в кристал чотиривалентного германію або кремнію ввести атоми п'ятивалентного фосфору, то п'ятий електрон атома фосфору не буде брати участі в утворенні хімічного зв'язку

і завдяки енергії теплових коливань відірветься від свого атома. Внаслідок цього утвориться вільний електрон, що може брати участь в електропровідності. При цьому ковалентний зв'язок не розривається, тобто замість вільного електрона не виникає дірка. Такі атоми домішки, що постачають електрони провідності в кристалах, називаються *донорами*.

З точки зору зонної теорії процес такий. Домішки змінюють електричне поле решітки, а також впливають на рух електронів і їх енергетичний стан. На енергетичній схемі кристала з'являються *домішкові енергетичні рівні (локальні рівні)*, розташовані в забороненій зоні (рис. 13.7, а).

Якщо валентність домішки на одиницю більша від валентності основних атомів, то локальні рівні домішкових електронів розташовані поблизу дна зони провідності. Електрони, що на них знаходяться, називають *донорними*. Для переходу донорних електронів в зону провідності необхідна дуже незначна енергія  $E_n$ , яку вони можуть одержати навіть при кімнатній температурі. Наприклад, якщо для кремнію домішкою є миш'як, то  $E_n = 0,054$  еВ.

В результаті в напівпровіднику виникає *електронна домішкова провідність (провідність n-типу)*. Напівпровідники з такою провідністю називаються електронними, або напівпровідниками *n*-типу. В цьому випадку є тільки один вид носіїв заряду — електрони.

**Діркові  
домішкові  
напівпровідники**

Нехай для чотиривалентного германію або кремнію домішкою будуть тривалентні атоми бору. Такий атом не може заповнити всі зв'язки в решітці германію, тому що у нього не дістає одного електрона. Але він може перехопити електрон у найближчого атома германію, у якого замість електрона, що був втрачений, з'являється «*позитивна дірка*», яка може заповнюватись

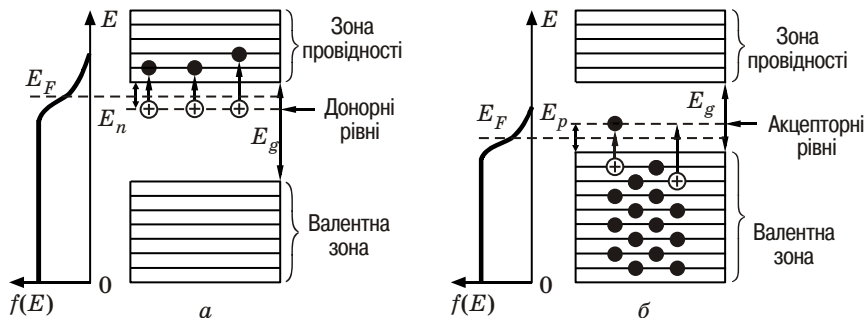


Рис. 13.7

електроном від сусіднього атома германію. Такий процес послідовного заповнення дірки еквівалентний руху дірки у напівпровіднику

Згідно з зонною теорією тривалентні домішки приводять до появи в забороненій зоні незайнятих домішкових енергетичних рівнів, які називаються *акцепторними рівнями*. Домішкові атоми називаються *акцепторами*. Домішкові рівні розміщуються вище верхнього рівня заповненої валентної зони на відстані  $\sim 0,08$  eV (рис. 13.7, б). Ця енергія значно менша за ширину забороненої зони  $E_g$ , тому електрони переходять із валентної зони на акцепторні рівні навіть при досить низьких температурах, де вони зв'язуються з атомами тривалентної домішки (бор), і не маючи можливості переміщуватись по кристалу, не беруть участі в електропровідності.

В результаті в валентній зоні з'являються вакантні електронні рівні — *дірки*. Під дією зовнішнього електричного поля дірки дрейфують у напрямі поля і валентна зона кристала стає зоною *діркової провідності*.

Такий тип провідності називається *домішковою дірковою провідністю, або провідністю р-типу*, а напівпровідники з такою провідністю — *дірковими або напівпровідниками р-типу*. Тут носіями заряду є тільки дірки.

Зауважимо, що на відміну випадку власної провідності, яка здійснюється одночасно електронами і дірками, домішкова провідність зумовлена в основному носіями заряду одного знаку: електронами при донорній домішці і дірками — при акцепторній. Ці носії заряду називають *основними*. Крім того у напівпровідниках з домішковою провідністю є *неосновні носії заряду*, які з'являються як власна провідність напівпровідників. У напівпровідниках *n*-типу — спостерігаються дірки в валентній зоні, а в напівпровідниках *p*-типу — електрони в зоні провідності.

<b>Рівень Фермі в домішкових напівпровідниках</b>
---

Положення рівня Фермі в домішкових напівпровідниках суттєво змінюється порівняно з власними напівпровідниками.

При температурі абсолютного нуля енергія Фермі донорного напівпровідника  $E_{F_n}$  лежить посередині між донорними рівнями і дном зони провідності (рис. 13.8, а), а енергія Фермі акцепторного напівпровідника — між акцепторними рівнями і верхнім рівнем валентної зони (рис. 13.8, б).

При збільшенні температури рівні Фермі в обох випадках прямують до положення рівня Фермі у власних напівпровідниках:

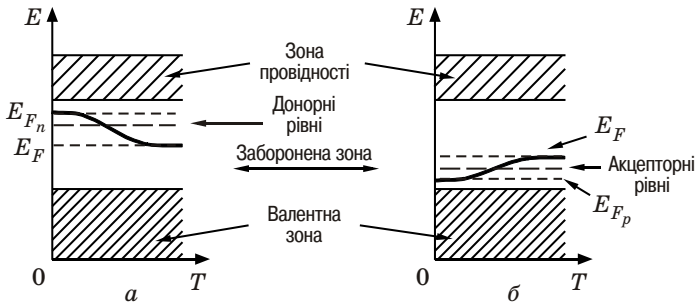


Рис. 13.8

$$E_F = \frac{E_g}{2}.$$

**Провідність домішкових напівпровідників**

Провідність домішкових напівпровідників визначається концентрацією носіїв і їх рухливістю. На рис. 13.9 зображено графік залежності логарифма питомої провідності  $\ln$  від зворотної температури  $1/T$ . Ділянка  $AB$  визначає домішкову провідність напівпровідника. Зростання домішковою провідності при збільшенні температури обумовлене зростанням концентрації домішкових носіїв.

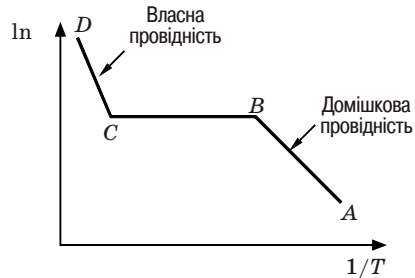


Рис. 13.9

Ділянка  $BC$  відповідає вичерпанню домішків, а на ділянці  $CD$  спостерігається власна провідність напівпровідників.

### 13.4. Контактні явища в металах та напівпровідниках

**Робота виходу електрона з металу**

Для того щоб відірвати від ізольованого атома валентний електрон, необхідно виконати роботу, тобто передати електрону енергію, що в електрон-вольтах дорівнює іонізаційному потенціалу. Відповідне поняття для твердого тіла називається *роботою виходу*.

Якщо звернутись до створення зонної структури з енергетичних спектрів окремих атомів (див. розділ 13.1), то ми побачимо, що з валентних рівнів створюється наполовину заповнена валентна зона, а з вільних рівнів — наступна вільна зона (рис. 13.10).

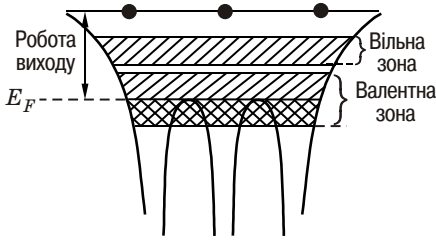


Рис. 13.10

*Роботою виходу називається мінімальна енергія, необхідна для видалення електрона з металу, що дорівнює відстані від верхнього рівня, зайнятого електронами в металі при  $T = 0$ , тобто від рівня Фермі, до енергії електрона в вакуумі.*

Таким же чином визначається робота виходу для напівпровідників, вона також відраховується від рівня Фермі.

З іншої точки зору появу роботи виходу можна пояснити, якщо взяти до уваги, що при видаленні електрона з металу з'являється надлишковий позитивний заряд, індукований самим електроном. Як наслідок, електрон притягується цим зарядом. Крім цього, коли окремі швидкі електрони вилітають з металу, над його поверхнею створюється «електронна хмарка», яка разом з зовнішнім шаром позитивних іонів решітки створює «подвійний електронний шар», подібний тонкому конденсатору товщиною  $10^{-10} - 10^{-9}$  м. Цей шар не створює електричного поля в зовнішньому просторі, але перешкоджає виходу електронів з металу.

Різниця потенціалів, що характеризує електричне поле подвійного шару, називається *поверхневим стрибком потенціалу або контактною різницею потенціалів між металом та вакуумом*

$$= \frac{A}{e},$$

де  $A$  — робота виходу,  $e$  — абсолютна величина заряду електрона, тобто робота виходу дорівнює  $A = e$ .

Потенціал зовні металу за подвійним шаром дорівнює нулю. Всередині металу потенціал позитивний і дорівнює потенціальна енергія електронів провідності від'ємна і дорівнює  $-e = -A$ . Весь об'єм металу для електронів провідності можна розглядати як потенціальну яму, глибина якої дорівнює роботі виходу  $A$  (рис. 13.11).

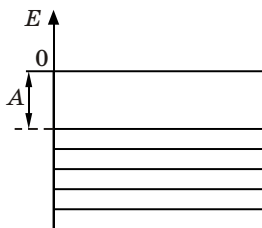


Рис. 13.11

Робота виходу залежить від хімічної природи металу та чистоти його поверхні і знаходиться в межах декількох електрон-вольт (для калію  $A = 2,2$  еВ, у платині  $A = 6,3$  еВ). При покритті поверхні металу шаром оксиду



лужноземельного металу (Ca, Sr, Ba) робота виходу суттєво знижується, що важливо при створенні електронних приладів.

**Емісійні явища**

Явище емітування електронів металом при наданні їм енергії, рівної енергії виходу, називається *електронною емісією*. Це можливо при різних методах збільшення енергії електронів.

*Термоелектронна емісія* — випромінювання електронів розжареними металами.

*Фотоелектронна емісія* — емітування електронів з металу під дією електромагнітного випромінювання видимого та короткохвильового діапазону.

*Вторинна електронна емісія* — випромінювання електронів поверхнею металів, напівпровідників або діелектриків при бомбардуванні їх пучком електронів.

*Автоелектронна емісія (холодна емісія)* — емісія електронів з поверхні металу під впливом сильного зовнішнього електричного поля.

**Контактна різниця потенціалів**

При контакті двох різних металів між ними виникає різниця потенціалів, що має назву *контактної різниці потенціалів*.

Італійський фізик А. Вольта експериментально встановив два закони.

1. *Контактна різниця потенціалів залежить тільки від хімічного складу і температури стичних металів.*

2. *Контактна різниця потенціалів послідовно з'єднаних металевих провідників при однаковій температурі не залежить від хімічного складу проміжних провідників, а дорівнює контактній різниці потенціалів, що з'являється при безпосередньому з'єднанні крайніх провідників.* Цей закон має назву **закону послідовних контактів Вольта**. З цього закону можна зробити важливий висновок: у замкненому колі електронних провідників, які знаходяться при однаковій температурі, результуюча різниця потенціалів дорівнює нулю, тобто струм по такому колу не піде. Для одержання струму необхідно або підтримувати контакти в електронних провідниках при різних температурах, або створювати контакти провідників з різним типом провідності.

Поява контактної різниці потенціалів наглядно пояснюється з точки зору зонної теорії.

Якщо в контакт вступають два метали з різними роботами виходу  $A_1$  і  $A_2$  (наприклад,  $A_1 < A_2$ ) і різними рівнями Фермі  $E_{F_1}$  та  $E_{F_2}$

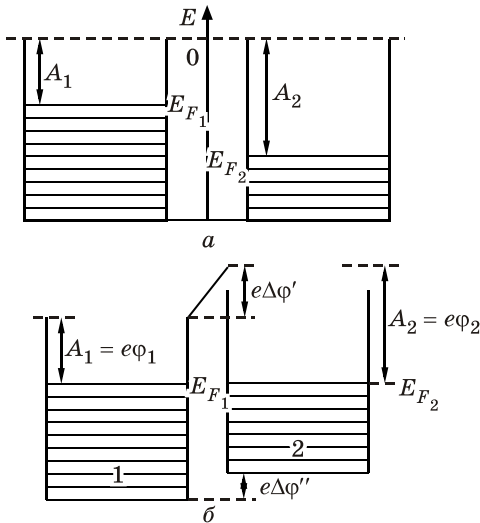


Рис. 13.12

потенціалу  $\varphi_1$ , зменшується на величину  $e\varphi_1$ , а в металі 2, зарядженому негативно до потенціалу  $\varphi_2$ , — збільшується на  $-e\varphi_2$  (зауважимо, що потенціал металу і потенціальна енергія електрона в ньому мають різні знаки).

Таким чином при контакті двох металів виникає різниця потенціалів

$$\varphi = \frac{e\varphi_2 - e\varphi_1}{e}$$

або

$$\varphi = \frac{A_2 - A_1}{e}.$$

Різниця потенціалів  $\varphi$  виникає всередині контакту між точками, які лежать зовні металів, поблизу контактуючих поверхонь, тому  $\varphi$  називають **зовнішньою контактною різницею потенціалів**. Вона зумовлена **різницею робіт виходу** для контактуючих металів і дорівнює різниці потенціалів виходу  $\varphi_1 - \varphi_2$  металів.

Крім зовнішньої контактної різниці потенціалів маємо ще **внутрішню різницю потенціалів**  $\varphi''$ , пов'язану з різницею рівнів Фермі в металах

$$\varphi'' = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e}.$$

( $|E_{F1}| < |E_{F2}|$ ) (рис. 13.12, а), то після утворення контакту електрони з самих високих рівнів першого металу будуть переходити на більш низькі вільні рівні другого металу. Метали будуть заряджатись різними знаками. Для стану термодинамічної рівноваги стичних металів необхідно, щоб рівні Фермі були розташовані на одному рівні. Тоді зонна схема матиме вигляд, зображений на рис. 13.12, б. Потенціальна енергія електрона в металі 1, зарядженому позитивно до

Зміна потенціалу від  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  відбувається на подвійному електричному шарі товщиною  $l$ :

$$l = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 \epsilon'}{en_0}},$$

де  $n_0$  — концентрація зарядів в подвійному шарі,  $\epsilon_0$  — електрична стала.

Товщина подвійного шару дорівнює  $\sim 10^{-10}$  м, тобто порядку сталої решітки металу, тому питомий опір цього шару такий же, як і питомий опір самого металу. Крізь контактний шар двох металів електричний струм проходить однаково добре в обох напрямках, тобто відсутній випрямляючий ефект — однібічна провідність.

**p-n-перехід**

**Електронно-дірковим переходом або p-n-переходом** називають контакт двох домішкових напівпровідників з провідністю різного типу.

Такі переходи використовуються не тільки для випрямлення змінних струмів, а також для генерації і підсилення високочастотних струмів. Велика кількість напівпровідникових приладів, дія яких ґрунтується на властивостях p-n-переходів, широко застосовуються в обчислювальній, електро- і радіотехніці та електроніці.

Розглянемо дію p-n-переходу, створеного контактом донорного напівпровідника (робота виходу  $A_n$ , рівень Фермі  $E_{F_n}$ ) і акцепторного напівпровідника (робота виходу  $A_p$ , рівень Фермі  $E_{F_p}$ ) (рис. 13.13, а).

При контакті електрони з n-напівпровідника будуть переходити в p-напівпровідник, а дірки — в зворотному напрямку, завдяки їх

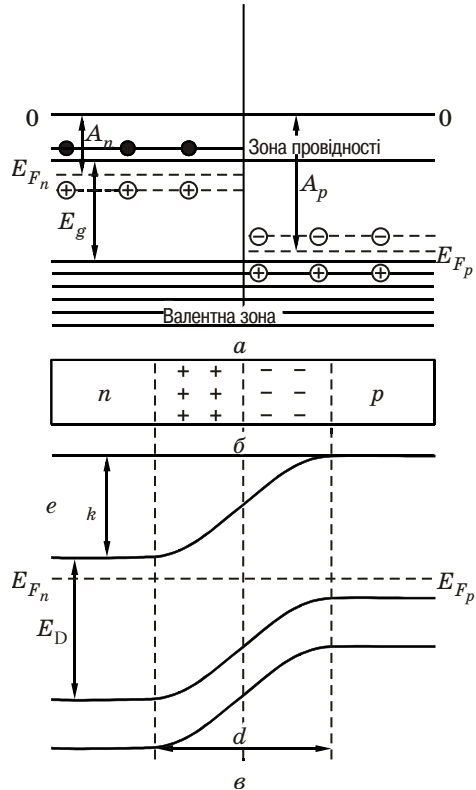


Рис. 13.13

великій концентрації в  $n$ - і  $p$ -напівпровідниках відповідно (рис. 13.13, б). Одночасно будуть вирівнюватись їх рівні Фермі (рис. 13.13, в). В результаті в контактних шарах  $n$ - і  $p$ -напівпровідників з'являться об'ємні заряди: позитивний — в  $n$ -напівпровіднику, негативний в  $p$ -напівпровіднику (з'явиться подвійний електричний шар).

Між цими шарами виникне контактна різниця потенціалів  $k$ . В стані рівноваги потоки носіїв струму будуть однакові в обох напрямках, тобто потоки основних носіїв струму компенсуються потоками неосновних носіїв і результуючий потік носіїв через  $p$ - $n$ -перехід дорівнює нулю.

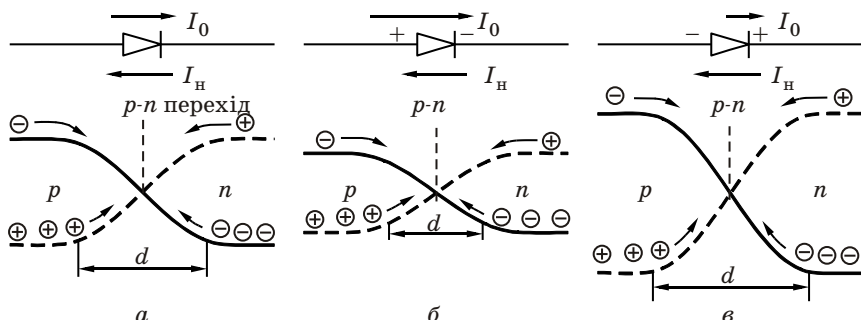


Рис. 13.14

**Напівпровідниковий діод**

На основі  $p$ - $n$ -переходу створений напівпровідниковий діод, що використовується для випрямлення і перетворення змінних струмів.

На рис. 13.14 схематично зображено напівпровідниковий діод і потенціальні бар'єри в  $p$ - $n$ -переході для електронів (суцільна крива) і для дірок (пунктирна крива).

У відсутності зовнішньої напруги (в стані рівноваги) деяка кількість основних носіїв долає потенціальний бар'єр і через  $p$ - $n$ -перехід іде невеликий струм  $I_0$ , який компенсується зустрічним струмом  $I_n$  неосновних носіїв, які легко «скочуються» з потенціального бар'єру (рис. 13.14, а).

При прямій зовнішній напрузі (плюс подається на  $p$ -, а мінус — на  $n$ -напівпровідники), висота потенціального бар'єру зменшується, основний ток  $I_0$  збільшується, а  $I_n$  залишається попереднім, бо від висоти бар'єру не залежить. Сила результуючого струму збільшується при зростанні напруги. Такий напрямок називається прямим або пропусковим. На рис. 13.15 зображено вольт-амперну характеристику  $p$ - $n$ -переходу.

Права частина показує залежність величини струму від прикладеної напруги у прямому напрямку.

При зміні знаку напруги: плюс подається на  $n$ -, а мінус — на  $p$ -напівпровідник (такий напрямок називається зворотним або заірним) потенціальний бар'єр зростає, струм основних носіїв зменшується. Як наслідок, результуючий струм швидко досягає насичення (не залежить від напруги) і становиться рівним  $I_H$ . Тобто в заірному напрямку  $p$ - $n$ -перехід пропускає тільки малий струм, обумовлений неосновними носіями (ліва частина рис. 13.15), його опір при цьому досить великий. При великій зворотній напрузі сила струму різко зростає, що пов'язано з електричним пробоем переходу.

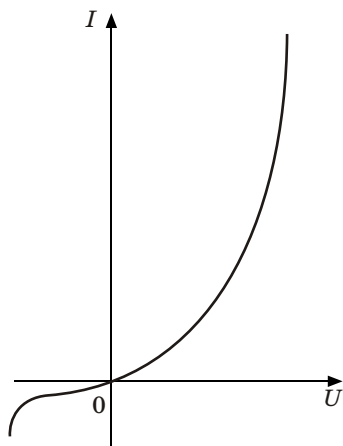


Рис. 13.15

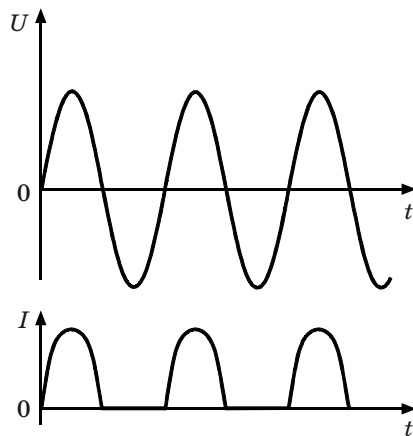


Рис. 13.16

Неоднаковий опір в прямому і зворотньому напрямках дозволяє використовувати  $p$ - $n$ -переходи для випрямлення змінного струму. На рис. 13.16 зображений графік струму, що проходить через перехід в залежності від напруги, що змінюється за гармонічним законом. Тут ширина заірного шару і опір переходу змінюються згідно зі змінами напруги. Розрахунки показують, що прямий струм може перевищувати зворотній приблизно в  $10^9$  разів.

Залежність сили струму в напівпровідниковому діоді від зовнішньої напруги  $U$  має вигляд

$$I = I_H \left( e^{\pm \frac{eU}{k_B T}} - 1 \right),$$

де знак плюс відповідає напрузі в прямому напрямку, а мінус — в зворотньому.

Крім напівпровідникових діодів широко застосовують напівпровідникові тріоди або транзистори, які мають два  $p-n$ -переходи.

### 13.5. Термоелектричні явища

До термоелектричних явищ належать три ефекта: ефект Зеебека, ефект Пельть'є та ефект Томсона.

#### Явище Зеебека

*Явище Зеебека або термоелектричний ефект (відкритий Зеебеком у 1821 р.) характеризується появою електрорушійної сили (термо-ЕРС) в електричному колі, що складається з послідовно з'єднаних різних матеріалів, якщо температура контактів різна:  $T + dT$  та  $T$ . В замкнутому колі з'являється струм, який називається термоелектричним.*

В найпростішому випадку, коли коло має тільки два різних матеріали, воно має назву *термоелемента* або *термопари*.

Термопари застосовуються як для вимірювання дуже малих різниць температур, так і для визначення дуже високих та дуже низьких температур (наприклад, всередині домен та у випадку рідких газів). Точність вимірювання температури за допомогою термопари досягає декілька градусів, а для деяких термопар 0,01 К. Термопари мають великі переваги перед звичайними термометрами: мають більшу чутливість, малу інерційність, дозволяють проводити виміри в широкому інтервалі температур та дистанційно.

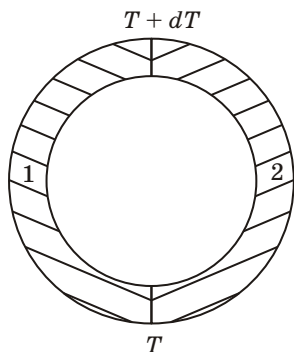


Рис. 13.17

Різниця потенціалів  $d\mathcal{E}_{12}$  розімкнутого кола залежить від різниці температур і матеріалу провідників

$$d\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{12}dT.$$

$d\mathcal{E}_{12}$  (і  $\mathcal{E}_{12}$ ) вважають додатною величиною, якщо потенціал «гарячого» контакту вище потенціалу «холодного» контакту (рис. 13.17). Крім того

$$d\mathcal{E}_{12} = -d\mathcal{E}_{21} \text{ або } \mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}_{21}.$$

Величина  $\mathcal{E}_{12}$ , яка характеризує контактну пару, називається *диференціальною термо-ЕРС* і може залежати від температури, тому для визначеної різниці температур  $T_2 - T_1$  термо-ЕРС дорівнює

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \mathcal{E}_{12}(T)dT.$$

Якщо в невеликому інтервалі температур вважати, що  $\rho_{12} = \text{const}$ , то

$$\mathcal{E}_{12} = \rho_{12}(T_1 - T_2).$$

Пояснити появу термо-ЕРС можна, якщо взяти до уваги, що в будь-якій системі в стані термодинамічної рівноваги рівні Фермі повинні співпадати. Але якщо концентрація електронів в контактуючих металах різна, то і енергії Фермі, що відраховуються від дна зони провідності в кожному металі будуть на різному рівні. Тобто з'явиться потенціальний бар'єр на контакті — *внутрішня різниця потенціалів*  $U_{\text{вн}}$ . Вона визначається різницею енергій Фермі  $E_F$  у вихідних металах

$$U_{\text{вн}} = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e}.$$

Якщо коло складається з двох металів, то  $U_{\text{вн}}$  з'явиться на обох контактах. При однаковій температурі контактів електричне поле направлено однаково в обох контактах — від більшого рівня Фермі до меншого. Це означає, що при обході по замкненому контуру в одному контакті обход буде по полю, а в другому — проти поля. *Циркуляція вектора напруженості електричного поля буде дорівнювати нулю.*

Коли температура одного контакту зміниться на  $dT$ , то  $U_{\text{вн}}$  зміниться, тому що енергія Фермі залежить від температури. Але при зміні внутрішньої контактної різниці потенціалів зміниться електричне поле в одному з контактів, як наслідок, циркуляція вектора напруженості буде відмінна від нуля, тобто з'явиться ЕРС в замкненому колі.

**Явище Пельт'є**

*Явище Пельт'є або електротермічний ефект Пельт'є, відкрите в 1834 р., представляє собою ефект, зворотній явищу Зеебека.*

*Суть ефекту полягає в тому, що коли через контакт двох провідників пропустити електричний струм, то в контакті відбувається або виділення, або поглинання тепла (додатково до теплоти Джоуля) в залежності від напрямку струму. Якщо змінити напрямок струму, то змінюється знак ефекту.*

Кількість теплоти  $dQ$ , що виділяється, та її знак залежать від виду контактуючих провідників, сили струму і часу проходження струму, тобто пропорційна величині заряду, що пройшов через контакт,  $dq = Idt$ :

$$dQ_{12} = {}_{12}Idt \text{ або } Q_{12} = {}_{12}It.$$

Коефіцієнт  $\Pi$ , що залежить від природи контактуючих матеріалів, має назву *коефіцієнту Пельт'є* і визначається як *кількість теплоти, що виділяється (або поглинається) на контакті*

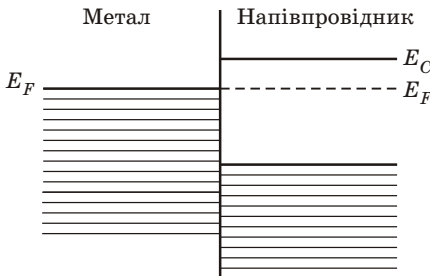


Рис. 13.18

*при проходженні через нього одиниці заряду.*

$dQ_{12}$  (і  $\Pi_{12}$ ) означає, що струм йде від першої речовини до другої, тоді як  $dQ_{21}$  (і  $\Pi_{21}$ ) відноситься до протилежного випадку (струм іде від другої речовини до першої).

Причину появи ефекту Пельт'є можна зрозуміти, якщо розглянути енергетичну картину контакту металу та напівпровідника (рис. 13.18).

В металі провідність забезпечується електронами поблизу рівня Фермі ( $E_F$ ). В напівпровіднику (в даному випадку електронному) струм переноситься електронами зони провідності. З рис. 13.18 очевидно, що середня енергія електронів провідності в напівпровіднику більше, ніж в металі на величину не меншу, ніж  $E_C - E_F$ , де  $E_C$  — енергія дна зони провідності. Щоб електрони з металу могли перейти в напівпровідник, вони повинні подолати потенціальний бар'єр висотою  $E_C - E_F$ . Для цього вони повинні одержати енергію від решітки, і як наслідок, метал в області контакту охолоджується. При зміні напрямку струму електрони, що переходять з напівпровідника в метал, матимуть надлишок енергії порівняно з електронами провідності металу. Тоді електрони, що проходять через контакт, віддадуть надлишок енергії (не менше  $E_C - E_F$ ) решітці, тобто на контакті виділиться теплота.

**Явище Томсона** *Явище Томсона або електротермічний ефект Томсона, передбачений в 1856 р. Томсоном, експериментально був підтверджений в 1867 р. Леру.*

*Якщо вздовж провідника, по якому проходить електричний струм, існує перепад температур, то додатково до теплоти Джоуля в об'ємі провідника виділяється або поглинається, в залежності від напрямку струму, деяка кількість теплоти  $Q_T$  (теплота Томсона), пропорційна силі струму  $I$ , часу  $t$ , перепаду температур  $(T_2 - T_1)$  і коефіцієнту (коефіцієнту Томсона), який залежить від природи матеріала:*



$$Q_T = (T_2 - T_1)It.$$

В першому наближенні ефект Томсона можна пояснити, якщо взяти до уваги, що електрони в гарячих провідниках мають більшу енергію, ніж в менш нагрітих, тому рухаючись в напрямку зменшення температури, вони віддають частину своєї енергії решітці і, як наслідок, виділяється теплота Томсона. Коли ж електрони рухаються у бік збільшення температури, то вони одержують свою енергію за рахунок енергії решітки — відбувається поглинання теплоти Томсона.

### 13.6. Фотопровідність. Внутрішній фотоэффект

В розділі 5.7 розглядалось явище виривання електронів з поверхні твердого тіла за рахунок енергії поглинутого електромагнітного випромінювання — зовнішній фотоэффект.

В напівпровідниках можливий *внутрішній фотоэффект*, який, на відміну від зовнішнього, не супроводжується емітуванням електронів з поверхні. *При внутрішньому фотоэффекті під впливом електромагнітного опромінювання змінюється концентрація носіїв заряду в напівпровідниках, тобто з'являються додаткові нерівноважні носії струму.*

*Внутрішній фотоэффект супроводжується виникненням додаткової провідності — фотопровідності, яка полягає в зміні електричного опору під впливом електромагнітного опромінювання.*

Загальна питома електропровідність напівпровідника

$$= \sigma_0 + \sigma_{\text{ф}},$$

де  $\sigma_0$  — темнова питома електропровідність, яка зумовлена тепловим збудженням носіїв заряду і має місце при затемненні напівпровідника;  $\sigma_{\text{ф}}$  — питома фотопровідність, що дорівнює

$$\sigma_{\text{ф}} = e n_{\text{он}} (u_n \langle \tau_n \rangle + u_p \langle \tau_p \rangle),$$

де  $n_{\text{он}}$  — кількість пар нерівноважних носіїв — електронів і дірок, які генеруються світлом в одиниці об'єму напівпровідника за 1 с;  $\langle \tau_n \rangle$  і  $\langle \tau_p \rangle$  — середній час життя електронів та дірок,  $u_n$  і  $u_p$  — їх рухомості.

**Власна  
та домішкова  
фотопровідність**

Розрізняють власну і домішкову фотопровідність в залежності від збудження власних або домішкових носіїв заряду.

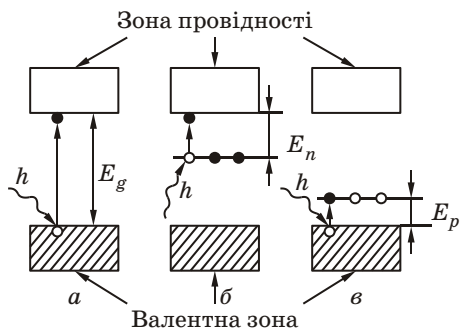


Рис. 13.19

електронами з валентної зони, які переходять в зону провідності (рис. 13.19, а). Це приводить до появи додаткових (нерівноважних) електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні.

Схему появи носіїв струму під дією світла в домішкових донорних (б) і акцепторних (в) напівпровідниках показано на рис. 13.19, б, в.

В цих випадках фотон з енергією  $h$  переводить електрон з донорного рівня в зону провідності і при цьому  $h > E_n$  або з валентної зони перекидає електрон на акцепторний вільний домішковий рівень і тоді  $h > E_p$ .

Очевидно, що в усіх випадках  $h \geq E$ , де  $E$  — енергія активації відповідної провідності. Це означає, що існує червона межа внутрішнього фотоefекту, яка визначається за умови  $h_{\text{ч}} \geq E$ , де довжина хвилі  $\lambda_{\text{ч}} = hc / E$ .

Для власної фотопровідності при  $E \sim 2 \text{ eV}$   $\lambda_{\text{ч}} \approx 600 \text{ нм}$  (жовте світло). У домішкових напівпровідниках  $E_{(n, p)} \sim 0,01 - 0,1 \text{ eV}$  і  $\lambda_{\text{ч}} \sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ м}$  (інфрачервона область спектра).

#### Фоторезистори

Залежність фотопровідності напівпровідників від освітленості застосовується в фоторезисторах, у яких світлова чутливість ( $dI/d\Phi$ ) набагато вища ніж у вакуумних фотоелементах, оснований на зовнішньому фотоefекті.

Основним елементом фоторезистора є тонкий шар напівпровідника 2 (рис. 13.20), нанесений на ізолюючу основу 3, наприклад, вакуумним напиленням. По краях шару напівпровідника наноситься металевий контакт 1. Захисна лакова плівка 4 запобігає пошкодженню приладу.

Розглянемо як змінюється концентрація носіїв з часом при освітленні фоторезистора імпульсним світлом. На рис. 13.21

Фотопровідність напівпровідників типу PbS, CdS, CdSe і т. ін. пов'язана з електронними переходами між зоною провідності і валентною зоною, тобто для них характерна власна фотопровідність.

При цьому кванти світла з енергією рівною або більшою ширини забороненої зони ( $h \geq E_g$ ) поглинаються

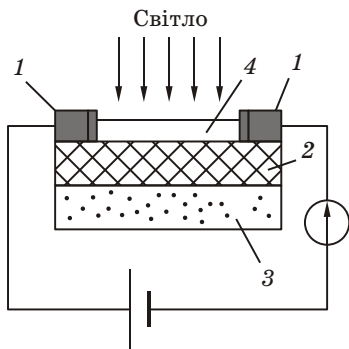


Рис. 13.20

зображено в залежності від часу: а) інтенсивність імпульсного світла  $\Phi$ , яке попадає на фоторезистор, б) величина концентрації носіїв.

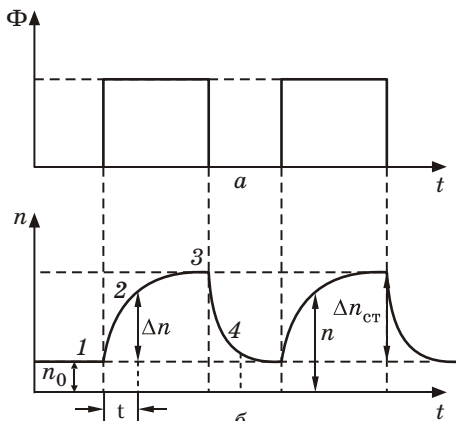


Рис. 13.21

Без освітлення рівноважна концентрація носіїв дорівнює  $n_0$  (темнова концентрація) ділянка 1 на рис. 13.21, б. При включенні світла інтенсивність процесу генерації нерівноважних зарядів зростає з часом за експоненціальним законом (ділянка 2). Збільшення концентрації носіїв при опромінюванні дорівнює

$$n(t) = n(t) - n_0 = N(1 - e^{-t/\tau}),$$

де  $N$  — коефіцієнт, який характеризує напівпровідник,  $N$  — число фотонів, які падають за 1 с на одиницю площі,  $\tau$  — час життя нерівноважних носіїв заряду, що визначається як час, за який концентрація нерівноважних носіїв змінюється в  $e$  разів.

Якщо час опромінювання досить великий:  $t > (3 \div 5)\tau$ , то концентрація нерівноважних носіїв заряду досягає свого стаціонарного значення  $n_{ct}$  (ділянка 3). Для власного поглинання, коли електрони і дірки з'являються парами, кількість нерівноважних дірок дорівнює кількості нерівноважних електронів, тоді стаціонарна концентрація дорівнює

$$n_{ct} = N.$$

Після відключення світла зміна концентрації нерівноважних носіїв заряду має вигляд

$$n(t) = n_{ct}e^{-t/\tau},$$

тобто генерація носіїв припиняється і концентрація нерівноважних носіїв експоненціально зменшується, повертаючись до темної (рівноважної) концентрації  $n_0$ .

### Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. В чому суть методів наближення сильного і слабого зв'язку? Яка між ними різниця?
2. Чим відрізняються енергетичні стани електронів в ізольованому атомі і кристалі?
3. Як створюються енергетичні зони в кристалах твердих тіл?
4. Поясніть різницю електричних властивостей металів, діелектриків і напівпровідників з точки зору зонної теорії твердого тіла.
5. Як залежить електропровідність напівпровідників від температури? Поясніть цю залежність з точки зору зонної теорії.
6. Чим відрізняються температурні залежності електропровідності металів та напівпровідників?
7. Чим обумовлена провідність власних напівпровідників?
8. Де розташований рівень Фермі у власному напівпровіднику? Доведіть це.
9. Нарисуйте зонні схеми напівпровідників з електронною і дірковою домішковою провідністю і поясніть механізм їх провідності.
10. В чистий германій введений домішок миш'яку. Виходячи з періодичної системи Д. І. Менделєєва, визначити і пояснити одержаний тип провідності.
11. Чому при достатньо високих температурах в домішкових напівпровідниках переважає власна провідність?
12. Поясніть і нарисуйте на зонній схемі положення рівня Фермі для електронного і діркового напівпровідників: 1) при  $T = 0$  К; 2) при збільшенні температури.
13. Які механізми власної і домішкової фотопровідності? Що таке червона межа фотопровідності?
14. У чому причини появи контактної різниці потенціалів для металів?
15. Чим пояснюється поява зовнішньої і внутрішньої різниці потенціалів при контакті двох металів?
16. Коли з'являється запірний контактний шар при контакті металу з напівпровідником  $n$ -типу?  $p$ -типу? Поясніть механізм його створення.
17. Як пояснити однобічну провідність  $p$ - $n$ -переходу?

18. Поясніть механізм фізичних процесів, що відбуваються в  $p$ - $n$ -переході, застосовуючи зонну схему.
19. Нарисуйте вольт-амперну характеристику  $p$ - $n$ -переходу. Поясніть появу прямого і зворотного струму.
20. Поясніть, в якому напрямку не можуть проходити через запірний шар  $p$ - $n$ -переходу вільні електрони та дірки.
21. Чому через напівпровідниковий діод проходить слабкий струм навіть при запірній напрузі?
22. В чому суть термоелектричних явищ? Як пояснити їх появу?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Одержати формулу для температурного коефіцієнта опору напівпровідника з власною провідністю.

#### Розв'язання

За визначенням температурний коефіцієнт опору дорівнює

$$= \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}.$$

Температурна залежність коефіцієнта власної питомої електропровідності напівпровідників

$$= R_0 e^{-\frac{E_g}{2k_B T}},$$

де  $R_0$  дорівнює  $(T \rightarrow \infty)$ ,  $E_g$  — ширина забороненої зони.

Візьмемо до уваги, що  $R = 1/\rho$ , а  $R_\infty$ , де  $\rho_\infty$  — питомий опір.

Тоді опір напівпровідника дорівнює

$$R = R_\infty e^{\frac{E_g}{2k_B T}}.$$

Якщо продиференціювати останній вираз, матимемо

$$\frac{dR}{dT} = R_\infty e^{\frac{E_g}{2k_B T}} \frac{E_g}{2k_B} \left( -\frac{1}{T^2} \right) = -R \frac{E_g}{2k_B} \frac{1}{T^2} = -R \frac{E_g}{2k_B T^2},$$

звідки  $\alpha = -\frac{E_g}{2k_B} \frac{1}{T^2}.$

## Задача 2

Знайти ширину забороненої зони  $E_g$  власного напівпровідника, якщо при температурі  $T_1$  його опір дорівнює  $R_1$ , а при температурі  $T_2$  опір —  $R_2$ . Врахувати, що  $T_2 > T_1$ .

*Розв'язання*

Питома провідність власного напівпровідника

$$= \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}.$$

Візьмемо до уваги, що  $\sigma = \frac{1}{R}$ , а  $R$ , тобто  $\frac{1}{R}$ , де  $\sigma_0$  — питомий опір напівпровідника.

Тоді

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1};$$

$$\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}} = \frac{e^{-\frac{E_g}{2k_B T_2}}}{e^{-\frac{E_g}{2k_B T_1}}} = e^{\frac{E_g}{2k_B} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Звідки ширина забороненої зони дорівнює

$$E_g = 2k_B \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

## Задача 3

Для напівпровідникового зразка у формі куба зі стороною  $l$  вимірний опір  $R_0$  у відсутності освітлення і при освітленні  $R$ . Знайти концентрацію електронів  $n$  і дірок  $p$ , обумовлених освітленням, якщо їх рухомості  $u_n$  і  $u_p$ .

Вважати  $n = p$ .

*Розв'язання*

За умовами задачі  $n = p$ , тоді фотопровідність

$$\Phi = e(u_n + u_p) n.$$

З іншої сторони

$$\Phi = \sigma_0 \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right),$$

де  $\sigma_0$  — питома фотопровідність і опір при освітленні,  $\sigma_0$  і  $R_0$  — темнова питома фотопровідність і опір.

Якщо взяти до уваги, що

$$R = \frac{l}{S},$$

де  $l$  — довжина і  $S$  — площа перерізу зразка ( $S = l^2$ ), то одержимо

$$\phi = \frac{0 - (0 -) \frac{l^2}{S^2}}{0 \frac{l^2}{S^2}} = \frac{(R_0 - R) \frac{l}{S}}{R_0 R} = \frac{R_0 - R}{R_0 R l},$$

звідки

$$n = \frac{R_0 - R}{e(u_n + u_p)R_0 R l}.$$

### Задачі для самостійного розв'язання

**13.1.** Визначити рівень Фермі у власному напівпровіднику, якщо енергія  $E$  активації дорівнює 0,1 еВ. За нульовий рівень відрахунку кінетичної енергії електронів вважати нижчий рівень зони провідності.

*Відповідь:*  $E_F = -0,05$  еВ.

**13.2.** Дістати математичний вираз для обчислення ширини забороненої зони напівпровідника з експериментальної залежності питомої електропровідності від оберненої абсолютної температури.

*Відповідь:*  $E_g = -2k_B \text{tg}$  .

**13.3.** Знайти енергію активації чистого телуру при 0 К, якщо його електропровідність зростає у п'ять разів при збільшенні температури від 300 до 400 К.

*Відповідь:*  $E = 0,34$  еВ.

**13.4.** Порівняти електропровідність чистого германію при  $-50$  і  $+100$  С. Енергія активації германію дорівнює 0,72 еВ.

*Відповідь:*  $\frac{2}{1} = 1855$ .

**13.5.** Червона межа фотоефекту чистого германію при азотних температурах дорівнює 1,7 мкм. Знайти температурний коефіцієнт опору германію при  $T = 300$  К.

*Відповідь:*  $= -0,05 \text{ К}^{-1}$

**13.6.** Ширина забороненої зони для кремнію при  $T = 300$  К дорівнює  $1,14$  еВ. Знайти найменшу частоту фотона, що переведе електрон з валентної зони до зони провідності. Чому дорівнює його довжина хвилі?

*Відповідь:*  $> 2,75 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ,  $= 1,09 \text{ мкм}$ .

**13.7.** Світло від водневої лампи падає на кристал  $CdS$ . Які спектральні лінії серії Бальмера поглинаються, а які пройдуть? Ширина забороненої зони  $CdS$  дорівнює  $2,42$  еВ.

*Відповідь:* Всі лінії поглинаються, окрім червоної лінії  $= 656 \text{ нм}$ .

**13.8.** Знайти температурну залежність питомого коефіцієнта опору для випадку власної провідності напівпровідника  $E_g \gg k_B T$ .

*Відповідь:*  $= \infty e^{\frac{E_g}{2k_B T}}$ .

**13.9.** Зразок з германію нагрівають від  $0$  до  $17$  С. Ширина забороненої зони германію  $E_g = 0,72$  еВ. Визначити, у скільки разів зросте його питома електропровідність.

*Відповідь:*  $\frac{2}{1} = 2,45$ .

**13.10.** Знайти температурний коефіцієнт опору для германія при температурі  $T = 300$  К, якщо ширина забороненої зони  $E_g = 1,2 \cdot 10^{-19}$  Дж.

*Відповідь:*  $= -0,097 \text{ К}^{-1}$ .



# IV

## ОСНОВИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ФІЗИКИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

*Ядерна фізика* — розділ фізики, об'єктом дослідження якого є явища, що відбуваються на дуже малих відстанях та при дуже великих енергіях, що припадають на одну частинку. *Верхньою границею відстаней*, на яких відбуваються події, є розмір атома, тобто в ядерній фізиці відстані  $r \leq 10^{-10}$ .

*Нижньою границею енергії* однієї мікрочастинки можна вважати енергію взаємодії електрона з ядром атома, тобто в ядерній фізиці енергії  $E > 10^{-17} \div 10^{-18}$  Дж =  $10 \div 100$  еВ (1 еВ  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж).

Для нижньої границі відстаней (розмірів) та верхньої границі енергії на одну частинку фізичних критеріїв немає. Вони визначаються можливостями експериментальної техніки, яка з часом стає досконалішою.

Мінімальні доступні вимірювання довжини (відстані)  $r \approx 10^{-17}$  м.

Максимальні енергії на одну частинку, що досягаються в експериментальних установках,  $E \approx 10^{-8}$  Дж =  $10^{11}$  еВ = 100 ГеВ.

Ядерна фізика охоплює *область масштабів* — сім порядків за відстанями та дев'ять порядків за енергіями на одну мікрочастинку. У цій області масштабів речовина існує лише у двох формах: в формі *атомних ядер* та у формі *елементарних частинок*. Вони (ці форми) і є об'єктом дослідження ядерної фізики.

З масштабами відстаней пов'язані масштаби часу. Важливим масштабним поняттям в ядерній фізиці є *характерний час* або *час прольоту*. Для атомного ядра  $\tau_d = 5 \cdot 10^{-22}$  с, для елементарної

частинки  $\tau_{\text{елем}} = 3 \cdot 10^{-24}$  с. Вимірюванню піддається час до  $10^{-11}$  с.

За високих енергій частинок їх швидкості можуть бути порівняні до швидкості світла  $c$ . Тому до об'єктів ядерної фізики слід застосовувати закон *релятивістської механіки*. Релятивістські ефекти будуть малими, коли  $v \ll c$  або  $p \ll Mc$  та  $E \ll Mc^2$ , де  $v$  — швидкість частинки,  $M$  — її маса,  $p$  та  $E$  — імпульс та енергія частинки,  $c$  — швидкість поширення світла.

Якщо відношення  $v/c$  та  $E/(Mc^2)$  малі в порівнянні з одиницею, але не настільки, щоб ними можна було знехтувати, розрахунки можна виконувати в нерелятивістському наближенні з урахуванням релятивістських поправок.

Найважливішими для ядерної фізики є висновки теорії відносності про еквівалентність маси та енергії ( $E = Mc^2$ ) та співвідношення, що зв'язує повну енергію  $E$ , імпульс  $p$  та масу вільної релятивістської частинки

$$E_{\text{пов}} = c\sqrt{p^2 + M^2c^2},$$

а кінетична енергія такої частинки

$$E = c\sqrt{p^2 + M^2c^2} - Mc^2$$

( $Mc^2$  — енергія спокою).

На малих відстанях рух частинок локалізований (фінітний). Він описується законами квантової механіки, основними ідеями якої є тотожність частинок та хвиль (хвилі де Бройля) та дискретний характер енергетичного спектра (квантування енергії) частинок.

Квантова механіка є принципово статистичною теорією. Її передбачення носять імовірнісний характер.

Кількісним критерієм застосування в квантовій механіці класичних понять координати та імпульсу є співвідношення невизначеностей  $x p \geq \hbar$ . Аналогічне співвідношення існує для невизначеностей енергії  $E$  та часу  $t E > \hbar$ .

*Ядерна фізика* є одним з наймолодших розділів фізики. Однак результати, яких вже вдалося досягти в цій галузі, виявилися виключно важливими як в науковому, так і практичному відношенні. Досить вказати лише на відкриття та практичне застосування ядерної енергії.

# 14 Атомне ядро

Ядро — центральна частина атома, в якій зосереджена майже вся його маса та позитивний заряд.

## 14.1. Склад та характеристика атомного ядра

Резерфорд, аналізуючи досліди з проходження  $\alpha$ -частинок через тонкі плівки золота, дістав висновків про те, що атом складається з позитивно зарядженого ядра й оточуючих його електронів.

Атомне ядро складається із елементарних частинок — протонів і нейтронів, які разом називаються *нуклонами* (від латинського *nucleus* — ядро).

Слід зауважити, що протонно-нейтронна модель була запропонована радянським фізиком Д. Д. Іваненко, а пізніше розвинута В. Гейзенбергом.

**Протон** *Протон* (ядро атома водню) ( $p$ ) має позитивний заряд, що дорівнює заряду електрона. Маса спокою  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1836m_e$ , де  $m_e$  — маса електрона.

Протон має спін ( $S=1/2$ ) та власний магнітний момент  $p_{m_p} = 2,79 \mu_N$ , де  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27}$  Дж/Тл — ядерний магнетон.

Магнетон Бора  $\mu_B = 1836 \mu_N$ , тобто власний магнітний момент протона приблизно в 660 разів менше, ніж магнітний момент електрона.

**Нейтрон** *Нейтрон* ( $n$ ) не має електричного заряду. Його маса  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27}$  кг; спін  $s=1/2$ , власний магнітний момент  $p_{m_n} = -1,91 p_{m_p}$ .

Знак мінус вказує на те, що напрямки власних механічного та магнітного моментів протилежні.

У вільному стані нейтрон нестабільний. Він довільно розпадається, перетворюючись в протон і випускає електрон і ще одну частинку, яка має назву антинейтрино. Схема розпаду виглядає так:



Маса спокою антинейтрона дорівнює нулю. Оскільки маса нейтрона більша за масу протона на  $2,5m_e$ , то очевидно, що маса нейтрона перевищує сумарну масу частинок, які фігурують у правій частині рівняння (14.1) на  $1,5m_e$ , що в енергетичному еквіваленті становить 0,77 МеВ. Ця енергія вивільнюється при розпаді нейтрона у вигляді кінетичної енергії частинок, що утворюються при цьому розпаді.

Масу ядер та елементарних частинок прийнято визначати в атомних одиницях маси (а.о.м.), в яких маса найбільш поширеного типу атомів вуглецю дорівнює за означенням точно 12,000 а.о.м. Значення одиниці маси з точністю до четвертого знака дорівнює  $1 \text{ а.о.м.} = 1,6604 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , а її енергетичний еквівалент становить 931,48 МеВ.

Зауважимо, щоб отримати енергетичний еквівалент маси, треба значення маси, виражене в кг, помножити на  $c^2$  ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ).

**Характеристики  
атомного ядра  
(загальні  
позначення)**

Однією з найважливіших характеристик атомного ядра є *зарядове число*  $Z$ . Воно дорівнює числу протонів у ядрі, електричному заряду ядра, числу електронів в електронній оболонці.

Зарядове число співпадає з *атомним номером* елемента в періодичній системі.

Число нейтронів у ядрі —  $N$ .

*Масове число*  $A$  дорівнює числу нуклонів у ядрі, тобто

$$A = Z + N.$$

Ядро атома позначається тим же символом, що і атом в періодичній системі елементів. Поруч з символом у лівому верхньому куті пишеться масове число  $A$ , у лівому нижньому — атомний номер (зарядове число)  $Z$ :  ${}^A_Z X$ , наприклад  ${}^{27}_{13} \text{Al}$ ,  ${}^{238}_{92} \text{U}$ .

*Ізотопи* — атомні ядра одного й того ж елемента, які мають різну кількість нейтронів. Наприклад, водень має три ізотопи:  ${}^1_1 \text{H}$  — протій;  ${}^2_1 \text{H}$  — дейтерій;  ${}^3_1 \text{H}$  — тритій.

*Ізобари* — атомні ядра різних елементів, які мають однакові масові числа. Наприклад, хімічні елементи  ${}^{40}_{18} \text{Ar}$  і  ${}^{40}_{20} \text{Ca}$  — ізобари.

*Ізотони* — атомні ядра з однаковим числом нейтронів. Наприклад, хімічні елементи  ${}^{14}_7 \text{N}$  та  ${}^{13}_6 \text{C}$  — ізотони.

*Ізотопи* — радіоактивні ядра,  $Z$  та  $A$  яких співпадають, а відрізняються їх періоди піврозпаду  $T_{1/2}$ . Наприклад, ядро  ${}^{80}_{45} \text{Br}$  має два ізотопи, бо має два періоди піврозпаду  $T_{1/2} = 18 \text{ хв}$  та  $T_{1/2} = 4,4 \text{ год}$ .

**Радіус ядра**

Межі ядра розмиті, тому однозначного визначення радіуса ядра не існує. Оцінка величини задається емпіричним співвідношенням

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (14.2)$$

де  $R_0 = (1,2 \div 1,7) \cdot 10^{-15}$  м,  $A$  — масове число ядра.

З формули (14.2) витікає, об'єм ядра пропорціональний масовому числу. Густина ядерної речовини в усіх ядрах однакова і становить  $= 2,7 \cdot 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>.

**Дефект маси**

За допомогою мас-спектрометрів досить точно визначається маса ядер. Мас-спектрометричні виміри показали, що маса ядра  $M_{\text{я}}$  менша за суму мас розрізнених нуклонів, з яких складається ядро.

Різниця між сумою мас усіх нуклонів, які входять до складу ядра, та реальною його масою називається **дефектом маси**

$$m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}},$$

де  $m_p$  — маса протона,  $m_n$  — маса нейтрона,  $M_{\text{я}}$  — маса ядра,  $Z$  — кількість протонів,  $(A - Z) = N$  — кількість нейтронів.

**14.2. Енергія зв'язку ядра**

Будь-якій зміні маси відповідає зміна енергії. Дефекту маси  $m$  відповідає енергія, що виділяється при утворенні нуклонами атомного ядра. Таку ж кількість енергії треба затратити для того, щоб розщепити ядро на нуклони. Ця енергія називається **енергією зв'язку ядра**. Вона дорівнює

$$E_{\text{зв}} = mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}]c^2. \quad (14.3)$$

Дефекту маси в 1 а.о.м. відповідає енергія зв'язку  $E_{\text{зв}} = 931,5$  МеВ.

**Питома енергія зв'язку  $E_{\text{зв}}$  — це енергія зв'язку, віднесена до одного нуклона.** Вона характеризує тривкість ядер. Для легких ядер ( $A \leq 12$ )  $E_{\text{зв}} = (6 - 7)$  МеВ, для ядер з  $A = (50 - 60)$   $E_{\text{зв}} = 8,7$  МеВ, потім для важких ядер вона спадає із зростанням  $A$  і для  ${}_{92}^{238}\text{U}$   $E = 7,6$  МеВ. Цей спад пов'язаний з насиченням ядерних сил.

На рис. 14.1 наведено графік залежності питомої енергій зв'язку від масового числа  $A$  елемента.

Найбільш стійкими (тривкими) є **магічні ядра**, у яких число протонів або число нейтронів дорівнює одному із магічних чисел 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особливо стабільними є *двічі магічні ядра*,

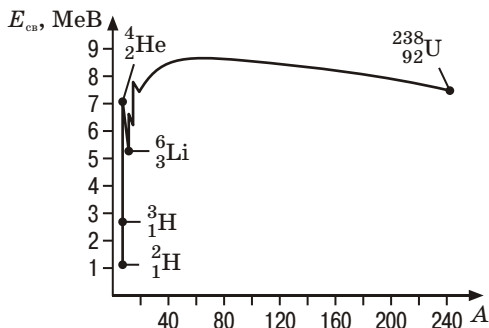


Рис. 14.1

у яких магічними є і число протонів і число нейтронів одночасно. Таких ядер є всього п'ять:  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

Така залежність енергії зв'язку від масового числа свідчить про те, що енергетично вигідні процеси поділу важких ядер на більш легкі та злиття легких ядер одного з од-

ним для утворення більш важкого. Важкі та легкі ядра менш тривкі.

### 14.3. Ядерні сили та моделі ядра

Між нуклонами, що складають ядра, діють особливі, притаманні тільки ядру, сили взаємодії, які значно перевищують кулонівські сили відштовхування між однойменно зарядженими протонами. Вони називаються *ядерними силами*. Ядерні сили відносяться до *сильних взаємодій*.

- Експериментально встановлено, що
- ядерні сили є силами притягання;
- ядерні сили — короткодійчі сили. Їх дія проявляється тільки на відстанях  $r \leq 10^{-15}$  м;
- ядерні сили зарядово незалежні, тобто вони мають не електричну природу;
- ядерні сили здатні насичуватися, тобто кожен нуклон в ядрі взаємодіє з обмеженою кількістю найближчих до нього нуклонів;
- ядерні сили залежать від взаємодії орієнтації спінів взаємодіючих нуклонів;
- ядерні сили не є центральними.

На жаль, до цього часу природа *ядерних сил* не зрозуміла так добре, як природа електричних сил, і тому будова ядра ще вельми недосконала у порівнянні з будовою атома.

Складний характер ядерних сил та труднощі в аналітичному описі руху всіх нуклонів у ядрі не дозволяють розробити єдину послідовну теорію атомного ядра.

Тому на даній стадії вдаються до розгляду наближених ядерних моделей. Із великої кількості ядерних моделей розглянемо дві: *крапельну* та *оболонкову*.

**Крапельна  
модель атома**

Першою ядерною моделлю, запропонованою в 1936 році Н. Бором і Я. І. Ференкелем, була *крапельна модель ядра*.

Сили притягання, що діють між нуклонами, дуже великі, але радіус їх дії настільки малий, що кожна частинка в ядрі взаємодіє тільки з найближчими сусідами.

В аналогічному становищі знаходяться молекули в рідині, які можуть вільно переміщуватися, зберігати при цьому незмінною відстань між молекулами.

Порівняння з рідиною виявляється дуже корисним для розуміння деяких властивостей ядер. Так, в обох випадках сили, що діють між складовими частинками — молекулами в рідинах і нуклонами в ядрі, — є короткодійними і їм притаманне насичення. Об'єм краплі, як і об'єм ядра, пропорціональний числу частинок. Для краплі рідини характерна стала густина. Ядра характеризуються практично сталою питомою енергією зв'язку й сталою густиною, яка не залежить від числа нуклонів в ядрі.

Суттєва різниця ядра від краплі рідини в цій моделі в тім, що вона трактує ядро як краплю електрично зарядженої нестисливої рідини (с густиною, яка дорівнює ядерній) та підпорядкованій законам квантової механіки.

Крапельна модель ядра дала можливість отримати напівемпіричну формулу для енергії зв'язку нуклонів в ядрі, пояснила механізм ядерних реакцій і особливо реакцій поділу ядер. Але ця модель не змогла пояснити підвищену стійкість ядер, які містять магічні числа протонів і нейтронів.

**Оболонкова  
модель ядра**

Згідно з основним припущенням моделі рідкої краплі, складові частини ядра взаємодіють лише з ближніми сусідами, як молекули в рідині. Існує ціла низка дослідних даних на користь такого припущення. Проте є також експериментальні дані, які підтверджують справедливість протилежної гіпотези, згідно з якою нуклони в ядрі взаємодіють головним чином з узагальненим силовим полем, а ні один з одним. Ця ситуація схожа з положенням електронів в атомі, де можливі тільки визначені квантові стани і в кожному стані (згідно принципу Паулі) можуть знаходитися не більш двох електронів, тобто нуклони в ядрі розподілені по дискретних енергетичних рівнях (оболонках).

Така модель ядра була запропонована у 1949—1950 рр. американським фізиком М. Гепперт-Майером і німецьким фізиком Х. Ієненом і названа *оболонковою моделлю ядра*.

Згідно з цією моделлю вважається, що ядра з повністю заповненими оболонками є найбільш стійкими. Такі стійкі (магічні) ядра дійсно існують.

Оболонкова модель дала можливість пояснити спіни та магнітні моменти ядер, різну стійкість атомних ядер та періодичність зміни їх властивостей. Вона особливо застосовна для опису легких та середніх ядер та для ядер, що знаходяться в основному (незбудженому) стані.

Незважаючи на дуже різний підхід, і крапельна і оболонкова моделі ядра дають можливість пояснити велику кількість властивостей ядер. При подальшому накопиченні експериментальних даних про властивості ядер з'явилися нові дані, що не вкладаються в межі цих моделей. Так виникла *узагальнена модель ядра*, в якій розглядається можливість коливання й обертання ядра як цілого. Нещодавно виникла *оптична модель ядра*, яка пояснює взаємодію ядер з частинками, що на них налітають.

#### 14.4. Радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду

*Радіоактивністю* називається явище перетворення нестійких ізотопів одного елемента в ізотопи іншого, яке супроводжується випромінюванням деяких частинок.

*Природна радіоактивність* — радіоактивність, що спостерігається в існуючих у природі нестійких ізотопів.

*Штучна радіоактивність* — радіоактивність ізотопів, що виникає внаслідок ядерних реакцій.

Типи радіоактивного випромінювання
--

Відомі три типи радіоактивного випромінювання  $\alpha$ -,  $\beta$ - та  $\gamma$ -випромінювання.

$\alpha$ -випромінювання являє собою потік ядер гелію —  $\alpha$ -частинок. Заряд  $\alpha$ -частинки дорівнює  $+2e$ , маса співпадає з масою ізотопу гелію  ${}^4_2\text{He}$ .  $\alpha$ -випромінювання відхиляється в електричному та магнітному полях, має високу іонізаційну здатність. Проникаюча здатність мала.

$\beta$ -випромінювання являє собою потік швидких електронів. Воно відхиляється в електричному та магнітному полях. Його іонізаційна спроможність на два порядки менша за  $\alpha$ -випромінювання, а проникаюча здатність значно більша.

$\gamma$ -випромінювання являє собою короткохвильове електромагнітне випромінювання надзвичайно малої довжини хвилі  $< 10^{-10}$  м з яскраво вираженими корпускулярними властивостями, тобто є потоком частинок —  $\gamma$ -квантів (фотонів). Воно



електричним та магнітним полями не відхиляється, має слабку іонізаційну спроможність та високу пронизуючу здатність.

<b>Закон радіоактивного розпаду</b>
---

Радіоактивний розпад — природне радіоактивне перетворення ядер, що відбувається самодовільно. Ядро, що розпадається, називається *материнським*, а те, що виникає, — *дочірнім*. Теорія радіоактивного розпаду ґрунтується на тому, що це процес спонтанний і підлягає законам статистики. Кожне ядро розпадається незалежно від інших.

Кількість ядер  $dN$ , які розпалися за проміжок часу  $dt$ , пропорційна проміжку часу  $dt$  та кількості ядер  $N$ , які ще не розпалися.

$$dN = - \lambda N dt,$$

де  $\lambda$  — стала для даної радіоактивної речовини, яка називається *сталою радіоактивного розпаду*.

Якщо в момент часу  $t = 0$  була кількість ядер, що не розпалися  $N_0$ , то в момент часу  $t$  їх кількість  $N$  описується співвідношенням

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (14.4)$$

*Кількість ядер, що ще не розпалися, зменшується з часом за експонентою — закон радіоактивного розпаду.*

*Період піврозпаду  $T_{1/2}$  — час, за який вихідна кількість радіоактивних ядер зменшується удвічі.*

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda},$$

де  $\lambda$  — стала радіоактивного розпаду.

Період піврозпаду природно-радіоактивних елементів коливається від  $10^{-7}$  с до багатьох мільярдів років.

*Середній час життя радіоактивного ядра*

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N t dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N_0 t \exp(-\lambda t) dt =, \\ &= \int_0^{\infty} t \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

де  $N_0$  — кількість радіоактивних ядер при  $t = 0$ ;  $N$  — кількість радіоактивних ядер в момент часу  $t$ ;  $\lambda$  — стала радіоактивного розпаду.

**Активність  $A$  нуклідів** (ядер, які відрізняються кількістю протонів  $Z$  та нейтронів  $N$ ) в радіоактивному джерелі — кількість актів розпаду, що здійснюється з ядрами зразка за одиницю часу.

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = N = \frac{0,693N}{T_{1/2}}, \quad (14.6)$$

$$A = A_0 \exp(-t),$$

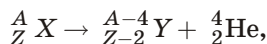
де  $A$  та  $A_0$  — активність, вихідна та коли мине час  $t$ .

Одиницею активності в СІ є бекерель (Бк), активність в 1 Бк — активність, при якій за 1 с здійснюється 1 розпад. Позасистемна одиниця активності — кюрі (Ки).

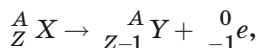
$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк.}$$

**Правило  
зміщення**

Радіоактивний розпад відбувається з дотриманням правила зміщення, що дозволяє установити, яке ядро виникне внаслідок розпаду материнського ядра. Це правило для  $\alpha$ -розпаду



а для  $\beta$ -розпаду

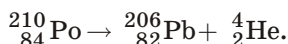
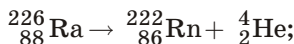
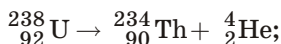


де  ${}^A_Z X$  — материнське ядро;  $Y$  — символ дочірнього ядра;  ${}^4_2 \text{He}$  — ядро гелію ( $\alpha$ -частинка);  ${}^0_{-1} e$  — символ електрона.

**Правило зміщення є наслідком виконання двох законів — збереження електричного заряду та збереження масового числа.**

**Альфа-розпад**

**Альфа-розпадом** називається випромінювання деякими ядрами  $\alpha$ -частинок. Відомо більше двохсот ядер, які випромінюють  $\alpha$ -частинки. Це головним чином важкі ядра ( $A > 200$ ,  $Z > 82$ ) та рідкі землі ( $A = 140 \div 160$ ).  $\alpha$ -розпад підлягає правилу зміщення. Наприклад,



Швидкість  $\alpha$ -частинки, що вилітає із ядра, — від  $1,4 \cdot 10^7$  до  $2 \cdot 10^7$  м/с, що відповідає енергіям від 4 до 8,8 МеВ.

$\alpha$ -частинки утворюються в ядрі при зустрічі двох протонів та двох нейтронів, що рухаються, внаслідок насичення ядерних сил. Ядро утворює для  $\alpha$ -частинок потенціальний бар'єр, висота якого  $U$  більша за енергію  $\alpha$ -частинки  $E$ . Вихід  $\alpha$ -частинки з ядра відбувається шляхом просочування її через потенціальний бар'єр механізмом тунелювання, обумовленим хвильовою природою  $\alpha$ -частинок.

Стала розпаду пов'язана з прозорістю бар'єра  $D$  співвідношенням (бар'єр вважається прямокутним, ширина якого  $2R$ )

$$D = Dn,$$

де  $n$  — кількість ударів  $\alpha$ -частинки в стінку бар'єра за одиницю часу (кількість спроб подолати бар'єр),  $n = \frac{v}{2l}$ ;  $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$  — швидкість  $\alpha$ -частинки в ядрі,  $l \approx R$  — радіус ядра.

$$D = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2E}{m}} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(E - E_0)}\right) \cdot R. \quad (14.7)$$

Відстань, яку проходить  $\alpha$ -частинка в речовині до повної її зупинки, називається *пробігом*  $R$ .

Для  $\alpha$ -розпаду характерна сильна залежність між періодом піврозпаду та енергією вилітаючої  $\alpha$ -частинки. Ця залежність виражається емпіричним законом Гейгера — Неттола

$$\ln T_{1/2} = A + B \ln R, \quad \left(R = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\right),$$

де  $A$  та  $B$  — емпіричні константи, свої для кожної радіоактивної родини.

В іншій формі цей закон запишеться

$$\ln T_{1/2} = C + DE^{-1/2},$$

де  $C$  та  $D$  — сталі, які не залежать від масового числа  $A$  та слабо залежать від порядкового номера (зарядового числа)  $Z$ .

Енергетичний спектр  $\alpha$ -частинок, що випромінюється даним ядром, має тонку структуру. Випромінюється декілька груп  $\alpha$ -частинок, в межах кожної із них енергія стала. Це свідчить про те, що ядра атомів мають дискретні рівні енергії.

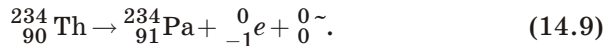
**Під бета-розпадом розуміють три типи ядерних перетворень:** електронний ( $^-$ ) та позитронний ( $^+$ ) розпади та електронне захоплення ( $k$ -захоплення). Бета-розпад — прояв фундаментальної *слабкої взаємодії* елементарних частинок.

**Електронний -розпад** ( $^-$ ) полягає у випромінюванні ядром електронів. Швидкість вилітаючих із ядра електронів від  $10^8$  м/с до  $0,999c$  ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — швидкість поширення світла). Електрон народжується в ядрі внаслідок перетворення нейтрона в протон, яке відбувається за схемою



Позначення:  ${}_0^1n$  — нейтрон,  ${}_1^1p$  — протон,  ${}_{-1}^0e$  — електрон,  ${}_0^0\bar{\nu}$  — антинейтрино — частинка, яка не має ні маси спокою, ні заряду, а спин  $S = 1/2$ . Ця частинка відносить частину енергії розпаду. Внаслідок цього  $^-$ -частинки (електрони), що виникають, мають різну енергію. Енергетичний спектр електронів *неперервний*.

При  $^-$ -розпаді заряд ядра зростає на одиницю, а масове число не змінюється. Наприклад,



Внаслідок  $^-$ -розпаду ядро перетворюється в ізотоп наступного в періодичній системі елемента.

Електронний  $^-$ -розпад відбувається як у природно-радіоактивних, так і у штучно-радіоактивних ядер.

**Позитронний -розпад** ( $^+$ ) полягає у випромінюванні ядром *позитронів* («позитивних електронів»).

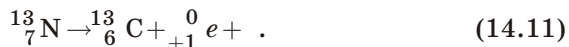
Позитрон виникає у ядрі внаслідок перетворення протона у нейтрон, що відбувається за схемою



де  ${}_1^1p$  та  ${}_0^1n$  — позначення протона та нейтрона відповідно,  ${}_{+1}^0e$  — позначення позитрона-частинки, яка має такий же як і електрон, але позитивний, заряд,  ${}_0^0\nu$  — нейтрино.

Внаслідок  $^+$ -розпаду заряд ядра зменшується на одиницю, а масове число не змінюється.

Наприклад,



При  $^+$ -розпаді ядро перетворюється на ізотоп попереднього в періодичній системі елемента.

Позитронний  $-$ розпад відбувається тільки у штучно-радіоактивних ядрах.

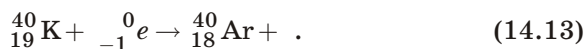
***k-захоплення** — це ефект, який полягає в тому, що ядро атома захоплює один з електронів свого атома.* Найчастіше це відбувається з електроном  $K$ -шару, рідше з  $L$ - чи  $M$ -шару. Один із протонів ядра поглинає електрон і перетворюється в нейтрон з випромінюванням нейтрино.

Відбувається це за схемою



При цьому заряд нового (дочірнього) ядра зменшується на одиницю, а масове число не змінюється.

Наприклад,



Нове ядро може опинитися у збудженому стані.

При переході в енергетично більш низький стан воно випромінює  $\gamma$ -квант.

Місце, вивільнене в  $K$ -оболонці, займають електрони із лежачих вище шарів, в результаті чого виникає рентгенівське випромінювання. Отже, *електронне захоплення супроводжується рентгенівським випромінюванням.*

$K$ -захоплення та  $^+$ -розпад однаково змінюють масове число та порядковий номер (зарядове число) елемента і є конкуруючими процесами.

<p><b>Гамма-випромінювання</b></p>
------------------------------------

***Гамма-випромінювання*** не є самостійним видом радіоактивності. Воно супроводжує  $\alpha$ - та  $\beta$ -розпади, а також виникає при ядерних реакціях, при гальмуванні заряджених частинок.

При радіоактивних розпадах ( $\alpha$  та  $\beta$ ) джерелами  $\gamma$ -випромінювання є дочірні ядра.

Вони в момент свого утворення знаходяться у збудженому стані і за час  $\tau = 10^{-13} - 10^{-14}$  с переходять в основний або інший збуджений але нижчий за енергією стан, випромінюючи  $\gamma$ -квант.

Це електромагнітне випромінювання.

Довжина хвилі  $\gamma$ -випромінювання не перевищує  $10^{-2}$  нм, тому хвильові його якості менше виражені ніж корпускулярні. Це

означає, що зручніше розглядати  $\gamma$ -випромінювання як потік  $\gamma$ -квантів. Енергія  $\gamma$ -кванта

$$E_{ik} = E_i - E_k = \hbar \nu_{ik}, \quad (14.14)$$

де  $\nu_{ik}$  — частота, яка відповідає  $\gamma$ -кванту,  $E_i$  та  $E_k$  — енергія станів  $i$  та  $k$ . При радіоактивних розпадах різних ядер  $\gamma$ -кванти мають енергію від 10 кеВ до 5 МеВ.

Дочірнє ядро може переходити в основний стан поетапно, через проміжкові збуджені стани. Тому  $\gamma$ -випромінювання одного і того самого радіоактивного ізотопу може мати декілька груп  $\gamma$ -квантів, які відрізняються енергіями.

Спектр  $\gamma$ -випромінювання *лінійчатий*, що свідчить про дискретність енергетичних станів ядер.

Гамма-випромінювання не змінює ні масового, ні зарядового числа ядра.

Збуджене дочірнє ядро може перейти в основний стан і без випромінювання  $\gamma$ -кванта. Залишок енергії збудженого стану воно може передати безпосередньо одному із електронів своєї оболонки. Тоді випромінюється електрон, який називається *електроном конверсії*, а саме це явище називається *внутрішньою конверсією*. Процес внутрішньої конверсії є конкуруючим з  $\gamma$ -випромінюванням. Енергія конверсійних електронів пов'язана з енергією  $\gamma$ -кванта рівнянням Ейнштейна для фотоефекту

$$e_n = \hbar \nu - A_n,$$

де  $A_n$  — робота виходу електрона з  $n$ -ї електронної оболонки атома. Вона чисельно дорівнює енергії електронів на певному енергетичному рівні. Гамма-фотон може видалити електрон із будь-якої внутрішньої оболонки ( $K^-$ ,  $L^-$ ,  $M^-$  і т. д.).

Втрата електрона із внутрішньої оболонки (шару) створює умови для випромінювання ліній рентгенівського характеристичного спектра.

*Внутрішня конверсія (фотоефект на електронах внутрішніх оболонок атома під дією  $\gamma$ -випромінювання свого ядра) супроводжується випромінюванням характеристичних рентгенівських променів.*

Гамма-кванти мають нульову масу спокою і не можуть уповільнюватися в середовищі, тому при проходженні через речовину  $\gamma$ -кванти або поглинаються або розсіюються. Вони не несуть електричного заряду, тому не зазнають впливу кулонівських сил.

При проходженні крізь речовину енергія  $\gamma$ -квантів не змінюється, але слабне інтенсивність. Вона змінюється за законом

$$I = I_0 \exp(-\mu x),$$

де  $I_0$  та  $I$  — інтенсивності  $\gamma$ -випромінювання на вході та на виході шару, що поглинає  $\gamma$ -кванти, товщиною  $x$ ,  $\mu$  — коефіцієнт поглинання, який залежить від властивостей речовини та енергії  $\gamma$ -кванта.

Гамма-кванти можуть взаємодіяти як з електронними оболонками атомів речовини, так і з їх ядрами.

Гамма-випромінювання найбільш проникаюче внаслідок того, що  $\mu$  для багатьох речовин — мала величина. Основними процесами, що визначають характер проходження  $\gamma$ -випромінювання крізь речовини та величину  $\mu$ , є фотоэффект, комптонівське розсіяння та утворення електронно-позитронних пар.

Гамма-випромінювання здійснює сильний вплив на речовину і зокрема на біологічні об'єкти. Цей вплив оцінюється дозою випромінювання. Відрізняють декілька характерних доз.

**Поглинута доза випромінювання  $D$**  — величина, яка дорівнює відношенню енергії випромінювання до маси опроміненої речовини. Одиницею поглинутої дози випромінювання є грей (Гр):  $1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$  — доза випромінювання, при якій опромінюваній речовині масою в 1 кг передається енергія іонізуючого випромінювання 1 Дж. Позасистемна одиниця — 1 рад  $10^{-2}$  Гр.

**Потужність  $N$  поглинутої дози випромінювання** — доза  $D$ , віднесена до одиниці часу

$$N = \frac{D}{t}. \quad (14.16)$$

Одиницею потужності поглинутої дози є *грей в секунду*:

$$\frac{\text{Гр}}{\text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}.$$

**Експозиційна доза випромінювання  $D_e$**  — величина, яка дорівнює відношенню суми електричних зарядів усіх іонів одного знака, утворених електронами, вивільненими в опроміненому повітрі (при умові повного використання іонізуючої здатності електронів) до маси цього повітря. Одиницею експозиційної дози випромінювання є кулон на кілограм (Кл/кг). Позасистемна одиниця — рентген (Р):

$$1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}.$$

**Потужність  $N_e$  експозиційної дози випромінювання** — експозиційна доза  $D_e$ , віднесена до одиниці часу

$$N_e = \frac{D_e}{t}. \quad (14.17)$$

Одиницею потужності  $N_e$  є ампер на кілограм (А/кг). Позасистемними одиницями є:

$$1 \frac{\text{P}}{\text{с}} = 2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{A}}{\text{кг}}; \quad 1 \frac{\text{P}}{\text{хв}} = 4,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{кг}}; \quad 1 \frac{\text{P}}{\text{год}} = 7,17 \cdot 10^{-8} \frac{\text{A}}{\text{кг}}.$$

**Поглинання  
ядрами -квантів**

Усі збуджені енергетичні рівні ядра мають *природну ширину*, обумовлену скінченністю часу життя ядра як квантової системи, в цьому енергетичному стані.

Інтервал енергії  $E$ , який визначає цю ширину, визначається співвідношенням невизначеностей

$$E = \frac{\hbar}{t}, \quad (14.18)$$

де  $t$  — час життя ядра у певному збудженому стані.

Тільки для основного стану стабільного ядра, енергія якого вважається  $E = 0$ ,  $E = 0$ , бо для нього  $t \rightarrow \infty$ .

Скінченний час життя ядра в збуджених енергетичних станах призводить до немонохроматичності -випромінювання, що супроводжує перехід ядер із збуджених станів до основного (нормального). Ця немонохроматичність характеризується *природною шириною лінії -випромінювання*.

Якщо ядро, що перебуває в нормальному стані, взаємодіє з -випромінюванням, енергія фотонів якого  $\hbar$  дорівнює різниці між енергіями основного та одного із збуджених рівнів, такий -квант поглинається ядром. Якщо вертаючись в основний стан, ядро випромінить такий же -квант, таке поглинання називається *резонансним*.

В актах взаємодії -кванта з ядром (поглинання чи випромінювання) останнє зазнає віддачі, з якою пов'язана *енергія віддачі ядра*.

При переході ядра із збудженого стану з енергією  $E$  до нормального з енергією  $E_0 = 0$  випромінюється -квант, енергія якого

$$\hbar_{\text{випр}} = E - E_{\text{яд}} < E, \quad (14.19)$$

де  $E_{\text{яд}}$  — енергія віддачі ядра.



При переході ядра від нормального стану до збудженого з енергією  $E$  енергія  $\gamma$ -кванта, що поглинається, має бути

$$\hbar \omega_{\text{погл}} = E + E_{\text{яд}} > E.$$

Тому частоти  $\gamma$ -фотонів, що поглинаються, та тих, що випромінюються, при переходах між основним рівнем та рівнем  $E$  не однакові. Тобто максимуми ліній поглинання та випромінювання не співпадають:

$$\omega_{\text{погл}} - \omega_{\text{випр}} = 2E_{\text{яд}}. \quad (14.20)$$

Величина  $\omega_{\text{погл}}$  значно більша за природну ширину лінії  $\gamma$ -випромінювання, а величина  $\hbar \omega_{\text{випр}} \gg E$ , де  $E$  — природна ширина енергетичного рівня ядра (збудженого).

Отже, у вільних ядер резонансне поглинання неможливе із-за наявності енергії віддачі ядра.

Енергія віддачі ядра  $E_{\text{яд}}$  визначається за імпульсом  $\gamma$ -фотона  $p$ , який в актах поглинання та випромінювання дорівнює імпульсу ядра ( $p = p_{\text{яд}}$ ),

$$E_{\text{яд}} = \frac{p_{\text{яд}}^2}{2M_{\text{яд}}} = \frac{p^2}{2M_{\text{яд}}} = \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 \frac{1}{2M_{\text{яд}}},$$

де  $M_{\text{яд}}$  — маса ядра. Чим більша маса ядра, тим менша  $E_{\text{яд}}$  і менша  $\omega_{\text{погл}}$ .

<p><b>Ефект Мессбауера</b></p>
------------------------------------

*Ефект Мессбауера* ще називають *ядерним гамма-резонансом*. Він полягає в тому, що в атомних ядрах, які зв'язані в кристалічних ґратах (кристалах), спостерігається резонансне поглинання та випромінювання  $\gamma$ -квантів.

Ефект обумовлений тим, що за умови, коли енергія віддачі ядра менша за енергію фононів (збуджень ґрат), ґрати від взаємодії з  $\gamma$ -квантами не збуджуються і віддача сприймається не окремим ядром, а всіма ґратами (усім кристалом).

Енергія віддачі  $E_{\text{яд}} \sim 1/m$ , де  $m$  — маса всього кристала, яка значно більша за  $M_{\text{яд}}$ . Отже, втрати енергії  $E_{\text{яд}}$  при поглинанні та випромінюванні дуже малі. Внутрішня енергія кристала при поглинанні та випромінюванні  $\gamma$ -квантів не змінюється. Тому лінії поглинання та випромінювання співпадають ( $\omega_{\text{погл}} = \omega_{\text{випр}}$ ). Ширина ліній дорівнює природній їх ширині  $E$ . Відносна ширина ліній резонансного поглинання (випромінювання)

$$\frac{E}{E} = 10^{-13} - 10^{-17} .$$

Це дає можливість з великою точністю визначити енергетичні рівні ядер.

Імовірність ефекту Мессбауера

$$\bar{W} = \exp \left( - \frac{4 \langle x^2 \rangle}{2} \right),$$

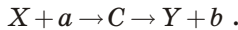
де  $\lambda$  — довжина хвилі  $\gamma$ -кванта;  $\langle x^2 \rangle$  — середній квадрат амплітуди коливання ядра в напрямку польоту  $\gamma$ -кванта.

На основі ефекту Мессбауера розвивається Мессбауерівська спектроскопія — метод дослідження надтонких взаємодій ядер з електричними та магнітними полями і на їх основі різноманітних властивостей твердих тіл.

#### 14.5. Ядерні реакції

**Ядерні реакції** — перетворення атомних ядер внаслідок їх взаємодії з елементарними частинками або з іншими ядрами.

За припущення Бора ядерні реакції відбуваються двома стадіями за схемою



Перша стадія — захоплення ядром  $X$  частинки  $a$ , що наблизилась до нього на відстань дії ядерних сил ( $\approx 2 \cdot 10^{-15}$  м), та утворення проміжкового ядра  $C$ , яке називається *складеним ядром*. Складене ядро перебуває у збудженому стані. Час життя його  $t \gg \tau$  — характерного ядерного часу. За цей час воно встигає «забути», яким способом воно утворилося.

Друга стадія — складене ядро  $C$  розпадається на ядро  $Y$  та частинку  $b$ .

Якщо випромінена частинка  $b$  тотожна з захопленою  $a$  ( $b \equiv a$ ), то відбувається *розсіяння частинки*: пружне, коли  $E_b = E_a$ , та непружне, коли  $E_b \neq E_a$ .

Якщо реакція відбувається без утворення складеного ядра, вона називається *прямою ядерною взаємодією*.

Символічний запис ядерної реакції можна подати або в розгорнутому виді, наприклад,



або скорочено  ${}^9\text{Be}(p, \ ) {}^6\text{Li}$ .

У скороченому запису реакції порядковий номер атома не пишеться, бо він визначається хімічним символом атома. В дужках на першому місці ставлять символ частинки, якою бомбардується ядро, на другому — символ частинки, що вилітає із складеного ядра, і за дужками — хімічний символ ядра — продукту реакції.

Для позначення частинок прийняті наступні символи:  $p$  — протон;  $n$  — нейтрон;  $d$  — дейтрон;  $t$  — тритон;  $\alpha$  — альфа-частинка;  $\gamma$  — гамма-квант (гамма-фотон);  $\bar{\nu}$  — нейтрино;  $\bar{\nu}$  — антинейтрино.

Ефективність ядерної реакції характеризується *ефективним її перетином*

$$= \frac{dN}{nNdx}, \quad (14.23)$$

де  $N$  — кількість частинок, що падає на одиницю поверхні речовини за одиницю часу;  $n$  — кількість ядер в одиниці об'єму речовини;  $dN$  — кількість частинок, що вступає в реакцію з ядрами на товщині  $dx$ .

Ефективний перетин ядерної реакції характеризує імовірність того, що реакція відбудеться при попаданні на речовину пучка частинок

$$[\ ] = \text{барн} \quad (1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2).$$

**Характерний ядерний час** — час, необхідний для прольоту частинкою відстані, яка за порядком величини дорівнює діаметру ядра ( $d \approx 10^{-15}$  м). Для частинки з енергією в 1 МеВ  $\approx 10^{-22}$  с.

**Енергія ядерної реакції** — різниця кінетичних енергій вихідної та кінцевої пари, що приймають участь в реакції. Вона визначається співвідношенням

$$Q = c^2[(M_1 + M_2) - (M_3 + M_4)], \quad (14.24)$$

де  $M_1$  та  $M_2$  — маси спокою ядра мішені та частинки, якою його бомбардують;  $M_3 + M_4$  — сума мас спокою ядра та частинки — продуктів реакції.

Якщо  $M_1 + M_2 > M_3 + M_4$  — енергія вивільнюється, енергетичний ефект позитивний, реакція називається *екзотермічною*.

Якщо  $M_1 + M_2 < M_3 + M_4$  — енергія поглинається, енергетичний ефект негативний, реакція називається *ендотермічною*.

Енергію ядерної реакції можна записати як баланс кінетичних енергій

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4), \quad (14.25)$$

де  $T_1$  та  $T_2$  — кінетичні енергії ядра-мішені та частинки, що його бомбардує (відповідно),  $T_3$  та  $T_4$  — кінетичні енергії вилітаючої частинки та ядра — продукту реакції.

При екзотермічній реакції  $T_3 + T_4 < T_1 + T_2$ , при ендотермічній —  $T_3 + T_4 > T_1 + T_2$ .

*Закони збереження, що виконуються в ядерних реакціях:*

а) Закон збереження кількості нуклонів:

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4. \quad (14.26)$$

б) Закон збереження зарядів:

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4. \quad (14.27)$$

в) Закон збереження повної релятивістської енергії:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \quad (14.28)$$

г) Закон збереження імпульсу:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (14.29)$$

д) Закон збереження моменту імпульсу:

$$L_1 + L_2 = L_3 + L_4. \quad (14.30)$$

**Класифікація  
ядерних  
реакцій**

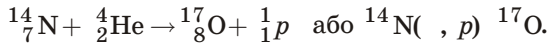
Ядерні реакції поділяються:

*за енергією частинок, що її викликають — реакції при малих, середніх та високих енергіях; за родом частинок, що приймають в них*

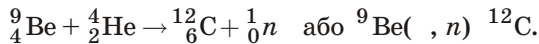
*участь — реакції під дією нейтронів, під дією заряджених частинок (протонів, дейтронів,  $\alpha$ -частинок), під дією  $\gamma$ -квантів; за родом ядер, що приймають в них участь — реакції на легких ядрах ( $A < 50$ ), на середніх ядрах ( $50 < A < 100$ ) та на важких ядрах ( $A > 100$ ).*

**Деякі важливі  
реакції**

*Перше спостереження перетворення ядра (Резерфорд, 1919 р.)*



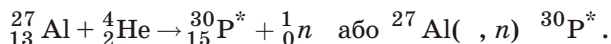
*Відкриття нейтрона (1932 р.)*



*Перше використання штучно прискорених «снарядів» (протонів) та одночасне розщеплення ядра (1932 р., Харків)*

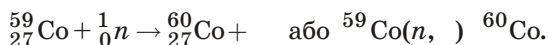


Перше одержання штучного радіоактивного нукліда та відкриття позитрона (Жоліо-Кюрі, 1932 р.)

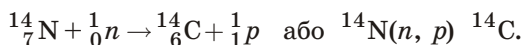
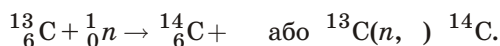


$\text{P}^*$  являє собою джерело  $\gamma$ -випромінювання, позначка (\*) означає радіоактивність.

Одержання кобальту 60



Одержання вуглецю 14



### Поділ ядер

Ядерні реакції поділу можливі лише для дуже важких ядер. Здатність важких ядер до поділу визначається величиною *параметра поділу*  $Z^2/A$ . Здатні до поділу усі ядра, для яких  $Z^2/A > 17$ . Ядра, для яких  $Z^2/A > 49$  — *критичний параметр поділу*, зовсім нестійкі відносно поділу і не можуть існувати.

При значеннях параметра поділу менших за критичний можливий самодовільний (спонтанний) поділ ядер, який відбувається аналогічно  $\alpha$ -радіоактивності шляхом тунелювання. Період піврозпаду складає  $10^{16} \div 10^{17}$  років. Найбільш імовірною із реакцій поділу є поділ ядра урану на дві частини — *уламки поділу*.

Поділ важкого ядра супроводжується вивільненням (виділенням) величезної енергії. В кожному акті поділу ядра урану ( ${}^{235}\text{U}$ ) вивільняється енергія майже 200 МеВ.

При цьому:

кінетична енергія продуктів розпаду — 168 МеВ;

кінетична енергія нейтронів, що утворюються, — 5 МеВ;

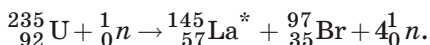
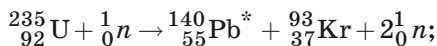
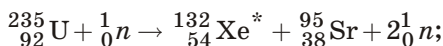
енергія  $\gamma$ -випромінювання — 5 МеВ;

енергія  $\beta$ - та  $\alpha$ -випромінювання продуктів поділу — 13 МеВ;

енергія нейтрино — 9 МеВ;

В результаті поділу ядер, які складають 1 кг урану 235, дефект маси сягає 1 г. Це відповідає енергії  $8 \cdot 10^{13}$  Дж, що еквівалентно енергії, яка виділяється при згоранні 2500 т кам'яного вугілля,  $2,2 \cdot 10^7$  кВт годин електроенергії.

Реакції поділу ядра урану  $^{235}_{92}\text{U}$  нейтронами (1938 р. Ган, Штрассман, Мейтнер)



Продуктами поділу ядер урану можуть бути і інші пари. Але сума їх атомних номерів завжди дорівнює 92.

**Ланцюгова реакція**

**Ланцюгова реакція** — процес, в якому одна реакція викликає наступні реакції.

При поділі ядра урану на кожен нейтрон, що викликає цей поділ, знову виникає два або і більше нейтронів, які можуть викликати наступні поділи інших ядер. Виникає ланцюгова, лавинна реакція, в якій число нейтронів швидко зростає.

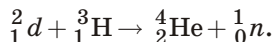
**Коефіцієнт розмноження нейтронів  $k$**  — відношення числа нейтронів, що виникають в одному акті поділу, до числа таких нейтронів у попередньому акті.

Якщо  $k = 1$  — кількість актів поділу за одиницю часу стала, реактор працює із сталою потужністю;  $k < 1$  — кількість актів поділу за одиницю часу зменшується, ланцюгова реакція згасає;  $k > 1$  — кількість актів поділу за одиницю часу збільшується, потужність реактора зростає експоненціально. Може відбутися вибух.

**Ядерний реактор** — пристрій, де реалізується керована ланцюгова реакція.

**Ядерний синтез**

**Ядерний синтез** — реакція злиття легких ядер в одне ядро. Реакція супроводжується вивільненням надзвичайно великої кількості енергії і протікає при надвисоких температурах. Це — **термоядерна реакція**. Синтез ядер дейтерію та тритію було здійснено у водневій бомбі.

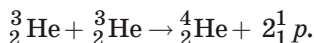
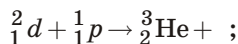
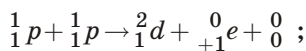


У цій реакції вивільняється 17,58 МеВ або 3,5 МеВ на одну частинку, що в чотири рази більше ніж в реакції поділу  $^{235}_{92}\text{U}$ .

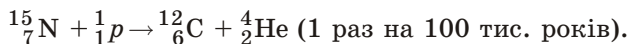
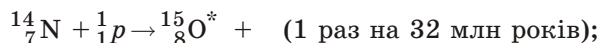
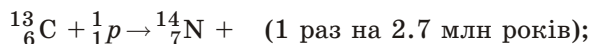
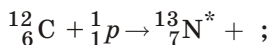
Синтез ядер водню в ядра гелію є основним джерелом енергії Сонця та інших зірок, температура в надрах яких сягає  $10^7$ — $10^8$  К. Щосекунди Сонце випромінює  $3,8 \cdot 10^{26}$  Дж. Вважається, що

реакції на Сонці можуть протікати у формі термоядерних циклів, у яких вивільнення енергії відбувається за рахунок перетворення ядер водню в ядра гелію.

*Протон-протонний цикл*

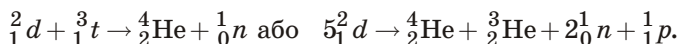
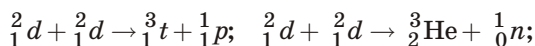


*Вуглицево-азотний цикл.* Ядра вуглецю в цьому циклі відіграють роль «каталізатора» реакції сполучення ядер водню в ядро гелію



Результатом циклу є перетворення чотирьох протонів  ${}^1_1p$  в ядро гелію  ${}^4_2\text{He}$  з появою двох позитронів  ${}^0_{+1}e$  та  $\gamma$ -випромінювання. На одне ядро  ${}^4_2\text{He}$  вивільняється 26,8 МеВ енергії, а в перерахунку на 1 моль  ${}^4_2\text{He}$  це еквівалентно  $7 \cdot 10^5$  кВт · годин електроенергії. Окремі реакції циклу віддалені непомірно великим часом. Але цей цикл замкнений і здійснюється неперервно. Тому всі стадії циклу проходять на Сонці одночасно.

Теоретичною основою штучних керованих термоядерних реакцій є реакції типу



При утворенні 1 г гелію виділяється енергія майже 200 МВт · годин.

## Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Із чого складається атомне ядро?
2. Які частинки утворюють ядро атома водню? Скільки їх?
3. Чим відрізняються ізобари і ізотопи?
4. Дайте визначення ізотонам, ізомерам.
5. Чому дорівнює радіус ядра атома?
6. Що називається дефектом маси?
7. Чому дорівнює енергія зв'язку ядра?
8. Дайте визначення питомій енергії зв'язку ядра.
9. Які сили називаються ядерними?
10. До якого типу взаємодій відносять ядерні сили? Чому?
11. Сформулюйте основні властивості ядерних сил.
12. Які моделі атомних ядер вам відомі?
13. Дайте визначення явищу радіоактивності.
14. Які є типи радіоактивного випромінювання?
15. Запишіть закон радіоактивного розпаду.
16. Що таке період піврозпаду  $T_{1/2}$ ?
17. Що таке середній час життя радіоактивного ядра?
18. Що таке активність нукліда  $A$ ?
19. За яким законом змінюється з часом активність нукліда?
20. Запишіть правило зміщення для радіоактивного розпаду.
21. Що називають  $\alpha$ -розпадом? Навести приклад.
22. Що розуміють під  $\beta$ -розпадом? Навести приклад.
23. Чи є  $\gamma$ -випромінювання самостійним видом радіоактивності? Поясніть прикладом.
24. Як поведуть себе  $\alpha$ -кванти при проходженні через речовину?
25. Як пояснюється  $\beta$ -розпад на підставі уявлень квантової теорії?
26. Як пояснюється неперервність енергетичного спектра  $\beta$ -частинок?
27. Чи змінюється хімічна природа елемента при випусканні його ядром  $\alpha$ -кванта?
28. Які явища супроводжують проходження  $\gamma$ -випромінювання через речовину і в чому їх сутність?
29. В чому полягає сутність ефекту Мессбауера?
30. Ядерні реакції. Їх символічний запис.
31. Яка реакція називається екзотермічною? ендотермічною?
32. За якими ознаками можна зробити класифікацію ядерних реакцій?
33. Під дією яких частинок ( $\alpha$ -частинок, нейтронів) ядерні реакції більш ефективні? Чому?



34. Що таке ланцюгова реакція?  
 35. В результаті якої реакції відбувається перетворення ядер  ${}_{92}^{238}\text{U}$  в ядра  ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ ?  
 36. Що таке термоядерна реакція? Ядерний синтез?

### Приклади розв'язання задач

#### Задача 1

Визначити початкову активність  $A_0$  радіоактивного магнію Mg, маса якого  $m = 0,2$  мг, а також активність  $A$  через проміжок часу  $t = 1$  година. Вважати, що всі атоми ізотопу радіоактивні.

#### Розв'язання

Початкова активність ізотопу  $A_0 = N_0 \lambda$ , де  $\lambda$  — стала радіоактивного розпаду,  $N_0$  — кількість атомів ізотопу в початковий момент часу ( $t = 0$ ). Якщо врахувати, що

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N_0 = \frac{m}{M} N_A,$$

то формула прийме вид

$$A_0 = \frac{m N_A}{M T_{1/2}} \ln 2 = 5,15 \cdot 10^{12} \text{ Бк.}$$

Активність ізотопу зменшується з часом за законом  $A = A_0 e^{-\lambda t}$ . Замінивши сталу розпаду  $\lambda$  її виразом, будемо мати

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = A_0 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Оскільки  $e^{\ln 2} = 2$ , то

$$A = \frac{A_0}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}} = 80,5 \text{ ГБк.}$$

#### Задача 2

Визначити енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}$ , яку треба витратити, щоб відірвати нейтрон від ядра  ${}_{11}^{23}\text{Na}$ .

#### Розв'язання

Після відриву нейтрона число нуклонів  $A$  в ядрі зменшиться на одиницю, а число протонів  $Z$  лишиться незмінним; утвориться ядро Na. Ядро  ${}^{23}\text{Na}$  можна розглядати як стійку систему, що

створюється внаслідок захвату вільного нейтрона ядром  $^{22}\text{Na}$ . Енергія відриву нейтрона від ядра  $^{23}\text{Na}$  дорівнює енергії зв'язку нейтрона з ядром  $^{22}\text{Na}$ . Виразивши енергію зв'язку нейтрона через дефект маси системи, дістанемо

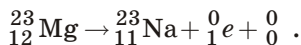
$$E_{\text{зв}} = c^2 m = c^2 (m_{22\text{Na}} + m_n - M_{23\text{Na}}) = 1,995 \text{ Дж.}$$

### Задача 3

Радіоактивне ядро магнію  $^{23}\text{Mg}$  викинуло позитрон та нейтрино. Знайти енергію  $Q^+$ -розпаду ядра.

#### Розв'язання

Реакцію  $^+$ -розпаду ядра магнію можна записати наступним чином:



Вважаючи, що ядро магнію було нерухомим, та урахувавши, що маса спокою нейтрино дорівнює нулю, запишемо рівняння енергетичного балансу. За законом збереження релятивістської повної енергії маємо:

$$c^2 m_{\text{Mg}} = c^2 m_{\text{Na}} + T_{\text{Na}} + c^2 m_e + T_e + T.$$

Енергія розпаду

$$Q = T_{\text{Na}} + T_e + T = c^2 (m_{\text{Mg}} + m_{\text{Na}} - m_e).$$

Виразимо маси ядер магнію і натрію через маси відповідних нейтральних атомів:

$$Q = c^2 [(m_{\text{Mg}} - 12m_e) - (m_{\text{Na}} - 11m_e) - m_e].$$

Після спрощення дістанемо:

$$Q = c^2 (m_{\text{Mg}} - m_{\text{Na}} - 2m_e) = 3,05 \text{ MeV.}$$

### Задачі для самостійного розв'язання

**14.1.** Вважаючи сталу радіоактивного розпаду відомою та використовуючи закон радіоактивного розпаду, дістаньте вираз: 1) для періоду напіврозпаду  $T_{1/2}$  радіоактивного ядра; 2) для середнього часу життя радіоактивного ядра.

Відповідь: 1)  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$  2)  $T = \frac{1}{\lambda}$ .

**14.2.** Визначте, що (і в скільки разів) більш тривале — три періоди напіврозпаду чи два середніх часи життя радіоактивного ядра.

*Відповідь:*  $3T_{1/2} > 2$ .

**14.3.** Визначте, яка частина (%) початкової кількості ядер радіоактивного ізотопу лишається такою, що не розпалась через час  $t$ , який дорівнює двом середнім часам життя радіоактивного ядра ( $t = 2$ ).

*Відповідь:*  $\frac{N}{N_0} = 13,5\%$ .

**14.4.** Визначте, яка частина початкової кількості ядер радіоактивного ізотопу розпадається за час  $t$ , що дорівнює двом періодам напіврозпаду  $T_{1/2}$  ( $t = T_{1/2}$ ).

*Відповідь:*  $\frac{N}{N_0} = 0,75$ .

**14.5.** Визначте період напіврозпаду радіоактивного ізотопу, якщо  $5/8$  початкової кількості ядер цього ізотопу розпалося за час  $t = 849$  с.

*Відповідь:*  $T_{1/2} = 10$  хв.

**14.6.** Початкова маса радіоактивного ізотопу йоду  $^{131}_{53}\text{J}$  (період напіврозпаду  $T_{1/2} = 8$  діб) дорівнює 1 г. Визначте: 1) початкову активність ізотопу; 2) його активність через 3 доби.

*Відповідь:* 1)  $A_0 = 4,61 \cdot 10^{15}$  Бк; 2)  $A = 3,55 \cdot 10^{15}$  Бк.

**14.7.** Активність деякого радіоактивного ізотопу в початковий момент часу складає 100 Бк. Визначте активність цього ізотопу через проміжок часу, що дорівнює половині періоду напіврозпаду.

*Відповідь:*  $A = 70,7$  Бк.

**14.8.** Стала радіоактивного розпаду ізотопу  $^{210}_{82}\text{Pb}$  дорівнює  $10^{-9} \text{ с}^{-1}$ . Визначити час, за який розпадеться  $2/5$  початкової кількості ядер цього радіоактивного ізотопу.

*Відповідь:*  $t = 16,2$  років.

**14.9.** Період напіврозпаду радіоактивного ізотопу актинію  $^{225}_{89}\text{Ak}$  складає 10 діб. Визначте час, за який розпадеться  $1/3$  початкової кількості ядер актинію.

*Відповідь:*  $t = 5,85$  діб.

**14.10.** Початкова активність 1г ізотопу радію дорівнює  $1\text{Ки}$ . Визначте період напіврозпаду цього ізотопу.

*Відповідь:*  $T_{1/2} = 1582$  роки.

**14.11.** Визначити дефект маси  $m$  та енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}$  ядра атома важкого водню.

*Відповідь:*  $m = 0,00240$  а.о.м.;  $E_{\text{зв}} = 2,23$  МеВ.

**14.12.** Енергія зв'язку  $E_{\text{зв}}$  ядра, що складається із двох протонів та одного нейтрона, дорівнює 7,72 МеВ. Визначити масу нейтрального атома, що має це ядро.

*Відповідь:*  $m = 3,01604$  а.о.м.

**14.13.** Яку найменшу енергію  $E_{\text{зв}}$  треба витратити, щоб розділити на окремі нуклони ядра  ${}^7_3\text{Li}$  та  ${}^7_4\text{Be}$ ? Чому для ядра берилію ця енергія менша, ніж для ядра літію?

*Відповідь:*  $E_1 = 2$  МеВ,  $E_2 = 37,6$  МеВ

**14.14.** Яку найменшу енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}$  треба витратити, щоб відірвати один нейтрон від ядра азоту  ${}^{14}_7\text{N}$ ?

*Відповідь:*  $E_{\text{зв}} = 10,6$  МеВ.

**14.15.** Знайти мінімальну енергію зв'язку, необхідну для відділення одного протона від ядра азоту  ${}^{14}_7\text{N}$ .

*Відповідь:*  $E_{\text{зв}} = 7,55$  МеВ.

**14.16.** Яку найменшу енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}$  треба затратити на те, щоб розділити ядро  ${}^3_2\text{He}$  на дві однакові частини?

*Відповідь:*  $E_{\text{зв}} = 23,8$  МеВ.

**14.17.** Знайти енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}/A$  (в МеВ), що припадає на один нуклон для ядра: а)  ${}^{11}_5\text{B}$ ; б)  ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ .

*Відповідь:* а) 6,93 МеВ; б) 8,03 МеВ.

**14.18.** Знайти енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}/A$  (в МеВ), що припадає на один нуклон для ядра: а)  ${}^{28}_{14}\text{Si}$ ; б)  ${}^{56}_{26}\text{Si}$ .

*Відповідь:* а) 8,45 МеВ; б) 8,79 МеВ.

**14.19.** Знайти енергію зв'язку  $E_{\text{зв}}/A$  (в МеВ), що припадає на один нуклон для ядра: а)  ${}^{68}_{30}\text{Zn}$ ; б)  ${}^{207}_{82}\text{Pb}$ .

*Відповідь:* а) 8,76 МеВ; б) 7,87 МеВ.

**14.20.** Ядро атома радію  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ , що вільно покоїться, зазнає  $\alpha$ -розпаду. Енергія зв'язку ядра дорівнює 1731,6 МеВ, ядра  ${}^{222}_{86}\text{Rn}$  — 1708,2 МеВ,  $\alpha$ -частинці — 28,3 МеВ. Вважаючи, що дочірнє ядро радону  ${}^{222}_{86}\text{Rn}$  утворюється в незбудженому стані, знайти: а) швидкість  $v$  частинки, що утворилась; б) швидкість дочірнього атома.

*Відповідь:* а)  $v = 1,5 \cdot 10^7$  м/с; б)  $v = 2,7 \cdot 10^5$  м/с.

**14.21.** Визначити кінетичну енергію  $T$  та швидкість  $v$  теплового нейтрона при температурі оточуючого середовища  $t = 27$  С.

*Відповідь:*  $T = 6,22 \cdot 10^{-21}$  Дж,  $v = 2,7 \cdot 10^5$  км/с.

**14.22.** Визначити енергію  $Q$  -розпаду ядра полонію  ${}_{84}^{210}\text{Po}$ .

*Відповідь:*  $Q = 5,41$  МеВ.

**14.23.** Ядро вуглецю  ${}_{6}^{14}\text{C}$  викинуло від'ємно заряджену  $\beta$ -частинку та антинейтрино. Визначити повну енергію  $Q$  -розпаду ядра.

*Відповідь:*  $Q = 0,156$  МеВ.

**14.24.** Визначити енергію розпаду ядра вуглецю  ${}_{6}^{10}\text{C}$ , яке викинуло позитрон та нейтрино.

*Відповідь:*  $E = 2,6$  МеВ.

**14.25.** Знайти найменше значення енергії  $\gamma$ -кванта, якої досить для здійснення реакції  ${}_{12}^{24}\text{Mg}(\gamma, n)$ .

*Відповідь:*  $h\nu = 16,6$  МеВ.

**14.26.** Яку кількість енергії в кіловат-годинах можна одержати від поділу 1 г урану  ${}_{92}^{235}\text{U}$ , якщо при кожному акті поділу виділяється енергія, яка дорівнює приблизно 200 МеВ?

*Відповідь:*  $2,3 \cdot 10^4$  кВт-г.

**14.27.** Яка кількість урану  ${}_{92}^{235}\text{U}$  витрачається за добу на атомній електростанції потужністю 5000 кВт? ККД прийняти рівним 17 %. Вважати, що при кожному акті виділяється енергія 200 МеВ.

*Відповідь:*  $M = 31$  г.

**14.28.** Знайти енергію  $E$ , яка вивільнюється при поділі всіх ядер, що містяться в урані-235 масою  $m = 1$  г.

*Відповідь:*  $E = 82$  ГДж.

**14.29.** Скільки ядер урану-235 повинно ділитися за  $t = 1$  с, щоб тепла потужність  $P$  ядерного реактора дорівнювала 1 Вт?

*Відповідь:*  $N = 3,1 \cdot 10^{10}$ .

**14.30.** Знайти електричну потужність  $P$  атомної електростанції, яка витрачає 0,1 кг урану-235 за добу, якщо ККД станції дорівнює 16 %.

*Відповідь:*  $P = 15$  МВт.

# 15 Елементарні частинки

---

*Елементарні частинки* — мікрочастинки, яким на сучасному рівні розвитку фізики неможна приписати такої внутрішньої структури, яка була б простим об'єднанням інших частинок. При взаємодії з іншими частинками та полями елементарні частинки поводять себе як єдине ціле.

Елементарні частинки — це третій рівень масштабів та енергій у мікросвіті, який характеризується відстанями (розмірами)  $r \sim 10^{-15} - 10^{-18}$  м та енергіями  $E \approx 1 - 100$  ГеВ.

## 15.1. Види взаємодії між елементарними частинками

Загальна кількість відомих елементарних частинок (разом з античастинками) перевищує 400.

При такій величезній кількості частинок, звичайно, вже немає надії отримати скільки-небудь просте пояснення мікроструктури речовини, вважаючи за фундаментальні первинні сутності самі елементарні частинки. Але, якщо не самі елементарні частинки, тоді що ж приймати за первинні сутності зараз? Відповідь на це питання отримала чітке формулювання наприкінці 1957 року, коли було з'ясовано, що на відміну від багаточисленності самих елементарних частинок, сили, або, як частіше говорять, взаємодії між частинками зводяться усього до чотирьох *фундаментальних типів взаємодії*.

Ці основні взаємодії такі: сильні, електромагнітні, слабкі та гравітаційні. В табл. 15.1 вказано порядок інтенсивності кожної взаємодії, умовно прийнявши інтенсивність сильної взаємодії за одиницю, а середні кінетичні енергії частинок, що зіткаються,  $\sim 1$  ГеВ.

*Сильна взаємодія* утримує нуклони в атомних ядрах, вона притаманна більшості елементарних частинок, так званих *адронів* (протон, нейтрон, гіперони, мезони й інші).

## Порівняння інтенсивностей фундаментальних взаємодій

№	Тип взаємодії	Відносна інтенсивність взаємодії	Радіус дії сил	Час дії
1	Сильна	1	$10^{-15}$ м	$10^{-23}$ с
2	Електромагнітна	$10^{-4}$	Необмежений	$10^{-20}$ с
3	Слабка	$10^{-24}$	$10^{-13}$ м	$10^{-9}$ с
4	Гравітаційна	$10^{-40}$	Необмежений	Необмежений

*До електромагнітної взаємодії* зводяться безпосередньо сили природи, що ми сприймаємо (за виключенням тяжіння): пружні, в'язкі, молекулярні, хімічні та інші.

*Слабкі взаємодії* викликають -розпад радіоактивних ядер, всі процеси взаємодії нейтрино з речовиною. Поряд з електромагнітними силами вони управляють поведінкою *лептонів* — елементарних частинок, що не приймають участі в сильних взаємодіях і володіють спіном  $1/2$  (електрон, мюон, нейтрино та інші).

*Гравітаційна взаємодія* властива всім частинкам. У світі елементарних частинок гравітаційні взаємодії надто малі, ніяких процесів не викликають, їх можна не враховувати.

Сильні та слабкі взаємодії *короткодійні*; електромагнітні й гравітаційні — *далекодійні*.

## 15.2. Класифікація елементарних частинок

Елементарні частинки мають досить багато різних характеристик серед яких важко виділити основну (подібну атомному номеру в періодичній системі Менделєєва). Ці обставини утруднюють класифікацію елементарних частинок.

Характеристики елементарних частинок
--

Основні характеристики елементарних частинок такі: 1) маса  $m$ ; 2) спін  $s$ ; 3) електричний заряд  $Q$ ; 4) баріонний заряд  $B$ ; 5) лептонний заряд  $L$ ; 6) другий лептонний заряд  $L'$ ; 7) чудність  $S$ ; 8) парність  $P$ ; 9) ізотопічний спіл  $T$ ; 10) період напіврозпаду  $t$ ; 11) статистика; 12)  $G$ -парність; 13)  $CP$ -парність; 14) зарядна парність; 15) магнітний момент і таке інше.

Проте, які із перелічених характеристик вибрати за головні при класифікації елементарних частинок, до сьогодні немає єдиної думки, тому що в різних конкретних питаннях головну роль можуть грати різні їх властивості.

Наведемо одну із самих застосовних класифікацій.

1. **Усі мікрочастинки (не тільки елементарні) за величиною спіна поділяються на бозони та ферміони.**

**Бозони** (бозе-частинки) мають нульовий або цілочисельний спін, підлягають статистиці Бозе — Ейнштейна. До бозонів належать: фотони, проміжкові векторні бозони, глюони, мезони та мезонні резонанси, а також їх античастинки.

**Ферміони** (фермі-частинки) мають напівцілий спін. Вони підлягають статистиці Фермі — Дірака та принципу Паулі. До ферміонів належать: лептони, баріони та баріонні резонанси, кварки, а також їх античастинки.

2. **За часом життя** частинки поділяються на *стабільні, квазістабільні та резонансні частинки, або резонанси.*

Частинок, *стабільних* у вільному стані, існує всього дев'ять: протон, електрон, фотон, антипротон, позитрон та чотири сорти нейтрино.

*Резонанси* — частинки, які розпадаються внаслідок сильних взаємодій і мають час життя  $\sim 10^{-28}$  с.

*Квазістабільні* — частинки, що розпадаються внаслідок слабких та електромагнітних взаємодій. Час їх життя перевищує  $\geq 10^{-20}$  с.

3. За участю у взаємодіях елементарні частинки поділяються на *перенощиків взаємодій, лептони та адрони.*

*Перенощики взаємодій*: фотони — перенощики електромагнітної взаємодії;  $W^\pm$  та  $Z^0$ -бозони — перенощики слабкої взаємодії.

*Лептони* — частинки, які не приймають участі у сильних взаємодіях та мають спін  $1/2$ , отже є ферміони. Відомі шість заряджених лептонів: електрон  $e^-$ , позитрон  $e^+$ , мюони  $\mu^\pm$ , важкі лептони (таони)  $\tau^\pm$  та відповідні їм шість нейтральних частинок: електронні нейтрино  $\nu_e$  та антинейтрино  $\bar{\nu}_e$ , мюонні нейтрино  $\nu_\mu$  та антинейтрино  $\bar{\nu}_\mu$ , таонні нейтрино  $\nu_\tau$  та антинейтрино  $\bar{\nu}_\tau$ . Нейтральні лептони (нейтрино) не приймають участі і в електромагнітних взаємодіях. Лептони — істинно елементарні частинки, бо у них не виявлена внутрішня структура. В цьому розумінні лептони називають *точковими частинками.*

*Адрони* — частинки, що приймають участь у сильних взаємодіях. Як правило, вони приймають участь і в усіх інших взаємодіях — електромагнітних та слабких. Це найбільш чисельна група частинок (майже 400). Адрони поділяють на *стабільні, квазістабільні та резонанси.* В свою чергу стабільні адрони підрозділяються на *мезони та баріони.* *Мезони* — сильно взаємодіючі нестабільні



частинки з нульовим та цілочисельним спіном (бозони); *баріони* — частинки з напівцілим спіном та масами, не меншими ніж маса протона. *Протон* — єдиний стабільний баріон. Нестабільні баріони з великим (в порівнянні з ядерним часом) часом життя називаються *гіперонами*. Всі баріони є ферміонами.

В табл. 15.2 елементарні частинки об'єднанні в три групи: фотони, лептони і адрони.

<p><b>Властивості елементарних частинок</b></p>
---

Першою характерною властивістю елементарних частинок, пов'язаною за сучасних уявлень з корпускулярно-хвильовим дуалізмом, є їх *здатність народжуватися та взаємно перетворюватися*. Частинки, що утворюються внаслідок взаємодії вихідних частинок, не входять до їх складу, а народжуються в процесі взаємодії, як, наприклад, і фотон не входить до складу атома, а народжується при переході електрона із одного енергетичного стану до іншого.

Можливість народження нових частинок — релятивістський ефект, обумовлений співвідношенням Ейнштейна

$$E_{\text{рел}} = mc^2. \quad (15.1)$$

При цьому повна (релятивістська) енергія зберігається, тобто повна енергія всіх частинок до зіткнення дорівнює повній енергії всіх частинок після зіткнення. Наприклад, при зіткненні двох протонів (один з них рухався, а другий знаходився в стані спокою) може протікати реакція



в якій виникає нейтральний піон.

Другою характерною властивістю елементарних частинок є їх *нестабільність*. Народжені в процесі взаємодії частинки як правило розпадаються.

Розпад частинок та їх взаємоперетворення роблять недоречним запитання: із чого складаються частинки?

### 15.3. Закони збереження

Закономірності, які спостерігаються у світі елементарних частинок, можуть бути сформульовані у вигляді *законів збереження*. Ці закони у фізиці елементарних частинок відіграють значно важливішу роль, ніж в інших областях фізики. Це обумовлено кількома причинами:

Таблиця 15.2

## Класифікація елементарних частинок та їх характеристика

Група	Назва частинки	Символ		Заряд, од. $e$	Маса спокою, од. $m_e$	Спін, од. $\hbar$	Ізоспін $I$	Лептонне число $L$	Баріонне число $B$	Дивність $S$	Наближений час життя, с
		частинки	анти-частинки								
Фотони	Фотон			0	0	1	-	0	0	0	Стабільний
Лептони	Електрон	$e^-$	$e^+$	1	1	1/2	-	+1	0	0	Стабільний
	Електронне нейтрино	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	0	0	1/2	-	+1	0	0	Стабільно
Міуони	Міуон	$\mu^-$	$\mu^+$	1	206,8	1/2	-	+1	0	0	$\approx 10^{-6}$
	Міуонне нейтрино	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	0	1/2	-	+1	0	0	Стабільно
Тауони	Тауон	$\tau^-$	$\tau^+$	1	3487	1/2	-	+1	0	0	$\approx 10^{-12}$
	Тауонне нейтрино	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	1/2	-	+1	0	0	?
Адрони	Мезони	0		0	264,1	0	1	0	0	0	$\approx 10^{-16}$
		$\pi^-$	$\pi^+$	1	273,1	0	1	0	0	0	$\approx 10^{-8}$
		$K^0$	$\bar{K}^0$	0	974	0	1/2	0	0	+1	$\approx 10^{-10} - 10^{-8}$
Каони	$K^+$	$K^-$	1	966,2	0	1/2	0	0	0	+1	$\approx 10^{-8}$
	0		0	1074	0	-	0	0	0	0	$\approx 10^{-19}$
Ета-мезон		0		0	1074	0	-	0	0	0	$\approx 10^{-19}$

Закінчення табл. 15.2

Група	Назва частинки	Символ		Заряд, од. $e$	Маса спокою, од. $m_e$	Спін, од. $\hbar$	Ізоспін $I$	Лептонне число $L$	Баріонне число $B$	Дивність $S$	Наближений час життя, с
		частинки	анти-частинки								
Баріони	Протон	$p$	$\bar{p}$	1	1836,2	1/2	1/2	0	+1	0	Стабільний
	Нейтрон	$n$	$\bar{n}$	0	1838,7	1/2	1/2	0	+1	0	$\approx 10^3$
	Гіперони:										$\approx 10^{-10}$
	лямбда	0	$\bar{0}$	0	2183	1/2	0	0	+1	-1	$\approx 10^{-10}$
	сігма	0	$\bar{0}$	0	2334	1/2	1	0	+1	-1	$\approx 10^{-10}$
		+	$\bar{+}$	1	2328	1/2	1	0	+1	-1	$\approx 10^{-10}$
		-	$\bar{-}$	1	2343	1/2	1	0	+1	-1	$\approx 10^{-10}$
	ксі	0	$\bar{0}$	0	2573	1/2	1/2	0	+1	-2	$\approx 10^{-10}$
		-	$\bar{-}$	1	2586	1/2	1/2	0	+1	-2	$\approx 10^{-10}$
		-	$\bar{-}$	1	3273	3/2	0	0	+1	-3	$\approx 10^{-10}$

1. Ще не існує скільки-небудь послідовної теорії елементарних частинок, але добре виконуються закони збереження.

2. Найвність великої кількості законів збереження (інтегралів руху) у світі елементарних частинок.

3. Більш ефективна дія законів збереження у мікросвіті. Якщо у макросвіті закони збереження тільки забороняють, то у мікросвіті вони ще і дозволяють усі процеси, які не підпали під заборону. У мікросвіті усе, що не заборонено повною сукупністю законів збереження, має відбутися.

Універсальність та точність додержання цих законів вказують на те, що вони мають глибоке фізичне обґрунтування. Зараз надійно встановлено, що кожен закон збереження (інтеграл руху) пов'язаний з якоюсь симетрією в оточуючому нас світі.

Усі інтеграли руху можна поділити на три групи (див. табл. 15.3).

1) Інтеграли руху, пов'язані з геометричними властивостями простору — часу. Це енергія, імпульс, момент імпульсу, центр інерції та два закони збереження, пов'язані з симетрією відбиттів у просторі і в часі.

2) Точні закони збереження зарядів. Усі вони аналогічні закону збереження електричних зарядів. Крім електричного заряду відомі ще три: баріонний заряд  $B$  (баріонне число); лептонний заряд  $L$  (лептонне число); та другий лептонний заряд  $L'$ . Фізичний зміст симетрії, пов'язаної з кожним із зарядів, ще не з'ясовано.

3) Закони збереження, що виконуються не для всіх, а для деяких видів фундаментальних взаємодій. Ці закони не точні, а наближені.

Дослідженнями встановлено, що різні взаємодії мають різні ступені симетрії: чим сильніша взаємодія, тим більш вона симетрична, тобто тим більше у неї інтегралів руху.

## 15.4. Античастинки

Вперше гіпотезу про існування *античастинки* електрона висловив у 1928 р. П. Дірак. Чотири роки потому К. Андерсон у складі космічного випромінювання поблизу поверхні Землі зареєстрував позитивний електрон. Його було названо *позитроном*. Електрон і позитрон не поодинокі пара частинка — античастинка. Всі відомі елементарні частинки, за винятком фотона,  $^0$ -мезона і  $^0$ -мезона, також мають двійників — *античастинки*. Зазначені три частинки співпадають зі своєю античастинкою, тобто всі властивості частинки і античастинки тотожні. Ці частинки

Таблиця 15.3

## Інтеграли руху в фізиці елементарних частинок

Тип закону збереження	№№	Назва	Позначення	Фізичне походження	В яких взаємодіях зберігаються
Закони, що мають геометричне походження	1	Енергія	$E$	Однорідність часу	У всіх
	2	Імпульс	$P$	Однорідність простору	У всіх
	3	Момент імпульсу	$L$	Ізотопічність простору	У всіх
	4	Центр інерції	$X$	Рівноправність інерціальних систем відліку	У всіх
	5	Закон, пов'язаний з відбиттям просторових осей	$CP$	Право-ліва система простору	У всіх
	6	Закон, пов'язаний з відбиттям часу	$T$	Симетрія відносно зміни знаку часу	У всіх
Заряди	7	Електричний	$Q$	Невідомо	У всіх
	8	Баріонний	$B$	Невідомо	У всіх
	9	Лептонний	$L$	Невідомо	У всіх
	10	Другий лептонний	$L'$	Невідомо	У всіх
	11	Дивність Гіперзаряд	$S$ $Y = B + S$	Невідомо Невідомо	У сильних та електромагнітних
Наближені інтеграли руху	12	Повний ізотопічний спіні	$T$	Ізотопічна симетрія	У сильних
	13	Зарядова сполука	$C$	Невідомо	У сильних та електромагнітних
		(парність)	$(P)$	Невідомо	У сильних та електромагнітних
	14	(G-парність) Закони збереження, що впливають з високих симетрій	$G$	Невідомо Невідомо	У сильних Тільки у зверхсильних

називають *істино нейтральними частинками*. Античастинка має ті самі, що й частинка, масу, спіні, час життя, якщо вона нестабільна, але її заряд (якщо він є) має протилежний знак, і ситуація з паралельністю або антипаралельністю напрямів спіна й магнітного моменту античастинки також протилежна ситуації, яка має місце у випадку частинки.

Анігіляція пари електрон — протон призводить до утворення пари фотонів

$${}^0_{-1}e + {}^0_{+1}e \rightarrow 2 \gamma. \quad (15.3)$$

В 1955 році був виявлений *антипротон*, який відрізняється від протона знаками електричного заряду та власного магнітного моменту.

Не завжди анігіляція пари частинка — античастинка повинна супроводжуватися утворенням пари фотонів. Наприклад, коли антипротон анігілює з протоном або з нейтроном, утворюється декілька нейтральних і заряджених мезонів.

$$\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + 0, \quad (15.4)$$

$$\bar{p} + n \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^- + 0 + 0. \quad (15.5)$$

Через рік після відкриття антипротона був виявлений і *антинейтрон*. Антинейтрони виникали в результаті перезарядки антипротонів, тобто в результаті реакції

$$\bar{p} + p \rightarrow \bar{n} + n.$$

Анігілює будь-яка частинка зі своєю античастинкою. Однак при анігіляції важких частинок і античастинок виникають не стільки  $\pi$ -кванти, скільки інші легкі частинки. Це пояснюється тим, що анігіляція позитрона з електроном є результатом електромагнітної взаємодії, тоді як анігіляція більш важких частинок і античастинок, які є адронами, є результатом сильної взаємодії.

## 15.5. Кваркова модель адронів

Величезна кількість вже відкритих і знову відкриваємих адронів (в тому числі і резонансів) наводить на думку про те, що всі вони побудовані з інших, більш фундаментальних частинок. З великим успіхом ця ідея реалізована в *кварковій моделі адронів*. Кваркова модель пояснює не тільки систематику, але й динаміку адронів.

У 1964 р. Гелл-Манном і незалежно від нього Цвейгом була висунута гіпотеза, яка була підтверджена подальшими дослідженнями, про те, що всі адрони побудовані з більш фундаментальних частинок, які були названі *кварками*. На підставі кваркової гіпотези була не тільки зрозуміла структура вже відомих адронів, але й предрікалося існування нових, які потім були виявлені експериментально.

До теперішнього часу встановлено існування п'яти різновидностей (ароматів) кварків:  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$ . Припускається існування шостого кварку  $t$  (істиний), подібно тому як  $c$ -кварк називається *зачарованим*;  $b$ -кварк — *чарівним*;  $s$ -кварк — *чудність* (дивовижність). Кожному кварку відповідає свій антикварк.

Усі кварки мають спин  $1/2$  і баріонний заряд  $1/3$ . Кварки  $u$ ,  $c$ ,  $t$  — *верхні*, вони мають дробний електричний заряд  $+2/3$ . Кварки  $d$ ,  $s$ ,  $b$  — *нижні*, вони мають електричний заряд  $-1/3$ .

Згідно з цією термінологією протон складається з двох  $u$ -кварків й одного  $d$ -кварка ( $p \rightarrow uud$ ); нейтрон складається з одного  $u$ -кварка і двох  $d$ -кварків ( $n \rightarrow udd$ ). Їх античастинки побудовані із антикварків:  $\bar{p} \rightarrow \bar{u}\bar{u}\bar{d}$ ;  $\bar{n} \rightarrow \bar{u}\bar{d}\bar{d}$ .

Тріумфом кваркової моделі є відкриття *чарівних частинок*. Перша чарівна частинка має дві назви: мезон  $J/\psi$  та мезон  $\psi$ , тому й позначається  $J/\psi$ . Закон збереження чарівності пояснює відносно тривалий час життя  $J/\psi$ -мезона.

Кваркова модель виявилася дуже плідною, вона дала можливість знайти практично всі основні квантові числа адронів. Наприклад, із цієї моделі, оскільки спин кварка  $1/2$ , витікає цілочисельний (нульовий) спин для мезонів і напівцілий — для баріонів у повній відповідності до експерименту. Крім того, ця модель предрікла нову частинку  $\Delta^-$  — *гіперон*. Проте кваркова модель не може визначити масу адронів, тому що для цього необхідно знання динаміки взаємодії кварків та їх мас, які поки невідомі.

Зауважимо, що експериментально кварки у вільному стані не виявлені. Робота з систематизації елементарних частинок триває.

### Контрольні запитання та завдання для самоперевірки

1. Які фундаментальні типи взаємодії здійснюються в природі та які їх властивості?
2. Який із типів взаємодії є універсальним?
3. Назвіть властивості елементарних частинок.
4. Які закони збереження виконуються для всіх типів взаємодії елементарних частинок?

5. Що є фундаментальною властивістю усіх елементарних частинок?
6. Які характеристики для частинок і античастинок є однаковими? Які — різними?
7. Чому магнітний момент протона має той самий напрям, що і спін, а у електрона напрями цих векторів протилежні?
8. Які є групи елементарних частинок? За якими критеріями елементарні частинки належать до тієї чи іншої групи?
9. Які закони збереження виконуються при сильних взаємодіях елементарних частинок? при слабких взаємодіях?
10. Яким елементарним частинкам і чому приписують лептонне число? Баріонне число? В чому полягають їх закони збереження?
11. Що таке інтеграли руху?
12. Які характеристики є однаковими для частинок і античастинок? Які — різні?
13. Навіщо потрібна гіпотеза про існування кварків? Що вона пояснює? В чому її труднощі?
14. Навіщо були введені такі характеристики кварків як чарівність та чудність?

## Приклади розв'язання задач

### Задача 1

Прийнявши енергію релятивістських мюонів у космічному випромінюванні рівною 3 ГеВ, знайти відстань, що її проходять мюони за час свого життя, якщо власне життя мюона  $t_0 = 2,2$  мкс, а енергія спокою  $E_0 = 100$  МеВ.

#### *Розв'язання*

Відстань, яку пройдуть мюони в системі відліку, пов'язаній з Землею, визначимо за формулою  $l = v \cdot t$ , де  $v$  — швидкість мюонів,  $t$  — проміжок часу між двома подіями в системі К.

Згідно з релятивістським законом скорочення часу

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де  $t_0$  — власне життя мюона.

Енергія релятивістських мюонів  $E$  дорівнює



$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

тоді

$$t = t_0 \frac{E}{E_0},$$

а їх швидкість

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}.$$

Іскома відстань

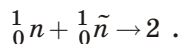
$$l = v \cdot t = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \cdot t_0 \frac{E}{E_0} = 19,8 \text{ км.}$$

## Задача 2

При зіткненні нейтрона ті антинейтрона відбувається їх анігіляція, внаслідок чого виникають два  $\gamma$ -кванти, енергія частинок при цьому переходить в енергію  $\gamma$ -квантів. Визначити енергію кожного із цих  $\gamma$ -квантів, вважаючи, що кінетична енергія нейтрона й позитрона до їх зіткнення нехтовно мала.

*Розв'язання*

Запишемо реакцію анігіляції



Енергія частинок

$$E = 2m_n c^2,$$

тоді з урахуванням умови енергія кожного із  $\gamma$ -квантів

$$E = \frac{E}{2} m_n c^2 = 942 \text{ МеВ.}$$

## Задачі для самостійного розв'язання

**15.1.** Нейтральний піон розпадається на два  $\gamma$ -кванти:  $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$ . Вважаючи масу спокою піона рівною  $264,1 m_e$  ( $m_e$  — маса електрона), визначити енергію кожного із виниклих  $\gamma$ -квантів.

*Відповідь:*  $E = 67,7 \text{ МеВ.}$

**15.2.** Визначити, які із наведених нижче процесів заборонені законом збереження лептонного числа: 1)  $K^- \rightarrow \bar{\nu} + \tilde{\nu}$ ; 2)  $K^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu} + e^-$ .

**15.3.** Визначити, які із наведених нижче процесів дозволені законом збереження чужості: 1)  $p + \bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu} + K^-$ ; 2)  $p + \bar{\nu} \rightarrow K^- + K^+ + n$ .

**15.4.** Визначити, які закони збереження порушуються у наведених нижче заборонених способах розпаду: 1)  $\bar{\nu} + n \rightarrow \bar{\nu} + K^-$ ; 2)  $p + p \rightarrow p + \bar{\nu}$ .

**15.5.** Відомо, що у вуглецево-азотному, або вуглецевому циклі число ядер вуглецю залишається постійним. В результаті цього циклу чотири ядра водню  ${}^1_1\text{H}$  (протона) перетворюються в ядро гелію  ${}^4_2\text{He}$ , а також утворюються три  $\bar{\nu}$ -кванти, два позитрони та два нейтрино. Записавши цю реакцію, визначити енергію, яка вивільнюється в цьому процесі.

*Відповідь:*  $Q = 25,8 \text{ MeV}$ .

**15.6.** Запишіть схеми розпаду позитивного і негативного мюонів.

*Відповідь:*  $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_e + e^+ + \bar{\nu}_\mu$ ,  $\mu^- \rightarrow \nu_e + e^- + \bar{\nu}_\mu$ .

**15.7.**  $\pi^0$ -мезон у стані спокою розпадається на два  $\gamma$ -кванти. Вважаючи масу спокою піона рівною  $264,1m_e$  ( $m_e$  — маса електрона), визначити енергію кожного із виниклих  $\gamma$ -квантів.

*Відповідь:*  $E = 67,7 \text{ MeV}$ .

**15.8.**  $K^+$ -мезон розпадається в стані спокою на два піони. Нехтуючи різницю мас зарядженого та нейтрального піонів, знайти енергію кожного із виниклих піонів. Масу спокою каона вважати рівною  $966,2m_e$ .

*Відповідь:*  $E = 247,5 \text{ MeV}$ .

**15.9.** Запишіть продукти розпаду антинейтрино.

*Відповідь:*  $\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu} + e^+ + \bar{\nu}$ .

**15.10.** Поясніть, яка характеристика елементарних частинок покладена в основу поділення адронів на мезони й баріони.

*Відповідь:* баріонне число  $B$ ; мезони:  $B = 0$ ; баріони:  $B = 1$ .



### 3. Квантова механіка

1. Чому дорівнює довжина хвилі де Бройля?

- а)  $\frac{h}{mc}$ ,      б)  $\frac{h}{mv}$ ,      в)  $\frac{h}{k}$ ,      г)  $\frac{d}{dk}$ .

2. В якому ефекті проявляється хвильова природа електрона?

- а) термоелектронна емісія,  
б) фотоефект,  
в) дифракція електронів,  
г) ефект Комптона.

3. Що підтверджує результат дослідів Девіссона і Джермера?

- а) хвильові властивості світла,  
б) хвильову природу електрона,  
в) корпускулярні властивості електронів,  
г) квантовий характер поглинання і випромінювання світла.

4. Які з наведених формул виражають співвідношення невизначеності?

- а)  $x p_x > \hbar$ ,  
б)  $E t > \hbar$ ,  
в)  $x p_x = p$ ,  
г)  $x k > 1$ .

5. Які висновки можна зробити з співвідношення невизначеності?

- а) мікрочастинка не може мати одночасно точні значення координати та імпульсу,  
б) для визначення точної енергії частинки необхідний нескінченно великий час,  
в) мікрочастинка може мати одночасно точні значення координати і швидкості,  
г) імпульс і координати частинки можуть бути визначені з будь-яким ступенем точності.

6. Що характерно для об'єкта, який не проявляє хвильові властивості?

- а) об'єкт не має одночасно визначені координату і імпульс,
- б) об'єкт рухається по визначеній траєкторії,
- в) можливі етапи, при яких імпульс — точно визначений, а координата не визначена,
- г) об'єкт має одночасно певне значення координати і імпульсу.

7. Яка з наведених величин визначає ймовірність знаходження мікрооб'єкта в даній точці простору?

- а) координата,
- б) імпульс,
- в)  $|\psi|^2$ -функція,
- г) координата і імпульс.

8. Що виражає квадрат модуля амплітуди хвильової функції  $|\psi|^2$ ?

- а) енергію частинки,
- б) ймовірність попадання фотона в дану точку простору,
- в) ймовірність знаходження мікрочастинки в даній точці простору,
- г) ймовірність знаходження мікрочастинки будь-де у просторі.

9. Нехай стан квантової частинки описується хвильовою функцією  $\psi(\vec{r})$ . Яким тоді виразом визначається ймовірність того, що частинку можна знайти в об'ємі  $V$ ?

- а)  $|\psi(\vec{r})|$ ,
- б)  $|\psi(\vec{r})|^2$ ,
- в)  $\int_V \psi(\vec{r}) dV$ ,
- г)  $\int_V |\psi(\vec{r})|^2 dV$ .

10. Що стверджує умова нормування хвильової функції?

а)  $\int_0^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1$ ,

б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV < \infty$ ,

в)  $\int |\psi|^2 dV = a_1^2 + a_2^2$ ,

г)  $|\psi|^2 > 0$ .

11. Який вигляд має нестационарне рівняння Шредингера в загальному випадку?

а)  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,

б)  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \vec{H}$  ,

в)  $+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U) = 0$ ,

г)  $\vec{H} = E$  .

12. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера в загальному випадку?

а)  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,

б)  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \vec{H}$  ,

в)  $+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U) = 0$ ,

г)  $\vec{H} = E$  .

13. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера для квантової частинки в одновимірній нескінченно високій потенціалній ямі з абсолютно непроникними стінками?

а)  $+\frac{2m}{\hbar^2}E = 0, \quad -\infty < x < \infty$ ,

б)  $+\frac{2m}{\hbar^2}E = 0, \quad 0 < x < l$ ,

в)  $+\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m}{2} \frac{x^2}{0} \right) = 0$ ,

г)  $+\frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4 \ 0r} \right) = 0$ .

14. Чому дорівнює оператор Гамільтона в загальному випадку?

а)  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U$ , б)  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , в)  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U$ , г)  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

15. Чому дорівнює оператор Лапласа в загальному випадку?

$$\text{а) } -\frac{\hbar^2}{2m} + U, \quad \text{б) } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{в) } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U, \quad \text{г) } \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

16. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера для вільної квантової частинки?

$$\text{а) } +\frac{2m}{\hbar^2} E = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\text{б) } +\frac{2m}{\hbar^2} E = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\text{в) } +\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m}{2} \frac{x^2}{r} \right) = 0,$$

$$\text{г) } +\frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4} \frac{1}{r} \right) = 0.$$

17. Чому дорівнює мінімальна енергія квантової частинки в одновимірній нескінченно високій потенціалній ямі з абсолютно непроникними стінками?

$$\text{а) } \frac{1}{2} \hbar, \quad \text{б) } \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar, \quad n \in Z, \quad \text{в) } \frac{2\hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n \in N, \quad \text{г) } \frac{2\hbar^2}{2ml^2}.$$

18. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера для одновимірного гармонічного осцилятора?

$$\text{а) } +\frac{2m}{\hbar^2} E = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\text{б) } +\frac{2m}{\hbar^2} E = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\text{в) } +\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m}{2} \frac{x^2}{r} \right) = 0,$$

$$\text{г) } +\frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4} \frac{1}{r} \right) = 0.$$

19. Чому дорівнює потенціальна енергія одновимірного квантового осцилятора?

$$\text{а) } 0, \quad \text{б) } \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \infty, & x < 0, \quad x > a, \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ U_0, & x < 0, \quad x > a, \end{cases} \quad \text{г) } \frac{kx^2}{2}.$$

**20. Чому дорівнює енергія квантового гармонічного осцилятора?**

а)  $\frac{1}{2}\hbar$  ,   б)  $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$  ,  $n \in N$ ,   в)  $\frac{2\hbar^2}{2ml^2}n^2$  ,  $n \in N$ ,   г)  $\frac{2\hbar^2}{2ml^2}$ .

**21. Чому дорівнює нульова енергія квантового гармонічного осцилятора?**

а)  $\frac{1}{2}\hbar$  ,   б)  $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$  ,  $n \in N$ ,   в)  $\frac{2\hbar^2}{2ml^2}n^2$  ,  $n \in N$ ,   г)  $\frac{2\hbar^2}{2ml^2}$ .

**22. Що стверджує принцип суперпозиції хвильової функції?**

а)  $\int_0^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1$ ,

б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV < \infty$ ,

в)  $\psi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2$ ,

г)  $|\psi|^2 > 0$ .

**23. Що стверджує принцип суперпозиції станів в квантовій механіці?**

- а) між квантовою та класичною теоріями існує формальна аналогія,
- б) фізичні властивості мікроскопічних систем мовою квантової теорії описуються парами сполучених змінних, які не можуть бути одночасно виміряні з однаковою точністю, що перевищує сталу Планка,
- в) стан фізичної системи в будь-який момент часу визначає її стан для будь-якого наступного моменту,
- г) якщо система може перебувати у станах, що описуються двома різними хвильовими функціями, то вона може перебувати також у станах, які описуються їх лінійною комбінацією.

**24. Що стверджує принцип відповідності в квантовій механіці?**

- а) між квантовою та класичною теоріями існує формальна аналогія,
- б) фізичні властивості мікроскопічних систем мовою квантової теорії описуються парами сполучених змінних, які не можуть бути одночасно виміряні з однаковою точністю, що перевищує сталу Планка,

- в) стан фізичної системи в будь-який момент часу визначає її стан для будь-якого наступного моменту,
- г) якщо система може перебувати у станах, що описуються двома різними хвильовими функціями, то вона може перебувати також у станах, які описуються їх лінійною комбінацією.

**25. Що стверджує принцип причинності в квантовій механіці?**

- а) між квантовою та класичною теоріями існує формальна аналогія,
- б) фізичні властивості мікроскопічних систем мовою квантової теорії описуються парами сполучених змінних, які не можуть бути одночасно виміряні з однаковою точністю, що перевищує сталу Планка,
- в) стан фізичної системи в будь-який момент часу визначає її стан для будь-якого наступного моменту,
- г) якщо система може перебувати у станах, що описуються двома різними хвильовими функціями, то вона може перебувати також у станах, які описуються їх лінійною комбінацією.

## **4. Фізика атомів і молекул**

### **4.1. Теорія атома Бора**

**26. Який спектр називають суцільним спектром?**

- а) той, що створюється випромінюванням тіл, які світяться,
- б) той, що містить всі довжини хвиль оптичної частини спектра,
- в) той, що містить окремі вузькі лінії, що відповідають одній конкретній довжині хвилі,
- г) той, що містить окремі смуги, що розділяються темними проміжками.

**27. Який спектр називають лінійчатим спектром?**

- а) той, що створюється випромінюванням тіл, які світяться,
- б) той, що містить всі довжини хвиль оптичної частини спектра,
- в) той, що містить окремі вузькі лінії, що відповідають одній конкретній довжині хвилі,
- г) той, що містить окремі смуги, що розділяються темними проміжками.



**28. Який спектр називають смугастим спектром?**

- а) той, що створюється випромінюванням тіл, які світяться,
- б) той, що містить всі довжини хвиль оптичної частини спектра,
- в) той, що містить окремі вузькі лінії, що відповідають одній конкретній довжині хвилі,
- г) той, що містить окремі смуги, що розділяються темними проміжками.

**29. В якому випадку спостерігається лінійчатий спектр?**

- а) при світінні хімічно чистої речовини,
- б) при світінні речовини в газоподібному стані,
- в) при світінні речовини в газоподібному атомарному стані,
- г) при світінні розжареного тіла.

**30. З яких дослідів випливає висновок про ядерну модель атома?**

- а) Франка і Герца,
- б) Девіссона і Джермера,
- в) Резерфорда по розсіянню  $\alpha$ -частинок,
- г) Штерна і Герлаха.

**31. Що вивчалоя в дослідях Резерфорда?**

- а) розсіяння електронів кристалами,
- б) хвильова природа нейтральних атомів та молекул за результатами їх розсіювання на двовимірній дифракційній ґратці,
- в) тиск світла,
- г) розсіювання потоку  $\alpha$ -частинок атомами металу.

**32. Якою взаємодією визначається розсіювання частинок у дослідях Резерфорда?**

- а) гравітаційною взаємодією,
- б) ядерною взаємодією,
- в) кулонівською взаємодією електронів,
- г) кулонівською взаємодією альфа-частинок.

**33. Яким співвідношенням задається серія Лаймана?**

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad &= R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), & \text{б)} \quad &= R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \\ \text{в)} \quad &= R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), & \text{г)} \quad &= R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

**34. Яким співвідношенням задається серія Бальмера?**

а)  $=R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,      б)  $=R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,

в)  $=R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,      г)  $=R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ .

**35. Яким співвідношенням задається серія Пашена?**

а)  $=R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,      б)  $=R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,

в)  $=R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ,      г)  $=R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ .

**36. Якій серії відповідають спектральні лінії в ультрафіолетовій частині спектра атома водню?**

- а) серії Лаймана;
- б) серії Бальмера;
- в) серії Пашена;
- г) серії Брекета.

**37. Якими переходами електронів визначаються спектри поглинання атома водню (серія Лаймана)?**

- а) з основного стану на збуджені,
- б) зі збуджених на ще більш збуджені,
- в) з більш збуджених на менш збуджені,
- г) зі збуджених на основний.

**38. Як змінюється (збільшується чи зменшується) радіус орбіти електрона в атомі водню при поглинанні фотона?**

- а) збільшується,
- б) залишається незмінним,
- в) зменшується,
- г) зменшується в 3 рази.

**39. Скільки ліній спостерігатиметься у спектрі випромінювання атома водню, що знаходиться у збудженому стані на четвертому енергетичному рівні?**

- а) 3,      б) 1,      в) 6,      г) 5.

**40. У скільки разів довжина хвилі  $\lambda_3$  випромінювання атома водню при переході з третьої орбіти на другу більша за довжину хвилі  $\lambda_4$ , зумовлену переходом з четвертої орбіти на другу?**

а)  $\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 2,7$ ,      б)  $\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 1,35$ ,      в)  $\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 5,4$ ,      г)  $\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 10,8$ .

**41. В якому випадку, згідно з теорією Бора, атом може випромінювати світло?**

- а) при переході зі збудженого стану в основний,
- б) при русі електронів в атомі по орбітам,
- в) при переході на більш високий енергетичний рівень,
- г) при прискореному русі електронів.

**42. Які висновки впливають з теорії Бора?**

- а) енергія електрона в атомі змінюється безперервно,
- б) енергія електрона в атомі має дискретні значення,
- в) атом випромінює енергію при переході електрона з одного стаціонарного стану в інший.

**43. Що відбувається в моделі атома Бора в основному стані?**

- а) не випромінюються електромагнітні хвилі,
- б) випромінюються кванти енергії,
- в) безперервно випромінюються електромагнітні хвилі,
- г) періодично випромінюються електромагнітні хвилі.

**44. Де в моделі атома Бора може перебувати електрон?**

- а) на будь-яких орбітах,
- б) на орбітах, які задовольняють правилу квантування енергії,
- в) на орбітах, які задовольняють правилу квантування моменту імпульсу,
- г) на орбітах, які задовольняють правилу квантування імпульсу.

**45. Яка фізична величина квантується в постулатах теорії атома водню Бора?**

- а) швидкість електрона,
- б) імпульс електрона,
- в) момент імпульсу електрона,
- г) кінетична енергія електрона.

**46. Що таке борівський радіус?**

- а) радіус максимальної орбіти електрона,
- б) радіус мінімальної орбіти електрона,
- в) радіус обертання Місяця навколо Землі,
- г) радіус стаціонарної орбіти електрона.

47. Чому дорівнює перший борівський радіус?

а)  $\frac{4}{m_e e^2} \hbar^2$ ,      б)  $\frac{4}{Z m_e e^2} \hbar^2 n^2, n \in N$ ,  
в)  $\frac{m_e e^4}{64 \hbar^3}$ ,      г)  $-\frac{m_e e^4}{32 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}, n \in N$ .

48. Чому дорівнюють радіуси дозволених орбіт електрона у воднеподібному атомі?

а)  $\frac{4}{m_e e^2} \hbar^2$ ,      б)  $\frac{4}{Z m_e e^2} \hbar^2 n^2, n \in N$ ,  
в)  $\frac{m_e e^4}{64 \hbar^3}$ ,      г)  $-\frac{m_e e^4}{32 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}, n \in N$ .

49. Чому дорівнюють дозвалені значення енергії воднеподібного атома?

а)  $\frac{4}{m_e e^2} \hbar^2$ ,      б)  $\frac{4}{Z m_e e^2} \hbar^2 n^2, n \in N$ ,  
в)  $\frac{m_e e^4}{64 \hbar^3}$ ,      г)  $-\frac{m_e e^4}{32 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}, n \in N$ .

50. Чому дорівнює стала Рідберга?

а)  $\frac{4}{m_e e^2} \hbar^2$ ,      б)  $\frac{4}{Z m_e e^2} \hbar^2 n^2, n \in N$ ,  
в)  $\frac{m_e e^4}{64 \hbar^3}$ ,      г)  $-\frac{m_e e^4}{32 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}, n \in N$ .

51. Чим пояснюється поява максимумів на вольт-амперній характеристикі в дослідах Франка і Герца?

- а) коливанням напруги на аноді,
- б) наявністю пружних зіткнень електронів з атомами,
- в) наявністю непружних зіткнень електронів з атомами.
- г) дискретністю енергетичних рівнів атома.

52. Які переходи електронів визначають нелінійність вольт-амперної характеристики тріода в дослідах Франка — Герца?

- а) з основного стану у збуджені,
- б) зі збуджених на збуджені,
- в) зі збуджених на основний та збуджені,
- г) зі збуджених на основний.

**53. Що доводить дослід Франка — Герца?**

- а) електрони завжди пружно відбиваються від атомів,
- б) електрони ніколи не втрачають енергію під час зіткнення з атомами,
- в) електрони з деякими енергіями можуть відбиватися від атомів непружно, а енергія, яку при цьому вони втрачають, є дискретною,
- г) електрони ніколи пружно не відбиваються від атомів.

**54. Яку роль відіграє різниця потенціалів між сіткою і анодом в дослідах Франка і Герца?**

- а) затримує електрони після пружних зіткнень,
- б) прискорює електрони, що зазнали непружні зіткнення,
- в) затримує електрони, що зазнали непружні зіткнення,
- г) підсилює струм у лампі.

**55. За яких значень кінетичної енергії  $E_k$  електрони в досліді Франка і Герца не досягнуть анода?**

- а)  $4,9 \text{ eV} < E_k < 9,8 \text{ eV}$ ,
- б)  $E_k = 4,9 \text{ eV}$ ,
- в)  $E_k < 4,9 \text{ eV}$ ,
- г)  $9,8 \text{ eV} < E_k < 14,7 \text{ eV}$ ,

**4.2. Квантова теорія будови атомів та молекул**

**56. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредінгера для воднеподібного атома?**

а) 
$$+\frac{2m}{\hbar^2} E = 0, -\infty < x < \infty,$$

б) 
$$+\frac{2m}{\hbar^2} E = 0, 0 < x < l,$$

в) 
$$+\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m}{2} \frac{x^2}{0} \right) = 0,$$

г) 
$$+\frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4} \frac{1}{0r} \right) = 0.$$

**57. Яким є основний стан атома?**

- а) виродженим,
- б) невиродженим,
- в) частково виродженим,
- г) вільним.

**58. Яка квантована фізична величина визначається головним квантовим числом  $n$ ?**

- а) власний момент імпульсу електрона  $L_s$ ,
- б) орбітальний момент імпульсу електрона  $L_l$ ,
- в) енергія електрона,
- г) проекція орбітального моменту імпульсу електрона  $L_{lz}$  на напрямок магнітного поля.

**59. Яка квантована фізична величина визначається орбітальним квантовим числом  $m$ ?**

- а) власний момент імпульсу електрона  $L_s$ ,
- б) орбітальний момент імпульсу електрона  $L_l$ ,
- в) енергія електрона,
- г) проекція орбітального моменту імпульсу електрона  $L_{lz}$  на напрямок магнітного поля.

**60. Яка квантована фізична величина визначається магнітним квантовим числом  $m$ ?**

- а) власний момент імпульсу електрона  $L_s$ ,
- б) орбітальний момент імпульсу електрона  $L_l$ ,
- в) енергія електрона,
- г) проекція орбітального моменту імпульсу електрона  $L_{lz}$  на напрямок магнітного поля.

**61. Які значення орбітального квантового числа можливі при  $n = 2$ ?**

- а)  $l = 0$ ,
- б)  $l = 1$ ,
- в)  $l = 2$ ,
- г)  $l = 3$ .

**62. За якою формулою визначається орбітальний момент імпульсу електрона?**

- а)  $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ ,
- б)  $L_{sz} = m_s \hbar$ ,
- в)  $L_{lz} = m_l \hbar$ ,
- г)  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ .

**63. За якою формулою визначається проекція вектора орбітального моменту імпульсу електрона на напрямок магнітного поля?**

- а)  $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ ,
- б)  $L_{sz} = m_s \hbar$ ,
- в)  $L_{lz} = m_l \hbar$ ,
- г)  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ .

64. Якому стану електрона відповідає стан з  $l = 2$ ?  
 а)  $p$ , б)  $f$ , в)  $s$ , г)  $d$ .
65. Скільки орієнтацій в магнітному полі може мати проекція вектора орбітального моменту імпульсу електрона при  $l = 2$ ?  
 а) 2, б) 4, в) 3, г) 5.
66. Які значення магнітного квантового числа  $m$  можливі при  $l = 1$ ?  
 а)  $\pm 1$ , б)  $\pm 2$ , в)  $\pm 3$ , г) 0.
67. Як називають електрон з  $l = 0$ ?  
 а)  $s$ -електроном, б)  $p$ -електроном,  
 в)  $d$ -електроном, г)  $f$ -електроном.
68. Як називають електрон з  $l = 1$ ?  
 а)  $s$ -електроном, б)  $p$ -електроном,  
 в)  $d$ -електроном, г)  $f$ -електроном.
69. Як називають електрон з  $l = 2$ ?  
 а)  $s$ -електроном, б)  $p$ -електроном,  
 в)  $d$ -електроном, г)  $f$ -електроном.
70. Як називають електрон з  $l = 3$ ?  
 а)  $s$ -електроном, б)  $p$ -електроном,  
 в)  $d$ -електроном, г)  $f$ -електроном.
71. Що описує спінове квантове число?  
 а) квантування рівнів енергії атома,  
 б) квантування модуля моменту імпульсу атома,  
 в) квантування проекції моменту імпульсу атома,  
 г) квантування власного моменту імпульсу електрона.
72. Яка квантована фізична величина визначається магнітним спіновим числом  $m_s$ ?  
 а) власний момент імпульсу електрона  $L_s$ ,  
 б) орбітальний момент імпульсу електрона  $L_l$ ,  
 в) енергія електрона,  
 г) проекція спіна електрона  $L_{sz}$  на напрямок магнітного поля.
73. Як визначається власний момент імпульсу (спін) електрона?  
 а)  $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ ,  
 б)  $L_{sz} = m_s \hbar$ ,  
 в)  $L_{lz} = m_s \hbar$ ,  
 г)  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ .

74. Скільки орієнтацій в магнітному полі має вектор власного магнітного моменту електрона?

- а) 1,      б) 2,      в) 3,      г) 4.

75. Що називають ефектом Зеемана?

- а) розщеплення енергетичних рівнів атома під дією магнітного поля,  
б) розщеплення енергетичних рівнів атома під дією електричного поля,  
в) розщеплення енергетичних рівнів атома під дією сильного магнітного поля,  
г) виникнення в спектрі проходячого крізь рідину або газ світла комбінаційних частот на базі частоти падаючого світла та частот обертальних та коливальних переходів молекул, що розсіюють це світло.

76. Чому дорівнює магнетон Бора?

- а)  $\frac{e\hbar}{2m_e}$ ,      б)  $\frac{\hbar}{mv}$ ,      в)  $\frac{\hbar}{mc}$ ,      г)  $\frac{m_e e^4}{64 \pi^3 \hbar^3 \frac{2}{0}}$ .

77. Які з наведених величин можна виразити через магнетон Бора?

- а) власний момент імпульсу електрона  $L_s$ ,  
б) проекція вектора власного магнітного моменту імпульсу електрона на напрямок магнітного поля  $p_{msz}$ ,  
в) орбітальний момент імпульсу електрона  $L_l$   
г) магнітний момент електрона  $p_m$ .

78. Яке максимальне число електронів, що визначаються одним значенням головного квантового числа  $n$ ?

- а) 1,      б)  $2(2l + 1)$ ,      в) 2,      г)  $2n^2$ .

79. Яка максимальна кількість електронів, що визначаються двома квантовими числами  $n$  і  $l$ ?

- а) 1,      б)  $2(2l + 1)$ ,      в) 2,      г)  $2n^2$ .

80. Яка максимальна кількість електронів, що визначаються чотирма квантовими числами  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $m_s$ ?

- а) 1,      б)  $2(2l + 1)$ ,      в) 2,      г)  $2n^2$ .



**81. Яка із пар електронів з квантовими числами  $n, l, m$  і  $m_s$  знаходиться в атомі в стані  $2s$ ?**

- а) 2, 0, 0,  $+1/2$ ,  
1, 0, 0,  $-1/2$ ,
- б) 2, 1, 0,  $+1/2$ ,  
2, 0, 0,  $-1/2$ ,
- в) 1, 0, 0,  $+1/2$ ,  
2, 0, 0,  $-1/2$ ,
- г) 2, 0, 0,  $+1/2$ ,  
2, 0, 0,  $-1/2$ .

**82. Чим викликane гальмівне випромінювання?**

- а) гальмуванням електронів,
- б) збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів антикатада,
- в) самовільними переходами атомів з одного енергетичного стану в інший,
- г) падаючим на атоми випромінюванням, що призводить до їх переходів з одного енергетичного стану в інший.

**83. Чим викликane характеристичне випромінювання?**

- а) гальмуванням електронів,
- б) збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів антикатада,
- в) самовільними переходами атомів з одного енергетичного стану в інший,
- г) падаючим на атоми випромінюванням, що призводить до їх переходів з одного енергетичного стану в інший.

**84. Від чого залежить довжина хвилі характеристичного рентгєнівського випромінювання?**

- а) від температури катода,
- б) матеріалу антикатада,
- в) різниці потенціалів між катодом і анодом,
- г) матеріалу катода.

**85. Який вигляд має спектр випромінювання окремих молекул, що не взаємодіють одна з одною?**

- а) окремих спектральних ліній, що називають лінійчатим спектром,
- б) суцільного спектра, який називають білим,
- в) окремих смуг, які називають смугастим спектром,
- г) окремих спектральних ліній та смуг.

86. Які спектри поглинання має молекула?

а) лінійчаті, б) суцільні, в) смугасті, г) лінійчаті та смугасті.

87. Чому дорівнює енергія обертального руху двоатомної молекули?

а)  $\frac{1}{2}\hbar$ , б)  $\left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar$ , в)  $\frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}$ , г)  $\hbar$ .

88. Чому дорівнює енергія коливального руху двоатомної молекули?

а)  $\frac{1}{2}\hbar$ , б)  $\left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar$ , в)  $\frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}$ , г)  $\hbar$ .

89. Якому правилу відбору підкоряються переходи між обертовими рівнями?

а)  $J = +1$ , б)  $J = \pm 1$ , в)  $v = +1$ , г)  $v = -2$ .

90. Якому правилу відбору підкоряються переходи між коливальними рівнями?

а)  $J = +1$ , б)  $J = \pm 1$ , в)  $v = \pm 1$ , г)  $v = +2$ .

91. Який вид руху дає основний внесок до енергії молекули?

а) рух електронів по власних орбітах,  
б) коливальний рух атомів в молекулі,  
в) обертання молекули в цілому,  
г) жодний з перелічених вище.

92. Який закон фізики обумовлює відштовхування атомів в молекулі на малих відстанях?

а) закон Кулона,  
б) принцип Паулі,  
в) принцип детальної рівноваги,  
г) закон всесвітнього тяжіння.

93. Яка з молекул має електричний момент?

а)  $\text{NO}_2$ , б)  $\text{H}_2\text{O}$ , в)  $\text{H}_2$ , г)  $\text{O}_2$ .

94. Який тип зв'язку утримує атоми в положенні рівноваги в молекулі повареної солі  $\text{NaCl}$ ?

а) іонний,  
б) ковалентний,  
в) ван-дер-ваальсовський,  
г) ядерний.

- 95. Який тип зв'язку утримує атоми водню в положенні рівноваги в молекулі водню?**
- а) іонний,
  - б) ковалентний,
  - в) ван-дер-ваальсовський,
  - г) ядерний.
- 96. Що називають ефектом Рамана (комбінаційним розсіянням світла)?**
- а) розщеплення енергетичних рівнів атома під дією магнітного поля,
  - б) розщеплення енергетичних рівнів атома під дією електричного поля,
  - в) розщеплення енергетичних рівнів атома під дією сильного магнітного поля,
  - г) виникнення в спектрі проходячого крізь рідину або газ світла комбінаційних частот на базі частоти падаючого світла та частот обертальних і коливальних переходів молекул, що розсіюють це світло.
- 97. Чим викликане спонтанне випромінювання?**
- а) гальмуванням електронів,
  - б) збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів антикатада,
  - в) самовільними переходами атомів з одного енергетичного стану в інший,
  - г) падаючим на атоми випромінюванням, що призводить до їх переходів з одного енергетичного стану в інший.
- 98. Чим викликане індуковане випромінювання?**
- а) гальмуванням електронів,
  - б) збудженням внутрішніх електронних оболонок атомів антикатада,
  - в) самовільними переходами атомів з одного енергетичного стану в інший,
  - г) падаючим на атоми випромінюванням, що призводить до їх переходів з одного енергетичного стану в інший.
- 99. Від чого залежить частота спонтанного випромінювання?**
- а) частоти падаючого випромінювання,
  - б) будови атомів та молекул,
  - в) інтенсивності падаючого випромінювання,
  - г) концентрації атомів і молекул.

- 100.** Від якої характеристики падаючого випромінювання залежить частота індукованого випромінювання?
- частоти,
  - фази,
  - ступеню поляризації,
  - напрямку та тривалості.
- 101.** Який процес має місце в умовах теплової рівноваги в квантовій системі?
- резонансне поглинання більше за індуковане,
  - індуковане випромінювання більше за резонансне,
  - резонансне поглинання і індуковане випромінювання рівноімовірні,
  - резонансне поглинання відсутнє.
- 102.** Яке співвідношення має місце між населеностями верхнього ( $n_2$ ) і нижнього ( $n_1$ ) рівнів при інверсній заселеності рівнів?
- $n_2 < n_1$ ,
  - $n_2 > n_1$ ,
  - $n_2 = n_1$ ,
  - $n_2 = 0$ .
- 103.** Яка «температура» активного елемента лазера за умови інверсної населеності рівнів?
- $0 < T < \infty$ ,
  - $T \rightarrow \infty$ ,
  - $T < 0$  К,
  - $T = 0$  К

## 5. Фізика твердого тіла

### 5.1. Квантові статистики

- 104.** Що називають бозоном?
- квант енергії коливань кристалічної решітки,
  - квант енергії електромагнітного поля,
  - частинка, що підпорядковується розподілу Бозе — Ейнштейна,
  - частинка, що підпорядковується розподілу Фермі — Дірака.
- 105.** Що називають ферміоном?
- квант енергії коливань кристалічної решітки,
  - квант енергії електромагнітного поля,
  - частинка, що підпорядковується розподілу Бозе — Ейнштейна,
  - частинка, що підпорядковується розподілу Фермі — Дірака.

106. За якою умовою колектив частинок буде «невиродженим» ( $N$  — кількість мікрочастинок,  $G$  — кількість вільних мікростанів)?

а)  $\frac{N}{G} \ll 1$ ,    б)  $\frac{N}{G} = 1$ ,    в)  $\frac{N}{G} > 1$ ,    г)  $\frac{N}{G} \gg 1$ .

107. Чому дорівнює об'єм комірки фазового простору?

а)  $x \cdot p_x > \frac{\hbar}{2}$ ,

б)  $V = x \cdot y \cdot z$ ,

в)  $x \cdot y \cdot z \cdot p_x \cdot p_y \cdot p_z = \hbar^3$ ,

г)  $z \cdot p_z > \frac{\hbar}{2}$ .

108. Який вигляд має функція розподілу Максвелла?

а)  $f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) - 1}$ ,

б)  $f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$ ,

в)  $f(V) = A^{-2} e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}}$ ,

г)  $f(E_n) = \text{const} \exp\left(-\frac{E_n}{2k_B T}\right)$ .

109. Який вигляд має функція розподілу Больцмана?

а)  $f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) - 1}$ ,

б)  $f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$ ,

в)  $f(v) = A v^2 e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}}$ ,

г)  $f(E_n) = \text{const} \exp\left(-\frac{E_n}{2k_B T}\right)$ .

**110. Який вигляд має функція розподілу Фермі — Дірака?**

$$\text{а) } f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) - 1},$$

$$\text{б) } f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1},$$

$$\text{в) } f(v) = A v^2 e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}},$$

$$\text{г) } f(E_n) = \text{const} \exp\left(-\frac{E_n}{2k_B T}\right).$$

**111. Чому дорівнює функція розподілу Бозе — Ейнштейна?**

$$\text{а) } f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) - 1},$$

$$\text{б) } f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1},$$

$$\text{в) } f(v) = A v^2 e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}},$$

$$\text{г) } f(E_n) = \text{const} \exp\left(-\frac{E_n}{2k_B T}\right).$$

**112. Що називають енергією Фермі для електронів у металі?**

а) мінімально можливу енергію електрона в металі при  $T \neq 0$ ,

б) максимально можливу енергію електрона в металі при  $T \neq 0$ ,

в) середню енергію електрона в металі за температури абсолютного нуля,

г) максимально можливу енергію електрона в металі за температури абсолютного нуля.

**113. Що називають ефектом Мейсснера?**

а) явище інтенсивного поглинання атомами світла частот, які відповідають переходу з основного стану у найближчий до нього збуджений стан,

- б) явище пружного випромінювання або поглинання  $\gamma$ -квантів,  
 в) явище непроникнення магнітного поля у глибину надпрорідника,  
 г) явище розщеплення енергетичних рівнів атома під впливом магнітного поля.

114. Якому розподілу підпорядковуються куперівські пари?

- а) розподілу Больцмана,  
 б) розподілу Бозе — Ейнштейна,  
 в) розподілу Максвелла,  
 г) розподілу Фермі — Дірака.

115. Чому дорівнює при  $T = 0$  ймовірність  $f$  заповнення електронами станів з енергією меншою енергії Фермі?

- а)  $f = 0$ ,      б)  $0 < f < 1$ ,      в)  $f = 1$ ,      г)  $f > 1$ .

### 5.2. Теплові властивості кристалів

116. Чому, згідно з законом Дюлонга і Пті, дорівнює молярна теплоємність хімічно простого тіла в кристалічному стані?

- а)  $3R$ ,

б) 
$$\frac{3N\hbar}{\left( e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1 \right)} e^{\frac{\hbar}{k_B T}} \frac{\hbar}{k_B T^2},$$

- в)  $3Nk$ ,

г) 
$$\frac{3N(\hbar)^2}{kT^2} e^{-\frac{\hbar}{kT}}.$$

117. Чому дорівнює середня енергія квантового гармонічного осцилятора?

а)  $\left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar$ ,

б)  $\frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,

в)  $\frac{1}{2} \hbar + \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,

г)  $\frac{3N\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ .

118. Чому, згідно з теорією Ейнштейна, дорівнює енергія кристала?

а)  $\left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar$ ,      б)  $\frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,      в)  $\frac{1}{2} \hbar + \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,      г)  $\frac{3N\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ .

119. Чому, згідно з теорією Ейнштейна, дорівнює теплоємність кристала в загальному випадку?

а)  $3R$ ,

б) 
$$\frac{3N\hbar}{\left( e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1 \right)} e^{\frac{\hbar}{k_B T}} \frac{\hbar}{k_B T^2},$$

в)  $3Nk$ ,

г) 
$$\frac{3N(\hbar)^2}{k_B T^2} e^{-\frac{\hbar}{k_B T}}.$$

120. Чому згідно з Ейнштейном дорівнює теплоємність кристала за низьких температур?

а)  $3R$ ,

б) 
$$\frac{3N\hbar}{\left( e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1 \right)} e^{\frac{\hbar}{k_B T}} \frac{\hbar}{k_B T^2},$$

в)  $3Nk$ ,

г) 
$$\frac{3N(\hbar)^2}{k_B T^2} e^{-\frac{\hbar}{k_B T}}.$$

121. Чому, згідно з теорією Ейнштейна дорівнює теплоємність кристала за високих температур?

а)  $3R$ ,

б) 
$$\frac{3N\hbar}{\left( e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1 \right)} e^{\frac{\hbar}{k_B T}} \frac{\hbar}{k_B T^2},$$

в)  $3Nk$ ,

г) 
$$\frac{3N(\hbar)^2}{k_B T^2} e^{-\frac{\hbar}{k_B T}}.$$



122. Чому дорівнює середня енергія випромінювання частоти?

а)  $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$ ,   б)  $\frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,   в)  $\frac{1}{2}\hbar + \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,   г)  $\frac{3N\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ .

123. Чому дорівнює характеристична температура Дебая?

а)  $\frac{\hbar m}{k_B}$ ,   б)  $\hbar$ ,   в)  $\frac{1}{2}\hbar + \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,   г)  $\frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ .

124. Що називають фотоном?

- а) квант енергії коливань кристалічної решітки,
- б) квант енергії електромагнітного поля,
- в) квант енергії гравітаційного поля,
- г) квант енергії сильної взаємодії.

125. Що називають фононом?

- а) квант енергії коливань кристалічної решітки,
- б) квант енергії електромагнітного поля,
- в) квант енергії гравітаційного поля,
- г) квант енергії сильної взаємодії.

126. Чому дорівнює енергія фонона?

а)  $\frac{\hbar m}{k_B}$ ,   б)  $\hbar$ ,   в)  $\frac{1}{2}\hbar + \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ ,   г)  $\frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar}{k_B T}} - 1}$ .

### 5.3. Зонна теорія твердого тіла

127. Скільки підрівнів має енергетична зона кристала, що має  $N$  атомів, якщо відповідний енергетичний рівень в ізольованому атомі був  $(2l + 1)$ -кратно вироджений?

- а)  $N$ ,   б)  $2N$ ,   в)  $N(2l + 1)$ ,   г)  $2N(2l + 1)$ .

128. Скільки підрівнів має енергетична зона кристалу, що має  $N$  атомів, якщо відповідний енергетичний рівень в ізольованому атомі цієї зони відповідає  $p$ -рівень?

- а)  $N$ ,   б)  $2N$ ,   в)  $3N$ ,   г)  $6N$ .

129. Скільки електронів може вмістити енергетична зона кристала з  $N$  атомів, якщо в ізольованому атомі цієї зони відповідає  $p$ -рівень?

- а)  $N$ ,   б)  $2N$ ,   в)  $3N$ ,   г)  $6N$ .

**130.** Скільки електронів у нормальному стані має  $2s$ -зона кристала літію, що має  $N$  атомів ( $Z_{Li} = 3$ )?

- а)  $N/2$ ,      б)  $N$ ,      в)  $2N$ ,      г)  $3N$ ,

**131.** Які умови з точки зору зонної теорії є необхідними і достатніми для появи у тіл високої провідності?

- а) наявність вільних електронів, що можуть переміщуватись по кристалу,  
б) наявність частково заповнених зон,  
в) наявність цілком заповнених зон,  
г) наявність заборонених зон.

**132.** Що називають енергією Фермі для електронів в напівпровідниках та діелектриках?

- а) максимально можливу енергію електронів у валентній зоні,  
б) середню енергію електронів у забороненій зоні,  
в) мінімально можливу енергію електронів у зоні провідності,  
г) енергію, при якій ймовірність перебування електронів у забороненій зоні дорівнює 0,5.

**133.** Які напівпровідники мають власну провідність?

- а) напівпровідники з акцепторними домішками,  
б) напівпровідники з донорними домішками,  
в) хімічно чисті напівпровідники при абсолютному нулі,  
г) хімічно чисті напівпровідники при  $T > 1$ .

**134.** Коли з'являється провідність у хімічно чистих напівпровідників?

- а) при збудженні нагріванням,  
б) при збудженні шляхом опромінення світлом,  
в) при наявності донорних рівнів,  
г) при наявності акцепторних рівнів.

**135.** Чим обумовлена  $n$ -провідність напівпровідників?

- а) при збудженні нагріванням,  
б) при збудженні шляхом опромінення світлом,  
в) при наявності донорних рівнів,  
г) при наявності акцепторних рівнів.

136. Чим обумовлена  $p$ -провідність напівпровідників?

- а) при збудженні нагріванням,
- б) при збудженні шляхом опромінення світлом,
- в) при наявності донорних рівнів,
- г) при наявності акцепторних рівнів.

137. Яку електропровідність має кристал германію з домішкою п'ятивалентної сурьми?

- а) електронну,
- б) діркову,
- в) електронно-діркову,
- г) власну.

138. Яку електропровідність у кристала германію з домішкою трьохвалентного індію?

- а) електронна,
- б) діркова,
- в) електронно-діркова,
- г) власна.

139. Як визначається залежність власної провідності напівпровідників від температури?

- а)  $= \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ ,
- б)  $= \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} + \sigma_{пр} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ ,
- в)  $\sigma_{пр} = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ ,
- г)  $\sigma_{ф} = \sigma_0 e^{-\frac{t}{n}}$ .

140. Для чого використовують  $p$ - $n$ -перехід в електричному ланцюжку?

- а) для підсилення напруги,
- б) для підсилення струму,
- в) для випрямлення змінного струму,
- г) для підсилення потужності.

**141. Що відбувається при внутрішньому фотоелектрічному ефекті взагалі?**

- а) енергія фотонів, що падають на поверхню металу, перетворюється на кінетичну енергію фотоелектронів,
- б) кінетична енергія електронів, що падають на поверхню металу, перетворюється на енергію фотонів, які випромінює метал,
- в) електрони, залишаючись у речовині, змінюють свій енергетичний стан,
- г) частина електронів переходить з валентної зони до зони провідності.

**142. Що відбувається під час виникнення фотопровідності в напівпровідниках та діелектриках?**

- а) енергія фотонів, що падають на поверхню металу, перетворюється на кінетичну енергію фотоелектронів,
- б) кінетична енергія електронів, що падають на поверхню металу, перетворюється на енергію фотонів, які випромінює метал,
- в) електрони, залишаючись у речовині, змінюють свій енергетичний стан,
- г) частина електронів переходить з валентної зони до зони провідності.

**143. За яким законом відбувається зменшення фотопровідності напівпровідника?**

- а)  $= e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ ,
- б)  $= e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} + e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ ,
- в)  $\mu = e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$ ,
- г)  $\phi = e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

**144. В чому полягає явище вентильного фотоелектричного ефекту?**

- а) якщо спаї двох різномірних металів, що утворюють замкнуте коло, мають неоднакову температуру, то в колі протікає електричний струм,
- б) якщо через коло, що утворене з різномірних металів або напівпровідників, протікає електричний струм, то в одних

- спаях відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- в) якщо через однорідний провідник, уздовж якого існує градієнт температури, протікає електричний струм, то в одних частинах провідника відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
  - г) якщо на напівпровідник або діелектрик падає світло, то в них відбувається перерозподіл електронів по енергетичних рівнях.

**145. В чому полягає явище Зеебека?**

- а) якщо спаї двох різнорідних металів, що утворюють замкнуте коло, мають неоднакову температуру, то в колі протікає електричний струм,
- б) якщо через коло, що утворене з різнорідних металів або напівпровідників, протікає електричний струм, то в одних спаях відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- в) якщо через однорідний провідник, уздовж якого існує градієнт температури, протікає електричний струм, то в одних частинах провідника відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- г) якщо на напівпровідник або діелектрик падає світло, то в них відбувається перерозподіл електронів по енергетичних рівнях.

**146. В чому полягає явище Томсона?**

- а) якщо спаї двох різнорідних металів, що утворюють замкнуте коло, мають неоднакову температуру, то в колі протікає електричний струм,
- б) якщо через коло, що утворене з різнорідних металів або напівпровідників, протікає електричний струм, то в одних спаях відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- в) якщо через однорідний провідник, уздовж якого існує градієнт температури, протікає електричний струм, то в одних частинах провідника відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- г) якщо на напівпровідник або діелектрик падає світло, то в них відбувається перерозподіл електронів по енергетичних рівнях.

**147. В чому полягає явище Пельтьє?**

- а) якщо спаї двох різнорідних металів, що утворюють замкнуте коло, мають неоднакову температуру, то в колі протікає електричний струм,
- б) якщо через коло, що утворене з різнорідних металів або напівпровідників, протікає електричний струм, то в одних спаях відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- в) якщо через однорідний провідник, уздовж якого існує градієнт температури, протікає електричний струм, то в одних частинах провідника відбувається виділення тепла, а в інших — його поглинання,
- г) якщо на напівпровідник або діелектрик падає світло, то в них відбувається перерозподіл електронів по енергетичних рівнях.

**6. Атомне ядро та елементарні частинки**

**148. Що таке природна радіоактивність?**

- а) самодовільне (спонтанне) перетворення ядер атомів,
- б) перетворення ядер атомів при бомбардуванні  $\alpha$ -частинками,
- в) перетворення ядер атомів при бомбардуванні  $\beta$ -частинками,
- г) перетворення ядер атомів під впливом нейтронів.

**149. Який вигляд має закон радіоактивного розпаду?**

- а)  $N_t = \frac{N_0}{2}$ ,      б)  $N_t = \frac{N_0}{e}$ ,      в)  $N = N_0 e^{-t}$ ,      г)  $\frac{\ln 2}{T}$ .

**150. Чому дорівнює період напіврозпаду?**

- а)  $\frac{\ln 2}{\lambda}$ ,      б)  $\frac{1}{\lambda}$ ,      в)  $N_0 e^{-t}$ ,      г) .

**151. Як залежить активність заданої кількості радіоактивної речовини від періоду напіврозпаду  $T_{1/2}$ ?**

- а) прямопропорційна  $T^2$ ,
- б) прямопропорційна  $T$ ,
- в) зворотно пропорційна  $T$ ,
- г) прямопропорційна  $\ln T$ .

**152. Що називається масовим числом?**

- а) маса атома,
- б) маса ядра,
- в) кількість нуклонів в ядрі,
- г) кількість нейтронів в ядрі.

153. Що відбувається при  $\alpha$ -розпаді?

- а) ядро, що розпадається, випускає ядро гелію  ${}^4_2\text{He}$ ,
- б) ядро, що розпадається, випускає електрон,
- в) ядро, що розпадається, випускає  $\gamma$ -квант,
- г) ядро, що розпадається, випускає протон.

154. Що відбувається при  $\beta^-$ -розпаді?

- а) ядро, що розпадається, випускає ядро гелію  ${}^4_2\text{He}$ ,
- б) ядро, що розпадається, випускає електрон,
- в) ядро, що розпадається, випускає  $\gamma$ -квант,
- г) ядро, що розпадається, випускає протон.

155. Що відбувається при  $\beta^+$ -розпаді?

- а) ядро, що розпадається, випускає ядро гелію  ${}^4_2\text{He}$ ,
- б) ядро, що розпадається, випускає електрон,
- в) ядро, що розпадається, випускає  $\gamma$ -квант,
- г) ядро, що розпадається, випускає протон.

156. Чому дорівнює дефект мас ядра?

- а)  $c^2([Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}})$ ,
- б)  $\frac{c^2}{A}([Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}})$ ,
- в)  $[Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}$ ,
- г)  $c^2[Zm_p + (A - Z)m_n]$ .

157. Чому дорівнює питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі?

- а)  $c^2([Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}})$ ,
- б)  $\frac{c^2}{A}([Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}})$ ,
- в)  $[Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}$ ,
- г)  $c^2[Zm_p + (A - Z)m_n]$ .

158. Обмін якими частинками забезпечує взаємодію нуклонів у ядрі?

- а) -мезонами, б) -нейтрино, в) електронами, г) гиперонами.

159. При яких радіоактивних перетвореннях з'являється нейтрино?

- а) при  $\alpha$ -розпаді,
- б) при  $\beta^-$ -розпаді електронному,
- в) разом з  $\gamma$ -випромінюванням,
- г) при викиді нейтрона.

**160. Що спільного мають ядра, які називають ізотопами?**

- а) однакове масове число,
- б) однаковий заряд, але різне масове число,
- в) однакову кількість нейтронів,
- г) однакові заряд та масове число, але різний період напіврозпаду.

**161. Що спільного мають ядра, які називають ізомерами?**

- а) однакове масове число,
- б) однаковий заряд, але різне масове число,
- в) однакову кількість нейтронів,
- г) однакові заряд та масове число, але різний період напіврозпаду.

**162. Що спільного мають ядра, які називають ізотонами?**

- а) однакове масове число,
- б) однаковий заряд, але різне масове число,
- в) однакову кількість нейтронів,
- г) однакові заряд та масове число, але різний період напіврозпаду.

**163. Що відбувається при термоядерній реакції?**

- а) розпад важких ядер,
- б) синтез двох або декількох легких ядер,
- в) -захват,
- г) -захват.



## ЛІТЕРАТУРА

1. Загальна фізика з прикладами і задачами [Текст]. Ч. I. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка : навч. посіб. / В. О. Стороженко, І. М. Кібець, А. І. Рибалка, Т. Б. Ткаченко. — Х. : Компанія СМІТ, 2006.
2. Загальна фізика з прикладами і задачами [Текст]. Ч. II. Електрика та магнетизм : навч. посіб. / І. М. Кібець, А. І. Рибалка, В. О. Стороженко. — Х. : Компанія СМІТ, 2011.
3. Савельев И. В. Курс общей физики [Текст]. Т. 2, 3 : учеб. пособие / И. В. Савельев. — М. : Наука, 1982.
4. Детлаф А. А. Курс физики [Текст] / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. — М. : Высшая школа, 1989.
5. Кучерук І. М. Загальна фізика [Текст]. Т. 3. Оптика. Квантова фізика / І. М. Кучерук, В. П. Дущенко. — К. : Вища школа, 1991.
6. Иродов И. Е. Электromagnetизм. Основные законы [Текст] / И. Е. Иродов. — М. : Лаборатория Базовых знаний ; М. : Физматлит, 2002. — 319 с.
7. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела [Текст] / Ч. Киттель. — М. : Физматгиз, 1982.
8. Иродов И. Е. Задачи по общей физике [Текст] / И. Е. Иродов. — 7-е изд., стереотип. — М. : БИНОМ, Лаборатория Знаний, 2007. — 431 с.
9. Чертов А. Г. Задачник по физике [Текст] / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. — М. : Высшая школа, 1988.
10. Иродов И. Е. Волновые процессы: основные законы [Текст] / И. Е. Иродов. — М. ; СПб. : Физматлит; Невский диалект; Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 253 с.
11. Сивухин Д. В. Общий курс физики : В 5 т. Т. 3. Электричество [Текст] / Д. В. Сивухин. — М. : Изд-во МФТИ; Физматлит, 2004. — 656 с.

## Основні фізичні сталі

Стала	Позначення	Числове значення
Прискорення вільного падіння	$g$	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Стала Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Універсальна газова стала	$R$	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Молярний об'єм ідеального газу при нормальних умовах	$V_0$	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$
Нормальний атмосферний тиск	$P_0$	$1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$
Стала Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Стала Фарадея	$F$	$9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$
Елементарний заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Маса спокою електрона	$m_e$	$5,49 \cdot 10^{-4} \text{ а.о.м.}$ $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Маса спокою протона	$m_p$	$1,00728 \text{ а.о.м.}$ $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Маса спокою нейтрона	$m_n$	$1,00866 \text{ а.о.м.}$ $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Відношення заряду електрона до його маси	$-\frac{e}{m_e}$	$-1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Електрична стала	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнітна стала	$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$	$4 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ $= 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$
Швидкість світла в вакуумі	$c$	$2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Стала Стефана — Больцмана		$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала Планка	$h$	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала в законі зміщення Віна	$b$	$2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Стала в другому законі Віна	$C$	$1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^5)$
Стала Рідберга	$R_\infty$	$1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	$a_0$	$5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$e$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$

Стала	Позначення	Числове значення
Магнетон Бора	$e$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерний магнетон	$N$	$5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
Атомна одиниця маси	а.о.м	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Коефіцієнт пропорційності між масою й енергією	$c^2$	$8,99 \cdot 10^{16}$ Дж/кг

### Деякі астрономічні величини

Фізичні параметри	Сонце	Земля	Місяць
Маса, кг	$1,97 \cdot 10^{30}$	$5,96 \cdot 10^{24}$	$7,33 \cdot 10^{22}$
Радіус, м	$6,95 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
Середня густина,	1400	5518	3350
Середня відстань від Землі, км	$1,496 \cdot 10^8$	—	384 440

### Густина речовини

Тверді тіла при 293 К		Рідини	
Речовина	$\cdot 10^3$ , кг/м <sup>3</sup>	Речовина	, кг/м <sup>3</sup>
Алюміній	2,69	Бензол ( $t = 20$ С)	879
Залізо	7,86	Вода ( $t = +4$ С)	1000
хімічно чисте			
Латунь	8,3—8,7	Вода ( $t = 100$ С)	958
Лід (0 С)	0,91	Гас ( $t = 0$ С)	800
Мідь	8,88—8,96	Гліцерин ( $t = 0$ С)	1260
електролітична			
Нікель	8,4—9,2	Рицинова олія ( $t = 20$ С)	950
Олово лите	7,23	Скипидар ( $t = 16$ С)	858
Сталь лита	7,7—8,0	Спирт етиловий ( $t = 0$ С)	789
Свинець	11,22—11,44	Спирт метиловий ( $t = 0$ С)	792
Срібло	10,42—10,57	Толуол ( $t = 18$ С)	870
Цинк	6,86—7,24		
Ртуть ( $t = 0$ С)	13 596		
Чавун	6,6—7,3		

Гази при нормальних умовах ( $T_0 = 273,15$  К,  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па)

Речовина	, кг/м <sup>3</sup>	Речовина	, кг/м <sup>3</sup>
Азот	1,250	Кисень	1,429
Водень	0,089	Метан	0,717
Вуглекислий газ	1,977	Неон	0,900
Гелій	0,178	Повітря	1,293

### Швидкість звуку

Речовина	$V_{зв}$ , м/с
Вода	1450
Повітря	332

### Питомий опір і температурний коефіцієнт опору (при 20 °С)

Провідник	Питомий опір, нОм·м	Температурний коефіцієнт опору, $K^{-1}$
Алюміній	28	0,0038
Вольфрам	55	0,0051
Вугілля	40	-0,0008
Графіт	8000	
Залізо	98	0,0062
Константан	480	0,00002
Мідь	17,2	0,0043
Нікелін	400	0,000017
Ніхром	980	0,00026
Ртуть	958	0,0009
Свинець	211	0,0042
Сталь	120	0,006

### Діелектрична проникність речовин

Речовина	
Вода	81
Гас	2
Мастило трансформаторне	2,2
Парафін	2
Парафіновий папір	3,7
Слюда	6
Скло	5,5–10
Фарфор	6
Ебоніт	2,6

### Робота іонізації, еВ

Азот	15,80
Аргон	15,70
Водень	15,40
Вуглекислий газ	14,40
Гелій	24,45
Кисень	13,56
Натрій	5,12
Неон	21,48

### Електрохімічні еквіваленти, мг/Кл

Алюміній (Al <sup>+++</sup> )	0,093	Золото (Au <sup>++</sup> )	0,681	Нікель (Ni <sup>+++</sup> )	0,203
Вісмут (Bi <sup>+++</sup> )	0,719	Мідь (Cu <sup>+</sup> )	0,660	Срібло (Ag <sup>+</sup> )	1,118
Залізо (Fe <sup>++</sup> )	0,289	Мідь (Cu <sup>++</sup> )	0,329	Хром (Cr <sup>+++</sup> )	0,180
Залізо (Fe <sup>+++</sup> )	0,193	Нікель (Ni <sup>++</sup> )	0,304	Цинк (Zn <sup>++</sup> )	0,338
Золото (Au <sup>+</sup> )	2,043				

**Показники заломлення (середні для видимого проміння)**

Алмаз	2,42	Лід (-4 C)	1,31
Вода (20 C)	1,33	Скипидар (20 C)	1,47
Кварц	1,54	Скло	1,50

**Робота виходу електронів з металів, eВ**

Вольфрам	4,50	Мідь	4,47	Рубідій	2,13
Залізо	4,74	Молибден	4,20	Срібло	4,74
Золото	4,68	Натрій	2,30	Тантал	4,07
Калій	2,00	Нікель	5,00	Цезій	1,97
Літій	2,40	Платина	5,29	Цинк	4,00
Магній	3,46	Ртуть	4,52		

**Періоди піврозпаду деяких радіоактивних речовин**

Вісмут $^{210}_{83}\text{Bi}$	5,02 доби	Натрій $^{24}_{11}\text{Na}$	15,3 год
Радон $^{222}_{86}\text{Rn}$	3,82 доби	Уран $^{235}_{92}\text{U}$	$7,1 \cdot 10^8$ років
Іридій $^{192}_{77}\text{Ir}$	75 діб	Полоній $^{210}_{84}\text{Po}$	138 діб
Стронцій $^{90}_{38}\text{Sr}$	28 років	Уран $^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ років
Кальцій $^{45}_{20}\text{Ca}$	164 доби	Радій $^{226}_{88}\text{Ra}$	1600 років
Торій $^{232}_{90}\text{Th}$	$1,39 \cdot 10^{11}$ років		

**Маси деяких ізотопів, а.о.м.**

$^1_1\text{H}$	1,00783	$^{11}_5\text{B}$	11,00930	$^{28}_{13}\text{Al}$	27,97690
$^2_1\text{D}$	2,01410	$^{12}_6\text{C}$	12,0	$^{28}_{14}\text{Si}$	27,97690
$^3_1\text{T}$	3,01605	$^{13}_7\text{N}$	13,00574	$^{30}_{14}\text{Si}$	29,97377
$^4_2\text{He}$	3,01603	$^{14}_7\text{N}$	14,00307	$^{31}_{15}\text{P}$	30,97376
$^4_2\text{He}$	4,00260	$^{16}_8\text{O}$	15,99491	$^{56}_{26}\text{Fe}$	55,93490
$^6_3\text{Li}$	6,01512	$^{17}_8\text{O}$	15,99491	$^{59}_{27}\text{Co}$	58,93320
$^7_3\text{Li}$	7,01600	$^{19}_9\text{F}$	18,99840	$^{60}_{29}\text{Ni}$	59,9308
$^7_4\text{Be}$	7,01693	$^{20}_{10}\text{Ne}$	19,99244	$^{131}_{54}\text{Xe}$	130,9051
$^8_4\text{Be}$	8,00531	$^{23}_{11}\text{Na}$	22,98977	$^{235}_{92}\text{U}$	235,0493
$^9_4\text{Be}$	9,01218	$^{24}_{11}\text{Na}$	23,99097	$^{238}_{92}\text{U}$	238,05353
$^{10}_5\text{B}$	10,01294	$^{27}_{13}\text{Al}$	26,98154		

### Дебаївські температури деяких елементів

Елемент	Дебаївська температура $T_D$ , К	Елемент	Дебаївська температура $T_D$ , К
Li	400	Ar	85
Be	1000	Ne	63
Bi	120	B	1250
K	100	Au	170
Mg	318	C (алмаз)	1860

### Ширина забороненої зони (енергія активації) деяких власних напівпровідників

Елемент	Si	Ge	Se
Ширина забороненої зони, еВ	1,12	0,67	1,8

### Ширина забороненої зони (енергія активації) деяких домішкових напівпровідників

Елемент	Домішка				
	B	In	P	Al	As
Si	0,046	0,16	0,044	0,057	0,049
Ge	0,0104	0,0112	0,0120	0,0102	0,0127

### Критична температура та критична напруженість (при К) магнітного поля для переходу деяких металів у надпровідний стан

Метал	Критична температура $T_c$ , К	Критична напруженість магнітного поля $H_c(0) \cdot 10^3$ , А/м
Pb	7,19	63,93
Cd	0,56	2,39
Al	1,196	7,88
Sn	3,72	24,28
In	3,40	23,33
Nb	9,26	157,64
Ga	1,091	4,06
Zn	0,875	4,22
Ti	0,39	7,96
Ta	4,48	66,01

## Основні характеристики деяких елементарних частинок

Частинка	Символ	Заряд, $10^{-19}$ Кл	Маса, $10^{-27}$ кг
-частинка	$\frac{4}{2}$	3,2	6,6446
Нейтрон	$\frac{1}{0}n$	0	1,6748
Позитрон	$\frac{0}{1}e$	1,6	0,000911
Протон	$\frac{1}{1}p$	1,6	1,6724
Електрон	$\frac{0}{-1}e$	-1,6	0,000911

### Множники і префікси для утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позначення	Множник	Найменування	Позначення	Множник
екса	Е	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
пета	П	$10^{15}$	санти	с	$10^{-2}$
тера	Т	$10^{12}$	мілі	м	$10^{-3}$
гіга	Г	$10^9$	мікро	мк	$10^{-6}$
мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
кіло	к	$10^3$	піко	п	$10^{-12}$
гекто	г	$10^2$	фемто	Ф	$10^{-15}$
дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$

### Латинський алфавіт

A, a — а	F, f — еф	K, k — ка	P, p — пе	U, u — у	X, x — ікс
B, b — бе	G, g — ге	L, l — ель	Q, q — ку	V, v — ве	Y, y — ігрек
C, c — це	H, h — аш	M, m — ем	R, r — ер	W, w — дубль-ве	Z, z — зет
D, d — де	I, I — і	N, n — ен	S, s — ес		
E, e — е	J, j — йот	O, o — о	T, t — те		

### Грецький алфавіт

A, — альфа	H, — ета	N, — ню	T, — тау
B, — бета	, — тета	, — ксі	, — іпсилон
, — гамма	I, — йота	O, — омікрон	, — фі
, — дельта	K, — каппа	, — пі	X, — хі
E, — епсилон	, — ламбда	P, — ро	, — пси
Z, — дзета	M, — мю	, — сигма	, — омега

### Деякі сталі числа і наближені формули

Сталі числа	Наближені формули (при $<1$ )
$= 3,1416$	$(1 \pm )^n \approx 1 \pm n$
$^2 = 9,8696$	$e \approx 1 +$
$\sqrt{\quad} = 1,7725$	$\ln(1 + ) \approx$
$e = 2,7183$	$\sin \approx$
$\lg e = 0,4343$	$\cos \approx 1 - \frac{^2}{2}$
$\ln 10 = 2,3026$	$\text{tg} =$

*Навчальне видання*

КІБЕЦЬ Інна Миколаївна  
РИБАЛКА Антоніна Іванівна  
СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ**  
**Частина 3, том 2**

**Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла.**  
**Ядерна фізика**

Навчальний посібник

В авторській редакції

Коректор *Л. Ф. Зінченко*  
Комп'ютерна верстка *І. Г. П'ятигорської*  
Дизайн обкладинки *О. Л. Герасименюк*

Формат 60 × 90  $\frac{1}{16}$ . Умов. друк. арк. 19,0.  
Тираж 500 прим. Зам. № 127

ТОВ «Компанія СМіТ»  
61166, м. Харків, просп. Леніна, 14  
Тел./факс: (057) 702-13-07  
E-mail: book@smit.com.ua  
<http://www.smit-book.com>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 435 від 26.04.2001

Друк — ФОП Васильєва Н. В.  
м. Харків, просп. Леніна, 14  
тел. 8 (057) 702-08-16